Коши сходимости числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, и $U_{m+1} \leqslant 1$, то видно, что остаток R_{m+1} сходится равномерно к 0 при m, стремящемся к $+\infty$. Тем самым доказана равномерная сходимость ряда Тейлора. Непрерывность суммы теперь вытекает из теоремы 65.

Доказанная теорема часто используется в различных областях математики. Рассмотрим, например, разложение Тейлора

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{для} \quad |x| < 1. \tag{II, 15; 28}$$

При $x = 1$, согласно теореме о знакопеременных рядах, этот ряд сходится. Следовательно, он представляет некоторую непрерывную функцию в интервале $[0, 1]$, а его сумма равна $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln(1+x) = \ln 2$. При $x = 1$ отсюда получаем следующую формулу:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \text{[1]}. \tag{II, 15; 29}$$

Точно так же, рассматривая разложение в ряд функции

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

и проводя те же самые рассуждения для $x = 1$, получаем формулу:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots . \tag{II, 15; 30}$$

§ 16. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ИЛИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ

Определение. Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — последовательность вещественных или комплексных чисел. Говорят, что *бесконечное произведение* $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ *сходится*, если при n, стремящемся к $+\infty$, сходится к некоторому конечному числу $\neq 0$ последовательность частных произведений $\Pi_n = \prod_{0 \leqslant m \leqslant n} u_m$.

---

[1]) В этом частном случае можно непосредственно воспользоваться теоремой о знакопеременных рядах. Для каждого $x \in [0, 1]$ эта теорема применима; значит, остаток $R_{m+1}(x)$ мажорируется по модулю первым отброшенным членом $\frac{x^{m+1}}{m+1} \leqslant \frac{1}{m+1}$ и потому действительно сходится равномерно к 0.

Во всех других случаях произведение называется *расходящимся*. Кажется довольно странным считать расходящимся произведение, в котором частные произведения Π_n сходятся к нулю. Но это вызвано, как мы увидим позже, многими причинами. Если хотя бы один из сомножителей u_n является нулем, то произведение, конечно, расходится. Если все числа u_n вещественны и $\geqslant 1$, то Π_n образуют возрастающую последовательность, а, значит, мы имеем предел, конечный или равный $+\infty$. В том случае, когда произведение расходится, пишут $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$. Точно так же каждый раз, когда Π_n стремится к 0, для расходящегося произведения пишут $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0$.

Теорема 68. *Для того чтобы бесконечное произведение $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ было сходящимся, необходимо, чтобы его общий член u_n стремился к 1 при n, стремящемся к $+\infty$.*

Доказательство. В самом деле, если бесконечное произведение сходится и его значением является $\Pi \neq 0$, то произведения Π_n и Π_{n-1} оба сходятся к Π, откуда следует, что их отношение u_n при n, стремящемся к $+\infty$, сходится к $\Pi/\Pi = 1$. Заметим сразу, что это свойство не сохраняется для бесконечных произведений, частные произведения которых Π_n сходятся к 0. Например, если мы рассмотрим бесконечное произведение $(1)(1/2)(1/3)\ldots(1/n)\ldots$, частные произведения которого, очевидно, стремятся к 0, то его общий член $1/n$ к 1 не сходится.

Замечание. В случае сходящегося бесконечного произведения остатком R_m называют произведение $\prod_{n \geqslant m+1} u_n$. Остаток R_m стремится к 1 при m, стремящемся к $+\infty$.

Для того чтобы бесконечное произведение было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий Коши: отношение Π_n/Π_m должно стремиться к 1, когда m и n стремятся к $+\infty$ (все члены u_n предполагаются $\neq 0$). Сходящееся произведение, очевидно, удовлетворяет этому критерию. Обратно, пусть бесконечное произведение удовлетворяет критерию Коши. Тогда существует целое p, такое, что при $n \geqslant p$ выполняется неравенство $|\Pi_p - \Pi_n| \leqslant |\Pi_p|$. Из неравенства $|\Pi_n| \leqslant |\Pi_n - \Pi_p| + |\Pi_p| \leqslant 2|\Pi_p|$ следует, что все Π_n ограничены. Пусть M — их точная верхняя грань. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant M/2$, можно определить q так, чтобы при любых $m \geqslant q$ и $n \geqslant q$ выполнялось неравенство $|\Pi_m - \Pi_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} |\Pi_m| \leqslant \varepsilon$. Последовательность чисел Π_n является, следовательно, последовательностью Коши в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Поскольку это поле полно, то Π_n имеет предел Π. Устремляя в последнем неравенстве n к $+\infty$, получаем

$$|\Pi_m - \Pi| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} |\Pi_m| \leqslant \frac{1}{2} |\Pi_m|,$$

т. е. $\Pi \neq 0$, а значит, бесконечное произведение сходится.

