деляемой функцией $y = \sin 1/x$, $x \neq 0$, и вертикального отрезка $x=0$, $|y| \leqslant 1$, то легко проверить, что E связно, и тем не менее точки $(0, 0)$ и $(a, \sin 1/a)$ соединить путем невозможно.

Говорят, что пространство *линейно связно*, если две его произвольные точки могут быть соединены некоторым путем. Это свойство более сильное, чем обычная связность.

Пример. Любое нормированное векторное пространство линейно связно. В самом деле, любые две его точки могут быть соединены отрезком с началом и концом в рассматриваемых точках.

Точно так же проверяется, что шар и сфера в нормированных векторных пространствах линейно связны.

Теорема 36 (о переходе через таможню). *Пусть A — часть топологического пространства E. Любой путь, соединяющий внутреннюю точку A с точкой ее внешней части, пересекает границу A.*

Доказательство. Поскольку образ K, согласно теореме 32, является связным множеством, то эта теорема является частным случаем следующего утверждения:

Любое связное подмножество $B \subset E$, имеющее общие точки с внутренней и внешней частями A, заведомо пересекает его границу. Это свойство очевидно. В самом деле, если бы это было не так, то B содержалось бы в объединении внутренней и внешней частей A, пересечение B с обеими этими частями определяло бы в этом случае разбиение B на два непересекающихся открытых множества, что невозможно.

§ 10. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 36_2. *Объединение A любого семейства (A_i), $i \in I$, связных частей топологического пространства E, имеющих попарно непустые пересечения, связно.*

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда A можно рассматривать как объединение двух непересекающихся и открытых относительно A частей B' и B''. Для каждого подмножества A_i множества $A_i \cap B'$ и $A_i \cap B''$ не пересекаются, являются открытыми относительно A_i и в объединении дают A_i. Поскольку A_i по условию связны, одна из этих двух частей необходимо пуста, а другая совпадает с A_i. Таким образом, A_i целиком содержится в B' или в B''. Поскольку пересечение любых двух частей A_i и A_j не пусто, то обе они заведомо содержатся либо в B', либо в B'', так что, окончательно, все части A_i содержатся в B' или же все лежат в B'', а, значит, $A \subset B'$ или

$A \subset B''$. Это противоречит предположению, согласно которому A является объединением непустых непересекающихся частей B' и B''. Полученное противоречие доказывает связность множества A.

Теорема 36_3. *Замыкание $\bar{A}$ связной части A в топологическом пространстве E связано.*

Доказательство. Пусть это не так, т. е. пусть $\bar{A}$ является объединением двух непустых непересекающихся частей B' и B'', каждая из которых замкнута относительно $\bar{A}$. Поскольку $\bar{A}$ замкнуто в E, то они замкнуты относительно E (теорема 6). Мы получаем, что A является объединением двух непересекающихся частей $A \cap B'$ и $A \cap B''$, замкнутых относительно A. Поскольку часть A предполагалась связной, то одно из этих пересечений должно быть пустым, так что мы имеем, например, $A \cap B' = \emptyset$ и $A = A \cap B'' : A \subset B''$. Отсюда, в силу замкнутости B в E, получаем $\bar{A} \subset B''$, а это противоречит предположению о том, что $\bar{A}$ является объединением непересекающихся непустых частей B' и B''. Полученное противоречие доказывает связность замыкания $\bar{A}$.

Определение. Две точки топологического пространства E называются *связанными*, если существует связное подмножество E, содержащее эти точки. Две точки, которые можно соединить некоторым путем, связаны.

Теорема 36_4. *Отношение «x и y связаны в E» является отношением эквивалентности в E.*

Доказательство. Это отношение, очевидно, рефлексивно и симметрично; поэтому достаточно доказать его транзитивность. Итак, пусть x и y связаны. Если, кроме того, связаны точки y и z, то существует, с одной стороны, связное подмножество, содержащее x и y, и, с другой стороны, связное подмножество, содержащее y и z. Так как оба подмножества связны и их пересечение не пусто, то по теореме 36_2 их объединение связно. Так как точки x и z содержатся в общем связном подмножестве, то они связаны.

Определение. Класс эквивалентности E по отношению эквивалентности «x и y связаны в E» называется *связной компонентой E*. Пространство E является объединением связных попарно не пересекающихся компонент. *Связной компонентой* точки x из E называется содержащая ее связная компонента E.

