противоречит тому, что данная последовательность имеет лишь одну точку сгущения.

Замечание. Приведенное в теореме утверждение, очевидно, не верно для случая вещественной прямой $\mathbb{R}$. Например, последовательность 1, 1, 2, 1/3, 3, ..., n, $1/n$, ... имеет единственную точку сгущения 0; однако, эта последовательность не сходится.

Верхний и нижний пределы вещественной последовательности

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность элементов $\overline{\mathbb{R}}$. Поскольку $\overline{\mathbb{R}}$ компактно, то множество ее точек сгущения не пусто. Это — некоторая часть F множества $\overline{\mathbb{R}}$. Множество F как пересечение замкнутых множеств $\bar{A}_n$, где $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, всегда замкнуто (см. стр. 71). Следовательно, F является компактным множеством в $\overline{\mathbb{R}}$. В нем имеется максимальный элемент L и минимальный элемент l; L называется верхним пределом последовательности, а l — ее нижним пределом. Они обозначаются через $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ и $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ соответственно. Верхний предел характеризуется следующим свойством: *какие бы ни были L_1 и L_2, такие, что $L_1 < L < L_2$, все x_n, кроме конечного их числа, $\leqslant L_2$, и имеется бесконечное множество значений n, для которых $x_n \geqslant L_1$.*

Не надо смешивать верхний предел и точную верхнюю грань. Например, 1 является точной верхней гранью последовательности 1, 1/2, 1/3, ... Но эта последовательность сходится к нулю, который будет ее единственной точкой сгущения и, следовательно, ее верхним пределом.

Для того чтобы некоторая последовательность из $\overline{\mathbb{R}}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы ее верхний предел совпадал с ее нижним пределом (ибо это условие выражает единственность точки сгущения).

§ 8. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теорема 28. *Образ компакта при непрерывном отображении является компактом.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение компактного топологического пространства E в топологическое пространство F. Конечно, мы не хотим доказать, что F компактно. Надо доказать, что образ $f(E)$ пространства E при отображении f, как подпространство пространства F с индуцированной на нем топологией, компактен.

Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие $f(E)$. Прообразы $f^{-1}(\mathscr{V}_i)$ открытых множеств $\mathscr{V}_i$, составляющих $\mathfrak{R}$, образуют открытое покрытие E. В самом деле, если x — некоторая точка E, то ее образ $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из открытых множеств покрытия $\mathfrak{R}$, например $\mathscr{V}_i$ и, следовательно, x принадлежит элементу $f^{-1}(\mathscr{V}_i)$. Множества $f^{-1}(\mathscr{V}_i)$ открыты в силу непрерывности f.

Поскольку E предполагалось компактным, то для его покрытия достаточно конечного числа открытых множеств $f^{-1}(\mathscr{V}_i)$, например $f^{-1}(\mathscr{V}_1)$, $f^{-1}(\mathscr{V}_2)$, ..., $f^{-1}(\mathscr{V}_n)$. Но это значит, что открытые множества $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \ldots, \mathscr{V}_n$ образуют покрытие образа $f(E)$. В самом деле, для $y \in f(E)$ прообраз $f^{-1}(\{y\})$ не пуст. Пусть x — некоторый элемент этого прообраза. Хотя бы одно из открытых множеств $f^{-1}(\mathscr{V}_1)$, $f^{-1}(\mathscr{V}_2)$, ..., $f^{-1}(\mathscr{V}_n)$, например $f^{-1}(\mathscr{V}_k)$, содержит x, и, следовательно, $\mathscr{V}_k$ содержит $y = f(x)$, что доказывает сказанное выше. В итоге получаем, что $f(E)$ удовлетворяет определению компактных пространств: из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Следствие. *Всякая непрерывная биекция компактного пространства E на топологическое пространство F является гомеоморфизмом.*

В самом деле, согласно теореме 22, образ каждой замкнутой части E является образом компактной части и, следовательно, по доказанному выше, компактен, а значит, согласно теореме 21, замкнут. Согласно теореме 11, любое биективное и непрерывное отображение, переводящее замкнутые множества в замкнутые, является гомеоморфизмом.

