Раздельная непрерывность функции двух переменных

Пусть f — некоторое отображение $E \times F$ в G и (a, b) — точка $E \times F$. Зафиксировав $x = a$, мы получим отображение F в G: $y \to f(a, y)$, определяемое с помощью f и a. Это отображение часто обозначают через f_a, так что $f_a(y) = f(a, y)$. Иногда его обозначают через $f(a, \ )$, опуская переменную y. Может случиться, что это отображение непрерывно в точке $y = b$. В этом случае говорят, что отображение f *раздельно непрерывно по* y в точке b для фиксированного $x = a$. Такое же определение дается для отображения f_b: $x \to f(x, b)$, обозначаемого также через $f(\ , b)$, и для понятия раздельной непрерывности в точке a по x при фиксированном $y = b$.

В обоих случаях речь идет о том, что сужение отображения f на подпространство $\{a\} \times F$ или подпространство $E \times \{b\}$ непрерывно в точке (a, b). Говорят, что f раздельно непрерывно в точке (a, b), если оно раздельно непрерывно по обеим переменным в указанном выше смысле. Отображение называется раздельно непрерывным на $E \times F$, если оно раздельно непрерывно в каждой точке (a, b) произведения $E \times F$.

Непрерывная функция является, очевидно, раздельно непрерывной, однако обратное, вообще говоря, не верно. Рассмотрим, например, функцию двух вещественных переменных, определенную формулой:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ для } (x, y) \neq (0, 0) \text{ и } f(0, 0) = 0. \qquad (\text{II}, 6; 3)$$

Эта функция, очевидно, непрерывна всюду на дополнении к началу координат в $\mathbb{R}^2$. Она непрерывна на оси $x'x$ и на оси $y'y$, где она $\equiv 0$. Следовательно, она раздельно непрерывна в начале координат, а значит, и во всей плоскости. Однако, эта функция не является непрерывной по совокупности обеих переменных в начале координат, ибо на прямой $y = mx$ вне начала координат она принимает значение $m/(1 + m^2) \neq 0$ и не стремится к нулю, когда (x, y) стремится к началу координат.

§ 7. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть E — некоторое топологическое пространство. Множество частей E, таких, что каждая точка E принадлежит *по крайней мере одной* из этих частей, называется *покрытием множества* E. *Подпокрытием* покрытия называется покрытие, образованное из частей первого покрытия. Покрытие называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа частей E. Покрытие называется *открытым*, если все части этого покрытия открыты в E. Так, например, множество интервалов $]n - 1, n + 1[$ при n, пробегающем $\mathbb{Z}$, образует открытое покрытие $\mathbb{R}$. В этом случае у этого покрытия других подпокрытий не существует, так как достаточно удалить какой-либо интервал $]n-1, n+1[$, как соответствующая точка не будет покрыта[1]).

Определение. *Свойство Гейне — Бореля — Лебега.* Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия E можно выделить хотя бы одно конечное подпокрытие. Это означает, что для любого покрытия пространства E множеством открытых частей существует конечное множество этих частей, покрывающее E.

Заметим, что до настоящего момента мы изучали топологические свойства лишь некоторых частей E относительно самого множества E, например свойство части A из E быть открытой, замкнутой и т. д. Свойство же компактности является свойством самого топологического пространства. Однако можно говорить о *компактности части A топологического* пространства E, если в смысле топологии, индуцированной в A топологией из E, часть A является компактным пространством. При этом само E не обязано быть компактным! Всякая часть E, замыкание которой компактно, называется *относительно компактной* частью E.

Легко видеть, что *объединение конечного числа компактных частей E компактно.*

В самом деле, пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — компактные части E и $\mathfrak{R}$ — некоторое открытое покрытие объединения $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Так как пересечение открытого множества из $\mathfrak{R}$ с A_1 является открытым множеством в A_1, то $\mathfrak{R}$ определяет открытое покрытие множества A_1. Поскольку часть A_1 компактна, то ее можно покрыть конечным числом открытых множеств из $\mathfrak{R}$. То же самое верно и для $A_2, \ldots, A_n$. Значит, выбирая одновременно эти n конечных систем открытых множеств из $\mathfrak{R}$, можно покрыть все A конечным числом открытых множеств из $\mathfrak{R}$; а это означает, что A компактно. В силу тех же соображений *объединение конечного числа относительно компактных множеств относительно компактно.*

Примеры. Пространство, содержащее только конечное число точек, компактно. Вещественная прямая $\mathbb{R}$, векторное пространство $\mathbb{R}^n$, векторное нормированное конечномерное или бесконечномерное пространство не компактны. В самом деле, рассмотрим множество открытых шаров с центром в нуле и радиусом >0. Они образуют, очевидно, покрытие пространства.

