Теорема 46₂. *Пусть E — полное метрическое пространство, Λ — топологическое пространство, а f — отображение $E \times \Lambda$ в E. Предположим, что для каждой фиксированной точки x из E частное отображение $\lambda \to f(x, \lambda)$ пространства Λ в пространство E непрерывно и что для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение f_λ: $x \to f(x, \lambda)$ является сжатием E в E, соответствующим числу $k < 1$ (формула* (II, 12; 1)), *не зависящему от λ. Тогда единственная неподвижная точка a_λ отображения f_λ непрерывно зависит от параметра λ, иначе говоря, отображение $\lambda \to a_\lambda$ пространства Λ в E непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через λ_0 какую-либо точку Λ. Тогда

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) = d(f_\lambda(a_\lambda), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \leqslant d(f_\lambda(a_\lambda), f_\lambda(a_{\lambda_0})) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \leqslant$$
$$\leqslant kd(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)), \qquad (II, 12; 8)$$

откуда

$$(1-k)\, d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f по λ при фиксированном $x = a_{\lambda_0}$ существует в Λ такая окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0, что соотношение $\lambda \in \mathscr{V}$ влечет за собой $d(f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)) \leqslant \leqslant \varepsilon(1-k)$. Тогда из соотношения $\lambda \in \mathscr{V}$ следует также неравенство $d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant \varepsilon$, доказывающее непрерывность рассматриваемого отображения в точке λ_0 пространства Λ.

§ 13. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

Пусть E и F — два векторных нормированных пространства над полем $\mathbb{K}$, которое мы всегда будем предполагать полем вещественных или полем комплексных чисел [1]). Пусть u — некоторое отображение E в F. Напомним, что u называется *линейным*, если

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}),$$
$$\lambda \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} \in E, \quad \vec{y} \in E.$$

---

[1]) Любое векторное пространство над полем комплексных чисел является также векторным пространством над полем вещественных чисел. Поэтому, если заданы два векторных пространства E и F, одно над полем вещественных, другое над полем комплексных чисел, то оба их можно рассматривать как векторное пространство над полем вещественных чисел.

Принято одним и тем же символом $\vec{0}$ обозначать нейтральные элементы (вообще говоря, различные) пространства E и F. Очевидно, $u(\vec{0}) = \vec{0}$. Одним и тем же символом $\| \ \|$ принято часто обозначать нормы в E и F.

Если E конечномерно, то линейное отображение E в F заведомо непрерывно и даже удовлетворяет условию Липшица, а значит, равномерно непрерывно. В самом деле, поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны (теорема 13), то для доказательства непрерывности, а также и равномерной непрерывности[1]) достаточно ввести в E некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и определить норму любого элемента $\vec{x}$ через его координаты в этом базисе $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формуле $\|\vec{x}\| = \max |x_i|$. При этом

$$\|u(\vec{x}') - u(\vec{x}'')\| = \|u(\vec{x}' - \vec{x}'')\| =$$
$$= \left\| u\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')\vec{e}_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'') u(\vec{e}_i)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|u(\vec{e}_i)\|\right) \max_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i' - x_i''| \leqslant k \|\vec{x}' - \vec{x}''\|,$$

что полностью доказывает наше утверждение.

Если же, напротив, мы будем считать E бесконечномерным, то высказанное утверждение будет неверным. Как это ни кажется странным, существуют линейные разрывные отображения.

Приведем пример. Возьмем в качестве E векторное пространство полиномов с вещественными коэффициентами над полем вещественных чисел[2]). Норму в E введем по формуле

$$\|P\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|. \qquad \text{(II, 13; 1)}$$

В том, что это действительно норма, легко убедиться, ибо все необходимые для нормы неравенства проверяются без труда. (Существование максимума вытекает из непрерывности P и теоремы 29.) Очевидно, $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$ для любого вещественного λ, а для любых полиномов P и Q имеет место неравенство $\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$. Если $P \not\equiv 0$, то $\|P\| > 0$; если же $\|P\| =$

---

[1]) Непрерывность является топологическим, а не метрическим свойством, чего нельзя сказать относительно равномерной непрерывности; однако теорема 12 утверждает, что в определении равномерной непрерывности некоторого отображения *нормированного векторного* пространства в другое пространство *нормы* можно заменить *эквивалентными нормами.*

[2]) Сложение и умножение на вещественное число является обычным сложением полиномов и обычным умножением их на число. При этом E будет векторным пространством, нулевым элементом которого является полином $\equiv 0$. Векторное пространство полиномов степени $\leqslant m$ имеет размерность $m + 1$. Один из его базисов составляют полиномы $1, x, x^2, \ldots, x^m$. Векторное пространство всевозможных полиномов поэтому бесконечномерно.

$= 0$, то полином P, равный нулю на $[0, 1]$, тождественно равен нулю.)

Выберем в качестве u вещественную функцию над E, которая каждому полиному P ставит в соответствие его значение в точке $x = 3$: $u(P) = P(3)$. Это, очевидно, некоторая линейная форма над E. Покажем, что она разрывна. Для этого достаточно рассмотреть последовательность полиномов, определенных формулами:

$$P_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n. \tag{II, 13; 2}$$

Очевидно, $\|P_n(x)\| = 2^{-n}$, и, следовательно, эта последовательность сходится к $\vec{0}$ в E. Тем не менее $P_n(3) = (3/2)^n$, и потому последовательность значений $u(P_n)$ стремится к $+\infty$, а это означает, что отображение u разрывно.

