Однако мы не постесняемся проводить доказательства только для случая метрических пространств, если это может привести к упрощению рассуждений.

Топология пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ (см. стр. 26 гл. I)

В $\overline{\mathbb{R}}$ можно ввести топологию, определяя открытые множества следующим образом. Часть U множества $\overline{\mathbb{R}}$ считается открытой при выполнении следующих условий:

a) если U содержит точку x из $\mathbb{R}$, то она содержит также по крайней мере один открытый интервал, содержащий x;

b) если U содержит точку $-\infty$, то она содержит также по крайней мере один интервал вида $[-\infty, A[$;

c) если U содержит точку $+\infty$, то она содержит также по крайней мере один интервал вида $]A, +\infty]$.

Можно доказать, что определенные таким образом открытые множества удовлетворяют всем аксиомам, необходимым для того, чтобы $\overline{\mathbb{R}}$ было топологическим пространством. Легко видеть, что в этой топологии $\overline{\mathbb{R}}$ метризуемо, а несколько позже мы приведем бесконечное множество эквивалентных метрик, порождающих эту топологию (теорема 38, стр. 99), но ни одна из них естественным образом не выделяется среди других. $\mathbb{R}$ является подпространством $\overline{\mathbb{R}}$, и в этом подмножестве топология, порождаемая топологией $\overline{\mathbb{R}}$, совпадает с топологией, определяемой естественной метрикой.

§ 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ. СХОДИМОСТИ

Существенным свойством топологических пространств является возможность рассматривать в этих пространствах сходящиеся последовательности.

1°) Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая последовательность точек метрического пространства E. Говорят, что эта последовательность *сходится к точке* l из E, или что она имеет *пределом* точку l [1], если последовательность вещественных чисел $d(l, x_0), d(l, x_1), \ldots, d(l, x_n), \ldots$ сходится к нулю.

Это означает следующее: *какова бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое целое число* n_0, *что из неравенства* $n \geqslant n_0$ *следует неравенство* $d(l, x_n) \leqslant \varepsilon$. Можно также сказать так: *какова бы ни была окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* l, *существует такое целое число* n_0, *что для* $n \geqslant n_0$ *все* x_n *принадлежат* $\mathscr{V}$. Можно также ска-

[1] Подразумевается: «при n, стремящемся к $+\infty$».
Если x_n — вещественные числа, то можно считать, что $l \in [-\infty, +\infty]$. Последовательность при этом рассматривается в $\overline{\mathbb{R}}$.

зать иначе: *какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ точки l, все x_n принадлежат $\mathscr{V}$, за исключением конечного числа значений n* [1]).

Последние два определения пригодны и в том случае, когда E — топологическое пространство. Однако если даже E — метрическое пространство, то сходимость последовательности в нем является свойством топологическим, а не метрическим.

Существуют и другие определения пределов, не относящиеся к последовательностям.

2°) Рассмотрим двойную последовательность $x_{m,n}$, где m и n — целые неотрицательные числа, т. е. *отображение* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *в* E. Говорят, что эта двойная последовательность *сходится* к элементу l из E при m и n, стремящихся к бесконечности, *если, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существуют такие целые числа* m_0, n_0, *что из неравенств* $m \geqslant m_0$, $n \geqslant n_0$ *вытекает неравенство* $d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$ [2]).

3°) Говорят, однако, что $x_{m,n}$ *сходится* к l, когда m или n стремятся к бесконечности, если, *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существуют целые числа* m_0 *и* n_0, *такие, что из неравенства* $m \geqslant m_0$ *или* $n \geqslant n_0$ *вытекает неравенство* $d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$ [3]).

4°) Если f является отображением вещественной прямой $\mathbb{R}$ в E, то выражение «$f(x)$ стремится к l, когда x стремится к a справа», означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что из $(|x - a| \leqslant \eta,\ x > a)$ следует $d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$.

5°) В тех же самых условиях выражение «$f(x)$ стремится к l при x, стремящемся к $+\infty$», означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое вещественное число A, что из $x \geqslant A$ вытекает $d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$.

Все эти пределы легко определяются, если E является топологическим и не обязательно метрическим пространством. Они входят в рамки следующего более общего определения.

Пусть X — топологическое пространство, A — некоторая часть X, a — точка X, принадлежащая замыканию $\bar{A}$, и f — отображение A в E. Говорят, что $f(x)$ *сходится к* l *при* x, *стремящемся к* a *по значениям из* A [4]), если, какова бы ни была

---

[1]) Это определение показывает, кроме того, что сходимость последовательности не зависит от порядка ее членов. Изменить порядок членов последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это значит заменить ее последовательностью $x_{p_0}, x_{p_1}, \ldots, x_{p_n}, \ldots$, где соотношение $n \to p_n$ является биекцией $\mathbb{N}$ на себя. Если исходная последовательность сходится к l, то это будет верно и для преобразованной последовательности.

[2]) Короче: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geqslant m_0,\ \forall n \geqslant n_0): d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$.

[3]) Короче: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ m \geqslant m_0$ или $n \geqslant n_0): d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$.