---

[1]) Множество интервалов $\left]n-\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}\right[$ также является открытым покрытием $\mathbb{R}$. Оно образовано из открытых частей, меньших, чем предыдущие части. Однако это — не подпокрытие рассматриваемого покрытия, так как оно является множеством частей, существенно отличных от первых.

Далее, любое конечное число этих шаров содержится в одном шаре конечного радиуса и, следовательно, не покрывает всего пространства. Более общо, *любое неограниченное подмножество метрического пространства*, т. е. не содержащееся хотя бы в одном шаре (конечного радиуса), *не компактно.*

Теорема 18. *Замкнутый ограниченный интервал* $[a, b]$ *вещественной прямой является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{R}$ — открытое покрытие интервала $[a, b]$, и пусть c — середина $[a, b]$. Предположим, что из $\mathscr{R}$ невозможно выбрать конечного числа частей, покрывающих полностью $[a, b]$. Тогда это невозможно сделать по крайней мере для одного из подинтервалов $[a, c]$ или $[c, b]$, например для $[a, c]$. Обозначим этот интервал через $[a_1, b_1]$. Разделив его на два, мы можем найти подинтервал $[a_2, b_2]$, в два раза меньший интервала $[a_1, b_1]$ и обладающий тем же свойством. Таким образом можно построить бесконечную последовательность $[a_0, b_0] = [a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ подинтервалов $[a, b]$, обладающих общим свойством: ни один из них не может быть покрыт конечным числом частей, принадлежащих $\mathscr{R}$.

Возрастающая ограниченная сверху последовательность a_n сходится к некоторому пределу α. В свою очередь убывающая ограниченная снизу последовательность b_n сходится к некоторому пределу β, а так как длина отрезка $[a_n, b_n]$ равна $(b-a)/2^n$, то необходимо $\alpha = \beta$. Согласно определению предела последовательности, любой открытый интервал, содержащий $\alpha = \beta$, содержит все a_n и b_n с достаточно большими номерами, а значит, содержит и все интервалы $[a_n, b_n]$ с этими номерами.

Далее, в покрытии $\mathscr{R}$ существует открытое множество $\mathscr{V}$, содержащее точку $\alpha = \beta$. Поскольку $\mathscr{V}$ открыто, то существует открытый интервал $]a', b'[$, содержащийся в $\mathscr{V}$ и содержащий эту точку. Для достаточно больших n интервал $[a_n, b_n]$ будет находиться в $]a', b'[$, а значит, и в $\mathscr{V}$. Мы пришли к противоречию: по построению интервал $[a_n, b_n]$ не может быть покрыт конечным числом частей из $\mathscr{R}$, и в то же время он покрывается одной из них, а именно $\mathscr{V}$. Это противоречие доказывает компактность $[a, b]$.

Более общо, *в пространстве* $\mathbb{R}^m$ *замкнутый ограниченный параллелепипед*, т. е. множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенных системой неравенств $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, a_m \leqslant x_m \leqslant b_m$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — конечные числа, *является компактным пространством.* Этот факт доказывается тем же методом деления с той лишь разницей, что вместо деления на две части на каждом шаге операции приходится разбивать параллелепипед на 2^m частей, деля на два каждую из m координат.

