ная размерность векторных подпространств, на которых скалярное произведение является положительно определенным (соответственно отрицательно определенным).

В физике, в специальной теории относительности, физическая вселенная пространства-времени является аффинным четырехмерным пространством E_4 над полем вещественных чисел. Его присоединенное векторное пространство $\vec{E}_4$ снабжено скалярным произведением, для которого $p = 3$ и $q = 1$. *Галилеева система координат* в E_4 является системой координат, образованной началом пространства E_4 и четырьмя векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_0$, образующими ортонормированный базис $\vec{E}_4$ и такими, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ и $\varepsilon_0 = -1$. Вектор $\vec{X} \in \vec{E}_4$ пространства-времени имеет 4 координаты X_1, X_2, X_3, $X_0 = cT$, где T — координата времени в рассматриваемой галилеевой системе координат и c — скорость света. Скалярный квадрат этого вектора равен $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = L^2 - c^2T^2$, где L — пространственная длина вектора в рассматриваемой галилеевой системе координат.

§ 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПРАВА И СЛЕВА

Пусть Ω — некоторая часть вещественной прямой $\mathbb{R}$ и F — произвольное топологическое пространство. Говорят, что отображение f части Ω в F *непрерывно справа* в точке $a \in \Omega$, если $f(x)$ стремится к $f(a)$ при x, стремящемся к a в Ω по значениям $\geqslant a$. Если точка a изолирована справа в Ω, т. е. если существует такое число $\eta > 0$, что интервал $]a, a + \eta[$ не содержит ни одной точки Ω, то любое отображение Ω в F непрерывно справа в a. Отображение f непрерывно справа в точке a тогда и только тогда, когда сужение f на часть $x \geqslant a$ множества Ω непрерывно в точке a.

Такое же определение дается для *непрерывности слева*. Отображение f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда оно одновременно непрерывно справа и слева. Если точка a изолирована слева, то ее непрерывность в точке a эквивалентна непрерывности справа в этой точке. *В дальнейшем все утверждения сделаны в предположении, что Ω является открытым множеством в* $\mathbb{R}$. Такое предположение оставляет в стороне важный для практики случай, когда Ω является полуоткрытым или замкнутым интервалом. Большинство теорем будут справедливыми, вообще говоря, и в этом случае. Небольшие необходимые изменения читатель сделает сам.

Разрывы первого рода. Правильные функции

Говорят, что точка a является *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если при x, стремящемся к a по значениям, *строго большим* a, существует предел $f(x)$, обозначаемый через $f(a+0)$, при x, стремящемся к a по значениям, *строго меньшим* a, существует предел $f(x)$, обозначаемый через $f(a-0)$, и эти пределы одновременно не равны значению функции f в точке a. Если f непрерывна или имеет разрыв первого рода в точке a, а пространство F метрическое, то величина

$$\max[d(f(a),\ f(a-0)),\ d(f(a),\ f(a+0)),\ d(f(a-0),\ f(a+0))]$$

называется *колебанием* функции f в точке a. Оно равно нулю тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке a. Если F является аффинным пространством, то можно вычислить разность $\overrightarrow{f(a+0)-f(a-0)}$, которая является элементом присоединенного векторного пространства $\vec{F}$. Эта разность называется *скачком функции* f *в точке* a. В определение скачка не входит значение $f(a)$ функции f в самой точке a. Поэтому он может быть нулем даже в том случае, когда f разрывна: значения $f(a+0)$ и $f(a-0)$ могут быть равны между собой, но не равны $f(a)$.

Функция f, разрывная в точке a, естественно, не обязана иметь в этой точке разрыв первого рода в том смысле, что пределы $\lim\limits_{x>a,\ x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x<a,\ x\to a} f(x)$ не обязательно должны существовать. Например, функция, равная $\sin 1/x$ для $x \neq 0$ и 0 для $x=0$, разрывна в начале координат, но не имеет в этой точке разрыва первого рода.

