ство $\mathscr{L}(E; E)$ будет нормированной алгеброй, если в нем определить умножение элементов через их композицию: $(u, v) \to u \circ v$. Эта алгебра банахова, если пространство E банахово.

§ 14. РЯДЫ В НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть задана некоторая последовательность $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots$ элементов нормированного векторного пространства E. Сумма

$$\vec{S}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} \vec{u}_m \qquad \text{(II, 14; 1)}$$

называется *частной суммой с индексом n* ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$. Частная сумма $\vec{S}_n$ является элементом пространства E. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$ *сходится и имеет сумму* $\vec{S}$, если последовательность $\vec{S}_n$ сходится и имеет своим пределом $\vec{S}$ [1]). Понятие ряда сводится, таким образом, к понятию последовательности. Впрочем, верно и обратное: последовательность в нормированном векторном пространстве можно выразить через ряд. Последовательность $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ сходится и имеет пределом число $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \ldots + (\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}) + \ldots$ и имеет сумму, равную a.

Если пространство E конечномерно и если в нем выбран некоторый базис, то, вспоминая результаты, полученные нами ранее для последовательностей, можно утверждать, что ряд $\sum\limits_{n} \vec{u}_n$ является сходящимся и имеет своей суммой $\vec{S}$ тогда и только тогда, когда каждый ряд из координат $\sum\limits_{n} (u_n)_i$ сходится к некоторой сумме S_i, где $(u_n)_i$ есть i-я координата элемента $\vec{u}_n$, а S_i есть i-я координата $\vec{S}$.

Преимущество банаховых пространств заключается в том, что в них, как и в поле комплексных чисел, можно судить о сходимости ряда, не зная заранее о существовании суммы $\vec{S}$.

Для того чтобы ряд в банаховом пространстве E был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял кри-

---

[1]) Сходимость или расходимость ряда сохраняется, если одну норму заменяют другой, ей эквивалентной, ибо сходимость является топологическим свойством.

терию Коши: при m и n, стремящихся к $+\infty$, $\|\vec{S}_n - \vec{S}_m\|$ стремится к 0, или же

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \geqslant n)(\forall k \in \mathbb{N}) : \|\vec{u}_m + \vec{u}_{m+1} + \ldots + \vec{u}_{m+k}\| \leqslant \varepsilon. \tag{II, 14; 2}$$

Отсюда получается основная теорема, дающая наиболее важный критерий сходимости векторных рядов:

Теорема 55. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ — *ряд из элементов банахова пространства E. Если ряд, составленный из норм,* $\sum \|\vec{u}_n\|$ *сходится, то и сам ряд также сходится и, кроме того,*

$$\|\sum \vec{u}_n\| \leqslant \sum \|\vec{u}_n\|. \tag{II, 14; 3}$$

Доказательство. Проверим выполнение критерия Коши. Так как ряд, составленный из норм, по условию сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что для всех $m \geqslant n$ и любого k $\|\vec{u}_m\| + \|\vec{u}_{m+1}\| + \ldots + \|\vec{u}_{m+k}\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда тем более для $m \geqslant n$ и любого k имеем, что $\|\vec{u}_m + \vec{u}_{m+1} + \ldots + \vec{u}_{m+k}\| \leqslant \leqslant \varepsilon$, т. е. что заданный в E ряд удовлетворяет условию Коши, а так как пространство E предполагалось полным, то рассматриваемый ряд сходится. Кроме того, для конечного числа членов имеет место неравенство $\|\vec{S}_n\| \leqslant \sum\limits_{0 \leqslant m \leqslant n} \|\vec{u}_m\|$, откуда, переходя к пределу при n, стремящемся к $+\infty$, и учитывая, что сходимость $\vec{S}_n$ к $\vec{S}$ влечет за собой сходимость $\|\vec{S}_n\|$ к $\|\vec{S}\|$ (теорема 9), получаем искомое неравенство (II, 14; 3).

Определение. Говорят, что ряд элементов банахова пространства E *нормально сходится*, или *абсолютно сходится*[1]), если сходится ряд из норм, являющийся числовым рядом с положительными членами. Ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, не являясь нормально сходящимся.

Полнота пространства E является весьма существенным фактом. Впрочем, можно доказать следующее обратное утверждение:

Теорема 56. *Пусть E — нормированное векторное пространство. Если в этом пространстве сходится любой ряд* $\sum \vec{u}_n$, $\vec{u}_n \in E$, *у которого сходится ряд из норм* $\sum \|\vec{u}_n\|$, *то пространство E полно.*

[1]) В силу теоремы 12, нормальная сходимость сохраняется, когда норма E заменяется на другую, ей эквивалентную.

5 Зак. 1339

Доказательство. Нам надо доказать, что любая последовательность Коши из E является сходящейся.

Пусть $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots$ — некоторая последовательность Коши. Тогда, каким бы ни было целое число $k \geqslant 0$, всегда можно найти такое целое число p_k, что из $m \geqslant p_k$, $n \geqslant p_k$ следует неравенство $\|\vec{u}_m - \vec{u}_n\| \leqslant 1/2^k$.

Будем выбирать одно за другим целые числа p_k таким образом, чтобы последовательность p_k была строго возрастающей, и рассмотрим ряд $\vec{u}_{p_0} + (\vec{u}_{p_1} - \vec{u}_{p_0}) + (\vec{u}_{p_2} - \vec{u}_{p_1}) + \ldots$. Ряд, составленный из его норм, мажорируется числовым рядом $\|\vec{u}_{p_0}\| + 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots$, сходящимся в силу известных свойств числовых рядов с положительными членами. Но тогда, в силу предположения относительно E, рассматриваемый ряд сходится, что означает сходимость подпоследовательности $\vec{u}_{p_n}$. Рассматриваемая последовательность Коши $\vec{u}_n$ имеет, таким образом, сходящуюся подпоследовательность. Согласно следствию 2 из теоремы 40, она должна сходиться, а, значит, E полно.

