ГЛАВА III

Дифференциальное исчисление

§ 1. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Более или менее интуитивное представление о пространстве дается еще в средней школе. В элементарной геометрии пространство рассматривается как совокупность его элементов, называемых точками. Исходя из точек — элементов этого пространства, — можно с помощью отношения эквивалентности ввести понятие свободных векторов, как это было сделано на стр. 19. Пространство свободных векторов является векторным пространством, обладающим обычными свойствами.

Однако пользоваться далее этими, недостаточно изученными понятиями невозможно, так как пространство в элементарной геометрии не было определено строго. В математике принимается такая схема.

На основе общей теории множеств корректно определяется понятие множества $\mathbb{N}$ целых чисел $\geqslant 0$, а затем множество $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака. Далее, исходя из отношений эквивалентности, вводится поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, как об этом говорилось на стр. 19. В полных математических курсах, опираясь на понятие сечения и исходя из поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, со всей строгостью определяется поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и, наконец, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. После этого можно ввести общее понятие абстрактного векторного пространства над некоторым полем (которое будет чаще всего полем вещественных или полем комплексных чисел).

Понятие векторного пространства и его свойства уже были получены нами ранее. Исходя из этого понятия, введем со всей строгостью пространство элементарной геометрии, которое является аффинным евклидовым пространством. Оно очень близко к векторному пространству, но его нуль не обладает никакими свойствами, выделяющими его среди других элементов пространства. В дальнейшем элементы векторного пространства мы будем всегда обозначать буквами с проведенной над ними стрелкой и будем называть их векторами.

Определение. *Аффинным пространством E* над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел называется непустое множество (его элементы называются точками), которому, с одной стороны, сопоставлено векторное пространство $\vec{E}$ над полем вещественных или комплексных чисел, называемое векторным пространством, присоединенным к E (элементы которого мы будем называть векторами), а, с другой стороны, — некоторое отображение множества $E \times E$ в пространство $\vec{E}$ (его свойства мы уточним ниже).

Если a и b — две точки E, то элементом, соответствующим паре $(a, b) \in E \times E$ при рассматриваемом отображении, является некоторый вектор из $\vec{E}$. Его обозначают через $\overrightarrow{ab}$ и называют вектором с началом в a и концом в b. Отображение $E \times E$ в $\vec{E}$ должно обладать следующими свойствами:

1°) *Соотношение Шаля*: каковы бы ни были точки a, b, c множества E, должно выполняться равенство

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \vec{0}, \quad \text{где} \quad \vec{0} \text{ — нулевой вектор } \vec{E}. \qquad \text{(III, 1; 1)}$$

Из этого свойства вытекает, в частности (если считать все три точки совпадающими с a), что, какова бы ни была точка $a \in E$, вектор $\overrightarrow{aa}$ является нулевым вектором пространства $\vec{E}$. Если положить $b = c$, то мы получим, что $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ba}$ являются противоположными векторами.

2°) Какой бы ни была фиксированная точка a, отображение $x \to \overrightarrow{ax}$ должно быть биекцией E на $\vec{E}$. Мы примем следующие обозначния.

Прежде всего, вектор $\overrightarrow{ab}$ с началом в a и концом в b может быть записан в виде $\overrightarrow{b-a}$. Соотношение Шаля при этом примет такой вид: $\overrightarrow{b-a} + \overrightarrow{c-b} + \overrightarrow{a-c} = \vec{0}$. Принятое обозначение согласуется с обычными свойствами вычитания. С другой стороны, если a — точка E и $\vec{h}$ — вектор пространства $\vec{E}$, то из свойства биекции, определенной в 2°), следует, что в E существует, и притом единственная, точка b, такая, что $\overrightarrow{b-a} = \vec{h}$. Эту точку удобно обозначать через $a + \vec{h}$. При этом, в силу соотношения Шаля, получаем $a + (\vec{h} + \vec{k}) = (a + \vec{h}) + \vec{k}$. Таким образом, новое понятие согласуется с привычными свойствами сложения. Размерность присоединенного векторного пространства называется также размерностью аффинного пространства E. Пустое множество можно рассматривать как аффинное пространство, не имеющее присоединенного векторного пространства.

Векторное пространство является частным случаем аффинного. Достаточно считать оба пространства совпадающими и поставить в соответствие любым двум элементам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторного пространства вектор $\overrightarrow{ab} = \vec{b} - \vec{a}$. В частности, *поле скаляров* $\mathbb{K}$ *само есть аффинное пространство размерности* 1.

Общей, или аффинной, системой координат аффинного конечномерного пространства E называется система, образованная точкой 0 (началом) пространства E и некоторым базисом $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ [1]) присоединенного векторного пространства $\vec{E}$. Рассмотрим теперь произвольную точку x из E. Вектор $\overrightarrow{x-0}$ имеет координаты $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ в выбранном базисе $\vec{E}$. Эти координаты называются координатами точки x в выбранной системе координат, при этом имеет место формула

$$x = 0 + \sum_{i \in I} x_i \vec{e}_i. \tag{III, 1;2}$$

Аффинные многообразия

Пусть F — непустое подмножество аффинного пространства E, обладающее следующим свойством.

Существует такое векторное подпространство $\vec{F}$ векторного пространства $\vec{E}$, что для каждой пары (a, b) из $F \times F$ вектор $\overrightarrow{b-a}$ принадлежит $\vec{F}$ и для любой пары $(a, \vec{h})$ из $F \times \vec{F}$ точка $a + \vec{h}$ принадлежит F. Если такое векторное подпространство $\vec{F}$ существует, то оно единственно, поскольку является множеством всех векторов $\overrightarrow{b-a}$ для всевозможных пар (a, b) из $F \times F$. При этих условиях говорят, что F *является аффинным подпространством или аффинным многообразием* (*часто даже линейным многообразием пространства* E) *и что* $\vec{F}$ *является его присоединенным векторным подпространством.*

Пространство F обладает структурой аффинного пространства, имеющего $\vec{F}$ в качестве присоединенного векторного пространства, а в качестве отображения $F \times F$ в $\vec{F}$ — сужение за-

[1]) Если $\vec{E}$ имеет размерность n, то I является множеством «индексов», состоящим из некоторых n элементов, а $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ является «семейством» n векторов из $\vec{E}$. Чаще всего $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — это множество n первых целых положительных чисел, а базисом является «последовательность» n векторов из $\vec{E}$.

данного отображения $E \times E$ в $\vec{E}$. Условимся считать пустую часть множества E аффинным многообразием, не имеющим присоединенного векторного пространства. Пространство E само по себе является аффинным многообразием. *Точка* является аффинным многообразием размерности 0. *Прямой* называется аффинное многообразие размерности 1, *плоскостью* — аффинное многообразие размерности 2. Векторное подпространство $\vec{F}$ пространства $\vec{E}$ называется *гиперплоскостью*, если его дополнительные векторные подпространства имеют размерность 1. Аффинное многообразие F из E называется *гиперплоскостью*, если его присоединенное векторное подпространство является гиперплоскостью. Если E конечномерно размерности n, то гиперплоскость представляет собой аффинное многообразие размерности $n-1$.