Теорема 3. *Если отображение f некоторого открытого множества Ω вещественной прямой $\mathbb{R}$ в метрическое пространство F имеет лишь точки непрерывности и точки разрыва первого рода, то оно непрерывно всюду, кроме не более чем счетного множества точек множества Ω.*

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая $\Omega=\mathbb{R}$. Пусть c — произвольная точка $\mathbb{R}$. Колебание $\omega(c)$ в точке c может быть каким угодно, но *колебание* $\omega(x)$ *в точке x стремится к* 0, *когда x стремится к c по значениям, отличным от c*. В самом деле, по определению $f(c+0)$, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что из неравенства $c<x<c+\eta$ следует неравенство $d(f(x),\ f(c+0)) \leqslant \varepsilon/2$. Тогда для любых y и z из интервала $]c, c+\eta[$ имеем $d(f(y),\ f(z)) \leqslant d(f(y),\ f(c+0)) + d(f(c+0),\ f(z)) \leqslant \varepsilon$. Полагая

$y = x$ и устремляя z к x по значениям, строго большим x, а затем по значениям, строго меньшим x, получим $d(f(x+0), f(x)) \leqslant \varepsilon$ и $d(f(x-0), f(x)) \leqslant \varepsilon$. Устремляя $y < x$ и $z > x$ к x, получим, что $d(f(x-0), f(x+0)) \leqslant \varepsilon$, откуда окончательно находим $\omega(x) \leqslant \varepsilon$ для $c < x < c + \eta$. Действуя точно так же слева от точки c, можно убедиться, что утверждение верно и в этом случае. Рассмотрим теперь интервал $[-n, +n]$. Множество точек этого интервала, в которых колебание $\geqslant 1/k$, необходимо конечно. В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы найти бесконечную последовательность точек разрыва в этом интервале, в которых колебание было бы $\geqslant 1/k$. Поскольку интервал компактен, из рассматриваемой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность, которая сходилась бы к некоторой точке c этого интервала и состояла бы из точек, отличных от точки c (теорема 25 гл. II). Согласно только что доказанному, колебание в этих точках всюду $\geqslant 1/k$ и должно стремиться к 0, а это невозможно. Таким образом, множество точек интервала $[-n, +n]$, в которых колебание $\geqslant 1/k$, заведомо конечно. Если взять объединение этих особых точек для $k = 1, 2, 3, \ldots$, то мы увидим, что множество точек x интервала $[-n, n]$, в которых колебание $\omega(x) > 0$, не более чем счетно и, следовательно, на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ множество таких точек, являясь объединением счетного множества не более чем счетных множеств, не более чем счетно. В каждой другой точке x, не принадлежащей этому не более чем счетному множеству, $\omega(x) = 0$ и f непрерывна.

Функцию, определенную на части прямой $\mathbb{R}$ со значениями в топологическом пространстве F и имеющую только точки непрерывности или точки разрыва первого рода, мы будем называть *правильной*. Согласно доказанному, если пространство F метризуемо, то такая функция непрерывна всюду за исключением, быть может, не более чем счетного множества особых точек.

Замечание. Это бесконечное счетное множество точек разрыва может встретиться в действительности. Рассмотрим, например, вещественную функцию f вещественной переменной, определенную следующим образом:

$$f(x) = 0, \quad \text{если } x \text{ иррациональна,}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}, \quad \text{если } x = \frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь } (q > 0).$$

Легко видеть, что если x стремится к a по значениям, отличным от a, то $f(x)$ стремится к нулю. В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$. Пусть q_0 — целое число $\geqslant 1/\varepsilon$. На $[a-1, a+1]$

имеется лишь конечное число рациональных чисел, знаменатели которых $<q_0$. Следовательно, существует такое $\eta>0$, что каждое рациональное число из интервала $[a-\eta, a+\eta]$ имеет знаменатель $\geqslant q_0$, кроме, быть может, самой точки a, если она рациональна. Но тогда из неравенства $|x-a|\leqslant\eta$, $x\neq a$, следует, что $f(x)\leqslant\varepsilon$, — тем самым наше утверждение доказано. Мы видим, что f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда a иррациональна. Если a рациональна, то f имеет в точке a разрыв первого рода, причем $f(a+0)=f(a-0)=0$. Следовательно, рассматриваемая функция правильная и имеет счетное (и плотное) множество точек разрыва. Ее скачок (но не колебание!) повсюду равен нулю.