Перестановка членов ряда

Пусть $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots$ — ряд, составленный из векторов E. Изменить порядок членов последовательности означает рассмотреть биекцию $n \to p_n$ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$ и заменить данный ряд новым $\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \vec{u}_{p_2} + \ldots$.

Теорема 57. *Если ряд $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots$ в нормированном векторном пространстве E сходится и вместе с ним сходится ряд, составленный из норм $\|\vec{u}_0\| + \|\vec{u}_1\| + \|\vec{u}_2\| + \ldots$, то перестановка его членов не отражается на сходимости ряда и, кроме того, не меняет его суммы.*

Доказательство. Пусть $\vec{S}$ — сумма данного ряда. При любом заданном $\varepsilon > 0$ существует m, такое, что $\sum\limits_{n>m} \|\vec{u}_n\| \leqslant \varepsilon/2$. Далее, существует такое целое число m', что множество целых чисел $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{m'}\}$ содержит множество $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда для $n' \geqslant m'$ частная сумма $\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \ldots + \vec{u}_{p_{n'}}$ преобразованного ряда равна частной сумме $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m$, дополненной на некоторую конечную сумму членов с индексами $> m$.

Норма суммы этих дополнительных членов может быть промажорирована суммой $\sum\limits_{m<n\leqslant p} \|\vec{u}_n\|$, где p — наибольшее из целых чисел $p_0, p_1, \ldots, p_{n'}$; тем более она не превосходит $\sum\limits_{n>m} \|\vec{u}_n\|$, а, значит, и $\varepsilon/2$. Таким образом, для $n' \geqslant m'$ имеем:

$$\|(\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \ldots + \vec{u}_{p_{n'}}) - (\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (II, 14; 4)$$

Поскольку

$$\|(\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m) - \vec{S}\| = \left\|\sum_{n>m} \vec{u}_n\right\| \leqslant \sum_{n>m} \|\vec{u}_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (II, 14; 5)$$

то окончательно для $n' \geqslant m'$ получаем неравенство

$$\|(\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \ldots + \vec{u}_{p_{n'}}) - \vec{S}\| \leqslant \varepsilon, \qquad (II, 14; 6)$$

доказывающее, что преобразованный ряд сходится и имеет сумму $\vec{S}$.

Следствие. *Если ряд с вещественными положительными членами сходится, то его сходимость и сумма сохраняются при любой перестановке членов.*

Определение. Пусть I — счетное множество индексов и $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ — семейство векторов некоторого нормированного векторного пространства E. Говорят, что ряд $\sum\limits_{i \in I} \vec{u}_i$ *безусловно сходится и имеет сумму* $\vec{S}$, если, какова бы ни была биекция $n \to p_n$ множества $\mathbb{N}$ на множество I, обычный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_{p_n}$ сходится и имеет суммой вектор $\vec{S}$, не зависящий от выбора биекции.

Пусть u_i — вещественные числа $\geqslant 0$. Обозначим через S точную верхнюю грань в $\overline{\mathbb{R}}$ (конечную или равную $+\infty$) сумм $S_J = \sum\limits_{i \in J} u_i$, соответствующих *всем конечным* подмножествам J множества индексов I. *Если S конечна, то ряд безусловно сходится и имеет сумму S.* В самом деле, пусть $n \to p_n$ — некоторая биекция $\mathbb{N}$ на I. Тогда $u_{p_0} + u_{p_1} + \ldots + u_{p_n} \leqslant S$. С другой стороны, при заданном $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество J из I, такое, что $S_J \geqslant S - \varepsilon$. Если m является наименьшим из целых чисел, при которых множество $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ содержит множество J, то для $n \geqslant m$ $u_{p_0} + u_{p_1} + \ldots + u_{p_n} \geqslant$

$\geqslant S_J \geqslant S - \varepsilon$. Следовательно, ряд $u_{p_0} + u_{p_1} + \ldots + u_{p_n} + \ldots$ сходится и имеет сумму S. *Если $S = +\infty$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{p_n}$ расходится для любой биекции $n \to p_n$ множества $\mathbb{N}$ на множество I*, ибо если бы он был сходящимся для некоторой частной биекции и имел суммой число σ, то тогда для любого J имели бы место неравенства $S_J \leqslant \sigma$ и $S \leqslant \sigma$, что противоречит нашему предположению. В этом случае можно сказать, что ряд безусловно расходится, и писать $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Для рядов с положительными членами нет необходимости говорить о безусловной сходимости. Она будет такой автоматически, и поэтому имеет смысл говорить лишь об обычной сходимости.

Если J является бесконечным подмножеством I, то всегда имеют место следующие соотношения: $S_J = \sum_{i \in J} u_i \leqslant S = \sum_{i \in I} u_i$.

Теорема 57 показывает, что если $\sum_{i \in I} \vec{u}_i$ является рядом из векторов банахова пространства E и если ряд из норм его членов $\sum_{i \in I} \|\vec{u}_i\|$ сходится, то сам ряд является безусловно сходящимся. К этому результату можно добавить следующее:

1°) Если речь идет о вещественных числовых рядах, то имеется обратное утверждение к предыдущему результату:

Числовой вещественный ряд может быть безусловно сходящимся только в том случае, когда он абсолютно сходится, т. е. когда сходится ряд $\sum_{i \in I} |u_i|$.

В самом деле, рассмотрим ряд из вещественных чисел. Выберем некоторую биекцию $\mathbb{N}$ на I, или, что по существу то же самое, предположим, что $I = \mathbb{N}$. Члены ряда будем выбирать следующим образом.

Выпишем сначала из данного ряда подряд все положительные члены до тех пор, пока их сумма не превзойдет 1. Затем возьмем первый отрицательный член данного ряда. После этого из оставшихся положительных членов выберем подряд столько, чтобы получить сумму, большую 2. Затем снова добавим следующее отрицательное число из данного ряда (если оно есть) и будем продолжать добавлять положительные числа, пока сумма не превзойдет 3 и т. д.

