Замечание. Не надо думать, что любая непрерывная биекция является заведомо гомеоморфизмом. Так, например, если E является прямой $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой, а F — прямой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой, то тождественное отображение E в F непрерывно и биективно, но не является гомеоморфизмом.

Говорят, что два метрических пространства E и F *гомеоморфны*, если существует по крайней мере один гомеоморфизм E на F. В этом случае оба пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, т. е. свойствами, относящимися к открытым, замкнутым множествам и окрестностям.

Пример. Внутренность круга и внутренность треугольника в евклидовой плоскости являются гомеоморфными метрическими пространствами. Полуплоскость $y > 0$, область $y > x^2$, расположенная над параболой $y = x^2$, область $y < x^2$, лежащая под этой параболой на плоскости $\mathbb{R}^2$, гомеоморфны[1]).

Два метрических пространства, определенных кривыми, изображенными на следующем ниже рисунке, гомеоморфны:

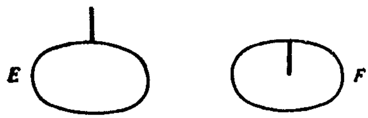

Рис. 1.

Однако внимание! Это вовсе не означает, что существует гомеоморфизм первой плоскости на вторую, переводящий первое подпространство на второе!

Вещественная прямая с естественной метрикой и вещественная прямая с дискретной метрикой не гомеоморфны потому, что в последнем случае все подмножества открыты, а в первом случае это не так[2]).

§ 4. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Используя лишь понятие расстояния, мы смогли определить в метрическом пространстве E понятия открытого и замкнутого множеств, окрестности, замыкания, внутренней и внешней части множества, его границы, плотного множества, непрерывного

---

[1]) В качестве упражнения укажите в каждом случае гомеоморфизм соответствующих гомеоморфных метрических пространств.

[2]) Мы показали выше, что в данном случае тождественное преобразование не является гомеоморфизмом между двумя рассматриваемыми пространствами. Здесь же мы показали, что между ними не существует никакого гомеоморфизма, — это более сильное утверждение.

отображения. Все эти понятия могут быть определены, исходя из понятия открытого множества.

Может случиться, что две различные метрики в одном и том же пространстве E определяют одну и ту же систему открытых множеств. Тогда они определяют одинаковые системы замкнутых подмножеств, окрестностей каждой точки и т. д.

Пусть, например, в метрическом пространстве E расстояние определяется функцией d и функцией $2d$, т. е. такой функцией, при которой расстояние между двумя элементами x и y считается равным $2d(x, y)$. Эти функции определяют одни и те же открытые множества.

Две метрики в пространстве E называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же систему открытых множеств. Говорят также, что они определяют *одну и ту же топологию* в E. Можно также сказать и иначе: *тождественное отображение множества E, снабженного 1-й метрикой, на множество E, снабженное 2-й метрикой, является гомеоморфизмом.*

В векторных пространствах две нормы называются *эквивалентными*, если соответствующие им метрики эквивалентны.

Теорема 12. *Две нормы $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ на некотором векторном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные k', $k'' > 0$, что для всех $\vec{x}$ из E имеют место следующие неравенства*:

$$\|\vec{x}\|_2 \leqslant k'\|\vec{x}\|_1 \quad \text{и} \quad \|\vec{x}\|_1 \leqslant k''\|\vec{x}\|_2. \tag{II, 4; 1}$$

Доказательство. Обозначим через $B_1(R)$ (соответственно через $B_2(R)$) замкнутый шар с центром в нуле пространства и радиусом R в смысле первой нормы (соответственно второй нормы). Предположим, что обе нормы эквивалентны, т. е. определяют одни и те же открытые множества.

Шар $B_1(1)$ содержит некоторое открытое в смысле 1-й метрики подмножество E, содержащее нуль пространства. Но тогда $B_1(1)$ содержит также некоторое множество, открытое в смысле 2-й метрики, содержащее этот нуль. Существует, следовательно, число $1/k''$, такое, что $B_1(1) \supset B_2(1/k'')$. С помощью гомотетии с множителем $k''R$ отсюда получается включение $B_1(k''R) \supset B_2(R)$, означающее, что соотношение $\|\vec{x}\|_2 \leqslant R$ влечет за собой неравенство $\|\vec{x}\|_1 \leqslant k''R$. Так как первое неравенство остается верным при $R = \|\vec{x}\|_2$, то второе неравенство дает при этом $\|\vec{x}\|_1 \leqslant k'' \|\vec{x}\|_2$.

Меняя ролями нормы $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$, мы можем доказать необходимость условия теоремы. Покажем теперь, что оно и достаточно. Если это условие выполнено, то из неравенства $\|\vec{x}\|_2 \leqslant R/k''$ будет вытекать неравенство $\|\vec{x}\|_1 \leqslant R$, а значит, $B_2(R/k'') \subset B_1(R)$. Отсюда следует, что любой шар в первой метрике заведомо содержит некоторый шар во второй метрике, и обратно. С помощью параллельного переноса легко убедиться, что все только что доказанное для шаров с центром в нуле остается верным для произвольных шаров [1]).