Если F является топологическим не метризуемым пространством, то функция, определенная на $\mathbb{R}$ со значениями в F, может быть правильной и всюду разрывной.

Производная вещественной функции вещественной переменной

Пусть f — отображение открытого множества Ω из $\mathbb{R}$ в $F=\mathbb{R}$. *Производной* отображения *f в точке* $a\in\Omega$ называется предел, если он существует, отношения $[f(a+h)-f(a)]/h$ при h, стремящемся к 0 по значениям $\neq 0$, таким, что $a+h$ принадлежит Ω. Поскольку Ω является открытым множеством, то $a+h$ при достаточно малом $|h|$ принадлежит Ω. Если этот предел существует только при h, стремящемся к 0 по значениям >0, то его называют *производной отображения f справа*. Можно точно также говорить о *производной отображения f в точке a слева*. Производная отображения f в точке a существует тогда и только тогда, когда существуют производные справа и слева и обе они равны между собой[1]).

Функция, имеющая производную в точке a, непрерывна в этой точке. Если она имеет производную в a справа, то она непрерывна справа в a. Существование и значение производной функции f в $a\in\Omega$ зависят от значения f в окрестности a. Производная f в точке a обозначается обычно через $f'(a)$, или $\frac{df}{dx}(a)$, или $Df(a)$. Если производная существует всюду в Ω, то функция $x\to f'(x)$ называется *производной функ-*

[1]) Если вместо открытого множества в качестве Ω берут замкнутый интервал $[a, b]$, то говорят также, что f имеет производную в точке a (соответственно в точке b), если она имеет производную справа (соответственно слева) в этой точке. Впрочем, это полностью соответствует общему определению производной, поскольку рассматриваются значения h, при которых $a+h$ (или $b+h$) принадлежат Ω.

ции f, или просто *производной*. Ее обозначают через f', или $\frac{df}{dx}$, или Df. В свою очередь можно исследовать, имеет ли сама эта функция производную, что приводит к понятию второй производной, третьей производной и т. д. Производная порядка m в точке a обозначается через $f^{(m)}(a)$, или $\frac{d^m f}{dx^m}(a)$, или $\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(a)$, или $D^m f(a)$. Производная функции порядка m обозначается через $f^{(m)}$, или $\frac{d^m f}{dx^m}$, или $\left(\frac{d}{dx}\right)^m f$, или $D^m f$.

Важно заметить, что о производной m-го порядка в точке $a \in \Omega$ можно говорить лишь в том случае, когда существуют все производные порядков $\leqslant m-1$ в множестве Ω или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки a в Ω.

Говорят, что f дифференцируема m раз в Ω, если она имеет производную порядка m в каждой точке множества Ω. При этом она заведомо k раз дифференцируема для всех $k \leqslant m$, и ее производные порядков $\leqslant m-1$ непрерывны в Ω. Говорят, что f *непрерывно дифференцируема m раз*, или *принадлежит классу C^m*, если она имеет непрерывные производные до m-го порядка включительно. При этом она заведомо принадлежит классу C^k для $k \leqslant m$. Функция, дифференцируемая m раз, наверняка принадлежит классу C^{m-1}. Говорят, что f бесконечно дифференцируема или принадлежит классу C^∞, если она имеет последовательные производные всех порядков. Все они непрерывны.

