ние. Предположим, что в E имеется некоторая компактная окрестность $\mathscr{V}$ точки 0. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если A — некоторая часть E, то λA, где λ — скаляр, является множеством точек λx, где $x \in A$. Если A и B — две части E, то через $A + B$ обозначается множество точек $x + y$, $x \in A$, $y \in B$. (Внимание! $2A$ содержится в $A + A$, но, вообще говоря, с ним не совпадает.) Векторное подпространство M пространства E характеризуется следующими свойствами: $M + M = M$ и $\lambda M \subset M$ для любого λ. Далее, $2\mathscr{V}$ является окрестностью 0 и $a + \mathring{\mathscr{V}}$ является открытой окрестностью точки a. Когда a пробегает множество $2\mathscr{V}$, множества $a + \mathring{\mathscr{V}}$ образуют открытое покрытие множества $2\mathscr{V}$. В силу предположения о компактности, существует конечное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, таких, что $a_i + \mathscr{V}$ покрывают $2\mathscr{V}$. Пусть M — векторное подпространство, порожденное векторами a_i. Оно конечномерно, а $M + \mathscr{V}$ покрывает $2\mathscr{V}$.

Имеем: $M + \mathscr{V} = M + M + \mathscr{V} \supset M + 2\mathscr{V}$. Умножая на 2, получаем: $M + \mathscr{V} \supset M + 2\mathscr{V} = 2M + 2\mathscr{V} = 2(M + \mathscr{V}) \supset 2(M + 2\mathscr{V}) = 2M + 4\mathscr{V} = M + 4\mathscr{V}$. Для любого n имеют место включения $M + \mathscr{V} \supset M + 2^n\mathscr{V} \supset 2^n\mathscr{V}$. Так как объединение всех $2^n\mathscr{V}$ дает все пространство, то $M + \mathscr{V}$ совпадает со всем пространством E. Отсюда можно получить, что M также совпадает с E, а, значит, E конечномерно. Если бы это было не так, то существовала бы точка $a \notin M$. Так как M замкнуто (следствие 2 теоремы 41), то тогда существовал бы шар с центром в a, не пересекающийся с M. Этот шар можно представить в виде $a + B$, где B — шар с центром в нуле пространства. Тогда $M + B$ не будет содержать a. Для произвольного $\rho > 0$ множество $M + \rho B = \rho M + \rho B$ не содержит ρa, и мы получаем $\rho a \notin M + \rho B$. Однако окрестность $\mathscr{V}$ компактна, а, значит, ограничена. При достаточно большом ρ она содержится в ρB, и тогда $\rho a \notin M + \mathscr{V}$, что противоречит ранее полученному результату $M + \mathscr{V} = E$.

§ 12. ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Определение. Отображение f метрического пространства E в E называется *сжатием*, если существует такая положительная постоянная $k < 1$, что для любой пары элементов x и y из E имеет место неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y). \qquad \text{(II, 12; 1)}$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что отображение f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывно.

Точка a называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(a) = a$.

Теорема 46. *Каждое сжатие полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку, и притом единственную.*

Доказательство. Единственность неподвижной точки очевидна, даже если E не полно. В самом деле, если a и b — две неподвижные точки, то

$$d(a, b) \leqslant kd(a, b) < d(a, b), \text{ если только } d(a, b) \neq 0. \qquad \text{(II, 12; 2)}$$

Поэтому $d(a, b) = 0$, т. е. a и b совпадают.

Докажем теперь существование неподвижной точки. Мы применим для этого метод, называемый методом *последовательных приближений.*

Пусть x_0 — произвольная точка E. Положим

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \ldots. \qquad \text{(II, 12; 3)}$$

Мы образовали некоторую бесконечную последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ элементов из E. Докажем, что она является последовательностью Коши. Поскольку f — сжатие, мы можем записать последовательность неравенств:

$$\begin{aligned} &d(x_2, x_1) \leqslant kd(x_1, x_0),\\ &d(x_3, x_2) \leqslant kd(x_2, x_1) \leqslant k^2 d(x_1, x_0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0), \end{aligned} \qquad \text{(II, 12; 4)}$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots\\ &\ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant (k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k + 1)\, k^n d(x_1, x_0) \leqslant\\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned} \qquad \text{(II, 12; 5)}$$

Отсюда получаем, что $d(x_{n+p}, x_n)$ стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$. Таким образом, последовательность x_n является последовательностью Коши. Так как E по условию полно, то эта последовательность сходится к некоторому пределу a. В силу непрерывности f последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к $f(a)$, а так как x_{n+1} также сходится к a, то $f(a) = a$ является неподвижной точкой отображения f. Описанная процедура не только позволяет установить существование неподвижной точки, но и является практическим методом ее вычисления. Неравенство

$$d(x_n, a) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \qquad \text{(II, 12; 6)}$$

дает оценку быстроты сходимости последовательности x_n к a.

Замечания. 1°) Предположение $k<1$ необходимо, ибо условие $k \leqslant 1$ не является достаточным ни для существования, ни для единственности неподвижной точки.