Теорема 47. *Всякое линейное отображение нормированного векторного пространства E в нормированное векторное пространство F, непрерывное в нуле пространства, непрерывно всюду. Это отображение, кроме того, удовлетворяет условию Липшица, а, следовательно, равномерно непрерывно. Для того чтобы отображение обладало этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое постоянное число $k \geqslant 0$, что*

$$\|u(\vec{x})\| \leqslant k \|\vec{x}\| \text{ для всех } \vec{x} \text{ из } E. \tag{II, 13; 3}$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что если отображение u непрерывно в нуле пространства E, то существует число k, при котором имеет место неравенство (II, 13; 3). Непрерывность u в нуле влечет за собой существование такого числа $\eta > 0$, при котором из $\|\vec{x}\| \leqslant \eta$ следует $\|u(\vec{x})\| \leqslant 1$. В силу линейности u, с помощью гомотетии получаем, что из $\|\vec{x}\| \leqslant \lambda\eta$ следует $\|u(\vec{x})\| \leqslant \lambda$. Так как первое из этих неравенств всегда выполняется, если взять $\lambda = \|\vec{x}\|/\eta$, то будет всегда выполняться и второе неравенство $\|u(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|/\eta$, и мы получим искомое неравенство с $k = 1/\eta$. Обратно, предположим, что существует некоторое число k, при котором имеет место неравенство (II, 13; 3). Тогда отображение u не только будет непрерывным в нуле пространства E, но будет также непрерывным всюду и даже удовлетворяющим условию Липшица, ибо, в силу линейности u, имеет место неравенство

$$\|u(\vec{x}') - u(\vec{x}'')\| = \|u(\vec{x}' - \vec{x}'')\| \leqslant k \|\vec{x}' - \vec{x}''\|. \tag{II, 13; 4}$$

Замечание. Это теорема включает в себя, как частный случай, теорему 12. В самом деле, утверждение «две нормы в векторном пространстве E эквивалентны» равносильно утверждению «тождественное отображение пространства E, снабженного одной из двух норм, на пространство E, снабженное другой нормой, является непрерывным». Но тогда из (II, 13; 3) следует (II, 4; 1).

Ядро и образ непрерывного линейного отображения

Пусть E и F — векторные пространства над полем K и u — линейное отображение E в F.

Ядром отображения u называется множество таких $\vec{x}$ из E, что $u(\vec{x}) = \vec{0}$. Это множество является также прообразом $u^{-1}\{\vec{0}\}$. *Ядро является векторным подпространством в* E, ибо для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$, принадлежащих ядру, $u(\vec{x}) = \vec{0}$, $u(\vec{y}) = \vec{0}$, а так как $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) = \vec{0}$, то $\vec{x} + \vec{y}$ также принадлежит ядру; $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) = \vec{0}$ для любого скаляра λ, т. е. $\lambda\vec{x}$ также принадлежит ядру.

Образом отображения u называется образ $u(E)$ пространства E при отображении u. *Это также некоторое векторное подпространство в* F. Размерность этого подпространства называется *рангом отображения* u. Напомним, что если E и F конечномерны и если в рассматриваемых пространствах выбраны базисы, то u выражается с помощью некоторой матрицы. Ранг отображения u является наибольшим порядком отличных от нуля минорóв этой матрицы. Напомним, что ранг является также разностью размерности E и размерности ядра отображения u.

Если пространства E и F нормированы, а u непрерывно, то ядро является замкнутым векторным подпространством, ибо оно является прообразом подмножества F, сводящегося к точке, которое замкнуто (теорема 8). Образ же не обязательно замкнут [1]).

Определение. Точная нижняя грань таких чисел k, при которых выполняется неравенство (II, 13; 3), называется *нормой* линейного отображения u [2]). Эта норма обозначается через $\|u\|$

---

[1]) Образ замкнутого подмножества при непрерывном отображении вовсе не обязан быть замкнутым!

[2]) Норму можно определить и тогда, когда линейное отображение u разрывно. В этом случае следует положить $\|u\| = +\infty$. Заметим, что эта точная нижняя грань является минимумом.

и определяется следующими соотношениями:

$$\|u\| = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|u(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\substack{\|\vec{x}\| \leqslant 1 \\ \vec{x} \neq \vec{0}}} \|u(\vec{x})\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|u(\vec{x})\|. \quad \text{(II, 13; 5)}$$

Заметим, в частности, что для любого $\vec{x}$

$$\|u(\vec{x})\| \leqslant \|u\| \|\vec{x}\|. \quad \text{(II, 13; 6)}$$

Теорема 48. *Множество $\mathscr{L}(E; F)$ линейных непрерывных отображений векторного нормированного пространства E в векторное нормированное пространство F имеет структуру нормированного векторного пространства с нормой, определенной формулой* (II, 13; 5). *Кроме того, если G — третье нормированное векторное пространство, $u \in \mathscr{L}(E; F)$, а $v \in \mathscr{L}(F; G)$, то $v \circ u \in \mathscr{L}(E; G)$ и имеет место неравенство*

$$\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \|u\|. \quad \text{(II, 13; 7)}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathscr{L}(E; F)$ имеет структуру векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. Пусть u_1 и u_2 — два линейных непрерывных отображения E в F. Определим отображение $u_1 + u_2$ формулой:

$$(u_1 + u_2)(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) + u_2(\vec{x}). \quad \text{(II, 13; 8)}$$

Легко проверить, что так определенное отображение является новым линейным отображением E в F. С другой стороны, неравенство (полученное из (II, 13; 6)):

$$\|(u_1 + u_2)(\vec{x})\| \leqslant \|u_1(\vec{x})\| + \|u_2(\vec{x})\| \leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|) \|\vec{x}\| \quad \text{(II, 13; 9)}$$

показывает, что оно непрерывно, т. е. $u_1 + u_2 \in \mathscr{L}(E; F)$, и, кроме того, согласно (II, 13; 5), имеет место неравенство

$$\|u_1 + u_2\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|. \quad \text{(II, 13; 10)}$$

Мы видим, что в $\mathscr{L}(E; F)$ определено сложение элементов, превращающее его в абелеву группу. Нулем этой группы является нулевое отображение 0, т. е. такое отображение, которое каждому элементу из E ставит в соответствие нулевой вектор $\vec{0}$ пространства F. Пусть теперь λ — некоторый скаляр. Для любого $u \in \mathscr{L}(E; F)$ определим отображение λu по формуле

$$(\lambda u)(\vec{x}) = \lambda(u(\vec{x})). \quad \text{(II, 13; 11)}$$

Легко проверяется, что это снова некоторое линейное отображение. Кроме того, это линейное отображение непрерывно, т. е. $\lambda u \in \mathscr{L}(E; F)$. В самом деле,

$$\|(\lambda u)(\vec{x})\| = |\lambda| \|u(\vec{x})\| \leqslant |\lambda| \|u\| \|\vec{x}\|. \qquad \text{(II, 13; 12)}$$

Кроме того,

$$\|\lambda u\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|(\lambda u)(\vec{x})\| = |\lambda| \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|u(\vec{x})\|; \qquad \text{(II, 13; 13)}$$

другими словами,

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|. \qquad \text{(II, 13; 14)}$$