Теорема 19. *Пополненная прямая* $\overline{\mathbb{R}}$, *снабженная естественной топологией, является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ — открытое покрытие $\overline{\mathbb{R}}$. Точка $-\infty$ принадлежит хотя бы одному открытому множеству, скажем $\mathcal{V}_-$, из $\mathcal{R}$, и точка $+\infty$ принадлежит хотя бы одному открытому множеству, скажем $\mathcal{V}_+$, из $\mathcal{R}$. Отсюда, в частности, вытекает, что дополнение к объединению этих двух открытых множеств содержится в достаточно большом замкнутом ограниченном интервале $[A, B]$. Поскольку в этом случае существует конечное число открытых множеств из $\mathcal{R}$, покрывающих $[A, B]$ (теорема 18), то это конечное число открытых множеств, дополненное открытыми множествами $\mathcal{V}_-$ и $\mathcal{V}_+$, покрывает все $\overline{\mathbb{R}}$, откуда и следует компактность $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечания. 1°) Из определения компактности вытекает следующее свойство:

Пусть компактное пространство E является объединением возрастающей последовательности открытых множеств $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n, \ldots$. Тогда при некотором n открытое множество $\mathcal{V}_n$ совпадает с E.

2°) Если два пространства гомеоморфны и одно из них компактно, то второе также компактно. Из предыдущих примеров следует, что $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ не гомеоморфны (не существует гомеоморфизма одного множества на другое). Замкнутый ограниченный интервал $[a, b]$ из $\mathbb{R}$ не гомеоморфен $\mathbb{R}$ (в то время как открытый интервал гомеоморфен $\mathbb{R}$: $x \to \operatorname{tg} x$ является, например, гомеоморфизмом $]\pi/2, \pi/2[$ на $\mathbb{R}$). Критерии, позволяющие установить негомеоморфность двух пространств, слишком сложны; доказать же, что два пространства гомеоморфны, обычно проще всего путем установления соответствующего гомеоморфизма.

Теорема 20. *Для того чтобы топологическое пространство E было компактным, необходимо и достаточно, чтобы из любого множества замкнутых частей E, пересечение которых пусто, можно было выбрать конечное множество частей с пустым пересечением.*

Доказательство. Для доказательства достаточно в формулировке теоремы заменить части их дополнениями. Объединение при этом перейдет в пересечение, а открытые части перейдут в замкнутые.

Следствие 1. *Если E — компактное пространство, а $F_0, F_1, F_2, \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых подмно-*

жеств E, пересечение которых пусто, то существует такое n, что F_n пусто.

Заметим, что указанное свойство, очевидно, не верно для вещественной прямой $\mathbb{R}$, и это подтверждает отмеченный ранее факт некомпактности $\mathbb{R}$. В самом деле, если мы рассмотрим убывающую последовательность замкнутых интервалов $[n, +\infty[$, то их пересечение пусто, в то время как ни один из них не пуст.

Замечание. Если воспользоваться теоремой 11 гл. I, то можно заметить, что предыдущее следствие эквивалентно следующему:

Следствие 2. *Если E — компактное пространство, а F_0, F_1, $F_2 \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых подмножеств E, ни одно из которых не пусто, то их пересечение также не пусто.*

Теорема 21. *Пусть E — топологическое пространство, а F — компактная часть E. Тогда заведомо F является замкнутой частью E* [1].

Доказательство. Для простоты при доказательстве мы ограничимся тем случаем, когда E является метрическим пространством. Пусть a — точка прикосновения F. Нам надо доказать, что $a \in F$. Если мы через F_n обозначим пересечение F и замкнутого шара с центром в a радиуса $1/n$, n — целое $\geqslant 1$, то мы увидим, что F_n образуют убывающую последовательность замкнутых частей F (теорема 5). Ни одно из F_n не пусто, ибо a является точкой прикосновения F (теорема 4), а так как F, по предположению, компактно, то их пересечение не пусто. Однако пересечение рассматриваемых шаров сводится к точке a. Следовательно, a — единственная точка пересечения всех F_n. Отсюда вытекает, что a принадлежит всем F_n, а значит, и множеству F, что доказывает замкнутость F в E.

Очевидно, что обратное утверждение к этой теореме, вообще говоря, не верно. Произвольное замкнутое множество топологического пространства не обязательно компактно, так как в противном случае пространство, являясь замкнутым, всегда было бы компактным. Однако имеет место следующее обратное утверждение:

Теорема 22. *Всякая замкнутая часть компактного пространства является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть E — компактное пространство, F — замкнутая часть E. Пусть $(F_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство

[1] Внимание! Эта теорема сравнивает внутреннее свойство F — свойство быть компактным (в индуцированной топологии) — со свойством множества F относительно E быть замкнутым в E.