Замечание. Не следует думать, что прообраз компакта при непрерывном отображении является компактом. Пусть, например, f — постоянное отображение некомпактного пространства E в некоторое пространство F. Образ всего множества E является подмножеством, сводящимся к точке b из F, т. е. к некоторому компакту, тогда как прообраз $\{b\}$ при отображении f не компактен, поскольку прообразом является всё E. Заметим также, что если f — непрерывное отображение E в F, то *прообразы открытых (или замкнутых) частей открыты (или замкнуты), а образы компактных частей компактны.* Здесь имеется существенное различие между образами и прообразами множеств при отображении. Объединяя же два рода утверждений, можно получить следующий результат: если E *компактно* и если f — непрерывное отображение E в F, то образ любой замкнутой части E при этом отображении замкнут в F. В самом деле, поскольку E компактно, то его замкнутая часть также компактна, а, следовательно, ее образ компактен в F, а значит, и замкнут в F.

Теорема 29. *Непрерывное отображение непустого компактного пространства в $\overline{\mathbb{R}}$ достигает своего максимума и минимума.*

Доказательство. Напомним, что точной верхней гранью функции, определенной на множестве E, со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ называется точная верхняя грань ее значений. Эта грань называется максимумом функции, если она достигается для некоторого значения переменной. Пусть f — непрерывное отображение компактного пространства E в пополненную прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Согласно предыдущей теореме, образ $f(E)$ является непустым компактом в $\overline{\mathbb{R}}$. Согласно теореме 23, это непустое замкнутое множество в $\overline{\mathbb{R}}$. Непустое множество в $\overline{\mathbb{R}}$, согласно теореме 2 гл. I (измененной так, как указано на стр. 26), имеет точную верхнюю грань, и, кроме того, согласно той же теореме, эта грань является точкой прикосновения рассматриваемого множества. Поскольку оно замкнуто, точная верхняя грань принадлежит этому множеству и, следовательно, является максимумом функции. Аналогичное доказательство имеет место и для минимума функции.

Теорема 29 имеет важное значение. Поэтому полезно в качестве упражнения дать различные ее доказательства. Доказательство, основанное на свойстве Гейне — Бореля — Лебега, будет дано на стр. 86. Приведем еще одно доказательство. Пусть M — точная верхняя грань функции f; $M_0, M_1, M_2, \ldots$ — возрастающая последовательность чисел $< M$, стремящихся к M. Для каждого n множество F_n: $\{x;\ x \in E,\ M_n \leqslant f(x) \leqslant M\}$ не пусто (теорема 2 гл. I) и замкнуто как прообраз замкнутого интервала $[M_n, M]$ из $\overline{\mathbb{R}}$ при преобразовании f (теорема 8). Последовательность F_n является убывающей последовательностью непустых замкнутых подмножеств компакта E. Согласно следствию из теоремы 20, их пересечение не пусто. Это некоторое множество точек x из E, в которых $f(x) = M$. Таким образом, в множестве E существует хотя бы одна точка, в которой f достигает своего максимума M.

Можно рассуждать иначе. Сохраняя предыдущие обозначения, заметим, что при любом n существует хотя бы одна точка x_n из E, такая, что $M_n \leqslant f(x_n) \leqslant M$. Последовательность точек x_n имеет хотя бы одну точку сгущения a (теорема Больцано — Вейерштрасса), а следовательно, из нее можно извлечь подпоследовательность $x_{p_0}, x_{p_1}, \ldots,$ сходящуюся к a (теорема 24). Так как f непрерывна в a, то последовательность $f(x_{p_n})$ сходится к $f(a)$ (теорема 16). Поскольку $M_{p_n} \leqslant f(x_{p_n}) \leqslant M$, то $f(x_{p_n})$ сходится к M, а, значит, $f(a) = M$, где M — максимум функции f.