Таким путем в множестве $\mathscr{L}(E; F)$ мы определили умножение на скаляры. Легко видеть, что это умножение обладает по отношению к сложению элементов из $\mathscr{L}(E; F)$ всеми свойствами, необходимыми для того, чтобы можно было считать $\mathscr{L}(E; F)$ векторным пространством над полем $\mathbb{K}$. Кроме того, из (II, 13; 10) и (II, 13; 14) следует, что отображение $u \to \|u\|$, действительно, определяет некоторую норму в $\mathscr{L}(E; F)$ (тот факт, что из $\|u\| = 0$ следует $u = 0$, очевидным образом вытекает из (II, 13; 6)). Таким образом, $\mathscr{L}(E; F)$ является нормированным векторным пространством. Далее, если $u \in \mathscr{L}(E; F)$ и $v \in \mathscr{L}(F; G)$, то, очевидно, $v \circ u \in \mathscr{L}(E; G)$[1]. С другой стороны, из неравенства $\|(v \circ u)(\vec{x})\| \leqslant \|v\| \|u(\vec{x})\| \leqslant \|v\| \|u\| \|\vec{x}\|$ следует, что $\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \|u\|$ — неравенство (II, 13; 7), указанное в формулировке теоремы.

В частности, когда F является полем скаляров $\mathbb{K}$, то линейное отображение E в $\mathbb{K}$ называется линейной формой на E. Пространство линейных *непрерывных* форм обозначается через E' и называется *сопряженным* к E. Оно является векторным нормированным пространством[2].

Обозначения. Если $u \in \mathscr{L}(E; F)$ и $\vec{x} \in E$, то через $u \circ \vec{x}$ (или даже $u\vec{x}$) удобно обозначать образ $u(\vec{x})$ вектора $\vec{x}$ при

---

[1]) Композиция двух линейных отображений линейна, а композиция двух непрерывных отображений непрерывна (теорема 10).

[2]) В курсах алгебры и геометрии сопряженным к векторному пространству E обычно называют векторное пространство линейных форм на E. Это определение совпадает с нашим, если E конечномерно, так как в этом случае при любой норме на E каждая линейная форма непрерывна (стр. 111). Если же пространство E бесконечномерно и нормировано, то существуют разрывные линейные формы, но они не представляют интереса, и термин «сопряженный» предпочтительно оставить за пространством непрерывных линейных форм.

отображении u. Если, кроме того, имеется отображение $v \in \mathscr{L}(F; G)$, то через $v \cdot u$ или vu часто обозначают композицию $v \circ u$. Тогда соотношение $(v \circ u)(\vec{x}) = v(u(\vec{x}))$ может быть записано так: $(v \circ u) \circ \vec{x}$, или $v \circ (u \circ \vec{x})$, или $v \circ u \circ \vec{x}$, или $vu\vec{x}$. Если $F = E$ и $u \in \mathscr{L}(E; E)$, то $u \circ u$ обозначается через u^2, $u \circ u \circ u$ обозначается через u^3 и т. д.

Теорема 49. *Пусть E и F — нормированные векторные пространства, E_1 — плотное векторное подпространство E и u_1 — линейное непрерывное отображение E_1 в F. Если F полно, то существует, и притом единственное, непрерывное продолжение u отображения u_1 в E. Это отображение E в F линейно, и норма u в $\mathscr{L}(E; F)$ равна норме u_1 в $\mathscr{L}(E_1; F)$.*

Доказательство. Поскольку отображение u_1 линейно и непрерывно, оно равномерно непрерывно (теорема 47). Следовательно, согласно теореме 45, существует, и притом единственное, непрерывное отображение E в F, являющееся продолжением u_1. Докажем сначала, что u линейно. Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — элементы E, а λ — некоторый скаляр. Пусть $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ и $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots$ — последовательности элементов из E_1, сходящиеся соответственно к $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В силу того, что E является топологическим векторным пространством (стр. 66), последовательность $\vec{x}_n + \vec{y}_n$ сходится к $\vec{x} + \vec{y}$, а последовательность $\lambda\vec{x}_n$ сходится к $\lambda\vec{x}$.

Имеем

$$\begin{aligned} u(\vec{x} + \vec{y}) &= \lim_{n\to\infty} u_1(\vec{x}_n + \vec{y}_n)\ ^{1)} = \lim_{n\to\infty} [u_1(\vec{x}_n) + u_1(\vec{y}_n)]\ ^{2)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} u_1(\vec{x}_n) + \lim_{n\to\infty} u_1(\vec{y}_n)\ ^{3)} = u(\vec{x}) + u(\vec{y})\ ^{4)}; \end{aligned} \qquad \text{(II, 13; 15)}$$

$$u(\lambda\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} u_1(\lambda\vec{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda u_1(\vec{x}_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} u_1(\vec{x}_n) = \lambda u(\vec{x}),$$

что говорит о линейности отображения u.

Покажем теперь, что норма u в $\mathscr{L}(E; F)$ равна норме u_1 в $\mathscr{L}(E_1; F)$. Из определения нормы (формула (II, 13; 5)) очевидным образом следует, что $\|u_1\| \leqslant \|u\|$. Впрочем, если $\vec{x} \in E$ яв-

[1]) Поскольку $\vec{x}_n + \vec{y}_n$ сходится к $\vec{x} + \vec{y}$ и u является функцией, непрерывно продолжающей u_1.

[2]) Потому, что u_1 линейно.

[3]) Так как F является топологическим векторным пространством.

[4]) Поскольку u непрерывно и является продолжением u_1.

ляется пределом последовательности $\vec{x}_n \in E_1$, то $u(\vec{x})$ является пределом $u_1(\vec{x}_n)$. Из неравенства $\|u_1(\vec{x}_n)\| \leqslant \|u_1\| \|\vec{x}_n\|$ и непрерывности нормы (теорема 9), переходя к пределу, находим, что $\|u(\vec{x})\| \leqslant \|u_1\| \|\vec{x}\|$. Это означает, что $\|u\| \leqslant \|u_1\|$, а следовательно $\|u\| = \|u_1\|$.