Два аффинных многообразия из E одной и той же размерности называются параллельными, если они имеют одно и то же присоединенное векторное пространство[1]. В частности, два совпадающих многообразия параллельны. Легко видеть, что при таком построении теории аффинных пространств так называемый постулат Евклида является *теоремой*, к тому же очевидной: через каждую точку пространства можно провести аффинное многообразие, параллельное заданному многообразию, и притом единственное. Это означает, что если $\vec{F}$ — векторное подпространство $\vec{E}$ и a — точка из E, то существует, и притом единственное, аффинное многообразие, состоящее из точки a и присоединенного векторного пространства $\vec{F}$: это множество точек вида $a + \vec{h}$, где $\vec{h} \in \vec{F}$.

Пересечение конечного или бесконечного числа аффинных многообразий аффинного пространства является аффинным многообразием. Отсюда вытекает, что если A является некоторой частью аффинного пространства, то существует наименьшее аффинное многообразие, содержащее A. Это — пересечение всех аффинных многообразий, содержащих A. Его называют аффинным многообразием, порожденным множеством A. Если размерности двух аффинных многообразий равны p и q, через i обозначена размерность их пересечения, а через s размерность аффинного многообразия, порожденного их объединением, то легко доказать, что в случае когда пересечение не пусто, имеет место формула: $p + q = i + s$.

---

[1]) Если E является плоскостью (аффинное пространство двух измерений), то две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда они не пересекаются.

Произведение $E_1 \times E_2$ двух аффинных пространств обладает, очевидно, структурой аффинного пространства, имеющего $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в качестве присоединенного векторного пространства, если положить $\overrightarrow{(b_1, b_2) - (a_1, a_2)} = (\overrightarrow{b_1 - a_1}, \overrightarrow{b_2 - a_2})$.

Линейные отображения. Аффинные отображения

Пусть E и F — два аффинных пространства. Отображение u пространства E в пространство F называется аффинным, если существует такое линейное отображение $\vec{u}$ из $\vec{E}$ в $\vec{F}$, что

$$\overrightarrow{u(b) - u(a)} = \vec{u}(\overrightarrow{b - a}). \qquad \text{(III, 1; 3)}$$

Отображение $\vec{u}$, очевидно, единственно, поскольку его значение на произвольном векторе из $\vec{E}$ известно[1]). Пусть E и F — два конечномерных аффинных пространства с выбранной в них системой координат, т. е. известно начало a в E и базис $(\vec{e}_j)_{j \in J}$ в $\vec{E}$ и начало b в F и базис $(\vec{f}_i)_{i \in I}$ в $\vec{F}$. Аффинное отображение u будет полностью определено, если известны координаты $(c_i)_{i \in I}$ точки $u(a)$ в аффинном пространстве F и координаты u_{ij}, $i \in I$, каждого вектора $\vec{u}(\vec{e}_j)$, $j \in J$, в векторном пространстве $\vec{F}$. Отображение u при этом определяется формулой

$$\begin{aligned} u(a) &= b + \sum_{i \in I} c_i \vec{f}_i, \\ \vec{u}(\vec{e}_j) &= \sum_{i \in I} u_{ij} \vec{f}_i. \end{aligned} \qquad \text{(III, 1; 4)}$$

Можно также сказать, что каждой точке $x = a + \sum_{j \in J} x_j \vec{e}_j$ из E с координатами $(x_j)_{j \in J}$ ставится в соответствие точка $y = b + \sum_{i \in I} y_i \vec{f}_i$ из F с координатами $(y_i)_{i \in I}$ по формуле

$$y_i = c_i + \sum_{j \in J} u_{ij} x_j, \qquad i \in I. \qquad \text{(III, 1; 5)}$$

Если, в частности, F является полем вещественных или полем комплексных чисел, снабженным своей канонической системой координат, состоящей из нуля и единичных векторов,

---

[1]) Очень часто стрелка над линейным присоединенным отображением не ставится и через u одновременно обозначается как аффинное отображение, так и присоединенное к нему линейное. Обозначение $\vec{u}$ может привести к ошибочному представлению о том, что $\vec{u}$ является вектором из $\vec{E}$ или $\vec{F}$.

то можно говорить о вещественной или комплексной аффинной функции. Это функция, которая (если в E выбрана система координат) каждой точке x с координатами $(x_j)_{j \in J}$ ставит в соответствие вещественное или комплексное число:

$$u(x) = c + \sum_{j \in J} u_j x_j, \qquad c = u(a), \qquad u_j = \vec{u}(\vec{e}_j). \qquad \text{(III, 1; 6)}$$

Как видно, то, что часто называют линейной функцией, следует называть аффинной функцией, а то, что часто называют линейной однородной функцией ($\vec{E}$ — векторное пространство, $a = \vec{0}$, $c = \vec{0}$), следует называть просто линейной функцией. Функция $y = ax + b$ *является аффинной функцией*, а $y = ax$ — *ее линейной присоединенной функцией.*

Если $\vec{h}$ является вектором из векторного пространства, присоединенного к аффинному пространству E, то биекция $x \to x + \vec{h}$ пространства E на себя называется переносом на вектор $\vec{h}$. Это, очевидно, аффинное преобразование, присоединенное линейное отображение которого является тождественным преобразованием. Обратно, каждое аффинное преобразование, имеющее в качестве присоединенного линейного тождественное преобразование, является переносом. В самом деле, $\overrightarrow{u(b) - u(a)} = \overrightarrow{b - a}$; следовательно, $\overrightarrow{u(b) - b} = \overrightarrow{u(a) - a}$, т. е. $\overrightarrow{u(x) - x}$ не зависит от x. Обозначив через $\vec{h}$ значение этой разности, получим $u(x) = x + \vec{h}$.

Аффинные нормированные пространства

Говорят, что аффинное пространство нормировано, если нормировано его присоединенное векторное пространство. Подчеркнем, что *норма является функцией, определенной в присоединенном векторном пространстве, а не в самом аффинном пространстве. Можно говорить о норме вектора, а не о норме точки.*

Аффинное нормированное пространство обладает метрикой, определенной естественной функцией расстояния: $d(x, y) = \|\overrightarrow{x - y}\|$. Эта функция расстояния инвариантна относительно переноса в том смысле, что $d(x + \vec{h}, y + \vec{h}) = d(x, y)$. С другой стороны, при гомотетии с центром в нуле и отношением λ (определяемой отображением $x \to x' = 0 + \lambda\,(\overrightarrow{x - 0})$ пространства E в себя) расстояние умножается на $|\lambda|$ (в том смысле, что $d(x', y') = |\lambda| d(x, y)$). Если E является аффинным нормированным пространством, то отображение $(x, y) \to \overrightarrow{y - x}$ из $E \times E$ в $\vec{E}$ и отображение $(x, \vec{h}) \to x + \vec{h}$ из $E \times \vec{E}$ в E непрерывны.