Однако в некоторых случаях принятые обозначения могут привести к ошибкам. Что означает, например, обозначение $f'(2x)$? Означает ли оно производную функции $x \to f(2x)$ или же значение производной f' функции f в точке с абсциссой $2x$? *Мы будем понимать эти обозначения лишь во втором смысле.* Если мы пожелаем записать производную функции $x \to f(2x)$ в точке a, то мы будем писать $(f(2x))'_{x=a}$, а производную функцию функции $x \to f(2x)$ будем записывать в виде $(f(2x))'$. Таким образом, имеем: $(f(2x))' = 2f'(2x)$, $(f(2x))^{(m)} = 2^m f^{(m)}(2x)$. Следует отличать также $D^m f(2x)$, или $(D^m f)(2x) = f^{(m)}(2x)$, от $D^m(f(2x)) = (f(2x))^{(m)}$.

Можно, естественно, говорить о производной, принимающей значения $+\infty$ или $-\infty$, и то же самое для производной слева или производной справа. Однако, если это специально не оговорено, под производной мы всегда будем понимать производную, принимающую конечное значение.

Пусть f — некоторая вещественная функция, определенная на интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$. Будем говорить, что эта функция кусочно m раз непрерывно дифференцируема, или кусочно принадлежит классу C^m, если она правильна и существуют такие точки $a_0 = a$, a_1, ..., a_{n-1}, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$, что функции $\tilde{f}_i$, равные f в $]a_i, a_{i+1}[$, $f(a_i + 0)$ в a_i и $f(a_{i+1} - 0)$ в a_{i+1}, принадлежат классу C^m на интервале $[a_i, a_{i+1}]$. Например, если график функции $y = f(x)$ представляет собой ломаную линию, то f непрерывна, не дифференцируема, но кусочно принадлежит классу C^∞.

Теорема 4 (Ролля). *Пусть вещественная непрерывная на замкнутом ограниченном интервале $[a, b]$ функция f имеет в каждой точке открытого интервала $]a, b[$ производную, конечную, или равную $+\infty$, или равную $-\infty$. Если при этом* $f(a) = f(b) = 0$, то *существует по крайней мере одна точка c в $]a, b[$, такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Если функция f тождественно равна нулю, то результат очевиден. Если же эта функция не является тождественным нулем, то она принимает по крайней мере одно значение > 0 или хотя бы одно значение < 0. Рассмотрим, например, первый случай. Так как f непрерывна на компакте $[a, b]$, то существует хотя бы одна точка c из $]a, b[$, в которой она достигает своего максимума. В этой точке производная справа необходимо $\leqslant 0$, в то время как производная слева $\geqslant 0$. Поскольку функция в любой точке $]a, b[$ предполагалась дифференцируемой, то эти производные справа и слева в точке c равны между собой, и, следовательно, производная $f'(c)$ равна нулю.

Замечание. Хорошо видно, почему нет необходимости ни предполагать f дифференцируемой в точках a и b, ни считать производную конечной. Напротив, *существование производной, а не только производной справа и производной слева является существенным.* Функция $f(x) = 1 - |x|$ на интервале $[-1, +1]$ непрерывна, равна нулю на его концах и в каждой точке имеет производную справа и слева. В точке $x = 0$, где

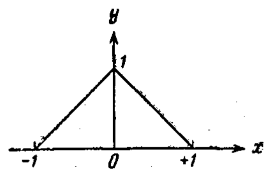

Рис. 5. $y = 1 - |x|$, $|x| \leqslant 1$.

f достигает своего максимума, производная справа равна -1, а производная слева равна $+1$. Ни в одной точке ни производная справа, ни производная слева не обращаются в нуль. Если предполагать только, что f имеет в интервале $]a, b[$ производную справа $f'_п$, то можно доказать существование такой точки c_1 из $]a, b[$, в которой $f'_п(c_1) \leqslant 0$, и существование такой точки c_2 из того же интервала $]a, b[$, в которой $f'_п(c_2) \geqslant 0$ [1]).

