Более общо, если h является непрерывной функцией >0, интегрируемой на $\mathbb{R}$, то можно положить

$$d(x, y) = \left| \int_x^y h(\xi)\, d\xi \right|. \qquad \text{(II, 10; 3)}$$

Здесь можно принять

$$f(x) = \operatorname{th} x \quad \text{и} \quad \bar{f}(-\infty) = -1, \quad \bar{f}(+\infty) = +1. \qquad \text{(II, 10; 4)}$$

Можно положить

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{и} \quad \bar{f}(-\infty) = -1, \ \bar{f}(+\infty) = 1 \qquad \text{(II, 10; 5)}$$

и т. д. Все эти весьма различные метрики эквивалентны в $\overline{\mathbb{R}}$ (а следовательно, в $\mathbb{R}$), поскольку они определяют одну и ту же топологию.

§ 11. ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть в метрическом пространстве E задана последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$, сходящаяся к x. Тогда эта последовательность обладает следующим свойством [1]:

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists p \in \mathbb{N})\, (\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geqslant p, n \geqslant p) : d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon \qquad \text{(II, 11; 1)}$$

или же

$$d(x_n, x_m) \text{ стремится к } 0, \text{ когда } m \text{ и } n \text{ стремятся к } +\infty. \qquad \text{(II, 11; 2)}$$

Последовательность, обладающую этим свойством, называют *последовательностью Коши* (или *фундаментальной последовательностью*).

Из общего курса анализа известно, что *если $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность Коши в поле вещественных или комплексных чисел, то она сходится.*

Это свойство является основным, поскольку оно позволяет выяснить, является ли последовательность сходящейся, *даже если мы не знаем предела, к которому она может сходиться*; общее определение сходимости не дает такой возможности. Именно это свойство приводит к построению различных критериев сходимости рядов и позволяет решить, сходится ли ряд, составленный из вещественных или комплексных чисел, даже если мы ничего не знаем о его сумме, что очень важно в анализе. Однако это свойство, справедливое в поле вещественных и комплексных чисел, не имеет места в произвольных метрических

[1] Его часто называют *критерием Коши.*

пространствах. Изучению этого вопроса мы и посвятим этот параграф.

Рассмотрим прежде всего некоторые общие свойства последовательностей Коши.

Теорема 39. *Любая подпоследовательность последовательности Коши также является последовательностью Коши. Каждая последовательность Коши ограничена.*

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе. Ясно, что существует целое p, такое, что из $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ следует $d(x_m, x_n) \leqslant 1$. Но тогда все x_n с $n \geqslant p$ содержатся в шаре $B(x_p, 1)$ и, следовательно, вся последовательность находится в шаре $B(x_p, R)$, где

$$R = \max[d(x_p, x_0),\ d(x_p, x_1),\ \ldots,\ d(x_p, x_{p-1}),\ 1].$$

Теорема 40. *Если последовательность Коши $x_0, x_1, x_2, \ldots$ в метрическом пространстве E имеет точку сгущения a, то эта последовательность сходится к a.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ существует такое p, что для $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$ имеет место неравенство $d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon/2$. Существует, кроме того, бесконечное множество, а, значит, по крайней мере одно такое m, что $d(x_m, a) \leqslant \varepsilon/2$ для $m \geqslant p$. Отсюда получаем, что $d(x_n, a) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, a) \leqslant$ $\leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant p$.

Следствие 1. *Всякая последовательность Коши либо не имеет точек сгущения, либо имеет только одну такую точку, и тогда она сходится.*

Следствие 2. *Если последовательность Коши такова, что одна из ее подпоследовательностей сходится, то и сама последовательность сходится.*

В самом деле, из предположения следует, что данная последовательность имеет точку сгущения.

Определение. Метрическое пространство E называется *полным*, если любая последовательность Коши в нем сходится.

Мы уже видели, сколь важным является понятие полноты. Необходимо поэтому найти критерии, позволяющие выяснить, является ли данное метрическое пространство полным.