Следствие 1. *Вещественная (т. е. со значениями в* $\mathbb{R}$*) функция* f*, непрерывная на компакте* E*, ограничена. Если во всех точках* x *из* E *функция* $f(x) > 0$*, то существует такое число* $\delta > 0$*, что* $f(x) \geqslant \delta$ *для всех* x *из* E*.*

В самом деле, можно считать, что значения f принадлежат $\overline{\mathbb{R}}$. Ее точная верхняя грань M, точнее максимум, достигается в некоторой точке a из E: $M = f(a) < +\infty$. Таким образом, f ограничена сверху. Точно так же она ограничена снизу. Если f повсюду > 0, то ее минимум δ достигается в некоторой точке b и, следовательно, $\delta > 0$. Итак, $f(x) \geqslant f(b) = \delta$ при любом x из E.

Следствие 2. *Пусть* f *— вещественная непрерывная функция, определенная на метрическом пространстве* E*, и пусть* K *— компакт в* E*. Тогда существует такая окрестность компакта* K*, на которой* f *ограничена. Если* $f(x) > 0$ *для всех* x *из* K*, то существуют такое число* $\delta > 0$ *и такая окрестность* K*, на которой* $f(x) \geqslant \delta$*.*

В самом деле, согласно следствию 1, $f(K)$ является ограниченным подмножеством $\mathbb{R}$. Поэтому существует такое число M, что $f(K) \subset]-M, +M[$. Тогда $K \subset f^{-1}(]-M, +M[)$. Так как f непрерывна и интервал $]-M, +M[$ открыт, то множество $f^{-1}(]-M, +M[)$ открыто. Это множество содержит K, и f на нем ограничена по модулю числом M.

Пусть теперь $f(x) > 0$ для всех x из K. Из следствия 1 вытекает, что существует такое число $\delta' > 0$, что $f(x) \geqslant \delta'$ для всех $x \in K$. Положим $\delta = \delta'/2$. Тогда $f(K) \subset]\delta, +\infty[$, а, значит, $K \subset f^{-1}(]\delta, +\infty[)$, где $f^{-1}(]\delta, +\infty[)$ — открытое множество, содержащее K, на котором $f(x) \geqslant \delta$.

Замечание. Эти результаты, естественно, не верны для разрывных функций. Разрывная функция может быть всюду конечной и тем не менее не быть ограниченной; такой будет, например, функция $1/x$, определенная на дополнении к началу координат в компактном интервале $[0, 1]$ и принимающая значение 0 в начале координат. Это вещественная функция, определенная в компактном пространстве, но имеющая точку разрыва. Она повсюду конечна, но не является ограниченной. Впрочем, указанные результаты будут не верны и для непрерывной функции, но определенной на некомпактном пространстве. Например, на вещественной прямой функция x непрерывна, но не ограничена, функция $\operatorname{arc\,tg} x$ непрерывна и ограничена, но не достигает своей точной верхней грани, т. е. не имеет максимума. Конечно, точка максимума может быть не единственной, как показывает пример постоянной функции.

Приложения. Пусть E — метрическое пространство, F — замкнутая часть E, a — некоторая точка. *Расстоянием* $d(a, F)$

от точки a до множества F называется точная нижняя грань расстояний от a до точек множества F. Поскольку все эти расстояния $\geqslant 0$, то расстояние от a до F само $\geqslant 0$.

Если $a \in F$, то, очевидно, $d(a, F) = 0$. Если же $a \notin F$, то $d(a, F) > 0$. В самом деле, если бы это было не так, то любой шар с центром в a содержал хотя бы одну точку F, а, следовательно, точка a была бы точкой прикосновения F и, в силу замкнутости F, принадлежала бы этому множеству, что противоречит исходному предположению.

Покажем, что $a \to d(a, F)$ является непрерывным отображением E в $\mathbb{R}$, т. е. расстояние от некоторой точки до замкнутого множества меняется непрерывно с изменением точки.