Если подпоследовательность, составленная из положительных членов ряда, расходится, то проводимое нами построение можно продолжать неограниченно. Получаемый такой перестановкой ряд расходится, так как при любом $n \geqslant 0$ существуют его частные суммы, превосходящие n. Поэтому, если ряд, составленный из положительных членов, расходится, то данный ряд безусловно сходиться не может. Точно такие же рассуждения можно провести и в том случае, когда расходится подпоследовательность, составленная из отрицательных членов ряда. Таким образом, данный ряд может безусловно сходиться только тогда, когда сходятся подпоследовательности положительных и отрицательных членов ряда, т. е. когда данный ряд абсолютно сходится.

2°) *Такое же обратное утверждение имеет место, если E — нормированное конечномерное векторное пространство.* Поскольку векторное пространство размерности k над полем $\mathbb{C}$ является пространством размерности $2k$ над полем $\mathbb{R}$, то можно считать, что рассматривается конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поскольку, кроме того, результат не зависит от выбранной нормы (в силу эквивалентности всех норм (теорема 13)), то можно считать, что в пространстве выбран базис, и отождествить E с пространством $\mathbb{R}^m$, и в этом случае в качестве нормы взять $\|(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|$ на $\mathbb{R}^m$. Если теперь ряд безусловно сходится, то непосредственно видно, что каждая из компонент ряда представляет собой безусловно сходящийся ряд вещественных чисел и, следовательно, согласно результату, полученному для рядов с вещественными членами, каждая из компонент ряда должна быть абсолютно сходящейся. Окончательно, по определению выбранной нормы, получаем, что данный ряд абсолютно сходится.

3°) Напротив, с помощью весьма тонких рассуждений можно доказать, что в любом бесконечномерном нормированном векторном пространстве E можно найти безусловно сходящийся ряд, не являющийся абсолютно сходящимся [1]).

Если ряд безусловно сходится, то его сходимость и сумма не зависят от порядка членов. Естественно предположить, что, как и в случае рядов с положительными членами, можно дать определение безусловно сходящегося ряда и его суммы, не выбирая определенную биекцию $\mathbb{N}$ на I.

В самом деле, можно доказать следующее:

---

[1]) Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ — ряд из векторов некоторого банахова пространства. Тогда для него возможны следующие случаи:

a) ряд сходится абсолютно и, следовательно, безусловно;

b) ряд сходится безусловно, но не абсолютно (только тогда, когда E бесконечномерно);

c) ряд сходится, но не безусловно;

d) ряд расходится.

Теорема 58. *Ряд* $\sum_{i \in I} \vec{u}_i$ *безусловно сходится и имеет сумму* $\vec{S}$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое конечное подмножество* J *индексов из множества индексов* I, *что для любого конечного подмножества* K *множества* I, *содержащего* J, *имеет место неравенство*

$$\|\vec{S}_K - \vec{S}\| = \left\| \sum_{i \in K} \vec{u}_i - \vec{S} \right\| \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(II, 14; 7)}$$

Читатель может доказать эту теорему в качестве упражнения.

Суммирование по блокам безусловно сходящегося ряда

Теорема 59. *Предположим, что счетное множество индексов* I *является объединением семейства непустых и непересекающихся подмножеств* I_α, $\alpha \in A$:

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha, \qquad I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta\,^{1)}.$$

Тогда, если ряд $\sum_{i \in I} \vec{u}_i$ *из векторов банахова пространства* E *безусловно сходится к* $\vec{S}$, *то каждый из частных рядов* $\sum_{i \in I_\alpha} \vec{u}_i$ *безусловно сходится; если их суммы мы обозначим через* $\vec{S}_\alpha$, *то ряд* $\sum_{\alpha \in A} \vec{S}_\alpha$ *будет безусловно сходиться и иметь сумму* $\vec{S}$. *Другими словами, имеет место формула суммирования по блокам:*

$$\sum_{i \in I} \vec{u}_i = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{i \in I_\alpha} \vec{u}_i \right). \qquad \text{(II, 14; 8)}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы для случая, когда данный ряд абсолютно сходится. Положим $M = \sum_{i \in I} \|\vec{u}_i\|$. Тогда, очевидно, $\sum_{i \in I_\alpha} \|\vec{u}_i\| \leqslant M$; это означает, что каждый из рядов $\sum_{i \in I_\alpha} \vec{u}_i$ является безусловно сходящимся (теоремы 55 и 57). Следовательно, если рассматривать некоторое конечное множество B элементов из множества индексов A, то мы получим неравенство $\sum_{\alpha \in B} \|\vec{S}_\alpha\| \leqslant \sum_{i \in \bigcup_{\alpha \in B} I_\alpha} \|\vec{u}_i\| \leqslant M$,

[1]) Множество A конечно или счетно, и каждое множество I_α конечно или счетно.

которое показывает, что ряд $\sum_{\alpha \in A} \vec{S}_\alpha$ является также безусловно сходящимся. Остается доказать формулу $\sum_{\alpha \in A} \vec{S}_\alpha = \vec{S}$.

Прежде всего при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечное подмножество J индексов из I, при котором имеет место неравенство

$$\sum_{i \in \complement J} \|\vec{u}_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{а, следовательно,} \quad \|\vec{S} - \vec{S}_J\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $n \to p_n$ — некоторая биекция множества $\mathbb{N}$ на множество A в случае, когда A счетно, или же подмножества $\{0, 1, \ldots, m\}$ множества $\mathbb{N}$ на A в случае, если A конечно. В обоих случаях существует такое целое m, что объединение множеств $I_{p_0}, I_{p_1}, \ldots, I_{p_m}$ содержит J. Тогда для $n \geqslant m$ частная сумма $\vec{S}_{p_0} + \vec{S}_{p_1} + \ldots + \vec{S}_{p_n}$ является суммой $\vec{S}_J$ и некоторого безусловно сходящегося ряда, образованного из тех членов $\vec{u}_i$, индексы i которых принадлежат дополнению J.