Если E и F — аффинные нормированные пространства и E конечномерно, то любое аффинное отображение E в F заведомо непрерывно. Для доказательства достаточно повторить рассуждения, проведенные на стр. 111. Напротив, если E и F бесконечномерны, то это утверждение не всегда справедливо. Из изложенного на стр. 111 следует, что линейное отображение одного векторного нормированного пространства в другое может не быть непрерывным.

Теорема 1. 1°) *Аффинное нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда полно его присоединенное векторное пространство.*

2°) *Аффинное подпространство F аффинного пространства E замкнуто тогда и только тогда, когда его присоединенное векторное подпространство $\vec{F}$ замкнуто в $\vec{E}$ (в частности, конечномерное аффинное подпространство всегда замкнуто).*

3°) *Для того чтобы аффинное отображение u аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы присоединенное линейное отображение было непрерывным*[1]). *В этом случае и равномерно непрерывно.*

Доказательство. 1°) Пусть a — точка, выбранная за начало в E. Отображение $\vec{X} \to a + \vec{X}$ является биекцией $\vec{E}$ на E, сохраняющей расстояние, т. е. сохраняющей структуру метрического пространства. Но тогда E будет полным одновременно с $\vec{E}$.

2°) Пусть $a \in F$. Тогда $\vec{X} \to a + \vec{X}$ является гомеоморфизмом $\vec{E}$ на E, а образом $\vec{F}$ является F. Значит, F замкнуто в E тогда и только тогда, когда $\vec{F}$ замкнуто в $\vec{E}$.

3°) Если u является аффинным непрерывным отображением E в F, то линейное присоединенное отображение $\vec{u}$ опре-

[1]) Напомним, что линейное отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле пространства (теорема 47 гл. II).

деляется формулой

$$\vec{u}(\vec{X}) = \overrightarrow{u(a+\vec{X}) - u(a)}, \qquad \text{(III, 1; 7)}$$

где a — некоторая фиксированная точка. Это отображение, очевидно, непрерывно. Обратно, если $\vec{u}$ непрерывно, то из неравенства

$$\| \overrightarrow{u(x) - u(y)} \| = \| \vec{u}(\vec{x} - \vec{y}) \| \leqslant \| \vec{u} \| \| \vec{x} - \vec{y} \| \qquad \text{(III, 1; 7}_2\text{)}$$

следует, что отображение u удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывно.

Теорема 2. *Пусть E — аффинное нормированное пространство, f - непостоянная скалярная аффинная функция над E. Тогда уравнение $f(x) = 0$ определяет некоторую аффинную гиперплоскость H.*

Обратно, любая аффинная гиперплоскость определяется бесконечным множеством уравнений этого вида. Все соответствующие аффинные функции пропорциональны одна другой.

Каждая аффинная гиперплоскость H замкнута или плотна в E. Она замкнута тогда и только тогда, когда аффинные функции f, определяющие уравнение этой плоскости, непрерывны.

Доказательство. 1°) Пусть f — непостоянная скалярная аффинная функция, а f_0 — линейная форма на присоединенном пространстве $\vec{E}$[1]).

Пространство E содержит по крайней мере две точки a и b, такие, что $f(a) \neq f(b)$. Формула

$$f(a + t(\overrightarrow{b-a})) = f(a) + tf_0(\overrightarrow{b-a}), \qquad f_0(\overrightarrow{b-a}) \neq 0,$$

показывает, что можно всегда выбрать t так, чтобы f обращалась в нуль хотя бы в одной точке c из E. Выбирая c в качестве начала, мы установим биекцию $\vec{X} \to c + \vec{X}$ из $\vec{E}$ на E, которая позволит нам проводить рассуждения над пространством $\vec{E}$ вместо пространства E. Пусть $\vec{H}$ — множество, определенное уравнением $f_0(\vec{X}) = 0$, или, иначе, множество $f_0^{-1}(\{\vec{0}\})$, или, иначе, ядро линейной формы f_0. Пусть, с другой стороны, H — множество из E, определяемое уравнением $f(x) = 0$.

---

[1]) См. примечание на стр. 178. Если мы будем писать $\vec{f}$, то можно подумать, что $\vec{f}(\vec{X})$ является вектором, в то время как это лишь скаляр.

Поскольку $f(c)=0$, то $x \in H$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{x-c} \in \vec{H}$; другими словами, мы имеем $H = c + \vec{H}$.

Если мы покажем, что $\vec{H}$ является векторной гиперплоскостью, то тем самым докажем, что H является аффинной гиперплоскостью. Поскольку f не постоянна, то f_0 не равна тождественно нулю. Следовательно, существует такой элемент $\vec{e}$ из $\vec{E}$, что $f_0(\vec{e}) \neq 0$, а, заменяя при необходимости вектор $\vec{e}$ на кратный ему вектор, мы можем всегда считать, что $f_0(\vec{e}) = 1$. Любой элемент $\vec{X}$ из $\vec{E}$ тогда запишется единственным образом в виде

$$\vec{X} = \vec{Y} + \lambda\vec{e}, \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \vec{Y} \in \vec{H} \qquad (\text{где } f_0(\vec{Y}) = 0). \qquad (\text{III}, 1; 7_3)$$

Эта формула эквивалентна равенству

$$\lambda = f_0(\vec{X}), \qquad \vec{Y} = \vec{X} - f_0(\vec{X})\,\vec{e}.$$

Это равенство показывает, что векторное подпространство $\vec{H}$ и векторное одномерное подпространство, порожденное вектором $\vec{e}$, дополнительны в $\vec{E}$, т. е. что $\vec{H}$ является гиперплоскостью.

2°) Обратно, пусть H — гиперплоскость в E. Ее присоединенным векторным подпространством $\vec{H}$ является по определению некоторая гиперплоскость в $\vec{E}$.

Пусть теперь $\vec{e}$ — некоторый вектор, дополнительный к $\vec{H}$ в $\vec{E}$ $(\vec{e} \notin \vec{H})$. Всякий вектор $\vec{X}$ из $\vec{E}$ допускает тогда единственное разложение вида (III, 1; 7_3). Скаляр λ зависит от $\vec{X}$, и мы можем обозначить его через $\lambda = f_0(\vec{X})$. Функция f_0: $\vec{X} \to f_0(\vec{X})$ является линейной формой на $\vec{E}$. Она не является тождественно нулевой (например, $f_0(\vec{e}) = 1$), а множество ее нулей совпадает с $\vec{H}$.

Всякая линейная форма g_0, такая, что уравнение $g_0(\vec{X}) = 0$ определяет гиперплоскость $\vec{H}$, пропорциональна f. В самом деле, если $k = g_0(\vec{e})$, то $g_0(\vec{X}) = kf_0(\vec{x})$ для $\vec{X} = \vec{e}$ (по определению) и для $\vec{X} \in \vec{H}$, поскольку в этом случае справа и слева стоят нули, а, следовательно, $g_0(\vec{X}) = kf_0(\vec{X})$ для произвольного $\vec{X} \in \vec{E}$. Если теперь взять произвольную точку c

из H, то множество H будет определено одним из уравнений вида $g(x)=0$, где $g(x)=g_0(\overrightarrow{x-c})$. Мы видим, что все соответствующие аффинные функции g пропорциональны одна другой.