Следствие. *В условиях теоремы, т. е. если E_1 плотно в E и F полно, векторные нормированные пространства $\mathscr{L}(E; F)$ и $\mathscr{L}(E_1; F)$ можно отождествлять.*

В самом деле, поставим в соответствие каждому линейному непрерывному отображению u пространства E в пространство F его сужение u_1 на E_1. Теорема утверждает, что так определенное соответствие $u \to u_1$ пространств $\mathscr{L}(E; F)$ и $\mathscr{L}(E_1; F)$ является биекцией, сохраняющей структуру векторного пространства и нормы. Это означает, что два векторных нормированных пространства $\mathscr{L}(E; F)$ и $\mathscr{L}(E_1; F)$ могут быть отождествлены.

Определение. Векторное нормированное полное пространство над полем вещественных и комплексных чисел называется *банаховым пространством.*

Из изложенного ранее на стр. 102 (теорема 41) вытекает, что всякое конечномерное нормированное векторное пространство является банаховым.

Теорема 50. *Если E и F — нормированные векторные пространства и F банахово пространство, то пространство $\mathscr{L}(E; F)$ также банахово. В частности, сопряженное пространство E' к пространству E банахово.*

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение. Поскольку поле скаляров $\mathbb{K}$ является банаховым, то второе утверждение немедленно вытекает из первого ($E' = \mathscr{L}(E; \mathbb{K})$). Итак, пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — некоторая последовательность Коши в $\mathscr{L}(E; F)$. Это означает, что при m и n, стремящихся к $+\infty$, норма $\|u_m - u_n\|$ стремится к нулю.

Неравенство $\|u_m(\vec{x}) - u_n(\vec{x})\| \leqslant \|u_m - u_n\| \|\vec{x}\|$, справедливое для каждого фиксированного $\vec{x}$, доказывает, что последовательность $u_n(\vec{x})$ является последовательностью Коши в F. Поскольку F по предположению полно, то эта последовательность сходится к некоторому элементу F, который мы будем обозначать через $u(\vec{x})$. Тем самым мы определили отображение u: $\vec{x} \to u(\vec{x})$ E в F. Покажем, прежде всего, что отображение u линейно. Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — элементы E и λ — некоторый скаляр.

Тогда

$$\begin{aligned} u(\vec{x}+\vec{y}) &= \lim_{n\to\infty} u_n(\vec{x}+\vec{y})\ ^{1)} = \lim_{n\to\infty} (u_n(\vec{x})+u_n(\vec{y}))\ ^{2)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n(\vec{x}) + \lim_{n\to\infty} u_n(\vec{y})\ ^{3)} = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), \\ u(\lambda\vec{x}) &= \lim_{n\to\infty} u_n(\lambda\vec{x})\ ^{1)} = \lim_{n\to\infty} \lambda u_n(\vec{x})\ ^{2)} = \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} u_n(\vec{x})\ ^{3)} = \lambda u(\vec{x}), \end{aligned} \tag{II, 13; 16}$$

что означает линейность отображения u.

Докажем теперь, что отображение u непрерывно. Согласно критерию Коши, существует такое целое число p, что из неравенств $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$ следует неравенство $\|u_m - u_n\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда получаем, что для $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ $\|u_m\| \leqslant \|u_n\| + \varepsilon$. Кроме того, выполняются также неравенства

$$\|u_m(\vec{x}) - u_n(\vec{x})\| \leqslant \varepsilon \|\vec{x}\|, \tag{II, 13; 17}$$

$$\|u_m(\vec{x})\| \leqslant (\|u_n\| + \varepsilon)\|\vec{x}\|. \tag{II, 13; 18}$$

Фиксируя в (II, 13; 18) $n \geqslant p$ и вектор $\vec{x}$ и устремляя m к $+\infty$, получаем:

$$\|u(\vec{x})\| \leqslant (\|u_n\| + \varepsilon)\|\vec{x}\|, \tag{II, 13; 19}$$

откуда следует непрерывность отображения u. Таким образом, u является элементом пространства $\mathscr{L}(E; F)$.

Если теперь при фиксированном $\vec{x}$ и $n \geqslant p$ в соотношении (II, 13; 17) устремить m к $+\infty$, то получим

$$\|u(\vec{x}) - u_n(\vec{x})\| \leqslant \varepsilon \|\vec{x}\|, \tag{II, 13; 20}$$

а, следовательно,

$$\|u - u_n\| \leqslant \varepsilon. \tag{II, 13; 21}$$

Полученное неравенство показывает, что u_n стремится к u в нормированном пространстве $\mathscr{L}(E; F)$ при n, стремящемся к $+\infty$, а это означает, что $\mathscr{L}(E; F)$ полно.

Произведения нормированных векторных пространств

Пусть E_1 и E_2 — два векторных пространства над полем $\mathbb{K}$. Известно, что их произведение $E_1 \times E_2$ может быть снабжено

[1] По определению u.

[2] В силу линейности u_n.

[3] Так как F является топологическим векторным пространством.

структурой векторного пространства. В самом деле, если $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ и $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ — два элемента этого произведения, то можно положить

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2). \qquad \text{(II, 13; 22)}$$

Если λ — некоторый скаляр, то можно считать

$$\lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2). \qquad \text{(II, 13; 23)}$$

Введенные операции на $E_1 \times E_2$ превращают его в векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) является не чем иным, как векторным пространством произведения n пространств, тождественных $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$), рассматриваемых как векторные пространства над самим $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

В этом векторном пространстве существует два особых подпространства: пространство $A_1 = E_1 \times \{\vec{0}\}$ элементов вида $(\vec{x}_1, \vec{0})$ и пространство $A_2 = \{0\} \times E_2$ элементов вида $(\vec{0}, \vec{x}_2)$. Эти пространства являются дополнительными в том смысле, что каждый элемент $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ произведения единственным образом записывается в виде суммы одного элемента из первого пространства и одного элемента из второго, так что $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2)$.