При этом имеем неравенство

$$\|(\vec{S}_{p_0} + \vec{S}_{p_1} + \ldots + \vec{S}_{p_n}) - \vec{S}_J\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{(II, 14; 9)}$$

из которого вытекает неравенство

$$\|(\vec{S}_{p_0} + \vec{S}_{p_1} + \ldots + \vec{S}_{p_n}) - \vec{S}\| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(II, 14; 10)}$$

доказывающее искомую формулу $\sum_{\alpha \in A} \vec{S}_\alpha = \vec{S}$.

Замечания. 1°) Если $I = \mathbb{N}$ и если заданный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ сходится, но не безусловно, то такое утверждение будет неверным. Например, если u_n — вещественные числа и если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ является условно сходящимся, то частный ряд, составленный из членов $\geqslant 0$, и частный ряд, составленный из членов < 0, расходятся!

2°) Рассмотрим обратное утверждение к этой теореме. Пусть $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ — некоторое разбиение множества индексов I на непересекающиеся подмножества. Предположим, что для каждого α из A ряд $\sum_{i \in I_\alpha} \vec{u}_i$ безусловно сходится и имеет сумму $\vec{S}_\alpha$; с другой стороны, предположим, что ряд $\sum_{\alpha \in A} \vec{S}_\alpha$ является безусловно сходящимся и имеет сумму $\vec{S}$. Можем ли мы тогда утверждать, что исходный ряд $\sum\limits_{i \in I} \vec{u}_i$ также безусловно сходится и имеет сумму $\vec{S}$?

Если он безусловно сходится, то из теоремы следует, что его сумма заведомо равна $\vec{S}$, но *ничто не говорит о том, что этот ряд должен быть безусловно сходящимся.* В самом деле, достаточно рассмотреть пример, в котором I равно множеству $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, A является множеством $\mathbb{N}$ всех целых чисел $\geqslant 0$ и в котором для каждого α, т. е. для каждого целого $n \geqslant 0$, I_α совпадает с множеством $\{+n, -n\}$[1]. Тогда если мы рассмотрим ряд, в котором $u_i = i$, то увидим, что формула $\sum\limits_{\alpha \in A} \Big(\sum\limits_{i \in I_\alpha} u_i \Big) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (n - n)$ дает безусловно сходящийся ряд с суммой, равной 0, в то время как ряд $\sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} i$ не является безусловно сходящимся $\Big(\sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} |i| = +\infty \Big)$.

3°) Напротив, *если все* u_i — *вещественные положительные числа и если* $\sum\limits_{\alpha \in A} \Big(\sum\limits_{i \in I_\alpha} u_i \Big)$ *дает в результате* S, *то ряд* $\sum\limits_{i \in I} u_i$, *конечно, сходится* (потому что все его частные суммы, составленные из конечного числа членов, ограничены) *и, следовательно, имеет ту же сумму* S.

Если в случае рядов с положительными членами договориться через $+\infty$ обозначать сумму расходящегося ряда, то без всяких дополнительных предположений имеет место равенство (II, 14; 8), обе части которого либо являются конечными числами, либо равны $+\infty$.

4°) Отсюда, наконец, следует, что если E является пространством Банаха и если сходится ряд $\sum\limits_{\alpha \in A} \Big(\sum\limits_{i \in I_\alpha} \| \vec{u}_i \| \Big)$, то можно утверждать, что ряд $\sum\limits_{i \in I} \| \vec{u}_i \|$ сходится, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{i \in I} \vec{u}_i$ является безусловно сходящимся, а, значит, применима теорема 59 и имеет место формула (II, 14; 8).

Действие линейного непрерывного отображения на ряд

Теорема 60. *Пусть* E *и* F — *два нормированных векторных пространства и* L — *линейное непрерывное отображение* E

[1] Сводящимся к одному элементу, если $n = 0$.

в F. Если $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ *является сходящимся рядом в E, то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} L \cdot \vec{u}_n$ *сходится в F; при этом*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L \cdot \vec{u}_n) = L \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n \right). \tag{II, 14; 11}$$

Такое же утверждение имеет место для безусловной и абсолютной сходимости в случае, когда E и F являются пространствами Банаха. Кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| L \cdot \vec{u}_n \| \leqslant \| L \| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \| \vec{u}_n \|. \tag{II, 14; 12}$$

Доказательство. В силу линейности L,

$$L \cdot \left(\sum_{n \leqslant m} \vec{u}_n \right) = \sum_{n \leqslant m} (L \cdot \vec{u}_n). \tag{II, 14; 13}$$

При m, стремящемся к $+\infty$, сумма $\sum_{n \leqslant m} \vec{u}_n$ сходится к сумме $\vec{S}$; следовательно, в силу непрерывности L, левая часть последнего равенства сходится к $L \cdot \vec{S}$. К тому же пределу стремится правая часть, а это означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} L \cdot \vec{u}_n$ сходится и имеет сумму $L \cdot \vec{S}$, откуда мы получаем (II, 14; 11).

Из (II, 13; 6) следует, что

$$\sum_{n \leqslant m} \| L \cdot \vec{u}_n \| \leqslant \| L \| \sum_{n \leqslant m} \| \vec{u}_n \|, \tag{II, 14; 14}$$

откуда, переходя к пределу при m, стремящемся к $+\infty$, мы получаем (II, 14; 12). (Написанные выражения могут быть конечными или равными $+\infty$.) Таким образом, если $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ абсолютно сходится, то то же самое будет верно и для $\sum_{n=0}^{\infty} L \cdot \vec{u}_n$.