3°) Если f непрерывна, то множество H, прообраз замкнутого множества $\{0\}$ поля скаляров относительно отображения f, замкнуто в E. Пусть теперь функция f, а вместе с ней и функция f_0 разрывны. Согласно теореме 47 гл. II, для каждого целого n можно найти такой вектор $\vec{a}_n$ из $\vec{E}$, что $|f_0(\vec{a}_n)| \geqslant n\|\vec{a}_n\|$. Умножая $\vec{a}_n$ на соответствующий скаляр, можно добиться того, чтобы $\|\vec{a}_n\| \leqslant 1/n$ и одновременно $f_0(\vec{a}_n)=1$. Пусть x — любая точка из E. Рассмотрим последовательность точек $x_n = x - f(x)\vec{a}_n$. Так как $f(x_n) = f(x) - f(x)f_0(\vec{a}_n) = 0$, то точки x_n принадлежат H. Поскольку $f(x)\vec{a}_n$ сходится к $\vec{0}$, последовательность $\vec{x}_n$ сходится к x, когда n стремится к бесконечности. Мы видим, что каждая точка x из E является точкой сгущения H, т. е. что H плотно в E, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Эта теорема выявляет в некотором смысле удивительный факт, непривычный для тех, кто занимается изучением конечномерных пространств: может случиться, что некоторая гиперплоскость плотна в рассматриваемом пространстве. В дальнейшем нам представится случай встретиться с плотными векторными подпространствами векторных нормированных пространств (знаменитая теорема Вейерштрасса говорит, что подпространство полиномов плотно в пространстве $\mathscr{C}[0,1]$ непрерывных комплексных функций на $[0,1]$).

Выпуклые множества в аффинных пространствах

Пусть a и b — две точки аффинного пространства E над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел. Множество точек, которые можно записать в виде $a + t\overrightarrow{b-a}$, где t вещественное число, $0 \leqslant t \leqslant 1$, называется *отрезком с концами a и b*. Этот отрезок обозначают через $[a,b]$ и называют также замкнутым отрезком. Через $[a,b[$ (соответственно через $]a,b]$ и через $]a,b[$) обозначают тот же самый отрезок без точки b (соответственно без точки a и без обеих точек a и b). Здесь применяются выражения «полуоткрытый отрезок» или «открытый отрезок», хотя они не являются открытыми множествами, если аффинное пространство нормировано.

Часть аффинного пространства E называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она целиком содержит весь отрезок с концами в этих точках.

В аффинном пространстве без труда определяется понятие барицентра[1]). Часть A аффинного пространства E выпукла тогда и только тогда, когда вместе с конечным числом точек она содержит их барицентр при любой системе масс $\geqslant 0$. Это легко проверить, заметив, что барицентр нескольких точек может быть построен с помощью последовательного построения барицентров двух точек и что барицентры системы двух точек с произвольными массами $\geqslant 0$ находятся на соединяющем их отрезке.

Пустое множество, множество, сводящееся к одной точке, само аффинное пространство E и, более общо, любое аффинное многообразие из E являются выпуклыми. Если E нормировано, то всякий открытый или замкнутый шар является выпуклым. Любое пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых частей является выпуклой частью. Можно доказать, что внутренняя часть и замыкание выпуклой части аффинного нормированного пространства выпуклы.

Евклидовы векторные и евклидовы аффинные пространства

Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. *Евклидовым скалярным произведением в* $\vec{E}$ называется *билинейная форма* $(\vec{X}, \vec{Y}) \to B(\vec{X}, \vec{Y}) \in \mathbb{R}$, которая яв-

---

[1]) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки аффинного пространства E, снабженные такими коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Тогда точка $G = O' + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{O'A_i}$ пространства E, где O' — некоторая точка E, называется *барицентром* системы точек A_i. Если числа $\alpha_i \geqslant 0$, то их называют массами точек A_i, а барицентр G — центром тяжести системы точек A_i.

Точка G не зависит от выбора точки O' из E. Необходимым и достаточным условием того, что G является барицентром системы точек A_i, снабженных коэффициентами $\left(\alpha_i \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0\right)$, является выполнение равенства $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$. Барицентр системы точек не меняется, если часть этих точек заменить их барицентром (если он существует), снабженным коэффициентом, равным сумме коэффициентов соответствующих точек. — *Прим. ред.*

ляется *симметричной*, т. е. $B(\vec{X}, \vec{Y}) = B(\vec{Y}, \vec{X})$, и *положительно определенной*, т. е.

$$B(\vec{X}, \vec{X}) > 0 \quad \text{для} \quad \vec{X} \neq 0. \qquad \text{(III, 1; 8)}$$

Два вектора $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ из $\vec{E}$ называются ортогональными относительно скалярного произведения B, если $B(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$.

Векторное пространство, снабженное евклидовым скалярным произведением, называется *евклидовым векторным пространством*. Аффинное пространство, присоединенное векторное пространство которого евклидово, называется *евклидовым аффинным пространством*. То, что в элементарной геометрии называют трехмерным пространством, является просто евклидовым аффинным пространством трех *измерений* [1]).

Теорема 2_2. *Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство над* $\mathbb{R}$, *B — некоторая билинейная симметричная форма на $\vec{E} \times \vec{E}$, такая, что $B(\vec{X}, \vec{X}) \geqslant 0$ для всех $\vec{X}$ из $\vec{E}$. Тогда имеет место неравенство Коши — Шварца*

$$|B(\vec{X}, \vec{Y})| \leqslant \sqrt{B(\vec{X}, \vec{X})} \cdot \sqrt{B(\vec{Y}, \vec{Y})} \qquad \text{(III, 1; 9)}$$

и неравенство Минковского

$$\sqrt{B(\vec{X}+\vec{Y}, \vec{X}+\vec{Y})} \leqslant \sqrt{B(\vec{X}, \vec{X})} + \sqrt{B(\vec{Y}, \vec{Y})}; \qquad \text{(III, 1; 10)}$$

кроме того, если B — положительно определенная форма, т. е. $B(\vec{X}, \vec{X}) > 0$ для $\vec{X} \neq \vec{0}$, то в обеих формулах стоит всегда знак строгого неравенства $<$, кроме тех случаев, когда в формуле (III, 1; 9) *векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны и когда в формуле* (III, 1; 10) *эти векторы пропорциональны с положительным коэффициентом пропорциональности* [2]).

Доказательство. Для любых векторов $\vec{X}, \vec{Y}$ и числа λ имеем

$$B(\vec{X} + \lambda\vec{Y}, \vec{X} + \lambda\vec{Y}) \geqslant 0, \qquad \text{(III, 1; 11)}$$

---

[1]) Это не совсем точно: в элементарной геометрии единица длины необязательно фиксирована. Пространство становится аффинным евклидовым лишь после выбора в нем единицы длины.

[2]) Если $\vec{X}$ или $\vec{Y}$ являются нулевыми векторами, то можно считать, что они пропорциональны с коэффициентами пропорциональности $\geqslant 0$.