частей F, замкнутых в F, пересечение которых пусто. Поскольку F_i замкнуты в F и пространство F, по предположению, замкнуто в E, то F_i замкнуты в E (теорема 6, b)). Так как E, по предположению, компактно, то существует конечное число частей F_i, пересечение которых пусто, а это, согласно теореме 20, обеспечивает компактность F.

Из теорем 21 и 22 следует, что в компактном пространстве компактные подмножества совпадают с замкнутыми подмножествами. Так, например, для того чтобы некоторое подмножество пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым в $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 22_2. *Всякое компактное пространство регулярно: любая его точка обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность точки a и $\mathring{\mathscr{V}}$ — ее внутренность. Тогда $K = \complement\mathring{\mathscr{V}}$ замкнуто и, в силу теоремы 22, компактно. Пусть $\mathscr{W}$ — замкнутая (и, следовательно, компактная) окрестность точки a. Тогда $\mathscr{W} \cap K$ является замкнутым подмножеством K. При всевозможных $\mathscr{W}$ эти замкнутые подмножества из K имеют пустое пересечение, поскольку пересечение всех $\mathscr{W}$ сводится к точке a (стр. 59), которая не принадлежит K. Так как K компактно, то из множества замкнутых окрестностей $\mathscr{W}$ можно выбрать конечное число множеств $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \ldots, \mathscr{W}_n$, таких, что пересечение всех $\mathscr{W}_i \cap K$ пусто. Множество $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{W}_n$ является такой компактной окрестностью точки a, что $\mathscr{W}_0 \cap K$ пусто; при этом $\mathscr{W}_0 \subset \mathscr{W}$. Таким образом, любая окрестность $\mathscr{V}$ точки a содержит компактную окрестность $\mathscr{W}_0$, что и требовалось доказать.

Более общо, тем же самым методом доказывается, что *в компактном пространстве каждая компактная часть имеет фундаментальную систему компактных окрестностей.*

Теорема 23. *Для того чтобы часть конечномерного векторного нормированного пространства E была компактной, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнутой и ограниченной.*

Доказательство. 1°) Указанное условие необходимо. Как мы видели вначале, компактная часть всегда ограничена, и в силу теоремы 21, она заведомо замкнута.

2°) Условие достаточно. Если даже полем скаляров является $\mathbb{C}$, мы можем рассматривать n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности $2n$. Поэтому можно предполагать, что полем скаляров является $\mathbb{R}$,

a) Предположим сначала, что пространством E является $\mathbb{R}^n$ и что норма в нем определена функцией $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i|$.

Любая ограниченная часть содержится в некотором шаре, являющемся в нашем случае замкнутым ограниченным параллелепипедом, т. е. содержится в некотором компакте. Поскольку рассматриваемая часть предполагается замкнутой, она является замкнутой частью компактного множества, и потому для доказательства достаточно будет применить теорему 22. (Более общо, если в метрическом пространстве любой замкнутый шар компактен, то любая его ограниченная замкнутая часть будет также компактной.)

b) Пусть теперь E является произвольным нормированным n-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Докажем сначала утверждение теоремы 13. Выберем в E какой-либо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Тогда каждая точка $\vec{x}$ может быть выражена через свои координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через $\|\vec{x}\|$ *заданную норму* в E и положим $|\vec{x}| = \max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i|$.

Тогда $\|\vec{x}\| = \left\|\sum\limits_i x_i \vec{e}_i\right\| \leqslant \sum\limits_i |x_i| \, \|\vec{e}_i\| \leqslant \sum\limits_i \|\vec{e}_i\| \max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i| = \sum\limits_i \|\vec{e}_i\| \, |\vec{x}|$.