Теорема 36_4. *Связная компонента точки x из E совпадает с множеством точек E, связанных с x, и является наибольшей связной частью E, содержащей x. Связные компоненты E замкнуты.*

Доказательство. 1°) По определению классов эквивалентности, связная компонента E_x точки x в E является множеством точек E, связанных с x. Каждая связная часть E, содержащая x, полностью лежит в E_x, поскольку все ее точки связаны с x. Обратно, если точка $y \in E_x$, то она связана с x, а, следовательно, содержится хотя бы в одной связной части E, содержащей x. Таким образом, E_x является объединением всех связных частей E, содержащих x. Так как все эти связные части содержат x, то попарное пересечение их не пусто. Из теоремы 36_2 вытекает, что это объединение E_x связно. Это — связная часть E, содержащая x, а также любую связную часть, содержащую x. Таким образом, E_x является наибольшей связной частью E, содержащей x.

2°) Согласно теореме 36_3, замыкание $\bar{E}_x$ множества E_x в E связно. Поскольку E_x является наибольшей связной частью E, содержащей x, то $\bar{E}_x = E_x$ и, следовательно, E_x замкнута.

Определение. Пространство E называется *локально связным*, если, какова бы ни была точка a из E и окрестность $\mathscr{V}$ точки a в E, существует связная окрестность $\mathscr{V}'$ точки a, содержащаяся в $\mathscr{V}$. Как показывает сам выбранный нами термин, свойство некоторого пространства быть локально связным является *локальным свойством*, в то время как обычная связность носит глобальный характер. Эти два свойства совершенно не связаны друг с другом [1].

1°) Рассмотрим, например, в плоскости $\mathbb{R}^2$ множество E, образованное двумя прямыми, определяемыми уравнениями $y=0$ и $y=1$. Это множество, как подмножество $\mathbb{R}^2$, *не связно*. Однако оно локально связно, так как любая окрестность $\mathscr{V}$ точки a из E содержит некоторый горизонтальный интервал с центром в точке a, являющийся связной частью. Этот пример показывает, что пространство может быть локально связным, не будучи связным.

2°) Обозначим через E множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из всех прямых, параллельных оси Ox и имеющих *рациональные* ординаты, и *всей оси* Oy. Это топологическое пространство не является локально связным: если рассматривается произвольная точка E с координатами (a, b), где $a \neq 0$, и некоторый шар с центром в этой точке радиуса $<|a|$, то эта окрестность не содержит никакой связной окрестности. Однако множество E связно и даже линейно связно. Любые две его точки можно соединить путем, составленным из трех отрезков: первый и третий отрезки параллельны оси Ox, а второй отрезок

[1] Не следует проводить аналогий с понятием компактности: любое компактное пространство является и локально компактным (обратное не верно), тогда как связное пространство не обязано быть локально связным.

расположен на оси Oy. Поэтому рассмотренное пространство связно, но не локально связно.

Теорема 36_6. *Если топологическое пространство E локально связно, то каждая его связная компонента одновременно открыта и замкнута в E.*

Доказательство. В самом деле, пусть E_x — связная компонента x в E и y — некоторая точка E_x. Так как y обладает некоторой связной окрестностью, то все точки z этой окрестности связаны с y, а, следовательно, и с точкой x. Отсюда следует, что E_x содержит всю эту окрестность. Итак, если E_x содержит точку y, то она содержит и некоторую ее окрестность. Значит, E_x открыто. Согласно теореме 36_5, E_x одновременно и замкнуто.

Замечания. 1°) Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Так в приведенном выше примере, где E связно, но не локально связно, имеется лишь одна связная компонента E. Эта компонента одновременно открыта и замкнута, и тем не менее E не локально связно.

2°) *Если E является открытым множеством нормированного векторного пространства E_0, то E локально связно.* В самом деле, каждая окрестность точки a из E заведомо содержит некоторый шар с центром a в E_0, который, как известно, является связным, и даже линейно связным. В этом случае применима сформулированная теорема. Связные компоненты E заведомо одновременно открыты и замкнуты в E. Они тогда также открыты и в E_0.

3°) Отметим еще один замечательный случай, когда все связные компоненты одновременно открыты и замкнуты: это случай, когда E имеет только *конечное* число связных компонент. Каждая из этих компонент, будучи уже замкнутой, является дополнением к объединению других компонент. Далее, так как конечное объединение замкнутых подмножеств само замкнуто, то рассматриваемые компоненты открыты.