[4]) Очень часто $a \in \bar{A}$, но $a \notin A$. Именно это имеют в виду, подчеркивая, что «когда x стремится к a, то *предполагается*, что $x \neq a$». Здесь мы не хотим ограничивать себя этим условием. Можно считать, что $a \in A$ или $a \notin A$.

окрестность $\mathscr{V}$ точки l в E, существует окрестность $\mathscr{U}$ точки a в X, такая, что $f(\mathscr{U} \cap A) \subset \mathscr{V}$. Так, например, в случае последовательностей (случай 1°)): $X = \overline{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$. В случае 4°): $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$. В случае 5°): $X = \overline{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{R}$, $a = +\infty$.

Сказать, что некоторое отображение f топологического пространства E в топологическое пространство F *непрерывно в точке a из E*, — то же самое, что сказать: *$f(x)$ сходится к $f(a)$, когда x стремится к a.*

Теорема 14. *Если последовательность имеет предел, то этот предел обязательно единствен.*

Доказательство. Предположим, что некоторая последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ элементов из E имеет два различных предела a и b из E. Согласно аксиоме отделимости Хаусдорфа, существует окрестность $\mathscr{U}$ точки a и окрестность $\mathscr{V}$ точки b, не имеющие общих точек. Тогда, с одной стороны, должно существовать такое целое число m_0, что $x_n \in \mathscr{U}$ при $n \geqslant m_0$, а с другой — такое целое число n_0, что $x_n \in \mathscr{V}$ при $n \geqslant n_0$. Для $n \geqslant \max(m_0, n_0)$ получим $x_n \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$, а это невозможно, так как пересечение $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ пусто.

Теорема 15. *Для того чтобы точка a метризуемого пространства E принадлежала замыканию части A из E, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность элементов из A, сходящаяся к a* [1]).

Доказательство. Условие, очевидно, достаточно, так как если такая последовательность существует, то любая окрестность $\mathscr{V}$ точки a содержит хотя бы одну точку этой последовательности, т. е. хотя бы одну точку A, а это означает, что a принадлежит замыканию A (см. теорему 4).

Обратно, пусть a принадлежит замыканию A. Выберем какую-либо метрику, определяющую топологию E. Тогда шар с центром в точке a радиуса $1/n$ содержит по крайней мере одну точку x_n, принадлежащую A. Образованная таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ принадлежит A и сходится к a.

Итак, *замыкание $\bar{A}$ множества A является множеством пределов последовательностей из A, сходящихся в E.*

Следствие. *Для того чтобы некоторая часть топологического метризуемого пространства E была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала пределы всех своих последовательностей, сходящихся в E.*

---

[1]) Если E — топологическое, но не метризуемое пространство, то указанное условие будет достаточным, но не будет необходимым.

Теорема 16. *Для того чтобы отображение f метризуемого пространства E в метризуемое пространство F было непрерывным в точке $a \in F$, необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении f любой сходящейся к a последовательности точек из E был последовательностью точек из F, сходящейся к $f(a)$*[1].

1°) Условие необходимо. В самом деле, пусть отображение f непрерывно в точке a и $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — сходящаяся к a последовательность из E. Тогда, какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ точки $f(a)$ в F, ее прообраз при отображении f является некоторой окрестностью $\mathscr{U}$ точки a в E. Но тогда для всех целых n, кроме конечного числа, x_n лежат в $\mathscr{U}$ и, следовательно, $f(x_n)$ находятся в $\mathscr{V}$, что доказывает сходимость последовательности $f(x_n)$ к $f(a)$.

2°) Условие достаточно. Предположим, что указанное в теореме условие выполнено и что в E выбрана некоторая метрика, определяющая его топологию. Если бы отображение f не было непрерывным в a, то нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что при любом выборе $\eta > 0$ существовала бы точка x, такая, что $d(x, a) \leqslant \eta$ и в то же время $d(f(x), f(a)) > \varepsilon$.

В частности, при таком выборе ε для каждого целого n найдется хотя бы одна точка x_n, такая, что $d(x_n, a) \leqslant 1/n$ и $d(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$.

Последовательность x_n, очевидно, сходится при этом в E к a, в то время как последовательность $f(x_n)$ в F к $f(a)$ не сходится, что противоречит предположению.

§ 6. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Обозначим через d_1 и d_2 соответственно расстояния, введенные в двух метрических пространствах E_1 и E_2. На множестве произведения $E_1 \times E_2$ с помощью формулы

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) \qquad (\text{II}, 6; 1)$$

можно определить метрику, которую мы будем записывать в виде $\delta = \max(d_1, d_2)$. Точно так же по формуле $(d_1 + d_2)((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ можно ввести метрику, записываемую в виде $d_1 + d_2$, или же метрику $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, определяемую выражением $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$. Очевидно, ни одна из этих метрик не выделяется среди других. Впрочем, легко видеть, что эти метрики эквивалентны, т. е. *они определяют в $E_1 \times E_2$ одну и ту же топологию.* Это рассуждение подчеркивает равноценность метрик: ни одна из них существенно не выделяется среди

[1]) Если E и F — топологические, но не метризуемые пространства, то условие остается необходимым, но не достаточным.