Если положить $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \|\vec{e}_i\|$, то получим неравенство

$$\|\vec{x}\| \leqslant k \, |\vec{x}|. \qquad (\mathrm{II}, 7; 1)$$

Нам нужно получить противоположное неравенство. Из неравенства (II, 7; 1) следует, что *тождественное* преобразование E с нормой $|\vec{x}_i|$ в E с нормой $\|\vec{x}\|$ непрерывно. (В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, полагая $\eta = \varepsilon/k$ для всех $\vec{x}$, таких, что $|\vec{x} - \vec{a}| \leqslant \eta$, получим $\|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant k \, |\vec{x} - \vec{a}| \leqslant k\eta = \varepsilon$ а это — определение непрерывности преобразования в точке $\vec{a}$.) Но тогда прообраз любого замкнутого множества замкнут (теорема 8). Другими словами, любая часть F пространства E, замкнутая в метрике $\| \ \|$, замкнута и в метрике $| \ |$. В частности, шар $\|\vec{x}\| \leqslant R$, будучи замкнутым в метрике $\| \ \|$, замкнут и в метрике $| \ |$. Обозначим через Q сферу (полый куб) $|\vec{x}| = 1$. Это — некоторая замкнутая и ограниченная в E часть по метрике $| \ |$ и, следовательно, компактная часть в силу того, что мы видели в начале доказательства. Пусть F_R — пересечение Q с шаром $\|\vec{x}\| \leqslant R$, замкнутое по метрике $|\ |$. Это — некоторая замкнутая часть компакта Q. Так как пересечение всех шаров $\|\vec{x}\| \leqslant R$ содержит лишь одну точку — начало координат, не принадлежащую Q, то пересечение всех рассмотренных замкнутых подмножеств пусто. Согласно теореме 20, из них можно выбрать конечное число с пустым пересечением. Другими словами, существует такое число $\rho > 0$, что шар $\|\vec{x}\| \leqslant \rho$ с множеством Q не пересекается. Но тогда из $\|\vec{x}\| \leqslant \rho$ следует $|\vec{x}| < 1$ (в противном случае нашлась бы точка $\vec{x}_0$, удовлетворяющая неравенствам $\|\vec{x}_0\| \leqslant \rho$ и $|\vec{x}_0| \geqslant 1$, и тогда для $\lambda = 1/|\vec{x}_0|$ мы получили бы $\|\lambda\vec{x}_0\| \leqslant \lambda\rho \leqslant \rho$ и $|\lambda\vec{x}_0| = 1$, что противоречит изложенному выше). С помощью гомотетии с отношением μ отсюда получаем, что неравенство $\|\vec{x}\| \leqslant \mu\rho$ влечет за собой неравенство $|\vec{x}| < \mu$ и тем более $\leqslant \mu$. Первое неравенство справедливо при $\mu = \|\vec{x}\|/\rho$, но тогда второе принимает вид

$$|\vec{x}| \leqslant \frac{1}{\rho} \|\vec{x}\|, \tag{II,7;2}$$

что вместе с (II, 7; 1) доказывает эквивалентность норм $|\ |$ и $\|\ \|$, т. е. теорему 13.

Теорема 23 теперь доказана во всех случаях, ибо понятия «замкнутый, ограниченный, компактный» одни и те же для двух эквивалентных норм (см. примечание [2]) на стр. 58), а то, что доказано в п. а) для специальной нормы в E, определенной с помощью базиса, сохраняется и для данной нормы, эквивалентной ей по теореме 13.

Локально компактные пространства

Говорят, что топологическое пространство E *локально компактно*, если каждая его точка имеет по крайней мере одну компактную окрестность. Так, например, *любое конечномерное нормированное векторное пространство локально компактно*, поскольку локально компактен замкнутый шар такого пространства.

Можно доказать, что *бесконечномерное нормированное векторное пространство локально компактным быть не может* (теорема 45_2). Замкнутый шар в таком пространстве не компактен. Для того чтобы некоторая часть пространства была компактной, необходимо, но не достаточно, чтобы она была замкнутой и ограниченной.

Если два топологических пространства гомеоморфны и одно из них локально компактно, то таким же будет и второе. Это дает нам новый критерий, позволяющий выяснить, когда два пространства не являются гомеоморфными. Например, конечномерное и бесконечномерное векторные нормированные пространства гомеоморфными быть не могут.