Бесконечные произведения и логарифмические ряды

При изучении сходимости или расходимости бесконечного произведения представляется заманчивым вычислить логарифм его членов с тем, чтобы заменить произведение рядом. Если члены вещественны, то логарифмы можно вычислить, начиная с того момента, когда все $u_n > 0$.

Если такого номера, начиная с которого все $u_n > 0$, не существует, то это означает, что общий член u_n при n, стремящемся к $+\infty$, к 1 не сходится. Но тогда сразу ясно, что произведение расходится, и его изучение заканчивается.

Если же при n, стремящемся к $+\infty$, общий член u_n стремится к 1, то, начиная с некоторого номера, все u_n строго положительны, и можно вычислять их логарифм.

Предположим, что u_n комплексны. Известно, как сложно брать логарифм комплексного числа, ибо каждое комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов. Если положить $z = re^{i\theta}$, то мы получим общую формулу: $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\theta$, где θ определено с точностью до сомножителя, кратного 2π. Предположим, однако, что z изменяется в полуплоскости $x = \operatorname{Re} z > 0$. Тогда можно выбрать его аргумент между $-\pi/2$ и $\pi/2$ и затем определить по соответствующей формуле его логарифм. Так определенный логарифм является непрерывной функцией. Его называют главным значением логарифма и обозначают через ln [1]).

В частности, если v — такое вещественное число, что $|v| < 1$, то $1 + v$ находится в предыдущей полуплоскости, и ранее определенный логарифм можно записать в виде разложения Тейлора

$$\ln(1+v) = \frac{v}{1} - \frac{v^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{v^n}{n} + \ldots . \qquad \text{(II, 16; 1)}$$

Пусть теперь $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ — бесконечное произведение комплексных чисел. Если u_n не стремится к 1 при n, стремящемся к $+\infty$,

[1]) Можно также определить главное значение логарифма в дополнении к полупрямой $\leqslant 0$ в плоскости. Тогда $-\pi < \arg z < +\pi$ и $-i\pi < \operatorname{Im}(\ln z) < i\pi$.

то произведение расходится. Если же u_n стремится к 1 при n, стремящемся к $+\infty$, то, начиная с некоторого n, числа u_n находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} u_n > 0$ и, опустив конечное число членов, можно взять логарифмы. При этом мы сразу же получаем такую теорему:

Теорема 69. *Для того чтобы бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, *для всех членов которого* $\operatorname{Re} u_n > 0$, *было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln u_n$.

Предположим сначала, что бесконечное произведение сходится. Обозначим через Π_n частные произведения и через S_n частные суммы ряда логарифмов. Не обязательно $\ln \Pi_n = S_n$, и нельзя даже утверждать, что $\operatorname{Re} \Pi_n > 0$. Однако, согласно критерию Коши, существует такое целое число p, что при $n \geqslant p$ имеем $|\Pi_n/\Pi_p - 1| < 1$, а, следовательно, $\operatorname{Re}(\Pi_n/\Pi_p) > 0$, а также $\operatorname{Re}(\Pi/\Pi_p) > 0$. Зафиксируем такое p. Тогда $\ln(\Pi_n/\Pi_p) = S_n - S_p + 2k_n i\pi$. Поскольку Π_n/Π_p сходится к Π/Π_p, то из непрерывности главного значения логарифма следует, что $S_n - S_p + 2k_n i\pi$ при n, стремящемся к $+\infty$, сходится к пределу, а, значит, ряд с общим членом $\ln u_n + 2(k_n - k_{n-1}) i\pi$ является сходящимся и его общий член стремится к нулю. Однако, так как u_n в силу того, что произведение сходится, стремится к 1, то $\ln u_n$ также сходится к 0. Начиная с некоторого значения n, мы получаем $k_{n-1} = k_n$, а, значит, ряд с общим членом $\ln u_n$ является также сходящимся.