Определение. Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если, каковы бы ни были точка a и ее окрестность $\mathscr{V}$, существует линейно связная окрестность $\mathscr{V}'$ точки a, содержащаяся в $\mathscr{V}$. Поскольку линейно связное пространство связно, локально линейно связное пространство является локально связным. Открытое множество нормированного векторного пространства локально линейно связно.

Теорема 36_7. *Пусть E — локально линейно связное топологическое пространство. Если оно связно, то оно линейно связно.*

Если оно не связно, то каждая его связная компонента открыта, замкнута и линейно связна.

Доказательство. Пусть x — некоторая точка E. Обозначим через F_x множество точек E, которые могут быть соединены с точкой x некоторым путем. Если y — такая точка, то существует окрестность y, все точки z которой могут быть соединены с y некоторыми путями. Поскольку y может быть соединена с x некоторым путем, то z также может быть соединена с x некоторым путем. Другими словами, если F_x содержит точку y, то оно содержит целую ее окрестность. Это означает, что F_x открыто.

Докажем теперь, что множество F_x замкнуто. Для этого достаточно показать, что его дополнение открыто. Предположим, что y принадлежит этому дополнению, т. е. не принадлежит F_x. Существует окрестность $\mathscr{V}$ точки y, все точки которой могут быть соединены с y некоторым путем. Тогда никакая точка z из $\mathscr{V}$ не принадлежит F_x. Действительно, если бы можно было соединить путем точки x и z, то можно было бы соединить точки x и y, что противоречит нашему предположению. Итак, если дополнение к F_x содержит точку y, то оно содержит и некоторую окрестность этой точки. Это означает, что дополнение к F_x открыто, а, значит, само F_x замкнуто.

Пусть E связно. Множество F_x одновременно открыто, замкнуто и не пусто, поскольку оно содержит x. Это означает, что $F_x = E$, и, значит, E линейно связно.

В любом случае, если даже E не связно, для связной компоненты E_x точки x в E мы получаем следующий результат. Поскольку F_x, будучи линейно связным, связно, то $F_x \subset E_x$. Так как E_x связно, а F_x одновременно открыто и замкнуто в E, а, значит, и в E_x, то $F_x = E_x$. В итоге получаем, что F_x открыто, замкнуто и линейно связно.

Замечания. 1°) Две предыдущие теоремы будут применяться, в частности, когда E является некоторым многообразием (см. далее гл. III, § 9). В самом деле, каждая окрестность точки содержит тогда некоторую окрестность, гомеоморфную сфере, и, следовательно, локально связна.

2°) Легко доказываются и другие теоремы этого рода.

Предположим, например, что E является открытым множеством нормированного векторного пространства. Тогда оно локально связно по ломаным в том смысле, что каждая окрестность $\mathscr{V}$ точки a содержит другую окрестность $\mathscr{V}'$ (например, шар с центром в a), две произвольные точки которой могут быть соединены ломаной линией (т. е. путем, последовательно образованным из конечного числа отрезков прямой; для шара достаточно *одного* отрезка). То же самое доказательство, что и выше[1]), показывает, что если E связно, то оно локально связно по ломаным, и что, даже если E не связно, каждая его связная компонента является связной по ломаным.

Если E является открытым множеством конечномерного нормированного векторного пространства с введенной в нем системой координат, то точно так же доказывается, что любая связная компонента E является связной «по ломаным линиям с отрезками, параллельными осям координат»; другими словами, любые две точки связной компоненты E могут быть соединены путем, последовательно образованным из конечного числа отрезков, параллельных осям координат.

Некоторые применения понятия связности. Критерии негомеоморфности

Так же как и понятие компактности, рассмотренное выше понятие связности позволяет нам установить в некоторых случаях, являются ли два данных топологических пространства гомеоморфными. В самом деле, если два пространства гомеоморфны и одно из них связно, то связным также должно быть и второе. Рассмотрим, например, вещественную прямую $\mathbb{R}$ и плоскость $\mathbb{R}^2$. Мы знаем, что эти множества имеют одинаковую мощность, значит, существует некоторая *биекция* одного из них на другое. Легко видеть также, что существует непрерывное сюръективное отображение плоскости на прямую. Это — проекция $(x, y) \to x$ плоскости $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}$. Довольно сложным путем Пеано доказал, что существует непрерывное сюръективное отображение прямой $\mathbb{R}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Но эти отображения, как это ни кажется парадоксальным, не могут быть биективными: всегда существуют точки плоскости, имеющие несколько прообразов! *Довольно просто можно доказать, что гомеоморфизма прямой на плоскость не существует.* В самом деле, согласно теореме 32, прямая обладает следующим свойством: если из нее удаляют точку, то оставшееся дополнение, рассматриваемое как топологическое пространство, не связно. Напротив, плоскость этим свойством не обладает: дополнение к точке безусловно связно и даже линейно связно[2]). Отсюда непосредственно вытекает, что прямая и плоскость не могут быть гомеоморфными. Точно так же, несмотря на то что интервал $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ и окружность плоскости $\mathbb{R}^2$ компактны, они не гомеоморфны. В самом деле, если из интервала $[a, b]$ выкинуть его середину, то дополнение этой точки не будет связным, в то