Теорема 5 (формула конечных приращений). *Пусть вещественная непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$ функция имеет в каждой точке открытого интервала $]a, b[$ производную, конечную или равную $+\infty$, или равную $-\infty$. Тогда на $]a, b[$ существует по крайней мере одна точка c, такая, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \text{(III, 2; 1)}$$

Формула конечных приращений часто записывается в следующем виде

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad \text{где} \quad \theta \in]0, 1[. \qquad \text{(III, 2; 2)}$$

Замечание. Если предполагать только существование производной справа $f'_п$, то можно доказать существование такой точки c_1, что $f'_п(c_1) \leqslant [f(b) - f(a)]/(b-a)$, и такой точки c_2, что $f'_п(c_2) \geqslant [f(b) - f(a)]/(b-a)$.

Теорема 6 (формула Тейлора). *Пусть функция f является m раз непрерывно дифференцируемой в интервале $[a, b]$ и в каждой точке открытого интервала $]a, b[$ имеет производную $(m+1)$-го порядка, конечную, или равную $+\infty$, или равную $-\infty$. Тогда существует хотя бы одна точка c в $]a, b[$, такая, что*

$$f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) = \\ = \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c). \qquad \text{(III, 2; 3)}$$

Эта формула часто записывается в следующем виде:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \\ + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x + \theta h), \qquad \text{(III, 2; 4)}$$

где θ — некоторое число из $]0, 1[$.

Формула конечных приращений является, очевидно, частным случаем формулы Тейлора. Формула же Тейлора доказывается

[1]) Доказательство этого утверждения более тонкое. См. также замечание, следующее за леммой теоремы 13.

следующим образом: вводится вспомогательная функция

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(b-x)^m}{m!} f^{(m)}(x) - \frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}\lambda, \quad \text{(III, 2; 5)}$$

где число λ определено так, что $g(a) = 0$.

Поскольку $g(b) = 0$, то к этой функции применима теорема Ролля. Это дает некоторую точку c из $]a, b[$, в которой $g'(c) = 0$, а, значит, $f^{(m+1)}(c) = \lambda$. Отсюда и вытекает нужный результат.

Монотонные функции

Говорят, что вещественная функция, определенная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$ [1]), *монотонна*, если она является возрастающей или убывающей на этом множестве. Монотонная функция не обязательно непрерывна, однако, согласно известной теореме математического анализа, она заведомо обладает пределом справа $f(a+0)$ и пределом слева $f(a-0)$ в каждой точке $a \in \Omega$ [2]). Оба эти предела не обязательно равны между собой или равны $f(a)$.

Монотонная функция, следовательно, является правильной. Применяя теорему 3, получаем, что такая функция всюду непрерывна, за исключением не более чем счетного множества точек.

Небесполезно привести простой пример строго возрастающей функции, имеющей счетное плотное множество точек разрыва. Пусть h — некоторая функция > 0, определенная на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и такая, что $\sum_{r \in \mathbb{Q}} h(r)$ конечна (речь идет о сумме счетного множества положительных чисел, не заданных в определенном порядке, смысл которой был определен на стр. 131). Рассмотрим теперь функцию f, определенную следующим образом:

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbb{Q},\, r < x} h(r). \quad \text{(III, 2; 6)}$$

[1]) Как было сказано на стр. 195, Ω также может быть неоткрытым интервалом.

[2]) Если, например, f возрастает, то $f(a+0) = \inf\limits_{x > a} (f(x))$ и $f(a-0) = \sup\limits_{x < a} (f(x))$. При этом $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$; скачок f в точке a не отрицателен.

Она всюду определена, >0 или возрастает. Это даже строго возрастающая функция, поскольку имеет место формула

$$f(x)-f(y)=\sum_{r\in\mathbb{Q},\ y\leqslant r<x} h(r) \quad \text{для} \quad y<x. \tag{III, 2; 7}$$

Пусть a — произвольное вещественное число. Зададим $\varepsilon>0$. Поскольку сумма $\sum\limits_{r\in\mathbb{Q}} h(r)$ сходится, то существует конечное число рациональных точек $r_0, r_1, \ldots, r_n$, таких, что

$$\sum_{r\in\mathbb{Q},\ r\neq r_0, r_1, \ldots, r_n} h(r)\leqslant\varepsilon. \tag{III, 2; 8}$$

