Теорема 16. *Для того чтобы отображение f метризуемого пространства E в метризуемое пространство F было непрерывным в точке $a \in F$, необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении f любой сходящейся к a последовательности точек из E был последовательностью точек из F, сходящейся к $f(a)$*[1].

1°) Условие необходимо. В самом деле, пусть отображение f непрерывно в точке a и $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — сходящаяся к a последовательность из E. Тогда, какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ точки $f(a)$ в F, ее прообраз при отображении f является некоторой окрестностью $\mathscr{U}$ точки a в E. Но тогда для всех целых n, кроме конечного числа, x_n лежат в $\mathscr{U}$ и, следовательно, $f(x_n)$ находятся в $\mathscr{V}$, что доказывает сходимость последовательности $f(x_n)$ к $f(a)$.

2°) Условие достаточно. Предположим, что указанное в теореме условие выполнено и что в E выбрана некоторая метрика, определяющая его топологию. Если бы отображение f не было непрерывным в a, то нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что при любом выборе $\eta > 0$ существовала бы точка x, такая, что $d(x, a) \leqslant \eta$ и в то же время $d(f(x), f(a)) > \varepsilon$.

В частности, при таком выборе ε для каждого целого n найдется хотя бы одна точка x_n, такая, что $d(x_n, a) \leqslant 1/n$ и $d(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$.

Последовательность x_n, очевидно, сходится при этом в E к a, в то время как последовательность $f(x_n)$ в F к $f(a)$ не сходится, что противоречит предположению.

§ 6. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Обозначим через d_1 и d_2 соответственно расстояния, введенные в двух метрических пространствах E_1 и E_2. На множестве произведения $E_1 \times E_2$ с помощью формулы

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) \qquad (\mathrm{II}, 6; 1)$$

можно определить метрику, которую мы будем записывать в виде $\delta = \max(d_1, d_2)$. Точно так же по формуле $(d_1 + d_2)((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ можно ввести метрику, записываемую в виде $d_1 + d_2$, или же метрику $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, определяемую выражением $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$. Очевидно, ни одна из этих метрик не выделяется среди других. Впрочем, легко видеть, что эти метрики эквивалентны, т. е. *они определяют в $E_1 \times E_2$ одну и ту же топологию*. Это рассуждение подчеркивает равноценность метрик: ни одна из них существенно не выделяется среди

[1]) Если E и F — топологические, но не метризуемые пространства, то условие остается необходимым, но не достаточным.

других метрик на произведении. С другой стороны, легко определить *естественную топологию* на произведении двух топологических пространств:

Рассмотрим в пространстве E_1 открытую часть A_1, а в пространстве E_2 открытую часть A_2 и определим произведение $A_1 \times A_2$, т. е. множество пар (x, y) из $E_1 \times E_2$, таких, что $x \in A_1$ и $y \in A_2$ [1]).

Говорят, что некоторая часть $E_1 \times E_2$ открыта в топологии произведения, если вместе с любой точкой произведения она содержит хотя бы одно произведение открытых множеств $A_1 \times A_2$, содержащее эту точку.

Легко проверяется, что выделенные таким образом на $E_1 \times E_2$ системы множеств удовлетворяют всем аксиомам, которым должны удовлетворять открытые множества некоторой топологии. При этом произведение открытых частей открыто, но имеются и другие открытые множества. Определенная таким образом топология на $E_1 \times E_2$ называется *произведением топологий*, заданных на E_1 и E_2. Точно так же определяется топология произведения нескольких пространств. (Например, если $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = \mathbb{R}$, то их произведение является известным топологическим пространством $\mathbb{R}^n$, определенным, например, с помощью естественной метрики.) Из самого определения этой топологии вытекает, что *канонические проекции* $E_1 \times E_2$ *на* E_1 *и* E_2 *непрерывны*. В самом деле, если f является проекцией $E_1 \times E_2$ на E_1 и если A_1 есть некоторая открытая часть E_1, то ее прообразом будет множество $f^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2$, которое открыто в $E_1 \times E_2$ и даже есть произведение открытых множеств.

Сходящиеся последовательности в произведении

Теорема 17. *Для того чтобы последовательность* (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... [2]) *элементов из* $E \times F$ *сходилась к точке* (a, b) *относительно произведения топологий, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* x_n *сходилась к* a *в* E, *а последовательность* y_n *сходилась к* b *в* F.