Когда два векторных подпространства некоторого векторного пространства являются дополнительными, исходное пространство может быть представлено в виде прямой суммы этих подпространств, и эта прямая сумма обозначается знаком $\oplus$. Поэтому мы можем записать

$$E_1 \times E_2 = E_1 \times \{\vec{0}\} \oplus \{\vec{0}\} \times E_2. \qquad \text{(II, 13; 24)}$$

Если E_1 и E_2 — два нормированных векторных пространства с нормами $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$, то на произведении $E_1 \times E_2$ не существует нормы, которая была бы предпочтительнее других. Можно взять, например, какую-либо одну из следующих эквивалентных норм:

$$\|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| = \max(\|\vec{x}_1\|_1, \|\vec{x}_2\|_2), \text{ или } \|\vec{x}_1\|_1 + \|\vec{x}_2\|_2, \text{ или } \sqrt{\|\vec{x}_1\|_1^2 + \|\vec{x}_2\|_2^2}. \qquad \text{(II, 13; 25)}$$

Для каждой из этих норм топология пространства $E_1 \times E_2$ является топологией произведения. Дополнительные подпространства $E_1 \times \{0\}$ и $\{\vec{0}\} \times E_2$ замкнуты в E. Если не будет оговорено противное, пространство $E_1 \times E_2$ всегда будет снабжаться одной из этих норм и один и тот же символ $\| \|$ будет обозначать нормы в E_1, E_2 и $E_1 \times E_2$.

Теорема 51. *Пусть E_1 и E_2 — два нормированных векторных пространства. Всякое линейное непрерывное отображение u из $E_1 \times E_2$ в векторное нормированное пространство F выражается, и притом единственным образом, в виде*

$$u(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2), \qquad \text{(II, 13; 26)}$$

где u_1 (соответственно u_2) является линейным непрерывным отображением E_1 (соответственно E_2) в F. Обратно, если u_1 (соответственно u_2) является линейным непрерывным отображением E_1 (соответственно E_2) в F, то отображение u, определенное формулой (II, 13; 26), *является линейным непрерывным отображением $E_1 \times E_2$ в F.*

Доказательство. При заданном u определим отображение u_1 следующим образом: значением u_1 на элементе $\vec{x}_1$ из E_1 будет значение u на элементе $(\vec{x}_1, \vec{0})$ из $E_1 \times E_2$: $u_1(\vec{x}_1) = u(\vec{x}, \vec{0})$. Таким же образом определим отображение u_2 из E_2 в F. Отображения u_1 и u_2, очевидно, являются линейными. Они непрерывны, если на $E_1 \times E_2$ с помощью формулы (II, 13; 25) ввести одну из эквивалентных норм, т. е. если на $E_1 \times E_2$ ввести топологию произведения.

В самом деле, в этом случае имеем неравенство

$$\| u_1(\vec{x}_1) \| = \| u(\vec{x}_1, \vec{0}) \| \leqslant \| u \| \| (\vec{x}_1, \vec{0}) \| = \| u \| \| \vec{x}_1 \|, \qquad \text{(II, 13; 27)}$$

которое доказывает наше утверждение и показывает в то же время, что имеют место неравенства

$$\| u_1 \| \leqslant \| u \|, \quad \| u_2 \| \leqslant \| u \|. \qquad \text{(II, 13; 28)}$$

Непосредственно видно, что

$$u(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = u(\vec{x}_1, \vec{0}) + u(\vec{0}, \vec{x}_2)\,^{1)} = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2), \qquad \text{(II, 13; 29)}$$

а это доказывает, что u представлено в указанном выше виде.

Непосредственно видно, что других отображений u_1 и u_2, обладающих тем же свойством, не существует, потому что, если бы v_1 и v_2 были бы такими линейными отображениями, что $u(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = v_1(x_1) + v_2(x_2)$, то мы имели бы $u(\vec{x}_1, \vec{0}) = v_1(\vec{x}_1)$, а следовательно, $v_1 = u_1$ и точно так же $v_2 = u_2$.

Обратно, если u_1 (соответственно u_2) является линейным непрерывным отображением E_1 (соответственно E_2) в F, то ото-

---

[1]) В силу линейности u, а также потому, что $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2)$.

бражение u, определенное формулой (II, 13; 26), очевидно, линейно и, кроме того, непрерывно, ибо

$$\|u(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| \leqslant \|u_1(\vec{x}_1)\| + \|u_2(\vec{x}_2)\| \leqslant \|u_1\|\|\vec{x}_1\| + \|u_2\|\|\vec{x}_2\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|) \max(\|\vec{x}_1\|, \|\vec{x}_2\|) \leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|) \|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\|. \quad \text{(II, 13; 30)}$$

Отсюда сразу же получаем, что оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|. \quad \text{(II, 13; 31)}$$

Мы предоставляем читателю определить структуру нормированного векторного пространства произведения n векторных нормированных пространств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ и обобщить теорему 51 на линейные непрерывные отображения $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в F.

Билинейные непрерывные отображения произведения нормированных векторных пространств в нормированное векторное пространство

Пусть E, F, G — векторные пространства над полем $\mathbb{K}$. Мы изучили линейные отображения векторного пространства $E \times F$ в пространство G. Теперь рассмотрим совершенно новое понятие *билинейного отображения* $E \times F$ в G.

Отображение u пространства $E \times F$ в пространство G называется *билинейным*, если при фиксировании одной из переменных оно линейно относительно другой переменной. Если мы зафиксируем $\vec{x}$, то u определит некоторое частное отображение $\vec{y} \to u(\vec{x}, \vec{y})$ пространства F в G. Это отображение обозначается через $u_{\vec{x}}$, так что

$$u_{\vec{x}}(\vec{y}) = u(\vec{x}, \vec{y}). \quad \text{(II, 13; 32)}$$

Удобно также обозначать это отображение через $u(\vec{x},\ )$, опуская переменную $\vec{y}$ [1]).

Если u — билинейное отображение, то $u_{\vec{x}}$ должно быть линейным отображением F в G; другими словами, должны выпол-

[1]) Если E и F различны, обозначение $u_{\vec{x}}$ для данного элемента $\vec{x}$ из E не вызывает недоразумений. Но если $E = F$ и u является билинейным отображением $E \times E$ в G, то обозначение $u_{\vec{x}}$ для элемента $\vec{x}$ из E не имеет точного смысла, ибо непонятно, о какой из частных функций идет речь — о первой или второй. В этом случае следует писать $u(\vec{x},\ )$ или $u(\ , \vec{x})$.

