§ 15. НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. СХОДИМОСТЬ ПРОСТАЯ И РАВНОМЕРНАЯ

Функциональные пространства

Под функциональным пространством понимают пространство, элементами которого являются функции, т. е. отображения одного множества в другое.

Пусть E и F — два множества. В гл. I (стр. 15) через F^E мы обозначали множество всевозможных отображений E в F. Если F обладает некоторой структурой (векторного пространства, топологического пространства и т. д.), то, вообще говоря, и в F^E можно ввести аналогичную структуру.

1°) Предположим, что F является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$. Тогда, очевидно, в F^E можно также ввести структуру векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. В самом деле, если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — два отображения E в F и λ — некоторый скаляр, то можно определить сумму $\vec{f}+\vec{g}$ и произведение $\lambda\vec{f}$ как новое отображение из E в F по формулам:

$$(\vec{f}+\vec{g})(x)=\vec{f}(x)+\vec{g}(x) \quad \text{для любого} \quad x\in E, \qquad \text{(II, 15; 1)}$$

$$(\lambda\vec{f})(x)=\lambda\vec{f}(x) \quad \text{для любого} \quad x\in E. \qquad \text{(II, 15; 2)}$$

Таким образом, на F^E мы определили закон сложения и закон умножения на скаляр из $\mathbb{K}$. Без труда проверяется, что эти законы удовлетворяют всем аксиомам, превращающим F^E в векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ [1]).

Например, если F является полем скаляров $\mathbb{K}$, а последнее является полем вещественных или комплексных чисел, то множество $\mathbb{K}^E$ вещественных или комплексных функций, определенных на E, является векторным пространством над полем вещественных или комплексных чисел.

2°) Предположим теперь, что F является метрическим пространством. Если f и g — два отображения E в F, то расстоянием между этими функциями будем называть величину, обозначаемую через $d(f, g)$ и определяемую по формуле:

$$d(f, g)=\sup_{x\in E} d(f(x), g(x)). \qquad \text{(II, 15; 3)}$$

Это расстояние не обязательно конечно; точную верхнюю грань следует брать в пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Отсюда вытекает,

---

[1]) Если E состоит из двух элементов, то F^E может быть отождествлено с $F^2=F\times F$. Структура полученного при этом векторного пространства совпадает со структурой пространства произведения, рассмотренного на стр. 119 (формулы (II, 13; 22) и (II, 13; 23)).

что в множестве F^E невозможно непосредственно ввести естественную структуру метрического пространства. Поэтому мы ограничимся рассмотрением подпространства $(F^E)_b$ пространства F^E, состоящего из *ограниченных отображений E в F*. Говорят, что отображение f множества E в F ограничено, если область значений $f(E)$ — образ множества E — является ограниченной частью F. В этом случае расстояние между любыми двумя ограниченными отображениями f и g из E в F заведомо конечно. (В самом деле, пусть, например, $f(E)$ содержится в шаре с центром a радиуса α, а $g(E)$ лежит в шаре с центром b радиуса β и тем более в шаре с центром a радиуса $\beta+d(a,b)$ множества F. Очевидно, для всех x из E имеет место неравенство $d(f(x),\ g(x))\leqslant\alpha+\beta+d(a,\ b)$ и, следовательно, $d(f,\ g)$ конечно.)

Проверим теперь, что отображение d: $(f,g)\to d(f,g)$ действительно определяет расстояние в пространстве $(F^E)_b$ [1]. Для этого необходимо проверить все три свойства определения (II, 1; 1). Симметрия очевидна. Положительность также очевидна, ибо, с одной стороны, $d(f,g)\geqslant 0$, а, с другой стороны, для различных f и g найдется хотя бы один элемент x из E, такой, что $d(f(x),g(x))>0$, и тогда тем более $d(f,g)>0$.

Остается проверить неравенство треугольника.

Пусть f, g, h — три отображения E в F. Для любого x из E имеем:

$$d(f(x),\ h(x))\leqslant d(f(x),\ g(x))+d(g(x),\ h(x))\leqslant d(f,\ g)+d(g,\ h). \tag{II, 15; 4}$$

Поскольку это верно для любого x, то получаем искомое неравенство:

$$d(f,\ h)\leqslant d(f,\ g)+d(g,\ h). \tag{II, 15; 5}$$

Замечание. Только что введенные понятия являются *метрическими, а не топологическими*. Легко доказывается, что если в F заменить данную метрику на эквивалентную, то полностью изменяется в первую очередь пространство $(F^E)_b$, ибо ограниченность функции зависит от метрики, а не от топологии (см. стр. 57), и, кроме того, если даже это пространство не изменится, то новая метрика в $(F^E)_b$ не будет эквивалентна первой.