или

$$B(\vec{X}, \vec{X}) + 2\lambda B(\vec{X}, \vec{Y}) + \lambda^2 B(\vec{Y}, \vec{Y}) \geqslant 0. \qquad \text{(III, 1; 12)}$$

Вещественный трехчлен неотрицателен лишь в том случае, когда его дискриминант $\leqslant 0$, откуда и получается неравенство (III, 1; 9). Пусть теперь билинейная форма B положительно определена. Если $\vec{Y} \neq \vec{0}$, то $B(\vec{Y}, \vec{Y}) > 0$ и трехчлен не вырожден. Если $\vec{X}$ не пропорционален $\vec{Y}$, то вектор $\vec{X} + \lambda\vec{Y}$ отличен от $\vec{0}$ для любого вещественного λ. Следовательно, левая часть соотношения (III, 1; 11) всегда >0. Но тогда трехчлен (III, 1; 12) больше нуля при любом λ, т. е. не имеет вещественных корней. Это означает, что его дискриминант <0 и соотношение (III, 1; 9) имеет место со знаком $<$. Таким образом, в (III, 1; 9) всегда имеет место знак $<$, кроме случая, когда $\vec{Y} = \vec{0}$ или $\vec{Y} \neq \vec{0}$, но $\vec{X} = \lambda_0\vec{Y}$, т. е. если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны. Что же касается неравенства Минковского, то оно эквивалентно неравенству

$$B(\vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y}) \leqslant B(\vec{X}, \vec{X}) + B(\vec{Y}, \vec{Y}) + 2\sqrt{B(\vec{X}, \vec{X}) \cdot B(\vec{Y}, \vec{Y})}, \qquad \text{(III, 1; 13)}$$

или

$$B(\vec{X}, \vec{X}) + 2B(\vec{X}, \vec{Y}) + B(\vec{Y}, \vec{Y}) \leqslant$$
$$\leqslant B(\vec{X}, \vec{X}) + B(\vec{Y}, \vec{Y}) + 2\sqrt{B(\vec{X}, \vec{X}) \cdot B(\vec{Y}, \vec{Y})}. \qquad \text{(III, 1; 14)}$$

Последнее же неравенство следует из (III, 1; 9). Если B положительно определена, то равенство справедливо только в том случае, когда $B(\vec{X}, \vec{Y}) \geqslant 0$ и когда (III, 1; 9) имеет место со знаком $=$, т. е. если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны с неотрицательным коэффициентом пропорциональности.

Отсюда вытекает, что если аффинное пространство E евклидово, то функция $\vec{X} \to \sqrt{B(\vec{X}, \vec{X})}$ является *нормой* в $\vec{E}$. Именно она служит для определения расстояния в элементарной геометрии. *Евклидово пространство, векторное или аффинное, является нормированным.* Скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве принято обозначать через $(\vec{X} \mid \vec{Y})$, а через $\sqrt{(\vec{X} \mid \vec{X})}$ — норму $\|\vec{X}\|$.

Эрмитовы векторные и эрмитовы аффинные пространства[1])

Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Отображение u из $\vec{E}$ в $\vec{F}$ называется *полулинейным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &u(\vec{X}+\vec{Y})=u(\vec{X})+u(\vec{Y}) \quad \text{для} \quad \vec{X}\in\vec{E},\ \vec{Y}\in\vec{E},\\ &u(\lambda\vec{X})=\bar{\lambda}u(\vec{X}) \qquad\qquad\quad \text{для} \quad \vec{X}\in\vec{E},\ \lambda\in\mathbb{C}. \end{aligned} \tag{III, 1; 15}$$

Если $\vec{F}=\mathbb{C}$, то u является *полулинейной формой.*

Полуторалинейной формой[2]) на $\vec{E}\times\vec{E}$ называется функция $(\vec{X},\vec{Y})\to B(\vec{X},\vec{Y})\in\mathbb{C}$, линейная по $\vec{X}$ при фиксированном $\vec{Y}$ и полулинейная по $\vec{Y}$ при фиксированном $\vec{X}$. Другими словами,

$$\begin{aligned} B(\vec{X}_1+\vec{X}_2,\vec{Y})&=B(\vec{X}_1,\vec{Y})+B(\vec{X}_2,\vec{Y}),\\ B(\vec{X},\vec{Y}_1+\vec{Y}_2)&=B(\vec{X},\vec{Y}_1)+B(\vec{X},\vec{Y}_2),\\ B(\lambda\vec{X},\vec{Y})&=\lambda B(\vec{X},\vec{Y}),\ \lambda\in\mathbb{C},\\ B(\vec{X},\mu\vec{Y})&=\bar{\mu}B(\vec{X},\vec{Y}),\ \mu\in\mathbb{C}. \end{aligned} \tag{III, 1; 16}$$

Эрмитовым скалярным произведением в векторном пространстве $\vec{E}$ над полем комплексных чисел называется *полуторалинейная форма* $(\vec{X},\vec{Y})\to B(\vec{X},\vec{Y})$, которая является эрмитовой, т. е. такой, что $B(\vec{Y},\vec{X})=\overline{B(\vec{X},\vec{Y})}$, и положительно определенной, т. е. удовлетворяющей неравенству (III, 1; 8). Векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, снабженное эрмитовым скалярным произведением, называется *эрмитовым векторным пространством.* Аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$, присоединенное векторное пространство которого эрмитово, называется *эрмитовым аффинным пространством.*

Теорема 2_3. *Заключения теоремы 2_2 сохраняются, если в ее условии заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ и «билинейная симметричная» на «полуторалинейная эрмитова».*

---

[1]) В русской литературе вместо слова «эрмитово» принято использовать термин «унитарное». — *Прим. ред.*

[2]) Полтора = один с половиной; полуторалинейная = линейная + полулинейная.

Доказательство. В самом деле, вместо (III, 1; 12) на этот раз для любого комплексного λ получаем:

$$B(\vec{X}, \vec{X}) + \lambda B(\vec{Y}, \vec{X}) + \bar{\lambda} B(\vec{X}, \vec{Y}) + \lambda\bar{\lambda} B(\vec{Y}, \vec{Y}) \geqslant 0. \quad \text{(III, 1;17)}$$

Пусть $B(\vec{X}, \vec{Y}) = \rho e^{i\theta}$, где $\rho = |B(\vec{X}, \vec{Y})|$. Положим $\lambda = te^{i\theta}$, где t — вещественное число (не обязательно $\geqslant 0$). Из (III, 1; 17) следует, что для любого вещественного t имеет место неравенство

$$B(\vec{X}, \vec{X}) + 2|B(\vec{X}, \vec{Y})|t + B(\vec{Y}, \vec{Y})t^2 \geqslant 0, \quad \text{(III, 1; 18)}$$

из которого снова следует (III, 1; 9).