При этом существует такое число $\eta>0$, что

$$x\neq r_0, r_1, \ldots, r_n \quad \text{для} \quad a-\eta\leqslant x\leqslant a+\eta, \quad x\neq a. \tag{III, 2; 9}$$

В силу (III, 2; 7) имеют место следующие два неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(a)-\varepsilon \quad \text{для} \quad a-\eta\leqslant x<a,\\ &f(a)+h(a)\leqslant f(x)\leqslant f(a)+h(a)+\varepsilon \quad \text{для} \quad a\leqslant x\leqslant a+\eta \end{aligned}\right\} \tag{III, 2; 10}$$

при условии, что $h(a)=0$ в случае иррационального a. Из этих неравенств следует, что $f(a-0)=f(a)$ и $f(a+0)=$ $=f(a)+h(a)$.

Функция f, таким образом, всюду непрерывна слева. Она непрерывна справа и, следовательно, просто непрерывна в каждой иррациональной точке. В каждой рациональной точке она разрывна и имеет скачок, равный $h(a)$. Она имеет счетное плотное множество точек разрыва первого рода, а именно множество рациональных точек.

Возрастающая функция не обязательно дифференцируема, однако для *дифференцируемых функций* имеется очень важный критерий возрастания.

Теорема 7. *Пусть f — вещественная функция, определенная на некотором интервале (открытом, замкнутом или полуоткрытом) прямой $\mathbb{R}$ и имеющая всюду производную, конечную или равную $+\infty$ или $-\infty$. Для того чтобы она была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была всюду $\geqslant 0$.*

Доказательство. Если функция возрастает, то, очевидно, $[f(x+h)-f(x)]/h\geqslant 0$ и, следовательно, предел этого отношения, который по предположению существует, также $\geqslant 0$.

Обратно, предположим, что f непрерывна, дифференцируема и имеет производную (конечную или нет) всюду $\geqslant 0$. Тогда, согласно теореме о конечных приращениях, всюду имеем

$[f(x+h)-f(x)]/h = f'(x+\theta h) \geqslant 0$, а это говорит о том, что f — возрастающая функция.

Замечания. 1°) Точно такое же рассуждение показывает, что если производная $f' > 0$, то f строго возрастает. Однако может случиться, что f строго возрастает, а ее производная не будет всюду >0. Такой будет, например, функция $f(x) = x^3$, производная которой повсюду $\geqslant 0$ и равна нулю в начале координат.

2°) Используя замечания, приведенные после теорем 4 и 5, можно доказать *такую же теорему с производной справа* (*или производной слева*) *вместо обычной производной.*

Дифференцируемые функции и теоремы о промежуточных значениях

Производная функции не обязательно непрерывна. В этом можно убедиться на примере функции, определенной следующим образом: $f(x) = x^2 \sin 1/x$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Она всюду непрерывна и в любой точке $x \neq 0$ имеет производную $f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$. Производная этой функции в начале координат равна нулю. Таким образом, ее производная определена всюду в $\mathbb{R}$, но разрывна в точке $x = 0$, ибо $\cos 1/x$ не стремится к 0, когда $x \neq 0$ стремится к 0. Однако, если некоторая функция определена на интервале и дифференцируема, то ее производная функция обладает, как и все непрерывные функции, тем свойством, что вместе с любыми двумя своими значениями она принимает и все промежуточные значения. Для простоты предположим, что функция определена на $\mathbb{R}$. Пусть $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$ и γ — число, лежащее строго между α и β. Тогда, выбирая достаточно малым число h, получим $[f(a+h)-f(a)]/h = \alpha' < \gamma$ и $[f(b+h)-f(b)]/h = \beta' > \gamma$. Если зафиксировать одно из таких значений h, то мы получим непрерывную функцию $x \to [f(x+h)-f(x)]/h$. В силу непрерывности эта функция вместе со значениями α' и β' принимает и все промежуточные значения и, в частности, значение γ, т. е. существует такая точка x, что $[f(x+h)-f(x)]/h = \gamma$. Если теперь к интервалу $[x, x+h]$ применить формулу конечных приращений, то мы придем к тому, что существует такая точка c, в которой $f'(c) = \gamma$.