Тождественное отображение метрического пространства в себя удовлетворяет неравенству (II, 12; 1) при $k=1$; все точки пространства являются для него неподвижными. Сдвиг $x \to x+1$ на прямой также удовлетворяет неравенству (II, 12; 1) с $k=1$, но он не имеет ни одной неподвижной точки.

2°) *Пусть f — отображение E в E, не обязательно являющееся сжатием. Если одна из его итераций f_p является сжатием, то отображение f имеет неподвижную точку, и притом единственную.*

Напомним, что итерации отображения f множества E в себя определяются формулами:

$$f_2 = f \circ f, \ f_3 = f \circ f \circ f, \ \ldots, \ f_p = f \circ f_{p-1} = f_{p-1} \circ f. \quad \text{(II, 12; 7)}$$

Пусть a — неподвижная точка f. Она является неподвижной точкой для любой из итераций f, среди которых имеется итерация f_p, являющаяся сжатием, а, следовательно, имеющая только одну неподвижную точку. Отсюда следует, что само f может иметь только одну неподвижную точку. Для доказательства существования будем исходить из того, что сжатие f_p имеет единственную неподвижную точку a. Элемент $f_{p+1}(a)$ может быть записан двумя способами: либо $f(f_p(a)) = f(a)$, либо $f_p(f(a))$. Равенство $f_p(f(a)) = f_{p+1}(a) = f(a)$ означает, что $f(a)$ является новой неподвижной точкой итерации f_p. Поскольку f_p, будучи сжатием может иметь только одну неподвижную точку, то $f(a) = a$, т. е. a является неподвижной точкой отображения f. Таким образом, f имеет единственную неподвижную точку a. Мало того, ее можно получить теми же последовательными приближениями, так как последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, определенная формулами (II, 12; 3), сходится к a. В самом деле, каждая из последовательностей

$$x_0, \ x_p, \ x_{2p}, \ \ldots, \ x_{np}, \ \ldots;$$

$$x_1, \ x_{p+1}, \ x_{2p+1}, \ \ldots, \ x_{np+1}, \ \ldots; \quad x_{p-1}, \ x_{2p-1}, \ \ldots, \ x_{np+p-1}, \ \ldots$$

сходится к a, поскольку она определяет последовательные приближения для итерации f_p. Последнее означает, что вся последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ сходится к a. (Отметим следующее: предположение о том, что отображение f_p является сжатием, не влечет за собой непрерывности f.)

Предположим теперь, что сжатие f достаточно хорошим образом зависит от некоторого параметра λ. Тогда для каждого значения λ оно имеет, и притом единственную, неподвижную точку a_λ. Отыщем условия, при которых неподвижная точка a_λ непрерывно зависит от параметра λ.

Теорема 46_2. *Пусть E — полное метрическое пространство, Λ — топологическое пространство, а f — отображение $E \times \Lambda$ в E. Предположим, что для каждой фиксированной точки x из E частное отображение $\lambda \to f(x, \lambda)$ пространства Λ в пространство E непрерывно и что для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение f_λ: $x \to f(x, \lambda)$ является сжатием E в E, соответствующим числу $k < 1$ (формула (II, 12; 1)), не зависящему от λ. Тогда единственная неподвижная точка a_λ отображения f_λ непрерывно зависит от параметра λ, иначе говоря, отображение $\lambda \to a_\lambda$ пространства Λ в E непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через λ_0 какую-либо точку Λ. Тогда

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) = d(f_\lambda(a_\lambda), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \leqslant d(f_\lambda(a_\lambda), f_\lambda(a_{\lambda_0})) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \leqslant$$
$$\leqslant kd(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)), \qquad \text{(II, 12; 8)}$$

откуда

$$(1 - k)\, d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f по λ при фиксированном $x = a_{\lambda_0}$ существует в Λ такая окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0, что соотношение $\lambda \in \mathscr{V}$ влечет за собой $d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)) \leqslant \leqslant \varepsilon(1 - k)$. Тогда из соотношения $\lambda \in \mathscr{V}$ следует также неравенство $d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant \varepsilon$, доказывающее непрерывность рассматриваемого отображения в точке λ_0 пространства Λ.

§ 13. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

Пусть E и F — два векторных нормированных пространства над полем $\mathbb{K}$, которое мы всегда будем предполагать полем вещественных или полем комплексных чисел[1]). Пусть u — некоторое отображение E в F. Напомним, что u называется *линейным*, если

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}),$$
$$\lambda \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} \in E, \quad \vec{y} \in E.$$

[1]) Любое векторное пространство над полем комплексных чисел является также векторным пространством над полем вещественных чисел. Поэтому, если заданы два векторных пространства E и F, одно над полем вещественных, другое над полем комплексных чисел, то оба их можно рассматривать как векторное пространство над полем вещественных чисел.

Принято одним и тем же символом $\vec{0}$ обозначать нейтральные элементы (вообще говоря, различные) пространства E и F. Очевидно, $u(\vec{0}) = \vec{0}$. Одним и тем же символом $\| \ \|$ принято часто обозначать нормы в E и F.