Обратно, если ряд сходится, то S_n сходится к некоторому пределу S. В силу непрерывности показательной функции получаем, что числа $\Pi_n = e^{S_n}$ сходятся к $\Pi = e^S \neq 0$. Теперь видно, почему в доказательстве было существенным предположение $\Pi \neq 0$. Впрочем, если u_n вещественны >0 и Π_n стремятся к 0, то $\ln u_n$ будет являться общим членом расходящегося ряда с суммой $-\infty$. Говорят, что *бесконечное произведение, которое по предположению сходится, абсолютно сходится* (*соответственно условно сходится*), *если ряд из логарифмов его членов* (который будет определенным начиная с некоторого места) *является абсолютно сходящимся* (*соответственно условно сходящимся*). Естественно, что здесь используется весьма вольный оборот речи. Сказать, что произведение абсолютно сходится, вовсе не значит сказать, что произведение $\Pi |u_n|$ сходится. (Поскольку $\prod\limits_{n=0}^{\infty} |u_n| = \left| \prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n \right|$, то произведение абсолютно сходится, если оно сходится.) Если все u_n вещественны и $\geqslant 1$ или заключены между 0 и 1, то сходимость является синонимом абсолютной сходимости.

Теорема 70. *Для того чтобы бесконечное произведение* $\prod_{n=0}^{\infty}(1+v_n)$, $v_n \neq -1$ [1]), *было абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы был сходящимся ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$.

Доказательство. Если произведение абсолютно сходится, то оно сходится просто, а, следовательно, $1+v_n$ стремится к 1, и для достаточно больших $n \geqslant p$ можно вычислять логарифм членов произведения. Ряд $\sum_{n \geqslant p}|\ln(1+v_n)|$ по предположению сходится. В сходящихся же рядах с положительными членами при исследовании сходимости общий член ряда можно заменять на эквивалентный ему. При n, стремящемся к $+\infty$, v_n стремится к 0, а тогда $\ln(1+v_n) \sim v_n$ и, следовательно, ряд $\sum_{n \geqslant p}|v_n|$ также сходится, а вместе с ним и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$.

Обратно, предположим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$ сходится. Тогда v_n стремится к 0, а, следовательно, для $n \geqslant p$, при достаточно большом p, $\operatorname{Re}(1+v_n)>0$ и можно вычислить логарифмы чисел $1+v_n$. Так как при n, стремящемся к $+\infty$, $|\ln(1+v_n)| \sim |v_n|$, то ряд $\sum_{n \geqslant p}|\ln(1+v_n)|$ сходится. Следовательно, сходится ряд $\sum_{n \geqslant p}\ln(1+v_n)$, а, значит, согласно теореме 69, сходится произведение $\prod_{n \geqslant p}(1+v_n)$. Поскольку все $v_n \neq -1$, то произведение $\prod_{n=0}^{\infty}(1+v_n)$, не имеющее нулевых членов, также сходится. Поскольку $\prod_{n=0}^{\infty}(1+v_n)$ сходится и сходится ряд $\sum_{n \geqslant p}|\ln(1+v_n)|$, рассматриваемое произведение сходится абсолютно.

Пример. Бесконечное произведение

$$\prod_{n \geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad \text{или} \quad \prod_{n \geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \tag{II, 16; 2}$$

[1]) Если не налагать ограничения $v_n \neq -1$, то может случиться, что $\sum|v_n| < +\infty$, а бесконечное произведение имеет нулевой член, т. е. расходится!

сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$. В частности, оно расходится при $\alpha = 1$. Заметим, что последний случай практически очевиден, ибо здесь легко вычисляются частные произведения

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1, \\ &\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}. \end{aligned} \qquad \text{(II, 16; 3)}$$

Можно даже сказать, что поскольку расходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ или $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ более очевидна, чем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то с помощью теоремы 70 можно доказать расходимость этого ряда!