Выпуклые функции

Вещественная функция f, определенная на интервале I вещественной прямой $\mathbb{R}$, называется *выпуклой*, если она обладает следующим свойством:

каковы бы ни были точки $A_1 = (a_1, f(a_1))$ и $A_2 = (a_2, f(a_2))$ графика функции f на плоскости $\mathbb{R}^2$, хорда A_1A_2 лежит над дугой графика кривой f, соединяющей точки A_1 и A_2. Это можно записать в виде следующего неравенства:

$$f(ta_1 + (1-t)a_2) \leqslant tf(a_1) + (1-t)f(a_2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad \text{(III, 2; 6)}$$

Этот же факт эквивалентен тому, что множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $y \geqslant f(x)$, является выпуклым множеством плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. определение выпуклых множеств на стр. 184).

Учитывая сказанное ранее о барицентрических свойствах выпуклых множеств, из соотношения (III, 2; 6) можно получить более общее соотношение

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}\right) \leqslant \frac{\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \qquad \text{(III, 2; 7)}$$

для $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$.

Теорема 7_2. *Для того чтобы вещественная функция f, определенная на интервале $I \subset \mathbb{R}$, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами:*

1°) *Функция f непрерывна во внутренности $\mathring{I}$ интервала I, и, кроме того, если I полуоткрыт или замкнут, она удовлетворяет в соответствующих концах l интервала I соотношению*

$$\lim_{x \in \mathring{I},\, x \to l} f(x) \leqslant f(l)\,^{1)}. \qquad \text{(III, 2; 8)}$$

2°) *В каждой точке x из $\mathring{I}$ функция f имеет производную слева $f'_{\text{л}}$ и производную справа $f'_{\text{п}}$. Эти производные совпадают всюду, кроме не более чем счетного множества точек из $\mathring{I}$, при этом имеют место такие неравенства:*

$$f'_{\text{л}} \leqslant f'_{\text{п}}, \quad f'_{\text{п}}(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_{\text{л}}(x_2) \quad \text{для} \quad x_1 \leqslant x_2. \qquad \text{(III, 2; 9)}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если f является дифференцируемой функцией, то она выпукла тогда и только тогда, когда ее первая производная является возрастающей функцией. Если же функция f дважды дифференцируема, то она выпукла тогда и только тогда, когда ее вторая производная $f''(x) \geqslant 0$.

Доказательство. 1°) Предположим вначале, что f выпукла. Если $0 < h < k$ и $[x, x+k] \subset I$, то точка $(x+h, f(x+h))$

---

[1] То есть f полунепрерывна на концах интервала I.

лежит вне отрезка прямой $[(x, f(x)), (x+k, f(x+k))]$. Отсюда получаем следующее неравенство:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}. \tag{III, 2; 10}$$

Это неравенство показывает, что функция $h \to [f(x+h)-f(x)]/h$ является возрастающей при $h>0$. Следовательно, она имеет предел при h, стремящемся к 0. Другими словами, f в каждой точке $\mathring{I}$ имеет производную справа, конечную или равную $-\infty$.

Кроме того,

$$f'_{\text{п}}(x) \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}, \tag{III, 2; 11}$$

что дает левую часть второй системы неравенств (III, 2; 9) при $x = x_1$, $x+k = x_2$.

Аналогичное рассуждение можно провести с числами h и $k<0$ и проверить, что f в каждой точке $\mathring{I}$ имеет производную слева $f'_{\text{п}}$, конечную или равную $+\infty$, и что справедлива правая часть второй системы неравенств (III, 2; 9).