Заметим здесь же, что понятие полного пространства не имеет смысла в случае неметрических топологических пространств. Впрочем, легко видеть, что для двух эквивалентных метрических пространств последовательности Коши не обязательно должны быть одинаковыми и что одно из таких пространств может быть полным, а второе — нет. *Понятие полного* *пространства является метрическим, а не топологическим понятием.*

Рассмотрим в качестве примера вещественную прямую $\mathbb{R}$. Если на ней ввести естественную метрику, то, как мы увидим позже, она будет полной (это известно и из общего курса математического анализа). Последовательность $\mathbb{N}$ целых чисел в этой метрике не является последовательностью Коши. Напротив, если мы рассмотрим на пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ одну из метрик, определенных на стр. 100, то она индуцирует на прямой $\mathbb{R}$ некоторую метрику, эквивалентную естественной. Однако, в этой метрике $\mathbb{R}$ не полно. В самом деле, последовательность целых чисел является последовательностью Коши на $\overline{\mathbb{R}}$, поскольку она сходится к $+\infty$, а, значит, она является последовательностью Коши на $\mathbb{R}$, где она вовсе не сходится.

Теорема 41. *Любое метрическое пространство E, все замкнутые шары которого компактны, полно. В частности, полно любое метрическое компактное пространство и любое конечномерное нормированное векторное пространство.*

Доказательство. Согласно теореме 29, каждая последовательность Коши $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ограничена, а, следовательно, содержится в некотором замкнутом шаре B, т. е. в некотором компакте. По теореме Больцано — Вейерштрасса она имеет хотя бы одну точку сгущения. Согласно теореме 40, последовательность сходится, а, следовательно, E полно.

Замечания. 1°) Из условий теоремы следует, что E локально компактно. Однако в локально компактных метрических пространствах замкнутые шары не обязательно компактны[1]). Рассмотрим, например, пространство $\overline{\mathbb{R}}$, снабженное одной из метрик, указанных на стр. 100. Подпространство $\mathbb{R}$ в этой метрике локально компактно, однако, как было замечено выше, оно не полно. Легко проверить, что все замкнутые шары в нем не компактны. В самом деле, в силу компактности пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ она ограничена. Следовательно, для достаточно большого ρ шар радиуса ρ в $\overline{\mathbb{R}}$ совпадает со всей прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда шар радиуса ρ в $\overline{\mathbb{R}}$ совпадает с некомпактным множеством $\mathbb{R}$.

2°) Бесконечномерные нормированные векторные пространства могут быть как полными, так и неполными. Позже мы приведем примеры тех и других пространств. Наиболее интересными, естественно, будут полные пространства.

---

[1]) Локальная компактность метрического пространства E является топологическим свойством. Свойство компактности замкнутых шаров является метрическим свойством.

3°) Существуют не локально компактные метрические пространства, которые являются полными. Именно об этом говорится в замечании 2°).

4°) Точно так же как и свойство компактности, свойство полноты метрического пространства является внутренним свойством самого пространства. Однако если F является подмножеством некоторого метрического пространства E, то мы будем говорить, что F полно, если оно полно как метрическое пространство с индуцированной метрикой.

Теорема 42. *Полное подмножество F метрического пространства E замкнуто в E.*

Доказательство. Пусть $a \in E$ является точкой прикосновения F. Согласно теореме 15, существует последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$ из F, сходящаяся к a. Это — последовательность Коши в E, а, следовательно, и в F. Поскольку F полно, последовательность имеет предел a' в F, а значит, и в E. Последнее означает, что $a = a' \in F$. Так как $a \in F$, то F замкнуто.

Следствие 1. *Пусть E — метрическое пространство. Плотное подмножество F, не совпадающее с E, не обязательно полно.*

В самом деле, замыканием F в E является $E \neq F$. Следовательно, F не замкнуто. Отсюда следует, например, что поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с естественной метрикой не полно. Легко, впрочем, образовать несходящуюся последовательность Коши в $\mathbb{Q}$. Достаточно взять последовательность из $\mathbb{Q}$, сходящуюся в $\mathbb{R}$ к иррациональному числу. Необходимость расширения поля рациональных чисел и введения поля вещественных чисел диктуется двумя важными причинами: каждое ограниченное непустое множество должно иметь точную верхнюю грань и каждая последовательность Коши должна быть сходящейся.