---

[1]) Если E состоит лишь из двух элементов, то F^E может быть отождествлено с $F^2=F\times F$. Только что установленное расстояние в $(F^E)_b$ (которое в нашем случае совпадает с F^E) является одним из расстояний, которое мы в свое время выбирали для произведения на стр. 119:

$$d((x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2))=\sup\,[d(x_1,\ y_1),\ d(x_2,\ y_2)].$$

3°) Предположим теперь, что F имеет структуру нормированного векторного пространства. Тогда в пространстве $(F^E)_b$ также можно ввести структуру нормированного векторного пространства, положив

$$|||f||| = \sup_{x \in E} \|\overrightarrow{f(x)}\|.\text{[1]} \qquad \text{(II, 15; 6)}$$

Методы, аналогичные предыдущему, показывают, что мы определили некоторую норму. Кроме того, метрика, определяемая этой нормой, является метрикой, которую мы определили в п. 2°): $d(f, g) = |||f - g|||$.

Если, например, F является полем вещественных или комплексных чисел, то пространство вещественных или комплексных ограниченных функций, определенных на некотором множестве E, является нормированным векторным пространством [2].

Векторные пространства, полученные в п. 1°) и 3°), практически всегда бесконечномерны. В самом деле, предположим, что E является некоторым множеством из n элементов, которые для удобства мы обозначим через $1, 2, \ldots, n$. Тогда множество F^E в частном случае, когда $F = \mathbb{R}$, является пространством-произведением $\mathbb{R}^n$, а норма, введенная в п. 3°), имеет вид

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|). \qquad \text{(II, 15; 7)}$$

Каждый раз, когда E содержит бесконечное множество элементов (а во всех практически важных случаях в качестве E берется вещественная прямая или некоторый интервал этой прямой), рассмотренное выше пространство F^E бесконечномерно.

Теорема 64. *Если метрическое пространство F полно, то метрическое пространство $(F^E)_b$ ограниченных отображений E в F также полно* [3].

Доказательство. Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — последовательность Коши из $(F^E)_b$. Из определения расстояния следует, что $d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant d(f_m, f_n)$, а, значит, для любой точки x из E

---

[1]) Через $\|\ \|$ мы обозначаем норму элемента F и через $|||\ |||$ норму ограниченного отображения E в F для того, чтобы избежать смешения нормированных векторных пространств F и $(F^E)_b$. Таким образом, $\|\vec{f}\|$ означает функцию $x \to \|\overrightarrow{f(x)}\|$, которая $\geqslant 0$, в то время, как $|||\vec{f}|||$ означает точную верхнюю грань этой функции, т. е. число $\geqslant 0$.

[2]) В поле скаляров $\mathbb{K}$ норма совпадает с модулем, обозначаем через $|\ |$. Поэтому, если $f \in (\mathbb{K}^E)_b$, то $|f|$ является функцией $x \to |f(x)|$, которая $\geqslant 0$. Здесь будет уместным через $\|f\|$ обозначать точную верхнюю грань этой функции, т. е. норму f в $(\mathbb{K}^E)_b$.

[3]) В силу примечания на стр. 147, эта теорема содержит как частный случай теорему 44.

последовательность точек $f_n(x)$ является последовательностью Коши в F.

Поскольку пространство F по предположению полно, то эта последовательность сходится к некоторой точке F, которую мы обозначим через $f(x)$. Тем самым мы определили отображение f множества E в пространство F.

Докажем прежде всего, что это отображение ограничено. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существует целое число p, такое, что при $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ имеет место неравенство $d(f_m, f_n) \leqslant \varepsilon$, а, следовательно, $d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ для всех x из E. Зафиксировав x из E, перейдем в последнем неравенстве к пределу при m, стремящемся к $+\infty$, и, учитывая непрерывность функции расстояния в F, получим неравенство $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant p$. Так как f_p ограничено, то множество $f_p(E)$ содержится в некотором шаре с центром a_p радиуса R_p. Из неравенства

$$d(a_p, f(x)) \leqslant d(a_p, f_p(x)) + d(f_p(x), f(x))$$

следует, что множество $f(E)$ содержится в шаре с центром a_p радиуса $R_p + \varepsilon$; тем самым ограниченность f полностью доказана. Отображение f, таким образом, также является элементом $(F^E)_b$. Остается убедиться, что f_n сходится к f при n, стремящемся к $+\infty$. Действительно, при заданном ε и выбранном p для всех $x \in E$ и $n \geqslant p$ имеем неравенство $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, из которого следует неравенство $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$, означающее сходимость f_n к f. Окончательно получаем, что $(F^E)_b$ является полным метрическим пространством.

Следствие. *Если F является пространством Банаха, то нормированное векторное пространство $(F^E)_b$ также является пространством Банаха. В частности, пространство $(\mathbb{K}^E)_b$ ограниченных функций, определенных на множестве E, с вещественными или комплексными значениями является пространством Банаха.*

Было бы полезным использовать полученные результаты при исследовании сходимости последовательностей функций, чтобы иметь возможность сказать, что некоторая последовательность функций f_n сходится к предельной функции f, если эти функции как точки f_n некоторого топологического пространства сходятся в этом пространстве к точке f.

Простая сходимость последовательности функций

Говорят, что последовательность функций f_n, т. е. последовательность отображений множества E в метрическое пространство F, *просто сходится* при n, стремящемся к $+\infty$, к предельной функции f, если для любого x из E последовательность точек $f_n(x)$ из F сходится при n, стремящемся к $+\infty$, к точке $f(x)$ пространства F.