няться равенства:

$$u(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = u(\vec{x}, \vec{y}_1) + u(\vec{x}, \vec{y}_2),$$
$$u(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda u(\vec{x}, \vec{y}). \qquad \text{(II, 13; 33)}$$

Аналогично, частное отображение $u_{\vec{y}}$ или $u(\ ,\vec{y})$: $\vec{x} \to u(\vec{x}, \vec{y})$ должно быть линейным отображением E в G; другими словами,

$$u(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = u(\vec{x}_1, \vec{y}) + u(\vec{x}_2, \vec{y}),$$
$$u(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda u(\vec{x}, \vec{y}). \qquad \text{(II, 13; 34)}$$

Имея в виду соотношения, относящиеся к сложению, говорят, что u дистрибутивно по отношению к сложению. Из двух предыдущих формул легко получить соотношения:

$$u(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = u(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + u(\vec{x}_1, \vec{y}_2) + u(\vec{x}_2, \vec{y}_1) + u(\vec{x}_2, \vec{y}_2)\ ^{1)},$$
$$\text{(II, 13; 35)}$$
$$u(\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}) = \lambda\mu u(\vec{x}, \vec{y}).$$

Например, скалярное произведение векторов является билинейным отображением $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$; векторное произведение является билинейным отображением $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Прототипом билинейных отображений являются обычные произведения вещественных или комплексных чисел. Это — билинейные отображения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Впрочем, любое билинейное отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ имеет вид $(x, y) \to cxy$, где c — некоторая вещественная постоянная, в то время как линейное отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ имеет вид $(x, y) \to ax + by$, где a и b — вещественные постоянные.

Теорема 52. *Всякое билинейное отображение произведения нормированных векторных пространств $E \times F$ в нормированное векторное пространство G, непрерывное в нуле пространства $E \times F$, непрерывно всюду (но не равномерно непрерывно). Для того чтобы оно было таким, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $k \geqslant 0$, что для всех $\vec{x}$ из E и всех $\vec{y}$ из F имело место неравенство*

$$\| u(\vec{x}, \vec{y}) \| \leqslant k \| \vec{x} \| \| \vec{y} \|\ ^{2)}. \qquad \text{(II, 13; 36)}$$

---

1) Если бы u было линейным на $E \times F$, то в правой части равенства мы бы имели либо $u(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + u(\vec{x}_2, \vec{y}_2)$, либо $u(\vec{x}_1, \vec{y}_2) + u(\vec{x}_2, \vec{y}_1)$.

2) Для линейного отображения правая часть имеет, например, такой вид: $k(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)$.

Доказательство. Пусть E, F, G — векторные нормированные пространства, и пусть u — билинейное отображение $E\times F$ в G, непрерывное в нуле. Тогда, согласно определению топологического произведения, должно существовать такое число $\eta>0$, что из неравенств $\|\vec{x}\|\leqslant\eta$, $\|\vec{y}\|\leqslant\eta$ следует неравенство $\|u(\vec{x},\vec{y})\|\leqslant 1$. Если мы теперь произведем гомотетию с отношениями λ и $\mu\geqslant 0$, то из второй формулы (II, 13; 35) получим, что из $\|\vec{x}\|\leqslant\lambda\eta$, $\|\vec{y}\|\leqslant\mu\eta$ следует $\|u(\vec{x},\vec{y})\|\leqslant\lambda\mu$.

Так как первые неравенства будут выполнены при $\lambda=\|\vec{x}\|/\eta$, $\mu=\|\vec{y}\|/\eta$, то мы всегда будем иметь неравенство $\|u(\vec{x},\vec{y})\|\leqslant(1/\eta^2)\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, являющееся формулой (II, 13; 36) с $k=1/\eta^2$. Обратно, пусть u является билинейным отображением, удовлетворяющим неравенству вида (II, 13; 36). Докажем, что тогда оно непрерывно всюду. Пусть задана точка $(\vec{a},\vec{b})$ пространства $E\times F$ и число $\varepsilon>0$. Имеет место формула

$$u(\vec{x},\vec{y})-u(\vec{a},\vec{b})=u(\vec{x}-\vec{a},\vec{y})+u(\vec{a},\vec{y}-\vec{b}), \qquad \text{(II, 13; 37)}$$

из которой вытекает оценка

$$\|u(\vec{x},\vec{y})-u(\vec{a},\vec{b})\|\leqslant k\|\vec{x}-\vec{a}\|\|\vec{y}\|+k\|\vec{a}\|\|\vec{y}-\vec{b}\|. \qquad \text{(II, 13; 38)}$$

Положим $\eta_2=\varepsilon/(2k\|\vec{a}\|)$. Из неравенства $\|\vec{y}-\vec{b}\|\leqslant\eta_2$ следует, очевидно, неравенство $k\|\vec{a}\|\|\vec{y}-\vec{b}\|\leqslant\varepsilon/2$. Выберем затем $\eta_1=\varepsilon/[2k(\|\vec{b}\|+\eta_2)]$. Очевидно, для $\|\vec{y}-\vec{b}\|\leqslant\eta_2$ имеет место оценка $\|\vec{y}\|\leqslant\|\vec{b}\|+\eta_2$, откуда получаем, что из $\|\vec{x}-\vec{a}\|\leqslant\eta_1$ вытекает неравенство $k\|\vec{x}-\vec{a}\|\|\vec{y}\|\leqslant\varepsilon/2$.

Полученные оценки показывают, что из $\|\vec{x}-\vec{a}\|\leqslant\eta_1$, $\|\vec{y}-\vec{b}\|\leqslant\eta_2$ следует неравенство $\|u(\vec{x},\vec{y})-u(\vec{a},\vec{b})\|\leqslant\varepsilon$, а это является определением непрерывности отображения u в точке $(\vec{a},\vec{b})$.

Заметим, напротив, что если билинейное отображение u не является тождественно нулевым, то оно не может быть и равномерно непрерывным. В самом деле, предположим, что существует хотя бы одна пара $(\vec{a},\vec{b})$, для которой $u(\vec{a},\vec{b})\neq 0$.

Рассмотрим теперь в пространстве $E\times F$ последовательность точек $\vec{X}_n=(n\vec{a},n\vec{b})$ и последовательность точек $\vec{Y}_n=((n+1/n)\vec{a},(n+1/n)\vec{b})$. Из неравенства $\|\vec{X}_n-\vec{Y}_n\|\leqslant(\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)/n$ следует, что эта величина стремится к нулю при n, стремящемся к $+\infty$. Тем не менее норма разности $u(\vec{X}_n)-u(\vec{Y}_n)=(n^2-(n+1/n)^2)\times\times u(\vec{a}, \vec{b})=-(2+1/n^2)u(\vec{a}, \vec{b})$ при n, стремящемся к $+\infty$, стремится к $2\|u(\vec{a}, \vec{b})\|\neq 0$, а это означает, что функция u равномерно непрерывной быть не может [1]).