Произведение двух числовых рядов. Применение билинейного непрерывного отображения к двум рядам

Напомним, что самым простым билинейным непрерывным отображением является произведение — непрерывное билинейное отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

В общем курсе математического анализа показывается, что для представления произведения двух рядов в виде ряда необходимо предполагать, что ряды абсолютно сходятся. По этой причине здесь также не будет теорем, относящихся к просто сходящимся рядам.

Теорема 61. *Пусть B — билинейное непрерывное отображение произведения $E \times F$ банаховых пространств в банахово пространство G. Пусть $\sum\limits_{i \in I} \vec{u}_i$ и $\sum\limits_{j \in J} \vec{v}_j$ — два абсолютно сходящихся ряда с элементами из E и F. Тогда ряд $\sum\limits_{(i, j) \in I \times J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ абсолютно сходится в G и имеет место формула*

$$\sum_{(i, j) \in I \times J} B(u_i, v_j) = B\left(\sum_{i \in I} \vec{u}_i, \sum_{j \in J} \vec{v}_j\right). \qquad \text{(II, 14; 15)}$$

Доказательство. Обозначим через $\vec{U}$ и $\vec{V}$ соответственно суммы $\sum\limits_{i \in I} \vec{u}_i$ и $\sum\limits_{j \in J} \vec{v}_j$. Пусть K — некоторое конечное подмножество $I \times J$. Существуют такие конечные подмножества L из I и M из J, что $L \times M$ содержит K и при этом имеют место оценки:

$$\sum_{(i, j) \in K} \| B(\vec{u}_i, \vec{v}_j) \| \leqslant \sum_{(i, j) \in L \times M} \| B \| \| \vec{u}_i \| \| \vec{v}_j \| =$$
$$= \| B \| \left(\sum_{i \in L} \| \vec{u}_i \|\right) \left(\sum_{j \in M} \| \vec{v}_j \|\right) \leqslant \| B \| \left(\sum_{i \in I} \| \vec{u}_i \|\right) \left(\sum_{j \in J} \| \vec{v}_j \|\right). \qquad \text{(II, 14; 16)}$$

Эти неравенства показывают, что все частные суммы конечного числа элементов ряда $\sum\limits_{(i, j) \in I \times J} \| B(\vec{u}_i, \vec{v}_j) \|$ ограничены и что, следовательно, ряд $\sum\limits_{(i, j) \in I \times J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ абсолютно сходится. Мы можем применить к нему теорему 59 о суммировании по блокам. Произведение $I \times J$ допускает разбиение на непересекающиеся части — объединение множеств $\{i\} \times J$, когда i пробегает I. При этом

$$\sum_{(i, j) \in I \times J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)\right).$$

Рассмотрим сначала сумму $\sum\limits_{j \in J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ для фиксированного значения i. При фиксированном $\vec{u}_i$ отображение $\vec{v} \to B(\vec{u}_i, \vec{v})$ является линейным и непрерывным отображением F в G. Поэтому к абсолютно сходящемуся в F ряду $\sum\limits_{j \in J} \vec{v}_j$ и к этому линейному непрерывному отображению можно применить теорему 60 и записать формулу

$$\sum_{j\in J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = B\left(\vec{u}_i, \sum_{j\in J}\vec{v}_j\right) = B(\vec{u}_i, \vec{V}). \qquad (II, 14; 17)$$

Но точно так же мы можем затем рассмотреть линейное и непрерывное отображение $\vec{u} \to B(\vec{u}, \vec{V})$ пространства E в G и применить к этому отображению и ряду $\sum_{i\in I}\vec{u}_i$ теорему 60. На этот раз мы получим следующее:

$$\sum_{i\in I} B(\vec{u}_i, \vec{V}) = B\left(\sum_{i\in I}\vec{u}_i, \vec{V}\right) = B(\vec{U}, \vec{V}), \qquad (II, 14; 18)$$

и, следовательно, $\sum_{(i, j)\in I\times J} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = B(\vec{U}, \vec{V})$, что совпадает с (II, 14; 15).

В случае, когда I и J являются множеством $\mathbb{N}$ целых чисел $\geqslant 0$, удобно положить

$$\vec{w}_n = B(\vec{u}_n, \vec{v}_0) + B(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_1) + \ldots + B(\vec{u}_0, \vec{v}_n) \qquad (II, 14; 19)$$

и рассматривать ряд $\sum_{(i, j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ как ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{w}_n$.

Замечание. Из доказательства вытекает следующее: если заранее известно, что ряд $\sum_{i, j} B(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ безусловно сходится, то нет необходимости предполагать ряды абсолютно сходящимися.

Обратимые отображения в банаховых пространствах

Определение. Пусть u — линейное непрерывное отображение нормированного векторного пространства E в нормированное векторное пространство F. Говорят, что отображение u *обратимо*, если оно является биекцией и если обратная биекция u^{-1} (очевидно, линейная) также непрерывна. Если $E = F$, то это означает, что элемент u в алгебре $\mathscr{L}(E; E)$ имеет обратный. Учитывая соотношение «$u \circ u^{-1}$ = тождественное отображение» и формулу (II, 13; 7), между нормами этих двух обратных биекций можно установить соотношение:

$$1 = \|\text{тождественное отображение}\| \leqslant \|u\|\|u^{-1}\|, \text{ или } \|u^{-1}\|^{-1} \leqslant \|u\|. \qquad (II, 14; 20)$$

Свойства рядов в банаховых пространствах позволяют доказать, что отображение, достаточно близкое к обратному отображению, само обратимо. Точнее, имеет место такое утверждение:

Теорема 62. *Пусть u — линейное непрерывное обратимое отображение банахова пространства E в банахово пространство F, и пусть v — линейное непрерывное отображение E в F, удовлетворяющее неравенству*

$$\| v \| < \| u^{-1} \|^{-1}. \tag{II, 14; 21}$$

Тогда линейное непрерывное отображение $u+v$ пространства E в пространство F также обратимо, и при этом

$$\| (u+v)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\| u^{-1} \|^{-1} - \| v \|}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $F = E$ и $u = I$, где I — тождественное отображение E в E. Тогда v будет линейным непрерывным отображением E в E, удовлетворяющим неравенству $\|v\| < 1$. Знак $<$ не может быть заменен знаком $\leqslant$, ибо для $v = -I$ отображение $I - I = 0$ не обратимо.