С помощью логических знаков можно это определение записать так:

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant m): \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{II, 15; 8}$$

Отметим, что, как мы видели ранее (в гл. I, стр. 38), выбор m зависит в действительности одновременно от ε и от x. Возникает вопрос: можно ли в пространстве F^E отображений E в F ввести топологическую структуру таким образом, чтобы элементы этого топологического пространства f_n сходились к элементу f тогда и только тогда, когда функции f_n просто сходятся к функции f в указанном выше смысле? Это в действительности возможно, но не просто. Получаемое при этом топологическое пространство не метризуемо, и мы его здесь рассматривать не будем.

Равномерная сходимость последовательности функций

Говорят, что последовательность функций f_n *сходится равномерно* к функции f при n, стремящемся к $+\infty$, если целое число m, указанное в (II, 15; 8), может быть выбрано независимо от x, т. е. если оно является лишь функцией ε; другими словами, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in E)(\forall n \geqslant m): \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{II, 15; 9}$$

Это же можно записать короче:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant m): \quad d(f_n, f) \leqslant \varepsilon. \tag{II, 15; 10}$$

Последнее означает, что расстояние между f_n и f стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

Очевидно, равномерная сходимость влечет за собой простую сходимость, но, как мы сейчас увидим, обратное не верно. Равномерная сходимость является гораздо более сильным свойством, чем обычная сходимость.

П р и м е р 1. Рассмотрим вещественную функцию вещественной переменной, определенную формулой

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{II, 15; 11}$$

Назовем *сдвигом* этой функции на h функцию, полученную перемещением графика данной функции параллельно оси x на расстояние h, т. е. отображение $(x, y) \to (x+h, y)$. Другими словами, значениями новой функции $\tau_h g$ в точке x являются значения старой функции $g(x)$ в точке $x-h$:

$$(\tau_h g)(x) = g(x-h), \tag{II, 15; 12}$$

так что

$$(\tau_h g)(x) = \frac{1}{1+(x-h)^2}. \tag{II, 15; 13}$$

Рассмотрим теперь последовательность сдвигов $\tau_n g$, $n \in \mathbb{N}$. Непосредственно видно, что эта последовательность функций

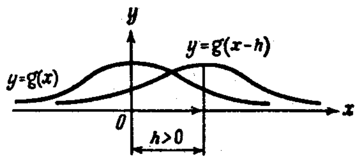

Рис. 3.

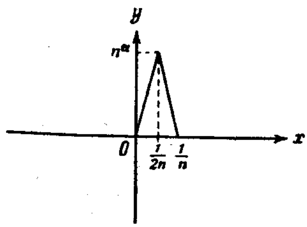

Рис. 4.

сходится к тождественно нулевой функции при n, стремящемся к $+\infty$. Действительно, для фиксированного x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} = 0. \tag{II, 15; 14}$$

Впрочем, это означает лишь, что последовательность значений функции g в точках $x-n$ стремится к 0 при n, стремящемся к $+\infty$, что очевидно.

Однако, последовательность функций $\tau_n g$ при n, стремящемся к $+\infty$, равномерно сходиться к 0 не может, ибо расстояние от $\tau_n g$ до 0, будучи всегда равным 1, не зависит от n.

Пример 2. Рассмотрим вещественную функцию $f_n (n \geqslant 1)$ вещественной переменной, определенную следующим образом: она равна 0 для $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 1/n$, она равна n^α, $\alpha > 0$, для $x = 1/(2n)$, а в каждом из интервалов $[0, 1/(2n)], [1/(2n), 1/n]$ она аффинно линейна[1]). График этой функции изображен на рис. 4.

[1]) Аффинно линейной, или аффинной, мы называем функцию $y = ax + b$. Слово «линейная» в соответствии с общим определением линейного отображения векторных пространств мы сохраняем за функцией $y = ax$.

Как это ни кажется странным, но последовательность f_n сходится к функции, тождественно равной 0, при n, стремящемся к $+\infty$. В самом деле, при любом $x > 0$ для достаточно большого n выполняется неравенство $1/n < x$, а, следовательно, $f_n(x) = 0$. Для всех $x \leqslant 0$, $f_n(x) = 0$, откуда и следует наше утверждение. Однако расстояние от f_n до 0 равно n^α; эта величина стремится к бесконечности, а, значит, f_n не сходится равномерно к 0 при n, стремящемся к $+\infty$. Мы видим, что понятие простой сходимости на самом деле является не столь уж естественным, как это кажется с первого взгляда. В самом деле, тот факт, что две рассмотренные выше последовательности функций стремятся к 0 при n, стремящемся к $+\infty$, выглядит довольно странным. Для последовательности функций понятие равномерной сходимости является более естественным, чем понятие простой сходимости.

Из сказанного выше о связи между равномерной сходимостью и расстоянием между функциями видно, что топологическим пространством, приспособленным к равномерной сходимости, является метрическое пространство $(F^E)_b$. Сказать, что некоторая последовательность ограниченных отображений f_n из E в F сходится равномерно к ограниченному отображению f из E в F, означает сказать, что последовательность точек f_n метрического пространства $(F^E)_b$ сходится к точке f этого метрического пространства.