Поскольку в топологии каждое открытое множество является таким множеством, которое вместе с любой точкой содержит некоторый шар с центром в этой точке, то из свойств, установленных нами для шаров, вытекает, что открытые множества в обеих метриках совпадают.

Замечание. Пусть d_1 и d_2 — расстояния, определяемые двумя эквивалентными нормами. Тогда найдется такая постоянная k, что при любых x и y имеют место неравенства

$$d_1(x, y) \leqslant k d_2(x, y) \quad \text{и} \quad d_2(x, y) \leqslant k d_1(x, y).$$

Это обстоятельство является характеристическим для эквивалентных метрик, определенных эквивалентными нормами на векторных пространствах.

Пусть теперь d — расстояние, определенное некоторой метрикой на множестве E. Легко проверяется, что $d' = \inf(d, 1)$, определяемое через $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$, также является некоторым расстоянием (проверьте свойства (II, 1; 1)). Метрика, определяемая с помощью d', очевидно, эквивалентна исходной метрике (шары радиусов $\leqslant 1$ одни и те же). Далее, если d изменяется от 0 до $+\infty$, то d' изменяется от 0 до 1. Это означает, что неравенства типа (II, 4; 2) для расстояний d и d' не имеют места. Если E — векторное пространство и d — расстояние, определенное в нем некоторой нормой, то расстояние d' таким уже не будет. Этот пример показывает, что *при любой заданной метрике в E всегда можно найти эквивалентную метрику, относительно которой E будет ограниченным.*

Следствие. *Все три нормы, определенные в пространстве $\mathbb{R}^n$ в начале этой главы, эквивалентны.*

---

[1]) Доказательство необходимости. Если бы не существовало такого числа k'', то для любого целого числа $n \geqslant 0$ нашлась бы точка $\vec{x}_n \neq \vec{0}$, такая, что $\|\vec{x}_n\|_1 \geqslant n \, \|\vec{x}_n\|_2$. Используя при необходимости гомотетию, можно всегда предполагать, что $\|\vec{x}_n\|_1 = 1$. При этом $\|\vec{x}_n\|_2 \leqslant 1/n$. Таким образом, последовательность $\vec{x}_n$ сходится к нулю по 2-й норме и не сходится к нулю по 1-й норме, а это означает, что нормы не эквивалентны. (Это доказательство использует сходящиеся последовательности, которые будут рассмотрены позже.)

Это утверждение вытекает из неравенств:

$$\begin{gathered}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i|\leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|,\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}.\end{gathered}\tag{II, 4; 2}$$

Имеет место следующее более общее утверждение, которое мы примем без доказательства [1]):

Теорема 13. *В конечномерном векторном пространстве над вещественным или комплексным полем любые две нормы эквивалентны. Существует единственная система открытых множеств, замкнутых множеств и т. д. для любых введенных в нем норм.*

Здесь уместно заметить, что, как мы увидим далее на примерах, *это свойство не переносится на бесконечномерные векторные пространства.*

Итак, мы пришли к тому, что для метрических пространств определяются два рода свойств: *метрические свойства*, зависящие явно от самой метрики, такие, как расстояние между двумя точками, свойство сторон треугольника или фигуры, образованной из нескольких точек, сферы и т. д., и *топологические свойства*, не зависящие явно от самой метрики, а зависящие только от множества открытых, замкнутых [2]) и т. д. частей. Становится ясным, что топологию можно ввести, не используя в качестве посредника метрику.

Топологическим пространством E называется множество E, в котором выделено семейство частей, называемых открытыми в этой топологии.

Это — совершенно произвольное семейство частей, которые должны обладать лишь свойствами a), b), c), d), указанными на стр. 44 [3]).

---

[1]) Доказательство можно найти на стр. 72 (см. теорему 23).

[2]) Ограниченность части A из E (см. определение на стр. 41) является метрическим, а не топологическим свойством: множество $\mathbb{N}_1$ целых чисел $\geqslant 1$ не ограничено в метрике $d(p, q) = |p - q|$, но оно станет ограниченным, если метрику в нем определить по формуле $d(p, q) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|$, в то время как эти две метрики эквивалентны. Однако, *в нормированных векторных пространствах* две эквивалентные нормы приводят, согласно теореме 12, к одним и тем же ограниченным частям (см. замечание на стр. 57).

[3]) Вообще говоря, на открытые множества в топологии налагаются лишь требования аксиом a), b), c). Если, кроме того, они подчиняются требованиям аксиомы d), то топологическое пространство называется *отделимым*. Неотделимые пространства в анализе используются очень редко, и нам они не по-

Мы видим, что метрическое пространство является частным случаем топологического пространства. Существуют топологические пространства, которые нельзя определить, исходя из какой-либо метрики.