Следствие 2. *Конечномерное подпространство F нормированного векторного пространства E замкнуто в E.*

В самом деле, согласно изложенному перед теоремой 41, подпространство F полно. Можно доказать, что этот результат сохраняется, если E — всего лишь векторное топологическое пространство.

Естественно, обратное утверждение к предыдущей теореме не верно. Например, $F = E$ всегда замкнуто в E, а тем не менее не обязательно полно. Однако имеет место

Теорема 43. *Любое замкнутое подмножество F полного метрического пространства E полно.*

Доказательство. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность Коши из F. Она является также последовательностью Коши в E и, так как E полно, сходится к некоторой точке

$a \in E$. Поскольку все x_n лежат в F, то a является точкой сгущения для F (теорема 15) и, в силу замкнутости F, принадлежит ему. Итак, любая последовательность Коши в F сходится в F, т. е. F полно.

Из теорем 42 и 43 следует, что если E полно, то его полные и замкнутые подмножества совпадают. Отметим сходство между этими свойствами и соответствующими свойствами компактных пространств.

Теорема 44. *Пусть E_1 и E_2 — два полных метрических пространства. Тогда произведение $E_1 \times E_2$ будет также полным в смысле какой-либо из метрик, указанных на стр. 63.*

Доказательство. Обозначим через d_1 и d_2 расстояния в E_1 и E_2, и пусть δ — расстояние в произведении E_1 на E_2, обладающее следующими свойствами:

1°) δ определяет в $E_1 \times E_2$ топологию произведения топологий в E_1 и E_2, определенных расстояниями d_1 и d_2;

2°) существует такое число k, что для каждой пары (x_1, x_2), (y_1, y_2) элементов $E_1 \times E_2$ имеют место неравенства:

$$k\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geqslant d_1(x_1, y_1) \text{ и } \geqslant d_2(x_2, y_2). \quad \text{(II, 11;3)}$$

Докажем, что в так определенной метрике пространство $E_1 \times E_2$ полно. В самом деле, пусть $((x_1)_n, (x_2)_n)$ — некоторая последовательность Коши этого пространства. Из условия 2°) следует, что $(x_1)_n$ является последовательностью Коши в E_1, а последовательность $(x_2)_n$ — последовательностью Коши в E_2. Поскольку пространства E_1 и E_2 полны, эти последовательности сходятся соответственно к элементам $a_1 \in E_1$ и $a_2 \in E_2$. Но тогда в топологии произведения, т. е. в рассматриваемой метрике δ, последовательность $((x_1)_n, (x_2)_n)$ сходится к (a_1, a_2) в $E_1 \times E_2$, что означает полноту этого пространства.

Продолжение равномерно непрерывных отображений

Теорема 45. *Пусть E и F — некоторые метрические пространства, E_1 — подпространство, плотное в E, а f_1 — отображение E_1 в F. Предположим также, что f_1 равномерно непрерывно на E_1, а F полно.*

Тогда существует, и притом единственное, непрерывное отображение f пространства E в F, являющееся продолжением f_1. Это отображение, кроме того, равномерно непрерывно.

Доказательство. 1°) Если даже f_1 только непрерывно, а F не полно, то не может существовать более одного отображения, обладающего указанными свойствами. В самом деле, пусть имеется некоторое такое отображение f. Пусть x — точка E. Так как E_1 плотно в E, то, согласно теореме 15, существует последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ в E_1, сходящаяся к x. В силу теоремы 16, из непрерывности f вытекает, что последовательность $f(x_n) = f_1(x_n)$ сходится к $f(x)$ в F. Следовательно, $f(x)$, являясь пределом $f_1(x_n)$, полностью определена, что доказывает ее единственность.

