Поскольку E компактно, из последовательности x'_n можно выделить подпоследовательность $n \to x'_{p_n}$, сходящуюся к некоторой точке x (теоремы 24 и 25). Из соотношения $d(x'_n, x''_n) \leqslant 1/n$ следует, что подпоследовательность x''_{p_n} также сходится к x. Поскольку отображение f непрерывно, то последовательности $f(x'_{p_n})$ и $f(x''_{p_n})$ заведомо сходятся к $f(x)$ (в силу теоремы 16). Тогда для достаточно больших n имеем $d(f(x_{p_n}), f(x)) \leqslant \varepsilon/2$, $d(f(x''_{p_n}), f(x)) \leqslant \varepsilon/2$, а, следовательно, $d(f(x'_{p_n}), f(x''_{p_n})) \leqslant \varepsilon$, что противоречит условию построения точек x'_{p_n} и x''_{p_n}.

Как мы только что видели на примере функции на вещественной прямой $\mathbb{R}$, функция может быть непрерывной на метрическом некомпактном пространстве и не быть равномерно непрерывной на нем.

§ 9. СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Интуитивно ясно, что некоторые топологические пространства можно рассматривать как нечто целое, как, например, сферу, шар в пространстве $\mathbb{R}^n$, в то время как другие пространства состоят из нескольких различных «кусков». Таким будет, например, пространство, являющееся объединением двух сфер, не имеющих общих точек, или дополнение к некоторой сфере в $\mathbb{R}^n$. Уточним это интуитивное понятие.

Определение. Топологическое пространство называется *связным*, если его невозможно разбить на две непересекающиеся открытые части, или иначе: если его невозможно разбить на две непересекающиеся замкнутые части, или иначе: если в E не существует одновременно открытых и замкнутых подмножеств, кроме самого пространства E и пустого множества $\emptyset$.

Эквивалентность этих трех определений следует из определения замкнутых множеств как дополнений к открытым. Как и компактность, связность является внутренним свойством самого топологического пространства; однако, говорят, что F является связной частью E, если F, рассматриваемое как пространство с индуцированной топологией, связно.

Теорема 32. *Для того чтобы часть E пополненной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ была связным топологическим пространством, необходимо и достаточно, чтобы она была открытым, полуоткрытым или замкнутым интервалом.*

Доказательство. Пусть E — связная часть $\overline{\mathbb{R}}$, а x и y — две любые различные точки E. Покажем, что весь замкнутый интервал $[x, y]$ содержится в E. Если бы это было не так, то на этом интервале можно было бы найти хотя бы одну точку z, не принадлежащую E. Тогда открытые в $\overline{\mathbb{R}}$ множества $[-\infty, z[$ и $]z, +\infty]$, пересекаясь с E, делили бы E на два открытых непересекающихся (поскольку $z \notin E$) множества, а, значит, E не было бы связным. Если мы теперь обозначим через a (соответственно через b) точную верхнюю (соответственно нижнюю) грань E, то, как мы только что видели, E будет совпадать с одним из четырех интервалов $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$.

Обратно, пусть E — некоторый интервал в $\overline{\mathbb{R}}$. Пусть A — некоторое непустое подмножество E, одновременно открытое и замкнутое в E. Для доказательства связности E достаточно показать, что $A = E$. Пусть c — некоторый элемент A. Рассмотрим множество H всех $x \in E$, таких, что $[c, x] \subset A$, и пусть γ — точная верхняя грань H в $\overline{\mathbb{R}}$. Для каждого γ', такого, что $c \leqslant \gamma' < \gamma$, существует элемент H, мажорирующий γ'. Следовательно, $\gamma' \in A$ и $[c, \gamma'] \subset A$. Поскольку A замкнуто, отсюда вытекает, что $\gamma \in A$ и $[c, \gamma] \subset A$, кроме того случая, когда $\gamma = b$ и $b \notin E$. Если бы элемент γ был $< b$, то в силу того, что A открыто, существовал бы элемент $\gamma'' > \gamma$, такой, что $[\gamma, \gamma''] \subset A$, а, следовательно, $[c, \gamma''] \subset A$ и $\gamma'' \in H$, а это невозможно, так как γ является точной верхней гранью H. Поэтому $\gamma = b$, $[c, b[\subset A$ и, кроме того, $b \in A$, если $b \in E$. Проводя слева от точки c рассуждения, аналогичные только что проведенным справа от этой точки, мы получаем точно так же, что $]a, c] \subset A$ и $a \in A$, если $a \in E$. Окончательно получаем, что $A = E$ и, следовательно, E связно.