Другие применения выражения «равномерная сходимость»

Рассмотрим последовательность элементов $x_n(\lambda)$ метрического пространства F, зависящих от параметра λ, пробегающего множество Λ. Говорят, что эта последовательность элементов сходится к некоторому пределу $x(\lambda)$ из F (зависящему, очевидно, также от параметра λ) *равномерно по* λ, пробегающему множество Λ, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall n \geqslant m):\quad d(x_n(\lambda), x(\lambda)) \leqslant \varepsilon.$$

Это, по существу, равносильно утверждению, что последовательность функций $\lambda \to x_n(\lambda)$, определенных на Λ со значениями в F, сходится равномерно к функции $\lambda \to x(\lambda)$. Это понятие сводится, следовательно, к предыдущему, но с психологической точки зрения мы находимся в разных ситуациях, когда рассматривается последовательность функций или когда мы имеем дело с последовательностью точек, зависящих от параметра λ.

Рассмотрим теперь последовательность отображений f_n вещественной прямой $\mathbb{R}$ в метрическое пространство F. Что означает выражение: последовательность f_n сходится при n, стремящемся к $+\infty$, к предельной функции f *равномерно на каждом* *ограниченном интервале* $\mathbb{R}$? Очевидно, это значит, что каким бы ни был ограниченный интервал $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, последовательность сужений f_n в этот интервал сходится равномерно к сужению f; другими словами, это означает, что

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R},\ b \geqslant a)(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})$$
$$(\forall x \in [a, b])(\forall n \geqslant m):\quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \qquad (\text{II}, 15;\ 15)$$

Входящее в это определение число m не зависит от x, но является функцией, с одной стороны, числа ε, а с другой, — интервала $[a, b]$. Здесь можно, естественно, заменить прямую $\mathbb{R}$ и ограниченные интервалы на пространство $\mathbb{R}^n$ и ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. Более общо, если заданы множество E, метрическое пространство F и семейство частей $(A_i)_{i \in I}$ множества E, то можно говорить о последовательности отображений f_n множества E в F, которая при n, стремящемся к $+\infty$, сходится к отображению f равномерно на каждой части A_i данного семейства. Если мы вернемся к примеру функций $\tau_n g$ из формулы (II, 15; 13), то увидим, что последовательность функций $\tau_n g$ сходится к 0 равномерно на каждом ограниченном интервале $\mathbb{R}$ и даже равномерно на всей полупрямой $]-\infty, b[$. В самом деле, при $n \geqslant b$ для всех $x \leqslant b$ имеем: $1/[1 + (x - n^2)] \leqslant$ $\leqslant 1/[1 + (b - n)^2]$, а эта величина стремится к 0 при n, стремящемся к $+\infty$. Если мы рассмотрим теперь второй пример (стр. 151), то увидим, что последовательность функций f_n сходится к функции, тождественно равной нулю, равномерно на дополнении к любому интервалу $[-\delta, +\delta]$, $\delta > 0$, с центром в начале, но она не сходится равномерно ни на каком интервале $]0, \delta[$.

Наконец, если E является топологическим пространством, то говорят, что последовательность функций f_n сходится к f *локально равномерно* на E, если каждая точка a из E имеет окрестность $\mathscr{V}_a$, на которой f_n сходится равномерно к f. Это можно записать следующим образом:

$$(\forall a \in E)(\exists \mathscr{V},\ \text{окрестность } a)(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})$$
$$(\forall x \in \mathscr{V})(\forall n \geqslant m):\quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \qquad (\text{II}, 15;\ 15_2)$$

Если E локально компактно, то локально равномерная сходимость эквивалентна равномерной сходимости на каждом компакте E. В самом деле, если функции f_n сходятся к функции f равномерно на каждом компакте, то, поскольку каждая точка a из E имеет компактную окрестность, на которой f_n сходятся равномерно, рассматриваемая сходимость является локально равномерной. Обратно, предположим, что сходимость локально равномерна, и пусть K — некоторый компакт E. Для любого a из K существует окрестность $\mathscr{V}_a$ точки a, на которой сходимость равномерна. Компакт K покрывается конечным числом окрестностей $\mathscr{V}_a$; следовательно, сходимость является равномерной на K.

Впрочем, все то, что было сказано по поводу простой или равномерной сходимости *последовательности* функций, распространяется на сходимость множества функций в смысле, указанном на стр. 61. Например, если f_t для любого $t \in \mathbb{R}$ является отображением E в метрическое пространство F: $x \to f_t(x)$, то можно говорить о простой или равномерной сходимости отображения f_t к отображению f из E в F, когда t стремится к 0 по положительным значениям или стремится к $+\infty$ и т. д.