Произведем сначала чисто формальные выкладки. Мы будем вычислять $(I+v)^{-1}$ как вычисляют $(1+z)^{-1} = 1/(1+z)$, записывая сумму в виде ряда геометрической прогрессии $1 - z + z^2 - \ldots$. Напишем

$$(I+v)^{-1} = I - v + v^2 - v^3 + \ldots + (-1)^n v^n + \ldots . \tag{II, 14; 22}$$

В этой формуле отображение v^n является композицией $v \circ v \circ \ldots \circ v$, составленной из n отображений, совпадающих с v. Теперь обоснуем написанную формулу.

Ряд, стоящий в правой части, нормально сходится в пространстве Банаха $\mathscr{L}(E; E)$ (теорема 50), ибо $\|v^2\| \leqslant \|v \circ v\| \leqslant \leqslant \|v\|^2$, $\|v^3\| \leqslant \|v\|^3, \ldots$ и т. д. и по условию $\|v\| < 1$. Согласно теореме 55, этот ряд сходится и представляет собой элемент w из $\mathscr{L}(E; E)$.

Согласно теореме 54, функция $u \to uv$ является линейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{L}(E; E)$ в пространство $\mathscr{L}(E; E)$. Теперь можно к этому отображению и ряду, стоящему в правой части (II, 14; 22), применить теорему 60, что дает:

$$\begin{aligned} w(I+v) &= w + w \cdot v = \\ &= (I - v + v^2 - v^3 + \ldots) + (v - v^2 + v^3 - \ldots) = I. \end{aligned} \tag{II, 14; 23}$$

Такое же рассуждение показывает, что $(I+v)w = I$. Тогда, в силу изложенного на стр. 16 гл. I, отображение $I+v$ будет являться биекцией, а отображение w — его обратной биекцией. Поскольку $w \in \mathscr{L}(E; E)$, то $I+v$ обратимо, и для рассматриваемого случая теорема доказана. Кроме того, имеем оценку:

$$\| w \| = \| (I+v)^{-1} \| \leqslant 1 + \| v \| + \| v \|^2 + \ldots = \frac{1}{1 - \| v \|}. \tag{II, 14; 23$_2$}$$

Заметим, что обратимость $I+v$ вытекает также из теоремы о неподвижной точке. Пусть $\vec{y}$ — некоторый элемент E. Проверим, существует ли такая точка $\vec{x}$ из E, что $(I+v)\vec{x}=\vec{y}$, или $\vec{x}+v\cdot\vec{x}=\vec{y}$, или $\vec{x}=-v\cdot\vec{x}+\vec{y}$? Рассмотрим отображение $f\colon \vec{x}\to -v\cdot\vec{x}+\vec{y}$ пространства E в E. Это отображение — сжатие, ибо $\|-v\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\|\leqslant\|v\|\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|$ и $\|v\|<1$. В силу полноты E, существует, и притом единственный, элемент $\vec{x}$, такой, что $\vec{x}=f(\vec{x})$ или $(I+v)\vec{x}=\vec{y}$ (теорема 46). Следовательно, отображение $I+v$ является биекцией. Поскольку эта биекция линейна, ее обратная биекция также линейна. Кроме того, теорема 46_2 показывает, что решение $\vec{x}$ непрерывно зависит от $\vec{y}$; следовательно, отображение $(I+v)^{-1}$ непрерывно, а отображение $I+v$ обратимо.

Заметим, что выражение для $\vec{x}$ может быть получено из элемента $\vec{y}$ по методу последовательных приближений. Исходя из $\vec{x}_0=\vec{0}$, получаем $\vec{x}_1=\vec{y}$, $\vec{x}_2=-v\cdot\vec{x}_1+\vec{y}=-v\cdot\vec{y}+\vec{y}$, $\vec{x}_3=-v\cdot\vec{x}_2+\vec{y}=\vec{y}-v\cdot\vec{y}+v^2\cdot\vec{y}$, ... и в пределе находим $\vec{x}=\vec{y}-v\cdot\vec{y}+v^2\cdot\vec{y}-v^3\cdot\vec{y}+\ldots$. Это новый способ записи равенства $(I-v)^{-1}=I-v+v^2-v^3+\ldots$.

Рассмотрим теперь общий случай произвольных пространств E и F, обратимого отображения u и $\|v\|<\|u^{-1}\|^{-1}$. Поскольку отображение u обратимо, можно записать, что

$$u+v=u(I+u^{-1}v). \tag{II, 14; 24}$$

Здесь $u^{-1}v$ и $I+u^{-1}v$ — линейные непрерывные отображения пространства E в E. В силу предположения, сделанного относительно v, $\|u^{-1}v\|\leqslant\|u^{-1}\|\|v\|<1$. Теперь, в силу доказанного частного случая, $I+u^{-1}v$ обратимо и его обратное отображение может быть записано в виде

$$(I+u^{-1}v)^{-1}=I-u^{-1}v+u^{-1}vu^{-1}v-u^{-1}vu^{-1}vu^{-1}v+\ldots. \tag{II, 14; 25}$$

Но тогда, согласно (II, 14; 22), $u+v$ можно представить в виде композиции двух обратимых отображений, а, значит, обратимо само это отображение и его обратное отображение является композицией обратных отображений, взятых в обратном порядке:

$$(u+v)^{-1}=(I+u^{-1}v)^{-1}u^{-1}=u^{-1}-u^{-1}vu^{-1}+u^{-1}vu^{-1}vu^{-1}-\\-u^{-1}vu^{-1}vu^{-1}vu^{-1}+\ldots. \tag{II, 14; 26}$$