Если в (III, 2; 10) положить $x+h = y$, $x+k = y+l$, то мы получим

$$\frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leqslant \frac{f(y+l)-f(y-h)}{h+l}, \tag{III, 2; 12}$$

и аналогичное рассуждение, проведенное с отрицательными приращениями, дает

$$\frac{f(y+l)-f(y-h)}{h+l} \leqslant \frac{f(y+l)-f(y)}{l}. \tag{III, 2; 13}$$

Заметим только, что

$$\frac{f(y-h)-f(y)}{-h} \leqslant \frac{f(y+l)-f(y)}{l}. \tag{III, 2; 14}$$

Устремляя h и l к 0, получаем $f'_{\text{л}}(y) \leqslant f'_{\text{п}}(y)$, чем и заканчивается доказательство неравенств (III, 2; 9). Заметим, кроме того, что обе эти производные конечны.

Функция $f'_{\text{п}}$ является, таким образом, возрастающей в $\mathring{I}$, а, значит, имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Если x не является точкой разрыва функции $f'_{\text{п}}$, то при $h>0$ необходимо имеем: $f'_{\text{п}}(x-h) \leqslant f'_{\text{л}}(x) \leqslant f'_{\text{п}}(x)$, откуда, устремляя h

к нулю, находим $f'_л(x) = f'_п(x)$. Таким образом, f имеет производную всюду, кроме не более чем счетного множества точек.

Далее, функция f, будучи дифференцируемой справа и слева в каждой точке, непрерывна справа и слева, а, следовательно, непрерывна всюду во внутренности $\mathring{I}$ интервала I. Поскольку $f'_п$ возрастает, то она либо везде $\leqslant 0$ на $\mathring{I}$, либо всюду $\geqslant 0$, либо $\leqslant 0$ строго слева от некоторой точки c и $\geqslant 0$ строго справа от c. Поэтому функция f либо возрастает в $\mathring{I}$, либо убывает в $\mathring{I}$ или же убывает слева от c и возрастает справа от c. Так как эта функция непрерывна, то в точке c она достигает своего минимума. Во всех случаях она необходимо имеет предел справа на левом конце интервала I и предел слева на правом его конце.

Рассмотрим, например, случай правого конца b и предположим, что $b \in I$. Если $b' < x < b$, то точка $(x, f(x))$ будет лежать под хордой $[(b', f(b')), (b, f(b))]$. Переходя к пределу при x, стремящемся к b, мы получим то же соотношение в точке $(b, f(b-0))$, а это означает, что имеет место неравенство $f(b-0) \leqslant f(b)$. Тем самым заканчивается доказательство всех свойств функции f, указанных в теореме.

2°) Предположим, обратно, что f обладает всеми указанными в утверждении теоремы свойствами, но вместо второй системы неравенств (III, 2; 9) нам достаточно будет иметь неравенство $f'_п(x_1) \leqslant f'_л(x_2)$. Докажем, что она выпукла во внутренности $\mathring{I}$ интервала I, а тогда из неравенства (III, 2; 8) будет следовать, что она такова же во всем интервале I, если он полуоткрыт или замкнут. Итак, пусть a, b — две точки из $\mathring{I}$, $a < b$. Функция g, определенная формулой $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, удовлетворяет всем перечисленным условиям в $\mathring{I}$ и, кроме того, $g(a) = g(b) = 0$. Для доказательства выпуклости f нам достаточно показать, что $g(x) \leqslant 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$. Если бы это было не так, то функция g имела бы в интервале $]a, b[$ максимум >0 в некоторой точке c. Рассуждения, проведенные в теореме 4 (Ролля), показывают, что $g'_л(c) \geqslant 0$ и $g'_п(c) \leqslant 0$. Из неравенства (III, 2; 9) (1-я система) следует, что обе эти величины равны нулю. Однако, поскольку $g'_п$, согласно (III, 2; 9), возрастает, она заведомо $\geqslant 0$ в интервале $[c, b]$. Максимум $g(c) > 0$ должен быть, следовательно, $\leqslant g(b) = 0$, а это невозможно. Тем самым выпуклость функции f доказана.

Если f дифференцируема в I, то предыдущие условия сводятся к тому, что f' является возрастающей, а если же она дважды дифференцируема, то к тому, что $f'' \geqslant 0$.