Пространства, порожденные структурами пространств E и F

До настоящего времени мы вводили функциональные пространства, исходя только из алгебраических или топологических структур на F. Но если E и F уже наделены такими структурами, то можно определить новые пространства. Например, если E и F оба являются векторными пространствами над одним и тем же полем $\mathbb{K}$, то можно рассмотреть пространство *линейных* отображений E в F. Это векторное подпространство пространства F^E всех отображений E в F. Если E и F — топологические пространства, то можно ввести пространство $(F^E)_c$ *непрерывных* отображений E в F. Если F — метрическое пространство, то это пространство не является подпространством $(F^E)_b$, ибо непрерывное отображение не обязательно ограничено. Однако можно рассмотреть подпространство $(F^E)_{bc}$ пространства $(F^E)_b$, образованное *непрерывными ограниченными* отображениями E в F. Предположим, наконец, что E и F являются нормированными векторными пространствами. Тогда можно ввести, как мы это делали на стр. 114, пространство $\mathscr{L}(E; F)$ *линейных непрерывных* отображений E в F. Оно не является подпространством $(F^E)_{bc}$, так как линейное отображение, если только оно не является тождественно нулевым, ограниченным быть не может [1]). Обозначим через E_0 единичный шар из E. Если линейное отображение E в F задано на шаре E_0, то в силу гомотетии $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$ оно определено всюду на E. Впрочем, если задано некоторое отображение единичного шара E_0 в F, то можно выяснить, является ли оно сужением *линейного* отображения E в F. В самом деле, достаточно продолжить его на E, полагая $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\| u(\vec{x}/\|\vec{x}\|)$ для $\|\vec{x}\| > 1$, и прове-

[1]) В самом деле, если $\vec{a}$ есть некоторый вектор E, такой, что $u(\vec{a}) \neq \vec{0}$, то последовательность $u(n\vec{a}) = nu(\vec{a})$ не ограничена, ибо $\|nu(\vec{a})\| = n\|u(\vec{a})\|$ стремится к $+\infty$ при n, стремящемся к $+\infty$.

рить, является ли полученное отображение линейным. Согласно теореме 47, для того чтобы линейное отображение u из E в F было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы образ единичного шара E_0 при отображении u был ограниченным в F. Мы видим, следовательно, что пространство линейных отображений E в F можно отождествить с некоторым подпространством пространства всех отображений E_0 в F, а именно с подпространством отображений, являющихся сужением линейных отображений E в F. Пространство линейных непрерывных отображений E в F, т. е. $\mathscr{L}(E; F)$, можно отождествить с некоторым подпространством пространства $(F^{E_0})_b$ ограниченных отображений шара E_0 в пространство F. Учитывая определение, которое мы дали для нормы линейного непрерывного отображения E в F и для нормы ограниченного отображения шара E_0 в F, можно пространство $\mathscr{L}(E; F)$ отождествить также с некоторым нормированным векторным подпространством нормированного векторного пространства $(F^{E_0})_b$.

Легко видеть, что $\mathscr{L}(E; F)$ *отождествляется с некоторым замкнутым подпространством* $(F^{E_0})_b$. *Если F полно, то, по теореме* 64 $(F^{E_0})_b$ *также полно. Поэтому* $\mathscr{L}(E; F)$ *как замкнутое подпространство полного пространства полно* (*теорема* 43). Мы получили новое доказательство теоремы 50.

Непрерывность локально равномерного предела последовательности непрерывных функций

Теорема 65. *Пусть E и F — два метрических пространства и $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность отображений E в F, локально равномерно сходящаяся к f. Если все функции f_n непрерывны в точке a из E, то и предельная функция непрерывна в точке a. Если функции f_n непрерывны всюду, то f также непрерывна всюду. Если сходимость равномерна на E и все f_n равномерно непрерывны на E, то f также равномерно непрерывна на E.*

Доказательство. Пусть сходимость равномерна в окрестности $\mathscr{V}_a$ точки a. По определению, для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое m, что для всех x из $\mathscr{V}_a$ имеет место неравенство

$$d(f_m(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(II, 15; 16)}$$

Зафиксировав m, заметим, что функция f_m предполагалась непрерывной в точке a. Следовательно, существует окрестность $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_a$ точки a, такая, что для всех $x \in \mathscr{V}$ имеет место неравенство

$$d(f_m(x), f_m(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(II, 15; 17)}$$

Но тогда для любого $x \in \mathscr{V}$

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(a)) + d(f_m(a), f(a)) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(II, 15; 18)}$$

т. е. функция f непрерывна в точке a.

Из доказательства следует, что если f_n всюду непрерывны, то f также всюду непрерывна [1]).

Предположим теперь, что f_n равномерно непрерывны, а сходимость равномерна на E. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем m так, чтобы для всех x из E выполнялось неравенство (II, 15; 16). Функция f_m равномерно непрерывна. Следовательно, существует такое число $\eta > 0$, при котором из $d(x', x'') \leqslant \eta$ следует неравенство $d(f_m(x'), f_m(x'')) \leqslant \varepsilon/3$. Для $d(x', x'') \leqslant \eta$ при этом имеем

$$d(f(x'), f(x'')) \leqslant d(f(x'), f_m(x')) + d(f_m(x'), f_m(x'')) + \\ + d(f_m(x''), f(x'')) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(II, 15; 19)}$$

что и доказывает равномерную непрерывность f.

Замечание. Напротив, последовательность непрерывных функций f_n вполне может сходиться *просто* к *разрывной* функции f. Так, например, если взять $f_n(x) = x^n$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, то f_n непрерывны для всех n и сходятся к разрывной функции f, равной 0 для $0 \leqslant x < 1$ и 1 для $x = 1$.