Определение. Точная нижняя грань таких чисел k, при которых имеет место неравенство (II, 13; 36), называется *нормой билинейного отображения* и обозначается через $\|u\|$. Таким образом, по определению,

$$\|u\|=\sup_{\vec{x}\neq\vec{0},\ \vec{y}\neq\vec{0}}\frac{\|u(\vec{x}, \vec{y})\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}=\sup_{\|\vec{x}\|\leqslant 1,\ \|\vec{y}\|\leqslant 1}\|(\vec{x}, \vec{y})\|. \qquad \text{(II, 13; 39)}$$

Заметим, что всегда

$$\|u(\vec{x}, \vec{y})\|\leqslant\|u\|\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|. \qquad \text{(II, 13; 40)}$$

Теорема 53. *Множество $\mathscr{L}_2(E, F; G)$ билинейных отображений произведения нормированных векторных пространств $E\times F$ в нормированное векторное пространство G будет иметь структуру нормированного векторного пространства, если в нем определить норму по формуле* (II, 13; 39). *Если, кроме того, G является банаховым пространством, то $\mathscr{L}_2(E, F; G)$ также будет банаховым пространством. В частности, выбирая в качестве G поле скаляров, получаем, что векторное пространство билинейных непрерывных форм на произведении нормированных векторных пространств является банаховым пространством.*

Доказательство аналогично доказательствам теорем 48 и 50.

Рассмотрим теперь непрерывное билинейное отображение u пространства $E\times F$ в пространство G. Мы видим, что для фиксированного $\vec{x}$ оно определяет линейное отображение $u_{\vec{x}}$ из F в G. Это отображение, очевидно, непрерывно и его норма $\leqslant\|u\|\,\|\vec{x}\|$ в силу (II, 13; 40), а значит, $u_{\vec{x}}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}(F; G)$. Тем самым мы нашли отображение, которое каждому элементу $\vec{x}$ из E ставит в соответствие некоторый элемент $u_{\vec{x}}$ из $\mathscr{L}(F; G)$; другими словами, мы определили отображение U пространства E в пространство $\mathscr{L}(F; G)$. Оба пространства E и $\mathscr{L}(F; G)$ являются нормированными векторными

[1]) Впрочем, известно, что произведение $(x, y)\to xy$ не является равномерно непрерывным отображением $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и что функция $x\to x^2$ не является равномерно непрерывной функцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

пространствами. Докажем, что U является линейным непрерывным отображением E в $\mathscr{L}(F;\ G)$ и что норма $\|U\|$ этого линейного отображения есть не что иное, как норма $\|u\|$ рассматриваемого билинейного отображения.

Докажем прежде всего линейность отображения U; для этого, естественно, не требуется использовать топологию. Нам надо показать, что

$$u_{\vec{x}_1+\vec{x}_2}=u_{\vec{x}_1}+u_{\vec{x}_2} \quad \text{и} \quad u_{\lambda\vec{x}}=\lambda u_{\vec{x}}. \qquad \text{(II, 13; 41)}$$

Все выписанные элементы являются элементами пространства $\mathscr{L}(F;\ G)$, т. е. линейными отображениями F в G. Согласно определению суммы двух линейных отображений или произведения линейного отображения на скаляр, эти равенства означают, что для каждого элемента $\vec{y}$ из F имеют место равенства:

$$u(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{y})=u(\vec{x}_1,\ \vec{y})+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}) \quad \text{и} \quad (\lambda\vec{x},\ \vec{y})=\lambda u(\vec{x},\ \vec{y}). \qquad \text{(II, 13; 42)}$$

Но эти равенства справедливы, ибо они означают лишь то, что частное отображение $u_{\vec{y}}$ пространства F в пространство G для каждого фиксированного $\vec{y}$ линейно.

Докажем теперь непрерывность отображения U. Норма линейного отображения $U(\vec{x})=u_{\vec{x}}$ пространства F в G не превосходит величины $\|u\|\ \|\vec{x}\|$. Из этого неравенства следует, что U является линейным непрерывным отображением E в $\mathscr{L}(F;\ G)$ и что $\|U\|\leqslant\|u\|$. Так как $\|U(\vec{x})\|\leqslant\|U\|\|\vec{x}\|$, то $\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|=$ $=\|U(\vec{x})\|\|\vec{y}\|\leqslant\|U\|\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, откуда $\|u\|\leqslant\|U\|$, а, значит, $\|u\|=\|U\|$.

Обратно, будем исходить из линейного непрерывного отображения U из E в $\mathscr{L}(F;\ G)$. Для каждого $\vec{x}$ из E, $U(\vec{x})$ является элементом $\mathscr{L}(F;\ G)$, т. е. линейным непрерывным отображением F в G, и, следовательно, для каждого элемента $\vec{y}$ из F $U(\vec{x})\cdot\vec{y}$ является элементом G. Если мы положим $u(\vec{x},\ \vec{y})=$ $=U(\vec{x})\cdot\vec{y}$, то получим, что u: $(\vec{x},\ \vec{y})\to u(\vec{x},\ \vec{y})$ есть отображение $E\times F$ в G. Без труда проверяется, что оно билинейно, а из неравенств $\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant\|U(\vec{x})\|\|\vec{y}\|\leqslant\|U\|\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, $\|u\|\leqslant\|U\|$ следует его непрерывность.

Частное отображение $u_{\vec{x}}$, соответствующее u, для каждого фиксированного $\vec{x}$ является не чем иным, как $U(\vec{x})$, а линейное непрерывное отображение E в $\mathscr{L}(F; G)$, соответствующее u, есть не что иное, как исходное отображение U. *Установленное соответствие между отображениями u и U является биекцией пространства $\mathscr{L}_2(E, F; G)$ билинейных непрерывных отображений из $E \times F$ в G на пространство $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ линейных непрерывных отображений E в $\mathscr{L}(F; G)$, и эта биекция сохраняет векторные структуры и нормы. Существует, естественно, аналогичная биекция $\mathscr{L}_2(E, F; G)$ на $\mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E, G))$.*

Теорема 54. *Пусть E и F — нормированные векторные пространства. Тогда отображение $(u, \vec{x}) \to u \cdot \vec{x}$ пространства $\mathscr{L}(E; F) \times E$ в пространство F является билинейным непрерывным и имеет норму, равную 1 (за исключением того случая, когда E или F сводится к нулю).*

Если E, F, G — три нормированных векторных пространства, то отображение $(u, v) \to v \circ u$ пространства $\mathscr{L}(E; F) \times \mathscr{L}(F; G)$ в пространство $\mathscr{L}(E; G)$ билинейно, непрерывно и имеет норму, равную 1 (за исключением того случая, когда E, F или G сводятся к нулю).