Предположим сначала, что последовательность (x_n, y_n) сходится к (a, b). Из теоремы 16, в силу непрерывности проекций $(x, y) \to x$ и $(x, y) \to y$, вытекает, что последовательность x_n сходится к a, а последовательность y_n сходится к b.

Обратно, предположим, что последовательность x_n сходится к a в E, а последовательность y_n сходится к b в F. Пусть $\mathscr{V}$ — окрестность (a, b) в $E \times F$. Она содержит некоторое открытое

[1]) $A_1 \times A_2$ иногда называют *открытым прямоугольником* по аналогии с прямоугольником в $\mathbb{R}^2$, являющимся произведением интервалов из $\mathbb{R}$.

[2]) Мы обозначили здесь через E и F топологические пространства, чтобы сохранить нумерацию 1, 2, ... элементов последовательности.

множество, содержащее (a, b), а, значит, согласно определению открытых множеств в $E \times F$, содержит некоторое открытое произведение $A \times B$, $a \in A$, $b \in B$. Согласно предположению о сходимости последовательностей x_n и y_n в этом случае существуют такие целые числа n_1 и n_2, что $x_n \in A$ для $n \geqslant n_1$ и $y_n \in B$ для $n \geqslant n_2$. Но тогда при $n \geqslant \max(n_1, n_2)$ пара $(x_n, y_n) \in A \times B \subset \subset \mathscr{V}$, что означает сходимость последовательности (x_n, y_n) к (a, b).

Пусть G — топологическое пространство. Отображение h множества E в множество $F \times G$ задается парой отображений f и g множества E в F и G соответственно, таких, что $h(x) = (f(x), g(x))$ (гл. I, стр. 13). Для того чтобы это отображение было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение f и g в отдельности было непрерывным. Доказательство очевидно.

Непрерывные функции многих переменных

В математике часто встречается понятие непрерывной функции двух переменных.

Пусть f — функция двух переменных: $(x, y) \to f(x, y)$. Это — отображение произведения пространств $E \times F$ в пространство G. Предположим, что все три пространства являются топологическими. *Выясним, когда можно утверждать, что функция f непрерывна в точке (a, b)?*

В случае метрических пространств непрерывность означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что из неравенств $d(x, a) \leqslant \eta$ и $d(y, b) \leqslant \eta$ следует неравенство $d(f(x, y), f(a, b)) \leqslant \varepsilon$[1].

Однако это означает лишь, что *отображение f пространства $E \times F$ в G непрерывно в точке (a, b) в смысле произведения топологий на $E \times F$.* Именно так мы и будем определять непрерывность функции двух переменных в общем случае. Задание непрерывного отображения произведения $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ равносильно заданию системы m непрерывных функций n переменных.

Теорема 17_2. *Если E — метрическое пространство, то функция расстояния d, отображающая $E \times E$ в вещественную прямую $\mathbb{R}$, непрерывна.*

В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, из неравенств $d(x, a) \leqslant \varepsilon/2$ и $d(y, b) \leqslant \varepsilon/2$ вытекает неравенство $|d(x, y) - d(a, b)| \leqslant d(x, a) + d(y, b) \leqslant \varepsilon$, означающее, что функция d непрерывна.

[1]) Расстояния в E, F, G для простоты мы обозначим тем же символом d.

Топологические группы.
Топологические векторные пространства

Топологической группой называется множество G, имеющее, с одной стороны, групповую структуру и наделенное, с другой стороны, такой топологией, что основные отображения, определяющие групповую структуру, т. е. отображение $(x, y) \to xy$ множества $G \times G$ в G и отображение $x \to x^{-1}$ множества G в G, являются непрерывными.

Топологическим векторным пространством называется множество E, имеющее, с одной стороны, структуру векторного пространства над полем вещественных или комплексных чисел и обладающее, с другой стороны, такой топологией, относительно которой сложение $(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y}$ является непрерывным отображением $E \times E$ в E[1]), а умножение на скаляры $(\lambda, \vec{x}) \to \lambda\vec{x}$ является непрерывным отображением $K \times E$ в E, где K — поле скаляров с естественной топологией. Легко видеть, что *нормированное векторное пространство является топологическим векторным пространством*. В самом деле,

$$\begin{gathered}\|(\vec{x}+\vec{y})-(\vec{a}+\vec{b})\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{a}\|+\|\vec{y}-\vec{b}\|, \\ \|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\| \leqslant |\lambda-\alpha|\|\vec{x}\|+|\alpha|\|\vec{x}-\vec{a}\|.\end{gathered} \tag{II, 6; 2}$$