2°) Для доказательства существования необходимо предполагать, кроме того, что f равномерно непрерывна и F полно. Пусть теперь снова x — некоторая точка E и $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность в E_1, сходящаяся к x. Тогда это последовательность Коши в E. Отсюда немедленно вытекает, что последовательность $f_1(x_n)$ является последовательностью Коши в F. В самом деле, для любого заданного $\varepsilon > 0$, в силу равномерной непрерывности, существует такое число $\eta > 0$, что из $x' \in E_1$, $x'' \in E_1$, $d(x', x'') \leqslant \eta$ следует $d(f_1(x'), f_1(x'')) \leqslant \varepsilon$. Поскольку $x_0, x_1, x_2, \ldots$ является последовательностью Коши, существует такое целое p, что из $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ следует $d(x_m, x_n) \leqslant \leqslant \eta$, а, следовательно, и $d(f(x_m), f(x_n)) \leqslant \varepsilon$, что полностью доказывает наше утверждение.

Поскольку F по предположению полно, последовательность $f_1(x_n)$ имеет предел в F. Обозначим его через $f(x)$. Надо доказать прежде всего, что $f(x)$ полностью определяется заданием x, т. е. не зависит от выбора последовательности x_n. Рассмотрим с этой целью какие-либо две последовательности x'_n и x''_n, сходящиеся к одному и тому же x. «Смешанная» последовательность $x'_0, x''_0, x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots$ является некоторой последовательностью из E_1, сходящейся к x. Но тогда последовательность $f(x'_0), f(x''_0), f(x'_1), f(x''_1), \ldots, f(x'_n), f(x''_n), \ldots$ должна сходиться к некоторому элементу F и это полностью доказывает тот факт, что обе последовательности $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ имеют один и тот же предел в F.

Показав это, мы определили некоторое отображение f пространства E в пространство F. Это отображение является тривиальным продолжением f_1, ибо для любого $x \in E_1$ можно взять последовательность $x, x, x, \ldots$, сходящуюся к x. При этом образ $f(x)$ является пределом последовательности $f_1(x), f_1(x), f_1(x), \ldots$, т. е. совпадает с $f_1(x)$. Остается, следовательно, доказать равномерную непрерывность отображения f. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное число, а $\eta > 0$ — соответствующее ему число, входящее в определение равномерной непрерывности f_1. Пусть x и y — произвольные точки E, такие, что $d(x, y) \leqslant \eta/2$. Докажем, что тогда $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$, что обеспечит равномерную непрерывность f. Пусть x_n и y_n — последовательности из E_1, сходящиеся соответственно к x и y. В силу непрерывности функции расстояния (теорема 17_2), существует такое целое число p, что для $n \geqslant p$

имеем $d(x_n, y_n) \leqslant d(x, y) + \eta/2$. Отсюда вытекает, что для $n \geqslant p$ выполняется неравенство $d(x_n, y_n) \leqslant \eta$ и, следовательно, $d(f_1(x_n), f_1(y_n)) \leqslant \varepsilon$. Поскольку в F функция расстояния непрерывна, а последовательности $f_1(x_n)$ и $f_1(y_n)$ сходятся соответственно к $f(x)$ и $f(y)$, то $d(f_1(x_n), f_1(y_n))$ сходится к $d(f(x), f(y))$. Следовательно, $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. Доказательство теоремы закончено.

Замечания. 1°) Предположение относительно полноты пространства F существенно. Если, например, мы возьмем $F = E_1$, а в качестве f_1 возьмем тождественное отображение E_1 в E_1, то оно не может быть продолжено до непрерывного отображения f пространства E в E_1.

В самом деле, пусть x — некоторая точка E, не принадлежащая E_1. Пусть x_n — последовательность из E_1, сходящаяся к x. Тогда, если бы существовало непрерывное продолжение f, последовательность $f_1(x_n) = x_n$ сходилась бы к $f(x)$ в E_1, а, значит, и в E, и мы имели бы $f(x) = x$, что невозможно, так как $x \notin E_1$.