Бесконечные произведения вещественных или комплексных функций

Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательность функций, определенных на множестве E с вещественными или комплексными значениями. Бесконечное произведение $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ называется просто сходящимся, если для любого x из E сходится бесконечное произведение $\prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ вещественных или комплексных чисел. Это означает, что последовательность функций $\Pi_n = \prod_{0\leqslant m\leqslant n} u_n$ просто сходится к нигде не равной нулю предельной функции.

Произведение называется абсолютно просто сходящимся, если для любого x из E числовое произведение $\prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится.

Выражение «равномерная сходимость» для произведения функций не ясно. Фраза о том, что произведение комплексных функций $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ на E сходится равномерно к функции Π, может означать, что Π_n и Π нигде на E в нуль не обращаются и что функции Π_n равномерно сходятся к функции Π. Та же самая фраза может также означать, что Π_n и Π нигде на E в нуль не обращаются и что отношение Π_n/Π равномерно сходится к 1. Как легко видеть, эти два понятия не обязательно совпадают. Однако они совпадают, если предел Π имеет на E равномерные оценки снизу и сверху такого вида: $0 < a \leqslant \Pi(x) \leqslant \leqslant b < +\infty$. В самом деле, в этом случае из неравенства $|\Pi_n - \Pi| \leqslant \varepsilon$ следует неравенство $|\Pi_n/\Pi - 1| \leqslant \varepsilon/a$, а из неравенства $|\Pi_n/\Pi - 1| \leqslant \varepsilon$ следует неравенство $|\Pi_n - \Pi| \leqslant \leqslant b\varepsilon$. Только в этом случае мы можем позволить себе говорить о равномерной сходимости бесконечного произведения функций. Однако всегда можно говорить о *локальной* равномерной сходимости бесконечного произведения функций, непрерывных на некотором топологическом пространстве E (и тогда предел Π будет также непрерывным). В самом деле, если функции Π_n сходятся локально равномерно к функции Π, то, согласно теореме 65, функция Π будет непрерывной. Так как она везде отлична от 0, то для каждой точки a существует окрестность $\mathscr{V}'_a$, в которой $|\Pi|$ органичена сверху и снизу некоторыми фиксированными положительными числами. Но тогда во всякой окрестности $\mathscr{V}_a \subset \mathscr{V}'_a$, в которой функции Π_n сходятся равномерно к функции Π, отношение Π_n/Π равномерно сходится к 1. Обратно, предположим, что Π_n/Π локально равномерно сходится к 1. Тогда для каждого a из E существуют окрестность $\mathscr{V}'_a$ и число n, такие, что $|\Pi_n(x)/\Pi(x) - 1| \leqslant 1/2$ для $x \in \mathscr{V}'_a$. Отсюда следует $1/2 \leqslant |\Pi_n(x)/\Pi(x)| \leqslant 3/2$, а, значит, $\frac{2}{3}|\Pi_n(x)| \leqslant \leqslant |\Pi(x)| \leqslant 2|\Pi_n(x)|$. Поскольку функции Π_n непрерывны и $\Pi_n(a) \neq 0$, то существует окрестность $\mathscr{V}''_a \subset \mathscr{V}'_a$ точки a, в которой функции $|\Pi_n|$ ограничены сверху и снизу положительными постоянными. При этом функция $|\Pi(x)|$ также будет ограниченной. Если теперь $\mathscr{V}_a \subset \mathscr{V}''_a$ является окрестностью, на которой Π_n/Π сходится равномерно к 1, то Π_n будут на ней равномерно сходиться к Π.

Применение к функции ζ Римана

Функция Римана ζ определяется формулой

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{II, 16; 4}$$

Пусть $s = \sigma + i\tau$ и δ — вещественное число > 0. Тогда данный ряд, рассматриваемый как ряд функций, определенный в области $\sigma \geqslant 1 + \delta$ комплексной плоскости, является нормально сходящимся. В самом деле,

$$\left|\frac{1}{n^{\sigma+i\tau}}\right| = \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}}. \tag{II, 16; 5}$$

Так как для любого n функция $s \to 1/n^s$ непрерывна в полуплоскости $\sigma \geqslant 1 + \delta$, то видно, что сумма, т. е. функция ζ, также непрерывна в этой полуплоскости, а поскольку это верно для любого $\delta > 0$, функция ζ непрерывна во всей полуплоскости $\sigma > 1$.