Кроме того, имеет место оценка:

$$\|(u+v)^{-1}\| \leqslant \|(I+u^{-1}v)^{-1}\| \|u^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|u^{-1}\|}{1-\|u^{-1}v\|} \leqslant \frac{\|u^{-1}\|}{1-\|u^{-1}\|\|v\|} = \frac{1}{\|u^{-1}\|^{-1}-\|v\|}. \quad \text{(II, 14; 27)}$$

Замечание 1. Пусть $\mathcal{U}$ — множество обратимых элементов пространства $\mathcal{L}(E; F)$ и $\mathcal{U}^{-1}$ — множество обратимых элементов пространства $\mathcal{L}(F; E)$. Если $u_0 \in \mathcal{U}$, то любой элемент пространства $\mathcal{L}(E; F)$, принадлежащий открытому шару с центром u_0 радиуса $\|u_0^{-1}\|^{-1}$, лежит в $\mathcal{U}$. Следовательно, множество $\mathcal{U}$ является открытым подмножеством пространства $\mathcal{L}(E; F)$, а если поменять ролями E и F, то мы получим, что таким же будет множество $\mathcal{U}^{-1}$. Предыдущие неравенства позволяют легко доказать, что $u \to u^{-1}$ является гомеоморфизмом $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}^{-1}$. Это можно проверить в ка́честве упражнения. С этим фактом мы встретимся в теореме 27 гл. III.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра. То же самое рассуждение показывает, что если элемент $\vec{x} \in \mathcal{A}$ обратим, т. е. имеет в алгебре обратный, а $\vec{y}$ является таким элементом $\mathcal{A}$, что $\|\vec{y}\| < \|\vec{x}^{-1}\|^{-1}$, то элемент $\vec{x}+\vec{y}$ обратим и обратный к нему элемент выражается формулой

$$(\vec{x}+\vec{y})^{-1} = \vec{x}^{-1} - \vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1} + \vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1} - \ldots \quad \text{(II, 14; 27}_2\text{)}$$

Если $\mathcal{U}$ является множеством обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$, то $\mathcal{U}$ является открытым подмножеством $\mathcal{A}$, а отображение $\vec{x} \to \vec{x}^{-1}$ является гомеоморфизмом $\mathcal{U}$ на себя.

Критерий условной сходимости

Говорят, что последовательность $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \ldots$ элементов банахова пространства E имеет *ограниченную вариацию*, если ряд

$$\|\vec{u}_1-\vec{u}_0\| + \|\vec{u}_2-\vec{u}_1\| + \|\vec{u}_3-\vec{u}_2\| + \ldots \quad \text{(II, 14; 28)}$$

сходится. Сумма (II, 14; 28) называется *полной вариацией* последовательности. Ограниченность вариации последовательности приводит, естественно, к ее сходимости. В самом деле, сходимость последовательности равносильна сходимости ряда $\vec{u}_0 + (\vec{u}_1-\vec{u}_0) + (\vec{u}_2-\vec{u}_1) + \ldots$, а сделанное выше предположение равносильно абсолютной сходимости этого ряда. Таким образом, последовательность с ограниченной вариацией является сходящейся, так как абсолютно сходящийся ряд сходится. Если последовательность вещественных чисел u_n *монотонна и ограничена*, то она имеет ограниченную вариацию. В самом деле, например, если последовательность возрастающая и ограниченная, то

$$|u_1-u_0|+|u_2-u_1|+\ldots=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots=$$
$$=-u_0+\lim_{n\to\infty}u_n<+\infty. \quad (\mathrm{II},14;29)$$

Впрочем, Жордан доказал, что и, обратно, если некоторая последовательность вещественных чисел имеет ограниченную вариацию, то она может быть записана в виде $u_n=a_n-b_n$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots$ — две возрастающие и ограниченные последовательности [1]).

Дадим теперь наиболее важный критерий условной сходимости рядов, к которому практически можно свести все наиболее употребительные критерии (в особенности теоремы о знакопеременных рядах).

Теорема 63 (Абель). *Пусть E, F, G — три пространства Банаха. Пусть $\vec{u}_n$ — некоторая последовательность векторов из E с ограниченной вариацией, стремящихся к $\vec{0}$ при $n\to\infty$, и $\vec{v}_n$ — последовательность векторов из F с ограниченными частными суммами, т. е. такая, что нормы величин*

$$\vec{\sigma}_{m,n}=\vec{v}_m+\vec{v}_{m+1}+\ldots+\vec{v}_n, \quad n\geqslant m, \quad (\mathrm{II},14;30)$$

ограничены. Тогда, если B является билинейным непрерывным отображением пространства $E\times F$ в пространство G, то ряд с общим членом $\vec{w}_n=B(\vec{u}_n,\vec{v}_n)$ сходится.

Кроме того, если положить $U_m=\|\vec{u}_{m+1}-\vec{u}_m\|+\|\vec{u}_{m+2}-\vec{u}_{m+1}\|+\ldots$ и $V_m=\sup\limits_{n\geqslant m}\|\vec{\sigma}_{m,n}\|$, то сумма $\vec{S}$ и остаток $\vec{R}_m=\vec{w}_{m+1}+\vec{w}_{m+2}+\ldots$ могут быть оценены следующим образом:

$$\|\vec{S}\|\leqslant\|B\|U_0V_0 \quad \text{и} \quad \|\vec{R}_m\|\leqslant\|B\|U_{m+1}V_{m+1}\,^{2)}. \quad (\mathrm{II},14;31)$$

---

[1]) Это почти очевидно. Достаточно положить $a_0=(u_0)^+$, $a_1=(u_0)^++(u_1-u_0)^+$, $a_2=(u_0)^++(u_1-u_0)^++(u_2-u_1)^+, \ldots$, где $x^+=x$ для $x\geqslant0$ и $x^+=0$ для $x<0$. Затем $b_0=(u_0)^-$, $b_1=(u_0)^-+(u_1-u_0)^-$, $b_2=(u_0)^-+(u_1-u_0)^-+(u_2-u_1)^-, \ldots$, где $x^-=0$ для $x>0$ и $x^-=|x|$ для $x\leqslant0$. Ясно, что $x=x^+-x^-$ и $|x|=x^++x^-$.