Доказательство. Билинейность рассматриваемого отображения очевидным образом вытекает из определения суммы двух линейных отображений и умножения линейного отображения на скаляр[1]). Непрерывность этих билинейных отображений и тот факт, что их норма $\leqslant 1$, сразу вытекает из оценок $\|u \cdot \vec{x}\| \leqslant \|u\| \|\vec{x}\|$, $\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \|u\|$ (формулы (II, 13; 6) и (II, 13; 7)). Далее, при заданном u и любом заданном $\varepsilon > 0$, согласно определению нормы u, существует по крайней мере один элемент $\vec{x} \neq \vec{0}$ из E, такой, что $\|u \cdot \vec{x}\| \geqslant (1 - \varepsilon) \|u\| \|\vec{x}\|$, откуда следует, что норма первого билинейного отображения $\geqslant 1 - \varepsilon$. Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, то эта норма $\geqslant 1$, и, следовательно, она равна 1.

Тот факт, что норма второго билинейного отображения также равна 1, мы примем без доказательства.

Мультилинейные непрерывные отображения

Пусть E_1, E_2, ..., E_n, F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ (полем вещественных или комплексных чисел). Отображение u пространства

[1]) Билинейность этих отображений позволила ввести мультипликативные обозначения $u\vec{x}$, vu и u^n на стр. 115.

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в пространство F называется *мультилинейным* (или n-линейным), если при фиксировании $n-1$ переменных в произвольных $n-1$ векторных пространствах это отображение является линейным относительно n-й переменной.

Например, обычное произведение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1 x_2 \ldots x_n$ является n-линейным отображением $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ смешанное произведение трех векторов определяет трилинейное отображение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$.

Пространство n-линейных непрерывных отображений из $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в F можно наделить структурой векторного нормированного пространства. Его тогда обозначают через $\mathscr{L}_n(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$. Если F является банаховым пространством, то и рассматриваемое пространство также будет банаховым.

Изложенное перед теоремой 54 может быть обобщено следующим образом:

Теорема 54_2. *Между пространствами*

$$\mathscr{L}_n(E_1, E_2, \ldots, E_n; F),\ \mathscr{L}_1(E_1; \mathscr{L}_{n-1}(E_2, \ldots, E_n; F)),$$
$$\mathscr{L}_2(E_1, E_2; \mathscr{L}_{n-2}(E_3, \ldots, E_n; F)), \ldots, \mathscr{L}_{n-1}(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}; \mathscr{L}_1(E_n; F))$$

и пространствами, полученными перестановкой индексов, существуют биекции, сохраняющие векторную структуру и норму. Элемент U в $\mathscr{L}_p(E_1, E_2, \ldots, E_p; \mathscr{L}_{n-p}(E_{p+1}, \ldots, E_n; F))$, соответствующий элементу $u \in \mathscr{L}_n(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$, задается формулой

$$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p) \cdot (\vec{x}_{p+1}, \ldots, \vec{x}_n) = u(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \ldots, \vec{x}_n). \qquad \text{(II, 13; 43)}$$

Алгебры. Нормированные алгебры

Алгеброй $\mathscr{A}$ над полем $\mathbb{K}$ называется векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, в котором определено билинейное отображение $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$, называемое умножением и обозначаемое через $(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x}\vec{y}$. Это умножение ассоциативно: $(\vec{x}\vec{y})\vec{z} = \vec{x}(\vec{y}\vec{z})$ и имеет единицу $\vec{I} \neq \vec{0}$ $(\vec{x}\vec{I} = \vec{I}\vec{x}$ для любого $\vec{x})$. Поле $\mathbb{K}$ само является алгеброй. *Нормированной* алгеброй называется алгебра, представляющая собой такое нормированное векторное пространство, в котором

$$\|\vec{I}\| = 1, \qquad \|\vec{x}\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|. \qquad \text{(II, 13; 44)}$$

Полная нормированная алгебра называется *банаховой*. Пусть E — нормированное векторное пространство. Пространство $\mathscr{L}(E; E)$ будет нормированной алгеброй, если в нем определить умножение элементов через их композицию: $(u, v) \to u \circ v$. Эта алгебра банахова, если пространство E банахово.

§ 14. РЯДЫ В НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть задана некоторая последовательность $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots$ элементов нормированного векторного пространства E. Сумма

$$\vec{S}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} \vec{u}_m \qquad \text{(II, 14; 1)}$$

называется *частной суммой с индексом n* ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$. Частная сумма $\vec{S}_n$ является элементом пространства E. Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$ *сходится и имеет сумму* $\vec{S}$, если последовательность $\vec{S}_n$ сходится и имеет своим пределом $\vec{S}$[1]). Понятие ряда сводится, таким образом, к понятию последовательности. Впрочем, верно и обратное: последовательность в нормированном векторном пространстве можно выразить через ряд. Последовательность $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ сходится и имеет пределом число $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \ldots + (\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}) + \ldots$ и имеет сумму, равную a.

Если пространство E конечномерно и если в нем выбран некоторый базис, то, вспоминая результаты, полученные нами ранее для последовательностей, можно утверждать, что ряд $\sum_n \vec{u}_n$ является сходящимся и имеет своей суммой $\vec{S}$ тогда и только тогда, когда каждый ряд из координат $\sum_n (u_n)_i$ сходится к некоторой сумме S_i, где $(u_n)_i$ есть i-я координата элемента $\vec{u}_n$, а S_i есть i-я координата $\vec{S}$.

Преимущество банаховых пространств заключается в том, что в них, как и в поле комплексных чисел, можно судить о сходимости ряда, не зная заранее о существовании суммы $\vec{S}$.

Для того чтобы ряд в банаховом пространстве E был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял кри-

[1]) Сходимость или расходимость ряда сохраняется, если одну норму заменяют другой, ей эквивалентной, ибо сходимость является топологическим свойством.