Рассмотрим теперь бесконечное произведение, в котором p пробегает множество всех простых чисел

$$G(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - 1/p^s}\right). \qquad \text{(II, 16; 6)}$$

Любой член этого произведения всегда $\neq 0$. Впрочем, знаменатель $1 - 1/p^s \neq 0$ для $\sigma > 0$. Кроме того, в этом случае при $\sigma > 0$ модулем числа $1/p^s$ является число $1/p^\sigma < 1$ и, следовательно, применима теорема 70.

Бесконечное произведение абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_p 1/p^\sigma$. Последнее же, конечно, будет иметь место для $\sigma > 1$, поскольку сумма этого ряда мажорируется суммой сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$.

Теорема 71. *При $\sigma > 1$ имеет место равенство $G(s) = \zeta(s)$.*

Доказательство. При доказательстве этой теоремы естественно считать s раз и навсегда фиксированным. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$ и произведение G сходятся, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти целое число m, обладающее следующими свойствами:

a) остаток $\sum\limits_{n>m} 1/n^\sigma$ мажорируется числом $\varepsilon/2$;

b) если через $G_m(s)$ обозначить частные произведения, образованные из m первых множителей бесконечного произведения, то $|G_m(s) - G(s)| \leqslant \varepsilon/2$.

Для каждого простого числа p имеет место разложение в абсолютно сходящийся геометрический ряд:

$$\frac{1}{1 - 1/p^s} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}. \qquad \text{(II, 16; 7)}$$

В силу правила относительно произведения нескольких абсолютно сходящихся рядов (теорема 61), можно записать:

$$G_m(s) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} \left(\frac{1}{p_1}\right)^{k_1 s} \ldots \left(\frac{1}{p_m}\right)^{k_m s}, \qquad \text{(II, 16; 8)}$$

где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_m суть m первых простых чисел и $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — целые числа $\geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$G_m(s) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^s}, \qquad \text{(II, 16; 9)}$$

где ν пробегает последовательность всех целых чисел, которые в разложении на простейшие множители содержат только простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Рассмотрим теперь разность $G_m(s) - \zeta(s)$; она состоит из части членов ряда $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^s}$, соответствующих индексам $n > m$, и потому

$$|G_m(s) - \zeta(s)| \leqslant \sum_{n > m} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{(II, 16; 10)}$$

откуда вытекает неравенство

$$|G(s) - \zeta(s)| \leqslant |G(s) - G_m(s)| + |G_m(s) - \zeta(s)| \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(II, 16; 11)}$$

Поскольку ε произвольно, то получаем, что $G(s) = \zeta(s)$.

Следствие. *При $\sigma > 1$ функция ζ в нуль никогда не обращается.*

Это очевидно, так как она равна значению сходящегося бесконечного произведения. Предыдущие результаты, очевидно, не верны для $\sigma = 1$. В частности, расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$. Докажем точно так же следующее утверждение:

Теорема 72. *Бесконечное произведение $\prod\limits_{p} \frac{1}{1 - 1/p}$ расходится.*

Заметим для этого, что для произвольного числа $A > 0$ можно найти такое целое m, что

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \geqslant A. \qquad \text{(II, 16; 12)}$$

Рассмотрим теперь частные произведения G_m. Примененные выше разложения в геометрический ряд имеют смысл и, следовательно, G_m является суммой $\sum \nu^{-1}$, в которой ν пробегает все целые числа, разложение которых на сомножители состоит только из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Отсюда, в частности, вытекает, что имеет место неравенство

$$G_m(1) = \sum \frac{1}{\nu} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \geqslant A. \qquad \text{(II, 16; 13)}$$

Поскольку A произвольно, из этого неравенства следует, что рассматриваемое бесконечное произведение (сомножители которого > 1) расходится: $G(1) = +\infty$.

Следствие. *Множество простых чисел бесконечно; кроме того, ряд* $\sum\limits_p 1/p$, *составленный из простых чисел, расходится.*

В самом деле, расходимость этого ряда эквивалентна расходимости бесконечного произведения $\prod\limits_p (1 - 1/p) = 1/G(1)$.