[2]) Эти величины стремятся к нулю при m, стремящемся к $+\infty$, потому что V_{m+1} остается ограниченным, а U_{m+1} стремится к нулю как остаток сходящегося ряда с положительными членами.

В большинстве приложений $E=F=G=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, а B — произведение. Величины $\vec{\sigma}_{m,n}$ тогда заведомо ограничены, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}_n$ сходится.

Доказательство. Имеем:

$$\vec{S}_n = B(\vec{u}_0, \vec{v}_0) + B(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \ldots + B(\vec{u}_n, \vec{v}_n) =$$
$$= B(\vec{u}_0, \vec{\sigma}_{0,0}) + B(\vec{u}_1, \vec{\sigma}_{0,1} - \vec{\sigma}_{0,0}) + \ldots + B(\vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n} - \vec{\sigma}_{0,n-1}) =$$
$$= B(\vec{u}_0, \vec{\sigma}_{0,0}) + [B(\vec{u}_1, \vec{\sigma}_{0,1}) - B(\vec{u}_1, \vec{\sigma}_{0,0})] + \ldots$$
$$\ldots + [B(\vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n}) - B(\vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n-1})] =$$
$$= B(\vec{u}_0 - \vec{u}_1, \vec{\sigma}_{0,0}) + B(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{\sigma}_{0,1}) + \ldots$$
$$\ldots + B(\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n-1}) + B(\vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n}). \qquad \text{(II, 14; 32)}$$

Отличный от других член $B(\vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n})$ мажорируется по норме величиной $\|B\|\|\vec{u}_n\|V_0$, а так как при n, стремящемся к $+\infty$, $\vec{u}_n$ стремится к $\vec{0}$, то эта величина стремится к 0.

Остается доказать, что сумма

$$B(\vec{u}_0 - \vec{u}_1, \vec{\sigma}_{0,0}) + B(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{\sigma}_{0,1}) + \ldots + B(\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{\sigma}_{0,n-1}) \qquad \text{(II, 14; 33)}$$

имеет предел при n, стремящемся к $+\infty$, т. е. что ряд с общим членом

$$\vec{z}_n = B(\vec{u}_n - \vec{u}_{n+1}, \vec{\sigma}_{0,n}) \qquad \text{(II, 14; 34)}$$

сходится. Ряд же из норм этих членов сходится, поскольку

$$\|\vec{z}_n\| \leqslant \|B\|\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n+1}\|V_0 \qquad \text{(II, 14; 35)}$$

и последовательность $\vec{u}_n$ по предположению имеет ограниченную вариацию. Так как пространство G по предположению полно, то в силу теоремы 55 сходимость данного ряда доказана. Доказав сходимость, мы можем, исходя из неравенства

$$\|\vec{S}_n\| \leqslant \|B\|\|\vec{u}_n\|V_0 + \|B\|U_0V_0, \qquad \text{(II, 14; 36)}$$

переходом к пределу при n, стремящемся к бесконечности, получить оценку для суммы $\vec{S} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots$:

$$\|\vec{S}\| \leqslant \|B\|U_0V_0. \qquad \text{(II, 14; 37)}$$

Те же самые рассуждения, начатые с члена $\vec{w}_{m+1}$ с учетом того, что $\vec{R}_m = \vec{w}_{m+1} + \vec{w}_{m+2} + \ldots$, дадут оценку остатка (II, 14; 31).

Примеры. 1°) *Теорема о знакопеременных рядах.* Рассмотрим вещественный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$, в котором последовательность чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots \geqslant 0$ является убывающей и сходящейся к 0 при n, стремящемся к $+\infty$. В этом случае применима доказанная теорема, если положить $v_n = (-1)^n$, $U_m = u_m$, $V_m = 1$. Она же дает известное неравенство

$$|R_m| \leqslant u_{m+1}. \tag{II, 14; 38}$$

Известно также, что в этом случае остаток имеет знак первого отброшенного члена.

2°) *Случай тригонометрических рядов.* Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n e^{ni\theta}$, в котором предполагается, что последовательность комплексных чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots$ имеет ограниченную вариацию и сходится к 0 при n, стремящемся к $+\infty$, и что θ является вещественным числом[1]). Примем $v_n = e^{ni\theta}$. По формуле суммы членов геометрической прогрессии при $\theta \neq 2k\pi$ получаем равенство

$$e^{mi\theta} + e^{(m+1)i\theta} + \ldots + e^{ni\theta} = \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{mi\theta}}{e^{i\theta} - 1} \tag{II, 14; 39}$$

и, следовательно, оценку

$$|\sigma_{m,n}| \leqslant \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}. \tag{II, 14; 40}$$

Напротив, если $\theta = 2k\pi$, то мы получаем величину $e^{mi\theta} + \ldots + e^{ni\theta} = n - m + 1$, которая не является ограниченной. Отсюда вытекает, что для $\theta \neq 2k\pi$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n e^{ni\theta}$ сходится и имеют место оценки

$$|S| \leqslant U_0 \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}, \quad |R_m| \leqslant U_{m+1} \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}. \tag{II, 14; 41}$$

Аналогичный результат, конечно, имеет место и для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \cos n\theta$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \sin n\theta$. Последний же ряд сходится и при $\theta = 2k\pi$, поскольку все его члены при этом обращаются в нуль.

[1]) Если u_n вещественны, убывают и стремятся к 0 и если $\theta = \pi$, то мы получаем знакопеременный ряд.