Следствие 1. *В пространстве $(F^E)_b$ ограниченных отображений E в F, снабженном метрикой, определенной формулой* (II, 15; 3), *подпространство $(F^E)_{bc}$ ограниченных непрерывных отображений E в F замкнуто.*

Это утверждение является другой формулировкой теоремы.

Следствие 2. *Если F полно, то пространство $(F^E)_{bc}$ ограниченных непрерывных отображений E в F, снабженное метрикой* (II, 15; 3), *является полным метрическим пространством.*

В самом деле, так как оно замкнуто в полном метрическом пространстве $(F^E)_b$ (теорема 64), то для доказательства достаточно применить теорему 43.

Следствие 3. *Если F является пространством Банаха, то пространство $(F^E)_{bc}$ непрерывных ограниченных отображений E в F, снабженное нормой, определяемой по формуле* (II, 15; 6), *является пространством Банаха.*

Особенно важен следующий частный случай. Возьмем в качестве F поле скаляров $\mathbb{K}$. Тогда *пространство вещественных*

[1]) Что касается первых двух результатов, то E может быть топологическим не обязательно метризуемым пространством.

или комплексных функций, ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве E, является пространством Банаха.

В частности, пространство вещественных или комплексных непрерывных и ограниченных функций одной вещественной переменной является пространством Банаха.

Если E компактно (в большинстве практических приложений это будет замкнутый или открытый интервал вещественной прямой), то, согласно теореме 29, получаем, что всякая векторная функция, непрерывная на E, заведомо ограничена [1]). Тогда *пространство* $(F^E)_c$ *функций, непрерывных на некотором компакте E, со значениями в банаховом пространстве F и с нормой* (II, 15; 6) *является пространством Банаха.*

Некоторые контрпримеры

Мы теперь в состоянии дать контрпримеры, о которых говорилось в предыдущих параграфах.

1°) Обозначим через $\mathscr{C}([a, b])$ векторное (бесконечномерное) пространство вещественных или комплексных функций, непрерывных на замкнутом ограниченном интервале $[a, b]$, $a < b$, множества $\mathbb{R}$ [2]). Покажем, как в этом пространстве можно определить не эквивалентные друг другу нормы. Об этом мы говорили после теоремы 13. В качестве первой нормы возьмем ту, которая была определена формулой (II, 15; 6). Вторую норму определим, используя понятие интеграла:

$$N(f) = \int_a^b |f(x)|\,dx\ ^{3)}. \qquad \text{(II, 15; 20)}$$

Эти нормы не эквивалентны. В самом деле, с одной стороны, мы имеем оценку

$$N(f) \leqslant (b-a)\,|||f|||. \qquad \text{(II, 15; 21)}$$

С другой стороны, очевидно, не существует оценки вида $|||f||| \leqslant kN(f)$, где k — не зависящая от непрерывной функции f

---

[1]) Мы это утверждали только для вещественной функции. Однако если $\vec{f}$ является векторной непрерывной функцией, то ее норма $\|\vec{f}\|$ является непрерывной вещественной, а, значит, и ограниченной функцией.

[2]) $\mathscr{C}([a, b])$ можно записать также в виде $(\mathbb{K}^{[a, b]})_c$, где $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел.

[3]) Это число, очевидно, $\geqslant 0$. Неравенство треугольника и соотношение $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ очевидны. Если $f \neq 0$, т. е. если $f \not\equiv 0$, то существует по крайней мере одна точка c на $[a, b]$, в которой $f(c) \neq 0$. Тогда, в силу непрерывности, существует некоторый интервал, окружающий c, где $|f(x)| > 0$, а, значит, и $N(f) > 0$.

постоянная. В самом деле, рассмотрим случай $[a, b] = [0, 1]$ и последовательность функций, указанных в примере 2 на стр. 151. Для этих функций имеем следующие нормы:

$$|||f_n||| = n^\alpha, \qquad N(f_n) = \frac{1}{2} n^{\alpha-1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{|||f_n|||}{N(f_n)} = 2n, \qquad \text{(II, 15; 22)}$$

что и доказывает наше утверждение. Если, например, $0 < \alpha < 1$, то f_n стремится к 0 при n, стремящемся к $+\infty$, по норме N, но не по норме $|||\ |||$. Легко доказывается, что в векторном пространстве $\mathscr{C}([a, b])$ существует бесконечное множество других попарно не эквивалентных норм.

2°) Покажем теперь, что *в пространстве* $\mathscr{C}([0,1])$, *снабженном нормой* $|||\ |||$, *единичный шар не компактен.* Для этого достаточно рассмотреть последовательность функций f_n, определенных формулой $f_n(x) = x^n$ (см. замечание на стр. 156). Имеем:

$$f_n(x) = x^n, \qquad |||f_n||| = 1 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1. \qquad \text{(II, 15; 23)}$$

Поскольку эта последовательность просто сходится к функции, равной 0 для $0 \leqslant x < 1$ и 1 для $x = 1$, то любая ее равномерно сходящаяся подпоследовательность должна сходиться к этому же пределу, но этого не может быть, так как пределом является разрывная функция. Мы нашли некоторую последовательность, принадлежащую единичному шару в $\mathscr{C}([0, 1])$, никакая подпоследовательность которой не сходится. Согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (теорема 25), единичный шар не компактен. Итак, пространство $\mathscr{C}([0, 1])$ не является локально компактным. Как мы видели (теорема 45_2), это верно для любого бесконечномерного нормированного векторного пространства.