2°) Недостаточно предполагать, что f_1 только непрерывно. Рассмотрим, например, пространство $E = \overline{\mathbb{R}}$ и снабдим его одной из метрик, указанных в теореме 38; положим $E_1 = \mathbb{R}$. В качестве F выберем прямую $\mathbb{R}$ с естественной метрикой. Тогда F полно. Легко видеть, что тождественное отображение f_1 пространства E_1 в F непрерывно, но не равномерно непрерывно. Его, очевидно, нельзя продолжить до непрерывного отображения f пространства $E = \overline{\mathbb{R}}$ в $F = \mathbb{R}$. В самом деле, точка $x = +\infty$ из $E = \overline{\mathbb{R}}$ является пределом в E последовательности целых чисел $\mathbb{N}$. Однако образ этой последовательности, т. е. само $\mathbb{N}$, не сходится в $F = \mathbb{R}$, тогда как он должен был бы сходиться к $f(+\infty)$, если бы отображение f существовало.

Частные свойства конечномерных топологических векторных пространств

Мы уже отмечали некоторые такие свойства: теорема 13, теорема 23, следствие 2 из теоремы 41. Остается доказать свойство, указанное на стр. 74:

Теорема 45_2 (Фредерик Рисс). *Для того чтобы топологическое векторное пространство было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечномерным.*

Доказательство. Для простоты мы будем считать, что E является нормированным векторным пространством. Незначительное видоизменение доказательства даст общий результат. Мы уже знаем, что из конечномерности E вытекает его локальная компактность. Нам же надо доказать обратное утверждение. Предположим, что в E имеется некоторая компактная окрестность $\mathcal{V}$ точки 0. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если A — некоторая часть E, то λA, где λ — скаляр, является множеством точек λx, где $x \in A$. Если A и B — две части E, то через $A + B$ обозначается множество точек $x + y$, $x \in A$, $y \in B$. (Внимание! $2A$ содержится в $A + A$, но, вообще говоря, с ним не совпадает.) Векторное подпространство M пространства E характеризуется следующими свойствами: $M + M = M$ и $\lambda M \subset M$ для любого λ. Далее, $2\mathcal{V}$ является окрестностью 0 и $a + \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ является открытой окрестностью точки a. Когда a пробегает множество $2\mathcal{V}$, множества $a + \overset{\circ}{\mathcal{V}}$ образуют открытое покрытие множества $2\mathcal{V}$. В силу предположения о компактности, существует конечное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, таких, что $a_i + \mathcal{V}$ покрывают $2\mathcal{V}$. Пусть M — векторное подпространство, порожденное векторами a_i. Оно конечномерно, а $M + \mathcal{V}$ покрывает $2\mathcal{V}$.

Имеем: $M + \mathcal{V} = M + M + \mathcal{V} \supset M + 2\mathcal{V}$. Умножая на 2, получаем: $M + \mathcal{V} \supset M + 2\mathcal{V} = 2M + 2\mathcal{V} = 2(M + \mathcal{V}) \supset 2(M + 2\mathcal{V}) = 2M + 4\mathcal{V} = M + 4\mathcal{V}$. Для любого n имеют место включения $M + \mathcal{V} \supset M + 2^n\mathcal{V} \supset 2^n\mathcal{V}$. Так как объединение всех $2^n\mathcal{V}$ дает все пространство, то $M + \mathcal{V}$ совпадает со всем пространством E. Отсюда можно получить, что M также совпадает с E, а, значит, E конечномерно. Если бы это было не так, то существовала бы точка $a \notin M$. Так как M замкнуто (следствие 2 теоремы 41), то тогда существовал бы шар с центром в a, не пересекающийся с M. Этот шар можно представить в виде $a + B$, где B — шар с центром в нуле пространства. Тогда $M + B$ не будет содержать a. Для произвольного $\rho > 0$ множество $M + \rho B = \rho M + \rho B$ не содержит ρa, и мы получаем $\rho a \notin M + \rho B$. Однако окрестность $\mathcal{V}$ компактна, а, значит, ограничена. При достаточно большом ρ она содержится в ρB, и тогда $\rho a \notin M + \mathcal{V}$, что противоречит ранее полученному результату $M + \mathcal{V} = E$.

§ 12. ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Определение. Отображение f метрического пространства E в E называется *сжатием*, если существует такая положительная постоянная $k < 1$, что для любой пары элементов x и y из E имеет место неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y). \qquad \text{(II, 12; 1)}$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что отображение f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывно.

Точка a называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(a) = a$.