Действительно, пусть a и a' — две точки. Согласно свойству точной нижней грани (теорема 2 гл. I), каково бы ни было $\delta > 0$, существует точка x из F, такая, что $d(a, x) \leqslant d(a, F) + \delta$. Так как $d(a', x) \leqslant d(a, x) + d(a, a') \leqslant d(a, F) + d(a, a') + \delta$, то $d(a', F) \leqslant d(a', x) \leqslant d(a, F) + d(a, a') + \delta$. Поскольку δ произвольно, $d(a', F) \leqslant d(a, F) + d(a, a')$. Меняя ролями a и a', точно так же получаем, что $d(a, F) \leqslant d(a', F) + d(a, a')$, откуда окончательно вытекает неравенство

$$|d(a', F) - d(a, F)| \leqslant d(a, a'). \tag{II, 8; 1}$$

Из $d(a, a') \leqslant \varepsilon$ следует $|d(a', F) - d(a, F)| \leqslant \varepsilon$, что доказывает непрерывность отображения $a \to d(a, F)$.

Можно поставить вопрос: будет ли точная нижняя грань $d = d(a, F) = \inf\limits_{x \in F} d(a, x)$ при заданной точке a минимумом; другими словами, существует ли точка $c \in F$, такая, что $d(a, c) = d$? Покажем, что это действительно так, если все замкнутые шары в F компактны (согласно теореме 23 этот случай имеет место тогда, когда E — конечномерное нормированное векторное пространство).

Рассмотрим шар B радиуса $d + 1$ с центром в a. По предположению этот шар замкнут и компактен. Его пересечение с замкнутым множеством F, являясь замкнутой частью компактного шара B (теорема 5), компактно (теорема 22). Отсюда следует, что непрерывная на компакте $B \cap F$ функция $x \to d(a, x)$ достигает своего минимума. Точка c, в которой достигается этот минимум, является решением поставленного вопроса. В самом деле, $d(a, c) \leqslant d(a, x)$ для любой точки $x \in B \cap F$. Кроме того, $d(a, c) \leqslant d(a, x)$ для любой другой точки x из F, поскольку все другие точки F находятся на расстоянии $\geqslant d + 1$ от точки a, и $d(a, c) \leqslant d + 1$.

Из неравенства $d(a, c) \leqslant d(a, x)$, имеющего место для всех $x \in F$, следует, что $d(a, c)$ действительно является минимумом функции $d(a, x)$ при $x \in F$ (и $d(a, c) = d$).

Пусть теперь E — некоторое метрическое пространство, а F_1 и F_2 — замкнутые части E. *Расстоянием* $d(F_1, F_2)$ между множествами F_1 и F_2 назовем точную нижнюю грань расстояний $d(x_1, x_2)$ при $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$. Если даже $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, может случиться, что $d(F_1, F_2) = 0$, как видно из примера гиперболы и ее асимптоты в евклидовой плоскости. Этот пример также показывает, что точная нижняя грань не является минимумом.

Покажем, что если F_1 компактно и если $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то $d = d(F_1, F_2) > 0$. Кроме того, если замкнутые шары из E компактны, то эта точная нижняя грань является также и минимумом.

В самом деле, $d = \inf\limits_{x_1 \in F_1} d(x_1, F_2)$. Мы знаем, что функция $x_1 \to d(x_1, F_2)$ непрерывна. Так как на компакте F_1 она всегда > 0, то она имеет минимум, т. е. существует точка $c_1 \in F_1$, такая, что $d = d(c_1, F_2) > 0$. Предположим теперь, что все замкнутые шары из E компактны. Мы видели ранее, что в этом случае существует точка $c_2 \in F_2$, такая, что $d(c_1, c_2) = d(c_1, F_2)$, а, значит, $d(c_1, c_2) = d = d(F_1, F_2)$ действительно является минимумом.

Часто оказывается полезным такое утверждение: если Ω — открытое множество метрического пространства E и K — компакт, содержащийся в Ω, то $d = d(K, \complement\Omega) > 0$. Этот факт вытекает из того, что K является компактом, не имеющим общих точек с замкнутым множеством $\complement\Omega$.