Любое локально компактное пространство регулярно, и каждая точка в нем обладает фундаментальной системой компактных окрестностей. В самом деле, если $\mathscr{V}$ является компактной окрестностью точки a, то, согласно теореме 22_2, точка a имеет в $\mathscr{V}$ фундаментальную систему компактных окрестностей. Остается заметить, что каждая окрестность точки a в $\mathscr{V}$ является также окрестностью точки a во всем пространстве (теорема 6, с)). Более общо, *каждый компакт локально компактного пространства обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.*

Точка сгущения последовательности [1])

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — некоторая последовательность элементов топологического пространства E. Говорят, что точка a является *точкой сгущения* этой последовательности, если для любой окрестности $\mathscr{V}$ точки a найдется бесконечное множество значений n, таких, что $x_n \in \mathscr{V}$. Если последовательность сходится к a, то a для нее является точкой сгущения.

Теорема 24. *Пусть E — метризуемое пространство и a — точка сгущения последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ элементов E. В этом, и только в этом случае, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к a.*

Доказательство. Подпоследовательностью последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ называется последовательность вида $x_{p_0}, x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots$, где $n \to p_n$ является строго возрастающим отображением $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ [2]). Исходя из определения, теперь легко проверить, что если существует подпоследовательность, сходящаяся к a, то точка a является точкой сгущения для исходной последовательности (и это так даже в том случае, когда E — неметризуемое топологическое пространство). Докажем теперь обратное, предполагая, что в E выбрана некоторая метрика, определяющая ее топологию. Пусть a — точка сгущения исходной последовательности. Тогда для каждого шара $B(a, 1/n)$ существует бесконечное множество значений p, таких, что

[1]) Ее часто называют также *точкой прикосновения* последовательности. Однако это может привести к ошибочному отождествлению с понятием точки прикосновения множества. По этой причине мы используем различные слова.

[2]) Полагая $p_n = n$, получаем, что последовательность является подпоследовательностью самой себя.

$x_p \in B(a, 1/n)$. Возьмем сначала такое целое число p_1, что $x_{p_1} \in B(a, 1)$. Выберем затем такое целое $p_2 > p_1$, что $x_{p_2} \in B(a, 1/2)$, затем такое целое $p_3 > p_2$, что $x_{p_3} \in B(a, 1/3)$ и т. д. Шаг за шагом таким методом мы образуем подпоследовательность $n \to x_{p_n}$ исходной последовательности, которая, очевидно, сходится к a.

Теорема 25 (свойство Больцано — Вейерштрасса). *Для того чтобы метризуемое пространство E было компактным, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность элементов из E имела по крайней мере одну точку сгущения*[1]).

Доказательство. 1°) Пусть E компактно и $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — некоторая последовательность его элементов. Обозначим через A_n множество $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, а через $\bar{A}_n$ — его замыкание. Множества $\bar{A}_n$ образуют убывающую последовательность замкнутых множеств. Так как ни одно из этих множеств не пусто, то их пересечение не пусто. Пусть a — точка этого пересечения. Сказать, что a принадлежит $\bar{A}_n$ или что a является точкой прикосновения A_n, означает сказать, что каждая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку из A_n, а так как это верно при любом n, то мы получаем, что a является точкой сгущения исходной подпоследовательности.

2°) Доказательство обратного утверждения не просто. Мы его получим, предварительно рассмотрев две леммы.

Лемма 1. *Пусть E — метрическое пространство, каждая последовательность которого имеет по крайней мере одну точку сгущения. Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие E. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что любой шар с произвольным центром радиуса $\leqslant \varepsilon$ будет полностью содержаться хотя бы в одном из открытых множеств покрытия.*

Предположим, что это не верно. Тогда для каждого целого n можно будет найти в E такую точку a_n, что шар с центром в a_n радиуса $1/n$ не лежит целиком ни в одном из открытых множеств покрытия. Образуем таким образом бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов E. Эта последовательность имеет по крайней мере одну точку сгущения a. Поскольку $\mathfrak{R}$ — покрытие, то существует открытое множество $\mathscr{V}$ из $\mathfrak{R}$, содержащее a. Само это множество содержит некоторый шар с центром a рариуса α. Однако существует бесконечное множество значений n и, значит, хотя бы одно такое значение, что одновременно выполняются неравенства $1/n \leqslant \alpha/2$ и $d(a_n, a) \leqslant \alpha/2$. Теперь видно, что шар с центром a_n радиуса $1/n \leqslant \alpha/2$ целиком лежит в шаре $B(a, \alpha)$ и тем более в открытом множестве $\mathscr{V}$ покрытия, что про-

[1]) Если E — топологическое, но не метризуемое пространство, то условие останется необходимым, но не будет достаточным.