[1]) То есть нужно рассмотреть множество точек F_x, которые можно соединить с x ломаной линией.

[2]) Две произвольные точки могут быть соединены путем, образованным из двух прямолинейных отрезков плоскости.

время как удаляя любую точку окружности, мы всегда получаем связное дополнение.

Можно доказать (но это не просто!), что два нормированных векторных пространства разной размерности не могут быть гомеоморфными. Сфера в $\mathbb{R}^m$ и сфера в $\mathbb{R}^n$ при $m \neq n$ не гомеоморфны.

Существование и непрерывность обратной функции для строго монотонной непрерывной функции

Теорема 37. *Пусть f — некоторое непрерывное строго возрастающее отображение интервала $|a, b|$ (открытого, полуоткрытого или замкнутого) из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда образ $f(|a, b|)$ является интервалом $|\alpha, \beta|$ того же вида, а f есть гомеоморфизм $|a, b|$ на $|\alpha, \beta|$. Продолжение $\hat{f}$ отображения f, определенное с помощью равенств $\hat{f}(a) = \alpha$, $\hat{f}(b) = \beta$, является гомеоморфизмом $[a, b]$ на $[\alpha, \beta]$.*

То, что образ является интервалом $|\alpha, \beta|$, вытекает из следствия теоремы 33. Иньективность f вытекает из того, что это отображение строго возрастающее. Следовательно, f является непрерывной биекцией $|a, b|$ на $|\alpha, \beta|$. Поскольку f сохраняет отношение порядка и $a = \inf(|a, b|)$, $\alpha = \inf(|\alpha, \beta|)$, то α принадлежит образу тогда и только тогда, когда интервал $|a, b|$ содержит a. То же самое справедливо для точек b и β. Поэтому интервал $|\alpha, \beta|$ имеет тот же вид (открытый, полуоткрытый или замкнутый), что и интервал $|a, b|$. Образ любого интервала $|c, d|$ из $|a, b|$, открытого в $|a, b|$, является интервалом того же вида, а, следовательно, является открытым множеством в $|\alpha, \beta|$. Образ любого открытого множества из $|a, b|$ при отображении f является открытым множеством из $|\alpha, \beta|$, а, следовательно, f является гомеоморфизмом $|a, b|$ на $|\alpha, \beta|$ (теорема 11). Обратное отображение, будучи, очевидно, строго возрастающим, является также биективным и непрерывным отображением $|\alpha, \beta|$ на $|a, b|$.

Когда x стремится к a строго справа, то $f(x)$ стремится к α (см. стр. 61). В самом деле, каково бы ни было $\alpha' > \alpha$, прообразом интервала $]\alpha, \alpha'[$ является интервал $]f^{-1}_{(\alpha)}, f^{-1}_{(\alpha')}[$, являющийся пересечением некоторой окрестности точки a в $\overline{\mathbb{R}}$ с интервалом $]a, b[$. Следовательно, если положить $\hat{f}(a) = \alpha$ и, точно так же $\hat{f}(b) = \beta$, то $\hat{f}$ будет продолжением f, являющимся строго возрастающим непрерывным отображением, а, значит, гомеоморфизмом $[a, b]$ на $[\alpha, \beta]$. Если $a = -\infty$, $b = +\infty$, а α и β конечны, то $\hat{f}$ определит некоторый гомеоморфизм $\overline{\mathbb{R}}$ на замкнутый ограниченный интервал в $\mathbb{R}$.