Теорема 30 (Даламбера). *Каждый полином комплексной переменной степени m с комплексными коэффициентами имеет m комплексных корней.*

Доказательство. Когда мы говорим m корней, то предполагаем, естественно, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что каждый полином при $m \geqslant 1$ имеет по крайней мере один корень a. Действительно, если мы затем разделим данный полином на $z - a$, то сведем его к полиному степени $m + 1$, к которому снова можно применить то же самое утверждение. Тогда теорема будет доказана индукцией по степени полинома. Итак, предположим, что полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m \qquad (\text{II}, 8; 2)$$

не имеет корней, и попытаемся прийти к противоречию. Известно, что $|P(z)|$ стремится к $+\infty$ при $|z|$, стремящемся к $+\infty$. Но тогда существует число R, такое, что вне окружности радиуса R с центром в 0 комплексной плоскости выполняется неравенство $|P(z)| \geqslant |P(0)|$. Обозначим через μ минимум > 0 (следствие из теоремы 29) непрерывной функции $|P|$

на компакте $|z| \leqslant R$, а через z_0 такую точку, в которой $|P(z_0)| = \mu$. Поскольку $|P(z)| \geqslant |P(0)| \geqslant \mu$ для $|z| \geqslant R$, то неравенство $|P(z)| \geqslant \mu$ справедливо для всех z. Значит, μ является минимумом модуля полинома на всей комплексной плоскости.

Рассмотрим разложение Тейлора полинома P в точке z_0:

$$P(z) = P(z_0) + c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \ldots + c_m (z - z_0)^m. \tag{II, 8; 3}$$

Заметим, что первый член этого разложения отличен от нуля: $|P(z_0)| = \mu$. Далее, существует настолько малое число ρ, что на окружности Γ с центром в точке z_0 радиуса ρ имеет место неравенство

$$|c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \ldots + c_m (z - z_0)^m| < |c_k (z - z_0)^k| = |c_k| \rho^k. \tag{II, 8; 4}$$

Можно считать ρ столь малым, что $|c_k| \rho^k < \mu$.

Если z пробегает окружность Γ, точка $c_k (z - z_0)^k$ пробегает окружность с центром в начале радиуса $|c_k| \rho^k$ и, значит, $P(z_0) + c_k (z - z_0)^k$ пробегает всю окружность с центром в $P(z_0)$ радиуса $|c_k| \rho^k$. Следовательно, существует точка $z_1 \in \Gamma$, такая, что $P(z_0) + c_k (z_1 - z_0)^k$ находится на отрезке $[0, P(z_0)]$ комплексной плоскости. Имеем:

$$|P(z_0) + c_k (z_1 - z_0)^k| = \mu - |c_k| \rho^k. \tag{II, 8; 5}$$

В результате мы получаем оценку

$$\begin{aligned} |P(z_1)| \leqslant |P(z_0) + c_k (z_1 - z_0)^k| &+ \\ + |c_{k+1} (z_1 - z_0)^{k+1} + \ldots + c_m (z_1 - z_0)^m| &< \\ < (\mu - |c_k| \rho^k) + |c_k| \rho^k &= \mu. \end{aligned} \tag{II, 8; 6}$$

Полученное неравенство $|P(z_1)| < \mu$ противоречит тому, что μ является минимумом модуля полинома.

Обобщение теоремы 29. Пусть f — функция на топологическом пространстве E со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Говорят, что эта функция *полунепрерывна сверху в точке* $a \in E$, если, каково бы ни было $b_1 > f(a)$, в пространстве E существует такая окрестность $\mathscr{V}'$ точки a, что из $x \in \mathscr{V}'$ следует $f(x) \leqslant b_1$. Говорят, что она *полунепрерывна снизу*, если, каково бы ни было $b_2 < f(a)$, в пространстве E существует такая окрестность $\mathscr{V}''$ точки a, что из $x \in \mathscr{V}''$ следует $f(x) \geqslant b_2$.