тиворечит сделанному предположению относительно последовательности a_n. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть E — метрическое пространство, каждая последовательность которого имеет по крайней мере одну точку сгущения. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, множество E может быть полностью покрыто конечным числом шаров радиуса ε.*

В самом деле, пусть a_0 — любая точка E. Если $B_0(a_0, \varepsilon) = E$, то лемма доказана. Если же это не так, то существует хотя бы одна точка a_1, не принадлежащая шару $B_0(a_0, \varepsilon)$. Если $B_0(a_0, \varepsilon) \cup B_0(a_1, \varepsilon) = E$, то лемма доказана. Если же это не так, то можно найти точку a_2, не принадлежащую $B_0(a_0, \varepsilon) \cup B_0(a_1, \varepsilon)$. Продолжая рассуждать таким образом далее, мы сможем образовать последовательность $B_0(a_0, \varepsilon), B_0(a_1, \varepsilon), B_0(a_2, \varepsilon), \ldots$ шаров радиуса ε. Если такое построение мы не сможем закончить, то придем к бесконечной последовательности точек $a_0, a_1, a_2, \ldots$, взаимные расстояния между которыми $\geqslant \varepsilon$. Но это невозможно, так как эта последовательность, как любая бесконечная последовательность, должна иметь точку сгущения a. Последнее означает, что существует бесконечное множество значений n, а значит, хотя бы два различных значения p и q, таких, что $d(a, a_p) \leqslant \varepsilon/3$ и $d(a, a_q) \leqslant \varepsilon/3$. Полученное противоречие показывает, что исходные построения закончатся при некотором целом n, а это означает, что E может быть покрыто $n+1$ открытыми шарами радиуса ε.

С помощью этих двух лемм без труда доказывается вторая часть теоремы 25. Выберем некоторую метрику, определяющую топологию в E. Для доказательства компактности E рассмотрим некоторое открытое покрытие $\mathcal{R}$. Согласно лемме 1, существует число $\varepsilon > 0$, такое, что каждый шар радиуса $\leqslant \varepsilon$ полностью лежит по крайней мере в одном из открытых множеств покрытия $\mathcal{R}$. Согласно лемме 2, множество E может быть полностью покрыто конечным числом шаров $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ радиуса ε. Поскольку каждый шар B_i целиком содержится в некотором открытом множестве $\mathcal{V}_i$ покрытия $\mathcal{R}$, мы получаем, что для покрытия E достаточно иметь лишь конечное число открытых множеств $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ покрытия $\mathcal{R}$.

Замечание 1. Леммы 1 и 2 определяют свойства компактных метрических пространств[1]).

Замечание 2. Теорема Больцано — Вейерштрасса, очевидно, не верна для прямой $\mathbb{R}$: последовательность целых поло-

[1]) Слово «компактность» означает некоторую уплотненность и хорошо отражает суть дела. Лемма 2 отмечает, что если даже шары имеют маленький радиус, все равно E может быть покрыто конечным числом этих шаров. Множество E, таким образом, весьма уплотнено.

жительных чисел не имеет точки сгущения. Напротив, в $\overline{R}$, в силу ее компактности, такая последовательность сходится к $+\infty$.