Неравенство (III, 1; 10) эквивалентно неравенству

$$B(\vec{X}, \vec{Y}) + B(\vec{Y}, \vec{X}) \leqslant 2\sqrt{B(\vec{X}, \vec{X})\, B(\vec{Y}, \vec{Y})}, \quad \text{(III, 1; 18}_2\text{)}$$

или

$$\mathrm{Re}(B(\vec{X}, \vec{Y}))^{1)} \leqslant \sqrt{B(\vec{X}, \vec{X})\, B(\vec{Y}, \vec{Y})}, \quad \text{(III, 1; 18}_3\text{)}$$

что вытекает из (III, 1; 9).

Если B положительно определена, $\vec{Y} \neq \vec{0}$ и $\vec{X}$ не пропорционален $\vec{Y}$, то (III, 1; 18) будет >0 для любого вещественного t; следовательно, неравенство (III, 1; 9) будет справедливым со знаком $<$. Равенство возможно лишь в том случае, когда $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны. Равенство в соотношении (III, 1; 10) может иметь место только в том случае, если, кроме того, $\mathrm{Re}\, B(\vec{X}, \vec{Y}) = |B(\vec{X}, \vec{Y})|$, т. е. если $B(\vec{X}, \vec{Y})$ вещественно и $\geqslant 0$, а, значит, если коэффициент пропорциональности $\geqslant 0$.

Таким образом, *эрмитово векторное или аффинное пространство нормировано.*

Приведем теперь результаты, пригодные как для евклидовых пространств над полем $\mathbb{R}$, так и для эрмитовых пространств над полем $\mathbb{C}$. Мы их будем излагать для эрмитовых пространств. Конечно, в евклидовом случае скаляры будут считаться вещественными, полулинейность будет означать линейность, полуторалинейность — билинейность, а $\bar{\lambda}$ будет заменяться на λ.

---

[1]) Re = вещественная часть.

Изоморфизм (или полуизоморфизм) конечномерного евклидова (или эрмитова) пространства и его сопряженного пространства

Через $\overleftarrow{E}'$ будем обозначать пространство, сопряженное к некоторому векторному пространству $\overrightarrow{E}$ над полем $\mathbb{K}$[1]). Если $\overleftarrow{\alpha}$ является элементом из $\overleftarrow{E}'$, то это линейная форма на $\overrightarrow{E}$, т. е. отображение $\overrightarrow{X} \to \overleftarrow{\alpha}(\overrightarrow{X})$. Вместо $\overleftarrow{\alpha}(\overrightarrow{X})$ удобнее писать $\overleftarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{X}$ или $\langle \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{X} \rangle$. Известно, что $\overleftarrow{E}'$ также является векторным пространством, а функция $(\overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{X}) \to \langle \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{X} \rangle \in \mathbb{K}$ — некоторой билинейной формой на $\overleftarrow{E}' \times \overrightarrow{E}$, которую называют фундаментальной билинейной формой. Ее называют также скалярным произведением $\overleftarrow{\alpha} \in \overleftarrow{E}$ и $\overrightarrow{X} \in \overrightarrow{E}$, но это скалярное произведение не имеет никакого отношения к скалярному произведению в евклидовом или эрмитовом пространствах, ибо $\overleftarrow{\alpha}$ и $\overrightarrow{X}$ не принадлежат одному и тому же векторному пространству[2]). При этом следует строго различать обозначения $\langle \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{X} \rangle$ и $(\overrightarrow{X} | \overrightarrow{Y})$. Однако если $\overrightarrow{E}$ является евклидовым или эрмитовым пространством, то оба скалярных произведения существуют одновременно.

Для фиксированного $\overrightarrow{Y}$ функция $\overrightarrow{X} \to (\overrightarrow{X} | \overrightarrow{Y})$ является линейной формой на $\overrightarrow{E}$. Следовательно, ей соответствует некоторый элемент $\overrightarrow{\gamma}$ сопряженного пространства, такой, что

$$\langle \overleftarrow{\gamma}, \overrightarrow{X} \rangle = (\overrightarrow{X} | \overrightarrow{Y}) \quad \text{для любого } \overrightarrow{X} \text{ из } \overrightarrow{E}. \qquad \text{(III, 1; 19)}$$

Этот элемент $\overleftarrow{\gamma}$ зависит от $\overrightarrow{Y}$, и поэтому мы будем обозначать его через $\overleftarrow{\gamma}_{\overrightarrow{Y}}$ или $\overleftarrow{\gamma(\overrightarrow{Y})}$. Тогда полулинейность правой части равенства (III, 1; 19) по отношению к $\overrightarrow{Y}$ для каждого

---

[1]) Сопряженное пространство и его элементы удобно обозначать символами, снабженными сверху противоположно направленной стрелкой (тем более, что векторы из $\overleftarrow{E}$ называются ковекторами).

[2]) Кроме того, скалярное произведение $\langle \, , \rangle$ всегда билинейно, а не полуторалинейно.

фиксированного $\vec{X}$ означает, что $\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}}$ полулинейно зависит от $\vec{Y}$:

$$\begin{gathered}\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}_1+\vec{Y}_2}=\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}_1}+\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}_2},\\ \overleftarrow{\gamma}_{\lambda\vec{Y}}=\bar{\lambda}\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}}.\end{gathered}\tag{III, 1; 20}$$

Таким образом, $\vec{Y}\to\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}}$ является полулинейным отображением γ пространства $\vec{E}$ в его сопряженное пространство $\overleftarrow{E'}$. *Это отображение инъективно*, ибо равенство $\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}}=\overleftarrow{0}$ означает, что $\langle\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}}, \vec{X}\rangle=(\vec{X}|\vec{Y})=0$, каким бы ни был вектор $\vec{X}$ из $\vec{E}$. Полагая $\vec{X}=\vec{Y}$, получаем $(\vec{Y}|\vec{Y})=0$, откуда $\vec{Y}=\vec{0}$, что доказывает инъективность отображения γ. *Если E конечномерно*, то $\vec{E}$ и $\overleftarrow{E'}$ имеют одну и ту же размерность, а это означает, что *γ является биекцией $\vec{E}$ на $\overleftarrow{E'}$*. Отсюда следует, что *задание евклидовой структуры определяет изоморфизм между пространством и его сопряженным; задание эрмитовой структуры определяет полуизоморфизм между ними.*

Воспользуемся только тем фактом, что γ является сюръекцией. Если $\overleftarrow{\alpha}$ является элементом сопряженного пространства, т. е. некоторой линейной формой на $\vec{E}$, то существует, и притом единственный, элемент $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, такой, что

$$(\vec{X}|\vec{Y})=\langle\overleftarrow{\alpha}, \vec{X}\rangle \quad \text{для всех } \vec{X} \text{ из } \vec{E}.$$

Элемент $\vec{Y}$ является не чем иным, как $\overrightarrow{\gamma^{-1}(\overleftarrow{\alpha})}$. Таким образом, получаем следующий результат:

Теорема 2_4. *Если $\overleftarrow{\alpha}$ является линейной формой над евклидовым или эрмитовым конечномерным пространством $\vec{E}$, то существует, и притом единственный, вектор $\vec{Y}$, такой, что форма $\overleftarrow{\alpha}$ является скалярным произведением* $\vec{X}\to(\vec{X}|\vec{Y})$.