Вещественная функция непрерывна тогда и только тогда, когда она одновременно полунепрерывна сверху и снизу. Теорему 29 теперь можно обобщить следующим образом:

Теорема 30_2. *Всякая функция, полунепрерывная сверху (снизу) на компактном пространстве, достигает на нем максимума (минимума).*

Доказательство. Пусть M — точная верхняя грань в $\overline{\mathbb{R}}$ функции f, которая, по предположению, полунепрерывна сверху на компакте E. Предположим, что она не является максимумом. Тогда $f(x) < M$ для любой точки x из E. В силу полунепрерывности сверху функции f на E, для любого $0 < \varepsilon_x < M - f(x)$ можно найти такую открытую окрестность $\mathscr{V}_x$ точки x, в которой функция мажорируется числом $M_x = f(x) + \varepsilon_x < M$. При всевозможных значениях x получаем систему открытых окрестностей $\mathscr{V}_x$, покрывающих E. Поскольку пространство E компактно, из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие. Другими словами, существует конечное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из E, такое, что E будет объединением множеств $\mathscr{V}_{x_1}, \mathscr{V}_{x_2}, \ldots, \mathscr{V}_{x_n}$. Поскольку в каждом множестве $\mathscr{V}_{x_i}$ функция f мажорируется числом $M_{x_i} < M$, то во всем пространстве E она мажорируется максимальным из чисел $M_{x_1}, \ldots, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}$, которое само $< M$. Однако это противоречит тому, что M является точной верхней гранью f. Мы видим, что M действительно является максимумом функции f.

Равномерная непрерывность

Свойства, которые мы сейчас рассмотрим, относятся только к метрическим пространствам и не могут быть распространены на общие топологические пространства. Впрочем, даже две эквивалентные метрики могут привести к различным результатам [1]).

Определение. Пусть E и F — два метрических пространства. Говорят, что отображение f пространства E в пространство F *равномерно непрерывно*, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\eta > 0$, такое, что из неравенства $d(x', x'') \leqslant \eta$ следует $d(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$.

Короче,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x' \in E,\ \forall x'' \in E,\ d(x', x'') \leqslant \eta):$$
$$d(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(II, 8; 7)}$$

Каждая равномерно непрерывная функция, очевидно, непрерыв-

[1]) Другими словами, отображение метрического пространства E в метрическое пространство F может быть равномерно непрерывным и перестать быть таковым, когда метрика заменяется другой эквивалентной метрикой. Тем не менее, если эти метрики определены нормами в векторных пространствах, то в силу теоремы 12 равномерная непрерывность сохранится при замене норм на эквивалентные.

на, но обратное не верно. Если функция f всюду непрерывна, то для любой точки $a \in E$ при любом $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, такое, что $d(x, a) \leqslant \eta$ влечет за собой $d(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$; однако так определенное число η зависит одновременно и от a, и от ε. Когда же говорят, что функция равномерно непрерывна, то это означает, что η можно выбрать в зависимости только от ε (см. по этому поводу гл. I, стр. 38).

На вещественной прямой функция x равномерно непрерывна, однако функция x^2 этим свойством не обладает. В самом деле, $|(x+h)^2 - x^2| = |2hx + h^2| \geqslant 2hx$ при $h \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Для того чтобы при заданном ε найти h так, чтобы $|2hx + h^2| \leqslant \varepsilon$, необходимо взять $|h| \leqslant \varepsilon/2|x|$. Выбрать при этом условии h независимо от x невозможно.

Говорят, что отображение f метрического пространства E в метрическое пространство F удовлетворяет *условию Гёльдера* или *условию Липшица порядка* α, $0 < \alpha \leqslant 1$ [1]), если существует такая постоянная k, что при любых x' и x'' из E

$$d(f(x'), f(x'')) \leqslant k\,[d(x', x'')]^{\alpha}. \qquad \text{(II, 8; 8)}$$

При $\alpha = 1$ говорят просто, что f *удовлетворяет условию Липшица* (не уточняя, что ее порядок равен 1).