Теорема 66. *Пусть E и F — два метрических пространства, A — некоторая часть E и $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность отображений A в F, равномерно сходящаяся к f. Пусть $a \in E$ — точка прикосновения A*[1]*. Если для каждого n функции $f_n(x)$ имеют предел при x, стремящемся к a по значениям в A, и если F полно, то $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a по значениям в A, и, кроме того,*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{n \to \infty} \Big[\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) \Big]. \qquad \text{(II, 15; 24)}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого n функцию $\tilde{f}_n$, определенную на объединении $A \cup \{a\}$ следующим образом: $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)$ для $x \neq a$ и $\tilde{f}_n(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x)$. По определению,

[1]) Никакого предположения относительно принадлежности точки a к множеству A не делается.

функция $\tilde{f}_n$ непрерывна в точке a. С другой стороны, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое целое p, что из неравенств $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$ следует неравенство $d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, а также неравенство $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ для $x \in A$, $x \neq a$. Устремляя x к a, в пределе получаем $d(\tilde{f}_m(a), \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$. Это означает, что $\tilde{f}_n(a)$ образуют последовательность Коши в F, а так как F по предположению полно, то она имеет предел, который мы обозначим через $\tilde{f}(a)$. Функция $\tilde{f}$, определенная формулой $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in A$, $x \neq a$, и принимающая только что определенное значение $\tilde{f}(a)$ в точке a, является функцией, определенной на множестве $A \cup \{a\}$, со значениями в F. При n, стремящемся к $+\infty$, $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ для $x \neq a$. Но $\tilde{f}_n(a)$ стремится к $\tilde{f}(a)$ по определению $\tilde{f}(a)$, а, следовательно, $\tilde{f}_n$ сходится просто к $\tilde{f}$. Однако, $\tilde{f}_n$ сходится, кроме того, и равномерно, ибо для $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ при $x \neq a$ имеем $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}_n(x)) = d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, а также $d(\tilde{f}_m(a), \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$. Поэтому, устремляя m к $+\infty$ и переходя к пределу, получаем неравенство $d(\tilde{f}(a), \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$, т. е. окончательно $d(\tilde{f}, \tilde{f}_n) \leqslant \varepsilon$.

Так как $\tilde{f}_n$ непрерывны в точке a, то из теоремы 65 следует, что $\tilde{f}$ также непрерывна в точке a, т. е. $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a по значениям из A, и что этот предел равен $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{f}_n(a) = \lim\limits_{n \to \infty} [\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x)]$. Теорема доказана.

Пример. Если f_n и f являются вещественными непрерывными функциями на вещественной прямой $\mathbb{R}$, если f_n сходится равномерно к f при n, стремящемся к $+\infty$, и если при любом n существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = l_n$, то существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ и l_n сходятся к l.

Ряды функций со значениями в нормированном векторном пространстве

Пусть $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n, \ldots$ — отображения множества E в нормированное векторное пространство F. Тогда можно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$. Говорят, что этот ряд *сходится* и имеет сумму $\vec{S}$ (отображение E в F), если для каждого x из E ряд векторов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(x)$ из F сходится в нормированном векторном пространстве F к сумме $\vec{S}(x)$. Это означает еще, что последовательность частных сумм $\vec{S}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n$ является последовательностью функций на E со значениями в F, сходящейся просто к S. Говорят, что ряд равномерно сходится, если последовательность частных сумм $\vec{S}_n$ является равномерно сходящейся.

Если F является пространством Банаха, то при использовании понятий, связанных с абсолютной сходимостью или нормальной сходимостью, можно допустить некоторую неточность. Когда речь идет о рядах из векторов нормированного векторного пространства, мы можем не различать термины «ряд абсолютно сходится» или «ряд нормально сходится». Однако этого нельзя делать в случае, когда речь идет о функциональных рядах.

Говорят, что ряд просто *абсолютно сходится*, если для каждого x ряд из норм в банаховом пространстве F, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{u}_n(x)\|$, сходится. Это означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{u}_n\|$[1]), составленный из функций, определенных на E, с вещественными положительными значениями просто сходится. Говорят, что ряд *нормально сходится*, если ряд из норм в нормированном векторном пространстве $(F^E)_b$, а именно $\sum_{n=0}^{\infty} |||\vec{u}_n|||$, является сходящимся рядом с положительными членами. Последнее понятие, очевидно, более сильное. Всякий нормально сходящийся ряд является и просто абсолютно сходящимся. Обратное же, вообще говоря, не верно. В каждом из этих случаев ряд просто сходится (F предполагается полным!). Кроме того, если ряд сходится нормально, то он сходится и равномерно. Нормальная сходимость является наиболее важным критерием равномерной сходимости рядов векторных функций. Этот факт часто выражают следующим образом.