Замечание. Предположение о строгой монотонности f естественно: непрерывное и инъективное отображение f интервала $|a, b|$ из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ заведомо строго монотонно. В самом деле, предположим, что это не так. Тогда в $|a, b|$ будут существовать точки x_1, x_2, x_3, $x_1 < x_2 < x_3$, такие, что $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) > f(x_3)$, или такие, что $f(x_1) > f(x_2)$ и $f(x_2) < f(x_3)$. Рассмотрим, например, первый случай. Пусть y — общая точка интервалов $]f(x_1), f(x_2)[$ и $]f(x_3), f(x_2)[$. Тогда, согласно теореме о промежуточных значениях (следствие из теоремы 33), существуют точка $x' \in]x_1, x_2[$ и точка $x'' \in]x_2, x_3[$, в которых f принимает значение y. Это означает, что f не является инъекцией, а это противоречит исходному условию.

Применение: метрики, определяющие топологию в $\overline{\mathbb{R}}$

Теорема 38. *Пространство $\overline{\mathbb{R}}$ метризуемо. Если f — строго возрастающее непрерывное и ограниченное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, то метрика*

$$d(x, y) = |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|, \qquad x \in \overline{\mathbb{R}},\ y \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \text{(II, 10; 1)}$$

где $\hat{f}$ — продолжение отображения f до отображения $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, определяемое равенствами $\hat{f}(-\infty) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ и $\hat{f}(+\infty) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, задает топологию в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$.

Согласно теореме 37, f является гомеоморфизмом $\mathbb{R}$ на интервал $]\alpha, \beta[$ из $\overline{\mathbb{R}}$. Так как f ограничено, то $\alpha > -\infty$, $\beta < +\infty$. Кроме того, $\alpha = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, $\beta = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ и продолжение $\hat{f}$ отображения f, такое, что $\hat{f}(-\infty) = \alpha$ и $\hat{f}(+\infty) = \beta$, является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{R}}$ на $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Поскольку топология в $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ определяется естественной метрикой прямой $\mathbb{R}$, то топология в $\overline{\mathbb{R}}$ определяется метрикой, перенесенной от естественной метрики в $[\alpha, \beta]$ отображением $\hat{f}^{-1}$, т. е. такой метрикой, в которой расстояние между $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и $y \in \overline{\mathbb{R}}$ является естественным расстоянием между $\hat{f}(x)$ и $\hat{f}(y)$, т. е. $|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|$, или (II, 10; 1), что и требовалось доказать.

Например, можно взять

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \text{где} \quad \hat{f}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \quad \hat{f}(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(II, 10; 2)}$$

что, по существу, сводится к метрике $d(x, y) = \left| \int\limits_x^y d\xi/(1 + \xi^2) \right|$.

Более общо, если h является непрерывной функцией >0, интегрируемой на $\mathbb{R}$, то можно положить

$$d(x, y) = \left| \int_x^y h(\xi)\, d\xi \right|. \qquad \text{(II, 10; 3)}$$

Здесь можно принять

$$f(x) = \operatorname{th} x \quad \text{и} \quad \bar{f}(-\infty) = -1, \quad \bar{f}(+\infty) = +1. \qquad \text{(II, 10; 4)}$$

Можно положить

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{и} \quad \bar{f}(-\infty) = -1, \quad \bar{f}(+\infty) = 1 \qquad \text{(II, 10; 5)}$$

и т. д. Все эти весьма различные метрики эквивалентны в $\overline{\mathbb{R}}$ (а следовательно, в $\mathbb{R}$), поскольку они определяют одну и ту же топологию.

§ 11. ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть в метрическом пространстве E задана последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$, сходящаяся к x. Тогда эта последовательность обладает следующим свойством [1]:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists p \in \mathbb{N})\,(\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geqslant p, n \geqslant p) : d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon \qquad \text{(II, 11; 1)}$$

или же

$$d(x_n, x_m) \text{ стремится к } 0, \text{ когда } m \text{ и } n \text{ стремятся к } +\infty. \qquad \text{(II, 11; 2)}$$

Последовательность, обладающую этим свойством, называют *последовательностью Коши* (или *фундаментальной последовательностью*).

Из общего курса анализа известно, что *если $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность Коши в поле вещественных или комплексных чисел, то она сходится.*

Это свойство является основным, поскольку оно позволяет выяснить, является ли последовательность сходящейся, *даже если мы не знаем предела, к которому она может сходиться*; общее определение сходимости не дает такой возможности. Именно это свойство приводит к построению различных критериев сходимости рядов и позволяет решить, сходится ли ряд, составленный из вещественных или комплексных чисел, даже если мы ничего не знаем о его сумме, что очень важно в анализе. Однако это свойство, справедливое в поле вещественных и комплексных чисел, не имеет места в произвольных метрических

[1] Его часто называют *критерием Коши.*