Функция, удовлетворяющая условию Гёльдера порядка α *и тем более условию Липшица, равномерно непрерывна.* Обратное утверждение не верно, как показывает пример функции, равной $1/\ln x$ на интервале $]0, 1/2]$ и нулю в точке $x=0$. Она непрерывна, а, следовательно, как будет показано в теореме 31, равномерно непрерывна. Однако $|f(x) - f(0)| = 1/|\ln x|$ не может быть мажорируема выражением вида $k|x|^{\alpha}$.

Теорема 31. *Всякое непрерывное отображение компактного метрического пространства* E *в метрическое пространство* F *равномерно непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что отображение f не равномерно непрерывно, и покажем, что это приведет к противоречию. То, что f не является равномерно непрерывным, означает, что

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\exists x' \in E,\ \exists x'' \in E,\ d(x', x'') \leqslant \eta) : d(f(x'), f(x'')) > \varepsilon.$$

Пусть ε — число, стоящее в начале этого соотношения. Тогда, каково бы ни было целое число $n \geqslant 1$, можно найти две точки x'_n, x''_n, такие, что $d(x'_n, x''_n) \leqslant 1/n$ и $d(f(x'_n), f(x''_n)) > \varepsilon$.

[1]) Случай $\alpha > 1$ не представляет интереса. Например, для $E = F = \mathbb{R}$ при $\alpha > 1$ из $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant k|h|^{\alpha-1}$ следует, что функция f всюду имеет производную, равную нулю, а это означает, что эта функция постоянна.

Поскольку E компактно, из последовательности x'_n можно выделить подпоследовательность $n \to x'_{p_n}$, сходящуюся к некоторой точке x (теоремы 24 и 25). Из соотношения $d(x'_n, x''_n) \leqslant 1/n$ следует, что подпоследовательность x''_{p_n} также сходится к x. Поскольку отображение f непрерывно, то последовательности $f(x'_{p_n})$ и $f(x''_{p_n})$ заведомо сходятся к $f(x)$ (в силу теоремы 16). Тогда для достаточно больших n имеем $d(f(x_{p_n}), f(x)) \leqslant \varepsilon/2$, $d(f(x''_{p_n}), f(x)) \leqslant \varepsilon/2$, а, следовательно, $d(f(x'_{p_n}), f(x''_{p_n})) \leqslant \varepsilon$, что противоречит условию построения точек x'_{p_n} и x''_{p_n}.

Как мы только что видели на примере функции на вещественной прямой $\mathbb{R}$, функция может быть непрерывной на метрическом некомпактном пространстве и не быть равномерно непрерывной на нем.

§ 9. СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Интуитивно ясно, что некоторые топологические пространства можно рассматривать как нечто целое, как, например, сферу, шар в пространстве $\mathbb{R}^n$, в то время как другие пространства состоят из нескольких различных «кусков». Таким будет, например, пространство, являющееся объединением двух сфер, не имеющих общих точек, или дополнение к некоторой сфере в $\mathbb{R}^n$. Уточним это интуитивное понятие.

Определение. Топологическое пространство называется *связным*, если его невозможно разбить на две непересекающиеся открытые части, или иначе: если его невозможно разбить на две непересекающиеся замкнутые части, или иначе: если в E не существует одновременно открытых и замкнутых подмножеств, кроме самого пространства E и пустого множества $\emptyset$.

Эквивалентность этих трех определений следует из определения замкнутых множеств как дополнений к открытым. Как и компактность, связность является внутренним свойством самого топологического пространства; однако, говорят, что F является связной частью E, если F, рассматриваемое как пространство с индуцированной топологией, связно.

Теорема 32. *Для того чтобы часть E пополненной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ была связным топологическим пространством, необходимо и достаточно, чтобы она была открытым, полуоткрытым или замкнутым интервалом.*

Доказательство. Пусть E — связная часть $\overline{\mathbb{R}}$, а x и y — две любые различные точки E. Покажем, что весь замкну-