Говорят, что топологическое пространство *метризуемо*, если существует метрика, порождающая его топологию.

Подавляющее большинство топологических пространств, с которыми мы встретимся в будущем, метризуемы.

Заметим, что почти все рассмотренные нами определения и теоремы относительно метрических пространств служили для введения в них топологии, а не самой метрики. Легко проверить, что они имеют место для произвольных топологических пространств. Однако теоремы 2, 9, 12 и 13 справедливы только для метрических пространств, ибо они существенно используют метрику даже в своих формулировках.

Каждая точка всегда имеет фундаментальную систему открытых окрестностей (поскольку в любой окрестности точки a содержится открытое множество, содержащее a, которое является открытой окрестностью этой точки). Однако такой системы замкнутых окрестностей может и не быть. Топологическое пространство называется *регулярным*, если каждая его точка обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей. Метризуемое пространство регулярно. С другой стороны, пересечение замкнутых окрестностей точки a сводится к точке a. Следовательно, пересечение всех окрестностей точки a тем более сводится к a. В самом деле, если $b \neq a$, то, согласно аксиоме Хаусдорфа, существуют открытые непересекающиеся множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, содержащие точки a и b. Из того, что $\bar{\mathcal{A}}$ является замкнутой окрестностью точки a и $\mathcal{A} \subset \complement\mathcal{B}$, следует, что $\bar{\mathcal{A}} \subset \complement\mathcal{B}$, а, значит, $\bar{\mathcal{A}}$ не содержит b. Точка b, таким образом, принадлежит не всем замкнутым окрестностям точки a.

Теорему 5 можно использовать для о п р е д е л е н и я индуцированной топологии. Пусть E — некоторое топологическое пространство, а F — часть E. В множестве F можно ввести топологию, принимая за открытые множества в F пересечение с F открытых множеств в смысле топологии E. В этом случае говорят, что F является *топологическим подпространством* E или же что его *топология индуцирована топологией* E.

В дальнейшем всякий раз, когда это будет возможно, мы будем рассматривать теоремы в топологических пространствах.

требуются. Поэтому мы всегда будем предполагать, что *топологическое пространство отделимо, а его открытые множества удовлетворяют аксиоме* d).

В неотделимом пространстве часть, вырождающаяся в точку, не является необходимо замкнутой, и сходящаяся последовательность может иметь несколько различных пределов (см. теорему 14)!

Однако мы не постесняемся проводить доказательства только для случая метрических пространств, если это может привести к упрощению рассуждений.

Топология пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ (см. стр. 26 гл. I)

В $\overline{\mathbb{R}}$ можно ввести топологию, определяя открытые множества следующим образом. Часть U множества $\overline{\mathbb{R}}$ считается открытой при выполнении следующих условий:

a) если U содержит точку x из $\mathbb{R}$, то она содержит также по крайней мере один открытый интервал, содержащий x;

b) если U содержит точку $-\infty$, то она содержит также по крайней мере один интервал вида $[-\infty, A[$;

c) если U содержит точку $+\infty$, то она содержит также по крайней мере один интервал вида $]A, +\infty]$.

Можно доказать, что определенные таким образом открытые множества удовлетворяют всем аксиомам, необходимым для того, чтобы $\overline{\mathbb{R}}$ было топологическим пространством. Легко видеть, что в этой топологии $\overline{\mathbb{R}}$ метризуемо, а несколько позже мы приведем бесконечное множество эквивалентных метрик, порождающих эту топологию (теорема 38, стр. 99), но ни одна из них естественным образом не выделяется среди других. $\mathbb{R}$ является подпространством $\overline{\mathbb{R}}$, и в этом подмножестве топология, порождаемая топологией $\overline{\mathbb{R}}$, совпадает с топологией, определяемой естественной метрикой.

§ 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ. СХОДИМОСТИ

Существенным свойством топологических пространств является возможность рассматривать в этих пространствах сходящиеся последовательности.

1°) Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая последовательность точек метрического пространства E. Говорят, что эта последовательность *сходится к точке* l из E, или что она имеет *пределом* точку l[1]), если последовательность вещественных чисел $d(l, x_0), d(l, x_1), \ldots, d(l, x_n), \ldots$ сходится к нулю.

Это означает следующее: *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое целое число* n_0, *что из неравенства* $n \geqslant n_0$ *следует неравенство* $d(l, x_n) \leqslant \varepsilon$. Можно также сказать так: *какова бы ни была окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* l, *существует такое целое число* n_0, *что для* $n \geqslant n_0$ *все* x_n *принадлежат* $\mathscr{V}$. Можно также ска-

---

[1]) Подразумевается: «при n, стремящемся к $+\infty$».
Если x_n — вещественные числа, то можно считать, что $l \in [-\infty, +\infty]$. Последовательность при этом рассматривается в $\overline{\mathbb{R}}$.