Теорема 26. *Топологическое произведение двух компактных пространств компактно.*

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая двух метрических компактных пространств E и F. Пусть (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... — некоторая последовательность элементов из $E \times F$. Согласно теореме 25, последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ имеет по крайней мере одну точку сгущения a в E. Согласно теореме 24, из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность $x_{p_0}, x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots$, сходящуюся к a. Подпоследовательность $y_{p_0}, y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots$ в свою очередь имеет хотя бы одну точку сгущения b в F, и в силу той же теоремы 24 из нее можно извлечь подпоследовательность $y_{p_{q_0}}, y_{p_{q_1}}, y_{p_{q_2}}, \ldots$, сходящуюся к b. Окончательно, подпоследовательность $(x_{p_{q_0}}, y_{p_{q_0}})$, $(x_{p_{q_1}}, y_{p_{q_1}})$, $(x_{p_{q_2}}, y_{p_{q_2}})$, ... исходной последовательности сходится к (a, b). Отсюда вытекает, что исходная произвольная последовательность имеет точку сгущения, что полностью доказывает компактность произведения.

Теорема 27. *Пусть E — компактное пространство. Для того чтобы последовательность элементов из E сходилась к точке a, необходимо и достаточно, чтобы точка a для нее была единственной точкой сгущения.*

Доказательство. Условие это очевидным образом необходимо. Если последовательность сходится к a, то точка a для нее является точкой сгущения. Другой точки сгущения b быть не может. В самом деле, существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки a и не пересекающаяся с ней окрестность $\mathcal{V}$ точки b, такие, что для всех n, кроме конечного числа их, $x_n \in \mathcal{U}$ и в то же время $x_n \in \mathcal{V}$ для бесконечного множества значений n, а это бессмысленно. Докажем теперь, что указанное условие достаточно. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность элементов E, для которой точка a является единственной точкой сгущения. Если бы эта последовательность не была сходящейся, то существовали бы по крайней мере одно открытое множество $\mathcal{V}$, содержащее a, и подпоследовательность x_{p_n} данной последовательности, такие, что все x_{p_n} находились бы в дополнении к $\mathcal{V}$. Поскольку это дополнение замкнуто, то оно, согласно теореме 22, компактно. Подпоследовательность x_{p_n} должна тогда иметь в $C\mathcal{V}$ хотя бы одну точку сгущения, которая также является точкой сгущения для исходной последовательности, а это противоречит тому, что данная последовательность имеет лишь одну точку сгущения.

Замечание. Приведенное в теореме утверждение, очевидно, не верно для случая вещественной прямой $\mathbb{R}$. Например, последовательность 1, 1, 2, 1/3, 3, ..., n, $1/n$, ... имеет единственную точку сгущения 0; однако, эта последовательность не сходится.

Верхний и нижний пределы вещественной последовательности

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность элементов $\overline{\mathbb{R}}$. Поскольку $\overline{\mathbb{R}}$ компактно, то множество ее точек сгущения не пусто. Это — некоторая часть F множества $\overline{\mathbb{R}}$. Множество F как пересечение замкнутых множеств $\bar{A}_n$, где $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, всегда замкнуто (см. стр. 71). Следовательно, F является компактным множеством в $\overline{\mathbb{R}}$. В нем имеется максимальный элемент L и минимальный элемент l; L называется верхним пределом последовательности, а l — ее нижним пределом. Они обозначаются через $L = \limsup\limits_{n \to \infty} x_n$ и $l = \liminf\limits_{n \to \infty} x_n$ соответственно. Верхний предел характеризуется следующим свойством: *какие бы ни были L_1 и L_2, такие, что $L_1 < L < L_2$, все x_n, кроме конечного их числа, $\leqslant L_2$, и имеется бесконечное множество значений n, для которых $x_n \geqslant L_1$.*

Не надо смешивать верхний предел и точную верхнюю грань. Например, 1 является точной верхней гранью последовательности 1, 1/2, 1/3, ... Но эта последовательность сходится к нулю, который будет ее единственной точкой сгущения и, следовательно, ее верхним пределом.

Для того чтобы некоторая последовательность из $\overline{\mathbb{R}}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы ее верхний предел совпадал с ее нижним пределом (ибо это условие выражает единственность точки сгущения).

§ 8. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теорема 28. *Образ компакта при непрерывном отображении является компактом.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение компактного топологического пространства E в топологическое пространство F. Конечно, мы не хотим доказать, что F компактно. Надо доказать, что образ $f(E)$ пространства E при отображении f, как подпространство пространства F с индуцированной на нем топологией, компактен.