Отсюда вытекает, что для $\|\vec{x}-\vec{a}\| \leqslant \varepsilon/2$, $\|\vec{y}-\vec{b}\| \leqslant \varepsilon/2$ справедливо неравенство $\|(\vec{x}+\vec{y})-(\vec{a}+\vec{b})\| \leqslant \varepsilon$, выражающее непрерывность сложения. Далее, если последовательность $(\lambda_n, \vec{x}_n)$ сходится к $(\alpha, \vec{a})$ в $K \times E$, т. е. если последовательность $\vec{x}_n$ сходится к $\vec{a}$ и если последовательность λ_n сходится к α (теорема 17), то $\|\vec{x}_n - \vec{a}\|$, а вместе с ним и $|\alpha|\|\vec{x}_n - \vec{\alpha}\|$, сходится к нулю. С другой стороны, $|\lambda_n - \alpha|$ стремится к нулю и $\|\vec{x}_n\|$ ограничена, а, значит, $|\lambda_n - \alpha|\|\vec{x}_n\|$ сходится к нулю. Из второго неравенства вытекает, что $\lambda_n\vec{x}_n$ сходится к $\alpha\vec{a}$. Согласно теореме 16, это доказывает непрерывность отображения $(\lambda, \vec{x}) \to \lambda\vec{x}$ множества $K \times E$ в E.

Теорема 13 обобщается следующим образом: в конечномерном *векторном пространстве существует только одна топология топологического векторного пространства.*

---

[1]) Непрерывность сложения означает, что предел суммы двух векторов является суммой пределов этих векторов.

Раздельная непрерывность функции двух переменных

Пусть f — некоторое отображение $E \times F$ в G и (a, b) — точка $E \times F$. Зафиксировав $x = a$, мы получим отображение F в G: $y \to f(a, y)$, определяемое с помощью f и a. Это отображение часто обозначают через f_a, так что $f_a(y) = f(a, y)$. Иногда его обозначают через $f(a, \ )$, опуская переменную y. Может случиться, что это отображение непрерывно в точке $y = b$. В этом случае говорят, что отображение f *раздельно непрерывно по* y в точке b для фиксированного $x = a$. Такое же определение дается для отображения f_b: $x \to f(x, b)$, обозначаемого также через $f(\ , b)$, и для понятия раздельной непрерывности в точке a по x при фиксированном $y = b$.

В обоих случаях речь идет о том, что сужение отображения f на подпространство $\{a\} \times F$ или подпространство $E \times \{b\}$ непрерывно в точке (a, b). Говорят, что f раздельно непрерывно в точке (a, b), если оно раздельно непрерывно по обеим переменным в указанном выше смысле. Отображение называется раздельно непрерывным на $E \times F$, если оно раздельно непрерывно в каждой точке (a, b) произведения $E \times F$.

Непрерывная функция является, очевидно, раздельно непрерывной, однако обратное, вообще говоря, не верно. Рассмотрим, например, функцию двух вещественных переменных, определенную формулой:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ для } (x, y) \neq (0, 0) \text{ и } f(0, 0) = 0. \qquad (\text{II}, 6; 3)$$

Эта функция, очевидно, непрерывна всюду на дополнении к началу координат в $\mathbb{R}^2$. Она непрерывна на оси $x'x$ и на оси $y'y$, где она $\equiv 0$. Следовательно, она раздельно непрерывна в начале координат, а значит, и во всей плоскости. Однако, эта функция не является непрерывной по совокупности обеих переменных в начале координат, ибо на прямой $y = mx$ вне начала координат она принимает значение $m/(1 + m^2) \neq 0$ и не стремится к нулю, когда (x, y) стремится к началу координат.

§ 7. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть E — некоторое топологическое пространство. Множество частей E, таких, что каждая точка E принадлежит *по крайней мере одной* из этих частей, называется *покрытием множества* E. *Подпокрытием* покрытия называется покрытие, образованное из частей первого покрытия. Покрытие называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа частей E. Покрытие называется *открытым*, если все части этого покрытия открыты в E. Так, например, множество интервалов $]n - 1, n + 1[$ при n, пробегающем $\mathbb{Z}$, образует открытое покрытие $\mathbb{R}$. В этом