Ортонормированные базисы

Ортонормированным называется базис $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ евклидова или эрмитова конечномерного пространства $\vec{E}$, элементы которого попарно ортогональны и имеют длину 1.

Теорема 2_5. *Любое евклидово или эрмитово конечномерное векторное пространство имеет ортонормированные базисы.*

Доказательство. Это очевидно, если размерность n равна 1[1]), ибо если $\{\vec{f}_1\}$ является базисом, то $\{\vec{e}_1 = \vec{f}_1/\|\vec{f}_1\|\}$ будет ортонормированным базисом. Предположим теперь, что существование ортонормированного базиса доказано для любого евклидова или эрмитова пространства размерности $\leqslant n-1$, и докажем его существование в пространстве $\vec{E}$ размерности n. Пусть $\vec{f}_1$ — некоторый вектор $\neq \vec{0}$ и $\vec{e}_1 = \vec{f}_1/\|\vec{f}_1\|$. Множество векторов, ортогональных $\vec{e}_1$, является гиперплоскостью $\vec{H}_1$ в $\vec{E}$. В самом деле, это множество векторов $\vec{X}$, удовлетворяющих линейному уравнению $\overleftarrow{\gamma}_{\vec{e}_1}(\vec{X}) = (\vec{X}|\vec{e}_1) = 0$, где линейная форма $\overleftarrow{\gamma}_{\vec{e}_1}$ не равна тождественно нулю, поскольку $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, и, кроме того, γ инъективно. Так как $(\vec{e}_1 | \vec{e}_1) > 0$, то эта гиперплоскость не содержит $\vec{e}_1$, а, следовательно, $\vec{H}_1$ и прямая, порожденная вектором $\vec{e}_1$, являются дополнительными; $\vec{H}_1$ называется гиперплоскостью, ортогональной $\vec{e}_1$, и является евклидовым или эрмитовым пространством размерности $n-1$. По предположению индукции она должна иметь хотя бы один ортонормированный базис $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. При этом система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ образует ортонормированный базис пространства $\vec{E}$, что и требовалось доказать.

Если $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ является некоторым базисом в $\vec{E}$, то скалярное произведение двух векторов $\vec{X} = \sum_{i\in I} X_i\vec{e}_i$ и $\vec{Y} = \sum_{i\in I} Y_i\vec{e}_i$ записывается в виде

$$(\vec{X}|\vec{Y}) = \sum_{i,j\in I} (\vec{e}_i|\vec{e}_j)\, X_i\overline{Y}_j = \sum_{i,j\in I} g_{i,j}X_i\overline{Y}_j, \qquad \text{(III, 1; 21)}$$

где $g_{i,j} = (\vec{e}_i|\vec{e}_j)$. Здесь $g_{i,j} = \bar{g}_{j,i}$, а неравенство $(\vec{X}|\vec{X}) > 0$ для $\vec{X} \neq \vec{0}$ записывается в виде

$$\sum_{i,j\in I} g_{i,j}X_i\overline{X}_j > 0, \qquad \text{(III, 1; 22)}$$

[1]) Индукцию можно даже начинать с $n = 0$. В векторном пространстве размерности 0 базис пуст и его можно считать ортонормированным!

кроме случая, когда $X_i = 0$ для всех $i \in I$. Матрицу, составленную из элементов $g_{i,j}$, называют *эрмитовой положительно определенной матрицей.*

Рассматриваемый базис ортонормирован тогда и только тогда, когда матрица из $g_{i,j}$ является единичной:

$$(\vec{X} \mid \vec{Y}) = \sum_{i \in I} X_i \bar{Y}_i, \qquad \|\vec{X}\|^2 = \sum_{i \in I} |X_i|^2. \qquad \text{(III, 1; 23)}$$

Обобщенные евклидовы или эрмитовы пространства [1])

В специальной теории относительности возникает необходимость в обобщении евклидова или эрмитова пространства, пространстве Лоренца или пространстве Минковского. Это — *конечномерное* векторное пространство $\vec{E}$ (в физике это четырехмерное пространство над полем $\mathbb{R}$), снабженное обобщенным скалярным произведением, т. е. полуторалинейной *не положительно определенной* эрмитовой формой. Будем ее, как обычно, обозначать через $(\vec{X}|\vec{Y})$. Для $\vec{X} \neq \vec{0}$ не обязательно должно выполняться неравенство $(\vec{X}|\vec{X}) > 0$. Может случиться, что для некоторых векторов $\vec{X} \neq \vec{0}$ произведение $(\vec{X}, \vec{X}) = 0$. Эти векторы называются *изотропными*, а их объединение — изотропным конусом [2]). При этом вводится существенное условие: *полуторалинейная форма не вырожденна*; иначе говоря, *не существует вполне изотропного вектора* $\vec{X} \neq \vec{0}$, т. е. ортогонального ко всем векторам пространства. Разумеется, здесь не выполняются неравенства Коши — Шварца и Минковского и такая структура *не определяет норму.* Однако отображение γ пространства $\vec{E}$ в $\overleftarrow{E}'$ *всегда полулинейно и инъективно*, ибо равенство $\overleftarrow{\gamma}_{\vec{Y}} = \overleftarrow{0}$ означает, что вектор $\vec{Y}$ ортогонален всем векторам $\vec{X}$ из $\vec{E}$, т. е. вполне изотропен, а, значит, равен нулю. Отображение γ биективно. Линейной форме $\overleftarrow{\alpha}$ над $\vec{E}$ соответствует, как и ранее, некоторый вектор $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, и притом единственный, такой, что $\langle \overleftarrow{\alpha}, \vec{X} \rangle = (\vec{X}|\vec{Y})$ для любого $\vec{X} \in \vec{E}$ — это вектор $\overrightarrow{\gamma^{-1}(\overleftarrow{\alpha})}$.

---

[1]) Эти пространства называют также псевдоевклидовыми и псевдоэрмитовыми. То, что мы здесь называем ортонормированным базисом, носит также название псевдоортонормированного базиса.

[2]) Это понятие отличается от принятого в физике: там рассматривается векторное пространство над $\mathbb{R}$ и вещественное скалярное произведение.

Ортонормированным базисом обобщенного евклидова или эрмитова пространства называется базис $(\vec{e}_i)_{i \in I}$, элементы которого попарно ортогональны и скалярные квадраты которых равны ± 1. *Такие базисы всегда существуют.* Для доказательства можно применить, только с некоторой осторожностью, построения по индукции, проведенные при доказательстве теоремы 2_5.