Следствие. *Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не связно.*

Теорема 33. *Образ связного топологического пространства при непрерывном отображении является связным.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение связного пространства E в F. Речь, естественно, идет не о том, чтобы доказать связность F; мы докажем, что образ $f(E)$ пространства E в F является связным. В самом деле, если бы это было не так, то $f(E)$ можно было бы разбить на две открытые непересекающиеся части A и B. Тогда их прообразы образуют разбиение E (согласно (I, 2; 3)), причем их пересечение пусто. Если $x \in E$, то $f(x)$ принадлежит либо A, либо B, т. е. x принадлежит либо $f^{-1}(A)$, либо $f^{-1}(B)$, а, значит, E является объединением $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$. Ни одно из этих множеств не пусто. В самом деле, A, например, не пусто и содержится в $f(E)$, а значит, его прообраз не пуст и открыт (согласно теореме 7), что противоречит предположению о связности E.

С л е д с т в и е. *Если f — непрерывная функция, определенная на связном пространстве E, со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, то множество ее значений является открытым, полуоткрытым или замкнутым интервалом в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, это множество должно быть связным подмножеством $\overline{\mathbb{R}}$ и остается лишь применить предыдущую теорему.

Это свойство часто формулируют для частного случая, когда E само является открытым, полуоткрытым или замкнутым интервалом $\overline{\mathbb{R}}$. Наконец, часто просто говорят, что вещественная непрерывная функция, заданная на связном пространстве, вместе с любыми двумя значениями принимает и все промежуточные. Это так называемое *свойство промежуточных значений.* Уместно заметить, что оно не является характеристическим свойством непрерывных функций. В связных пространствах существуют разрывные функции, обладающие тем же самым свойством. Например, функция, заданная формулами $f(x) = \sin 1/x$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ и определенная на всей вещественной прямой, разрывна в точке $x = 0$ и все же обладает тем свойством, что множество ее значений образует замкнутый интервал $[-1, 1]$; в любом интервале $]a, b[$ она вместе с двумя значениями принимает и все промежуточные.

Однако можно привести следующую обратную теорему:

Т е о р е м а 34. *Если топологическое пространство E таково, что любая определенная на нем вещественная непрерывная функция вместе с любыми своими двумя значениями принимает также и все промежуточные значения, то E связно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E не связно. Тогда его можно разбить на две открытые части A и B, не имеющие общих точек. Вещественная функция, равная 0 на A и 1 на B, будет непрерывной, поскольку прообраз любого открытого в $\mathbb{R}$ множества является одним из четырех открытых множеств $\emptyset$, A, B, E. Эта функция принимает значения 0 и 1, не принимая никаких промежуточных значений, что противоречит условию теоремы. Следовательно, E связно.

Линейно связные пространства

Полезно иметь некоторый критерий, позволяющий определять связность пространства. В связи с этим введем понятие линейно связного пространства.

Дугой, или *путем*, соединяющим точку a и точку b топологического пространства E, называется такое непрерывное отображение f интервала $[\alpha, \beta]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в пространство E, что $f(\alpha)=a$ и $f(\beta)=b$. Точки a и b называют при этом началом и концом пути.

Z *Не следует смешивать отображение, входящее в определение пути, с образом интервала* $[\alpha, \beta]$, *который при этом отображении называется образом пути.*

Если, например, отображение постоянно, то этот образ сводится к точке. Можно, впрочем, сказать в этом случае, что путь сводится к точке, но путь — это нечто иное, чем множество точек, полученных при отображении.