Замечание. Рассмотрим знакопеременный ряд

$$\zeta_a(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} + \ldots. \qquad \text{(II, 16; 14)}$$

Как мы только что видели, этот ряд сходится для $\sigma > 0$. Мы сейчас покажем, что он даже равномерно сходится на каждом компакте открытой полуплоскости $\sigma > 0$ комплексной плоскости. Пусть K — такой компакт. Заметим прежде всего, что на K функция $|s|$ в силу ее непрерывности ограничена сверху некоторым числом S. Точно так же непрерывная всюду положительная функция σ на K ограничена снизу некоторым числом $\delta > 0$.

Применим теперь теорему Абеля (теорема 63). Имеем:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = u_n v_n, \quad \text{где} \quad v_n = (-1)^{n-1}, \quad u_n = \frac{1}{n^s}.$$

Величины $|\sigma_{m,n}|$ мажорируются числом 1. Покажем, что последовательность чисел u_n имеет ограниченную вариацию. Имеем:

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}\,[1], \qquad \text{(II, 16; 15)}$$

откуда

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| \leqslant |s| \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \qquad \text{(II, 16; 16)}$$

и

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| + \left|\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{(n+2)^s}\right| + \ldots \leqslant |s| \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma n^\sigma}. \qquad \text{(II, 16; 17)}$$

[1]) Это общий метод для оценки разности; полагают $f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)\,dt$.

Следовательно, ряд сходится, а формула (II, 14; 31) дает для остатка следующую оценку:

$$\left|\sum_{n\geqslant m+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right|\leqslant\frac{|s|}{\sigma(m+1)^{\sigma}}. \qquad \text{(II, 16; 18)}$$

Так как при этом $|R_m|\leqslant S/[\delta(m+1)^{\delta}]$, где правая часть не зависит от s и стремится к 0 при m, стремящемся к $+\infty$, то сходимость ряда равномерна на K.

Если считать, что $\sigma>1$, то можно указать простую связь между функциями ζ и ζ_a. В самом деле, из формулы

$$\zeta_a(s)=\zeta(s)-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^s$$

получаем:

$$\zeta_a(s)=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right), \quad \text{или} \quad \zeta(s)=\frac{\zeta_a(s)}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}. \qquad \text{(II, 16; 19)}$$

Свойство равномерной сходимости, доказанное для ζ_a, показывает, что эта функция непрерывна на каждом компакте K открытой полуплоскости $\sigma>0$. Следовательно, она непрерывна всюду в этой полуплоскости. В частности, при s, стремящемся к 1, $\zeta_a(s)$ стремится к $\zeta_a(1)=\ln 2$. Тогда из формулы (II, 16; 19) следует, что при s, стремящемся к 1, $\zeta(s)$ эквивалентна

$$\frac{\ln 2}{1-e^{(1-s)\ln 2}}\sim\frac{\ln 2}{(s-1)\ln 2}=\frac{1}{s-1}.$$

В результате формула (II, 16; 19) позволяет продолжить функцию ζ в полуплоскость $\sigma>0$ [1]).

Другие способы продолжения позволяют определить функцию ζ во всей комплексной плоскости и показать, что это *голоморфная* комплексной переменной s, т. е. непрерывная функция с непрерывной первой производной по отношению к этой комплексной переменной в дополнении к точке $s=1$ комплексной плоскости. Эта точка $s=1$ является полюсом, $\zeta(1)=\infty$. Продолженная функция обращается в нуль в точках $s=-2, -4, -6, \ldots$. Исследование этой функции дает сведения о распределении простых чисел, как мы это уже видели на простом примере. Риман высказал гипотезу, до сих пор еще не доказанную, о том, что продолженная функция ζ имеет все нули,

[1]) Это продолжение, естественно, не имеет больше ничего общего с суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$, не имеющей смысла для $s\leqslant 1$.

кроме предыдущих, на вертикальной полупрямой $\sigma = 1/2$. Доказательство этого утверждения дало бы исключительно важные сведения о распределении последовательности простых чисел. Во всяком случае, уже известные в настоящее время свойства функции ζ позволяют показать, что n-е простое число эквивалентно при n, стремящемся к бесконечности, числу $n \ln n$, или что число простых чисел, заключенных между 1 и N, эквивалентно при N, стремящемся к $+\infty$, числу $N/\ln N$.

Теория простых чисел является одной из самых интересных, но и самых трудных математических теорий.