При $n = 1$ исходят из произвольного вектора $\vec{f}_1 \neq \vec{0}$. При $n = 1$ все векторы пространства пропорциональны вектору $\vec{f}_1$, поэтому утверждение «$\vec{f}_1$ не является вполне изотропным» равносильно тому, что «$\vec{f}_1$ не является просто изотропным». Если взять теперь $\vec{e}_1 = \vec{f}_1 / \sqrt{|(\vec{f}_1, \vec{f}_1)|}$, то получим $(\vec{e}_1 | \vec{e}_1) = \pm 1$. Однако при переходе от $n-1$ к n требуются более тонкие рассуждения. Покажем прежде всего, что существует по крайней мере один вектор $\vec{f}_1$, не являющийся изотропным. Если бы каждый вектор был изотропным, т. е. ортогональным самому себе, то из равенства

$$(\vec{X} + \vec{Y} | \vec{X} + \vec{Y}) = (\vec{X} | \vec{Y}) + (\vec{Y} | \vec{Y}) + 2 \operatorname{Re} (\vec{X} | \vec{Y}) \quad \text{(III, 1; 24)}$$

следовало бы, что $\operatorname{Re}(\vec{X} | \vec{Y})$ является нулем для любых $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Так как в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ имеет место равенство $\operatorname{Re}(\vec{X} | i\vec{Y}) = \operatorname{Im}(\vec{X} | \vec{Y})$, то мы получили бы $(\vec{X} | \vec{Y}) = 0$ для любых $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Каждый вектор оказался вполне изотропным, что противоречит нашему предположению. Следовательно, всегда можно найти не изотропный вектор $\vec{f}_1$ и положить $\vec{e}_1 = \vec{f}_1 / \sqrt{|(\vec{f}_1, \vec{f}_1)|}$. Гиперплоскость $\vec{H}_1$, ортогональная $\vec{e}_1$, не содержит $\vec{e}_1$, поскольку $\vec{e}_1$ не изотропен. Следовательно, $\vec{H}_1$ является дополнением к прямой, порождаемой вектором $\vec{e}_1$. С другой стороны, скалярное произведение на $\vec{H}_1$ не вырожденно. В самом деле, если бы в $\vec{H}_1$ существовал вектор $\neq \vec{0}$, ортогональный всем векторам из $\vec{H}_1$, то поскольку он ортогонален также и $\vec{e}_1$, он был бы ортогонален всем векторам из $\vec{E}$, т. е. был бы вполне изотропным, что невозможно. Следовательно, $\vec{H}_1$ является обобщенным евклидовым или эрмитовым пространством размерности $n-1$ и, значит, имеет ортонормальный базис $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Так как $\vec{e}_1 \notin \vec{H}_1$, то $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ является ортонормированным базисом в $\vec{E}$.

Пусть теперь $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ является ортонормированным базисом в $\vec{E}$. Если положить $(\vec{e}_i|\vec{e}_i) = \varepsilon_i = \pm 1$, то скалярное произведение векторов $\vec{X} = \sum_{i \in I} X_i \vec{e}_i$ и $\vec{Y} = \sum_{i \in I} Y_i \vec{e}_i$ запишется в виде

$$(\vec{X}|\vec{Y}) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i X_i \overline{Y}_i \quad \text{и} \quad (\vec{X}|\vec{X}) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i |X_i|^2. \qquad \text{(III, 1; 25)}$$

Можно доказать, кроме того, важную теорему, называемую *законом инерции*: *число p чисел $\varepsilon_i > 0$ и число q чисел $\varepsilon_i < 0$ не зависят от выбора ортонормированного базиса.* В самом деле, рассмотрим фиксированный базис $(\vec{e}_i)_{i \in I}$, и пусть J (соответственно K) — подмножество в I, образованное теми i, для которых $\varepsilon_i = +1$ (соответственно -1). Пусть p (соответственно q) — число элементов в J (соответственно в K). Существует, по крайней мере одно, векторное подпространство $\vec{F}$ из $\vec{E}$ размерности p, на котором скалярное произведение является положительно определенным, а именно то подпространство, которое порождено векторами $\vec{e}_i$, $i \in J$. Векторного подпространства $\vec{G}$ размерности $>p$, обладающего тем же свойством, не существует. В самом деле, если $\vec{G}$ — *любое* векторное подпространство размерности $>p$, то оно пересекается с подпространством размерности $n-p$, порожденным векторами $\vec{e}_i$, $i \in K$, по некоторому не сводящемуся к $\vec{0}$ подпространству, поскольку сумма размерностей этих подпространств $>n$. Если $\vec{X} \neq \vec{0}$ — вектор этого пересечения, то необходимо имеем $(\vec{X}|\vec{X}) < 0$, а, значит, скалярное произведение на G не может быть положительно определенным. Итак, числа p и $q = n - p$ определяются независимо от первоначально выбранного базиса. Число p (соответственно q) является максимальной размерностью векторных подпространств из $\vec{E}$, на которых скалярное произведение положительно определено (соответственно отрицательно определено).

В итоге мы получаем такой результат:

Теорема 2₆. *Каждое обобщенное евклидово или эрмитово пространство имеет ортонормированные базисы. Число векторов такого базиса, скалярный квадрат которых равен $+1$ (соответственно -1), не зависит от выбора базиса. Это — максималь-*

ная размерность векторных подпространств, на которых скалярное произведение является положительно определенным (соответственно отрицательно определенным).

В физике, в специальной теории относительности, физическая вселенная пространства-времени является аффинным четырехмерным пространством E_4 над полем вещественных чисел. Его присоединенное векторное пространство $\vec{E}_4$ снабжено скалярным произведением, для которого $p = 3$ и $q = 1$. *Галилеева система координат* в E_4 является системой координат, образованной началом пространства E_4 и четырьмя векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_0$, образующими ортонормированный базис $\vec{E}_4$ и такими, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ и $\varepsilon_0 = -1$. Вектор $\vec{X} \in \vec{E}_4$ пространства-времени имеет 4 координаты X_1, X_2, X_3, $X_0 = cT$, где T — координата времени в рассматриваемой галилеевой системе координат и c — скорость света. Скалярный квадрат этого вектора равен $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = L^2 - c^2T^2$, где L — пространственная длина вектора в рассматриваемой галилеевой системе координат.

§ 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПРАВА И СЛЕВА

Пусть Ω — некоторая часть вещественной прямой $\mathbb{R}$ и F — произвольное топологическое пространство. Говорят, что отображение f части Ω в F *непрерывно справа* в точке $a \in \Omega$, если $f(x)$ стремится к $f(a)$ при x, стремящемся к a в Ω по значениям $\geqslant a$. Если точка a изолирована справа в Ω, т. е. если существует такое число $\eta > 0$, что интервал $]a, a + \eta[$ не содержит ни одной точки Ω, то любое отображение Ω в F непрерывно справа в a. Отображение f непрерывно справа в точке a тогда и только тогда, когда сужение f на часть $x \geqslant a$ множества Ω непрерывно в точке a.

Такое же определение дается для *непрерывности слева*. Отображение f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда оно одновременно непрерывно справа и слева. Если точка a изолирована слева, то ее непрерывность в точке a эквивалентна непрерывности справа в этой точке. *В дальнейшем все утверждения сделаны в предположении, что Ω является открытым множеством в* $\mathbb{R}$. Такое предположение оставляет в стороне важный для практики случай, когда Ω является полуоткрытым или замкнутым интервалом. Большинство теорем будут справедливыми, вообще говоря, и в этом случае. Небольшие необходимые изменения читатель сделает сам.