Точно так же лемнискату Бернулли можно «обойти» в двух различных направлениях, тогда как рассматриваемая как множество она остается одной и той же в обоих случаях. Два способа обхода соответствуют двум различным путям, т. е. двум различным отображениям интервала из $\mathbb{R}$ на плоскость:

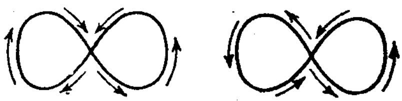

Рис. 2.

Говорят, что путь f проходит через точку c из E, если образ $f([\alpha, \beta])$ содержит c. Говорят также, что путь пересекает часть A множества E, если $f([\alpha, \beta]) \cap A \neq \emptyset$.

Непосредственно видно, что если две точки a и b могут быть соединены некоторым путем и в свою очередь точки b и c могут быть тоже соединены некоторым путем, то точки a и c также могут быть соединены путем.

Теорема 35. *Если любые две точки топологического пространства E могут быть соединены некоторым путем, то E связно.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда E можно разбить на два непересекающихся открытых множества A и B. Пусть a и b — элементы множеств A и B соответственно. По предположению, точки a и b можно соединить некоторым путем. Пусть K — образ этого пути. Тогда $K \cap A$ и $K \cap B$ будут открытыми дополнительными подмножествами K (теорема 5), и ни одно из них не пусто, поскольку a и b принадлежат соответственно первому и второму множествам. Мы получим разбиение K на два открытых непересекающихся множества, что противоречит теореме 33, в которой утверждается, что образ связного пространства $[\alpha, \beta]$ при непрерывном отображении связен. Противоречие доказывает связность множества E.

Обратное утверждение к этой теореме, вообще говоря, не верно. Если, например, мы рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ множество E, являющееся объединением кривой, определяемой функцией $y=\sin 1/x$, $x\neq 0$, и вертикального отрезка $x=0$, $|y|\leqslant 1$, то легко проверить, что E связно, и тем не менее точки $(0, 0)$ и $(a, \sin 1/a)$ соединить путем невозможно.

Говорят, что пространство *линейно связно*, если две его произвольные точки могут быть соединены некоторым путем. Это свойство более сильное, чем обычная связность.

Пример. Любое нормированное векторное пространство линейно связно. В самом деле, любые две его точки могут быть соединены отрезком с началом и концом в рассматриваемых точках.

Точно так же проверяется, что шар и сфера в нормированных векторных пространствах линейно связны.

Теорема 36 (о переходе через таможню). *Пусть A — часть топологического пространства E. Любой путь, соединяющий внутреннюю точку A с точкой ее внешней части, пересекает границу A.*

Доказательство. Поскольку образ K, согласно теореме 32, является связным множеством, то эта теорема является частным случаем следующего утверждения:

Любое связное подмножество $B\subset E$, имеющее общие точки с внутренней и внешней частями A, заведомо пересекает его границу. Это свойство очевидно. В самом деле, если бы это было не так, то B содержалось бы в объединении внутренней и внешней частей A, пересечение B с обеими этими частями определяло бы в этом случае разбиение B на два непересекающихся открытых множества, что невозможно.

§ 10. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 36_2. *Объединение A любого семейства (A_i), $i\in I$, связных частей топологического пространства E, имеющих попарно непустые пересечения, связно.*

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда A можно рассматривать как объединение двух непересекающихся и открытых относительно A частей B' и B''. Для каждого подмножества A_i множества $A_i\cap B'$ и $A_i\cap B''$ не пересекаются, являются открытыми относительно A_i и в объединении дают A_i. Поскольку A_i по условию связны, одна из этих двух частей необходимо пуста, а другая совпадает с A_i. Таким образом, A_i целиком содержится в B' или в B''. Поскольку пересечение любых двух частей A_i и A_j не пусто, то обе они заведомо содержатся либо в B', либо в B'', так что, окончательно, все части A_i содержатся в B' или же все лежат в B'', а, значит, $A\subset B'$ или