Пусть задан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ функций, определенных на E, со значениями в пространстве Банаха. *Если существует такой ряд, составленный из положительных вещественных чисел* $a_n \geqslant 0$, *что* $\|\vec{u}_n(x)\| \leqslant a_n$ *для любого x из E и* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, *то данный ряд нормально, а, значит, и равномерно сходится.* Этот критерий может быть полезен также и как критерий *равномерной условной сходимости*. В общем случае функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ доказательство его равномерной сходимости можно начать с до-

[1]) Напомним, что $\|\vec{u}_n\|$ является функцией $x \to \|\vec{u}_n(x)\|$ и что $|||\vec{u}_n||| = \sup_{x \in E} \|\vec{u}_n(x)\|$.

казательства сходимости для каждого x из E. Затем вычисляется остаток $\vec{R}_m = \vec{u}_{m+1} + \vec{u}_{m+2} + \ldots$ ряда и доказывается, что последовательность функций $\vec{R}_m$ равномерно сходится к 0 при m, стремящемся к $+\infty$. С этой целью используется подходящая оценка остатка.

Приведем пример, представляющий интерес с точки зрения теории рядов Тейлора.

Теорема 67. *Если ряд Тейлора (с комплексными коэффициентами) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = R$ своего круга сходимости, то он равномерно сходится на всем интервале* $[0, R]$. *В частности, его сумма является непрерывной функцией на интервале* $[0, R]$.

Доказательство. В самом деле, имеет место формула $a_n x^n = (a_n R^n)(x/R)^n$. Поэтому для каждого x из $[0, R[$ мы можем применить критерий сходимости Абеля[1]). Действительно, если положить $u_n = (x/R)^n$, $v_n = a_n R^n$ и за билинейное отображение B принять произведение, то мы увидим, что эти величины удовлетворяют условиям Абеля и формула (II, 14; 31) дает оценку остатка:

$$U_{m+1}(x) = \left|\left(\frac{x}{R}\right)^{m+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{m+2}\right| + \left|\left(\frac{x}{R}\right)^{m+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{m+3}\right| + \ldots =$$
$$= \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{m+1}\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \ldots\right) = \left(\frac{x}{R}\right)^{m+1}, \quad \text{(II, 15; 26)}$$

$$V_{m+1}(x) = V_{m+1} = \sup_{n \geqslant m+1} \left|a_{m+1}R^{m+1} + \ldots + a_n R^n\right|,$$
$$R_{m+1}(x) \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{m+1} \sup_{n \geqslant m+1} \left|a_{m+1}R^{m+1} + \ldots + a_n R^n\right|. \quad \text{(II, 15; 27)}$$

Тот же самый критерий Абеля не применим при $x = R$, так как последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^n = 1$, имеющая постоянную ограниченную вариацию, к нулю не сходится. Однако ряд предполагался сходящимся, и оценка остатка сохраняется по определению остатка. В результате получаем, что эта оценка справедлива для всех x из интервала $[0, R]$. Поскольку при m, стремящемся к $+\infty$, величина V_{m+1} стремится к 0, в силу критерия

[1]) Может показаться бессмысленным применять критерий, относящийся к условно сходящимся рядам, в области, где степенной ряд, мажорируемый геометрической прогрессией, абсолютно сходится! Но мы хотим доказать *равномерную сходимость*, и, поскольку при $x = R$ ряд не предполагается абсолютно сходящимся, другими методами мы не располагаем.

Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, и $U_{m+1} \leqslant 1$, то видно, что остаток R_{m+1} сходится равномерно к 0 при m, стремящемся к $+\infty$. Тем самым доказана равномерная сходимость ряда Тейлора. Непрерывность суммы теперь вытекает из теоремы 65.

Доказанная теорема часто используется в различных областях математики. Рассмотрим, например, разложение Тейлора

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{для} \quad |x| < 1. \tag{II, 15; 28}$$

При $x = 1$, согласно теореме о знакопеременных рядах, этот ряд сходится. Следовательно, он представляет некоторую непрерывную функцию в интервале $[0, 1]$, а его сумма равна $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2$. При $x = 1$ отсюда получаем следующую формулу:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \text{[1]}. \tag{II, 15; 29}$$

Точно так же, рассматривая разложение в ряд функции

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

и проводя те же самые рассуждения для $x = 1$, получаем формулу:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots. \tag{II, 15; 30}$$

§ 16. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ИЛИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ

Определение. Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — последовательность вещественных или комплексных чисел. Говорят, что *бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *сходится*, если при n, стремящемся к $+\infty$, сходится к некоторому конечному числу $\neq 0$ последовательность частных произведений $\Pi_n = \prod\limits_{0 \leqslant m \leqslant n} u_m$.

---

[1]) В этом частном случае можно непосредственно воспользоваться теоремой о знакопеременных рядах. Для каждого $x \in [0, 1]$ эта теорема применима; значит, остаток $R_{m+1}(x)$ мажорируется по модулю первым отброшенным членом $\frac{x^{m+1}}{m+1} \leqslant \frac{1}{m+1}$ и потому действительно сходится равномерно к 0.