§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОГО АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В ДРУГОЕ. ПРОИЗВОДНЫЙ ВЕКТОР ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим отображение f открытого множества поля скаляров $\mathbb{K}$ в аффинное нормированное пространство F[1]). Для $a \in \Omega$ можно придать смысл формуле

$$\overrightarrow{f'(a)} = \lim_{h \neq 0,\, h \to 0,\, a+h \in \Omega} \frac{\overrightarrow{f(a+h) - f(a)}}{h} \in \vec{F}. \qquad (\text{III}, 3; 1)$$

В правой части мы имеем, прежде всего, разность $\overrightarrow{f(a+h) - f(a)}$ двух точек из F, которая является некоторым вектором присоединенного векторного пространства $\vec{F}$. Этот вектор можно делить на скаляр $h \neq 0$ и искать предел полученного вектора в $\vec{F}$, когда h стремится к 0, поскольку векторное пространство $\vec{F}$ предполагалось нормированным. Если $\overrightarrow{f'(a)}$ существует, то его называют производным вектором отображения f в точке a. Существование производной и ее значение зависят не от нормы, а только от топологии пространства F, поскольку понятие производной связано с понятием предела. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то можно точно так же говорить о производной слева и производной справа. Если производная существует всюду в Ω, то можно рассматривать производную функцию $\vec{f}'$: $x \to \vec{f}'(x)$. Это — некоторое отображение Ω в векторное нормированное пространство $\vec{F}$. Можно затем вычислить последующие производные при тех же условиях, что и в § 2. Они обозначаются так же, как и в случае вещественных функций, а именно: $\vec{f}''$, $\vec{f}'''$, ..., $\vec{f}^{(m)}$, ..., и т. д. Все эти производные, если только они существуют, являются отображениями Ω в $\vec{F}$. Заметим, что f принимает свои значения в *аффинном* пространстве F, а ее производные $\vec{f}'$, $\vec{f}''$, ... принимают свои значения в присоединенном *векторном* пространстве $\vec{F}$. Если положить $E = F = \mathbb{R}$, то мы вернемся к обычной производной вещественной функции вещественной переменной.

Теперь можно говорить о классах C^1, C^2, ..., C^m, ..., C^∞ функций, непрерывно дифференцируемых 1 раз, 2 раза, ..., m раз или бесконечно дифференцируемых со значениями в F.

---

[1]) В качестве $\mathbb{K}$ берется $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пространство предполагается аффинным над полем $\mathbb{K}$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и F задано как аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$, то ограничиваются рассмотрением F как аффинного пространства над полем $\mathbb{R}$.

Здесь, как и в § 2, дифференцируемая функция непрерывна, и о второй производной в точке $a \in \Omega$ говорят лишь в том случае, когда первая производная определена всюду в Ω или, по крайней мере, в некоторой окрестности точки a. Важный пример такого отображения имеется в механике. В этом случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, переменная x есть переменная времени t, а пространство F является обычным трехмерным аффинным пространством. Движение частицы в этом пространстве задается функцией времени $t \to M(t)$ — функцией вещественной переменной t со значениями в F. Ее первая производная $d\vec{M}/dt$ является вектором скорости, а вторая производная $d^2\vec{M}/dt^2$ — вектором ускорения. Обе они принадлежат $\vec{F}$.

Если пространство F конечномерно и в нем выбрана система координат, состоящая из начала b и некоторого базиса $(\vec{f}_i)_{i \in I}$ из $\vec{F}$, то положение каждой точки пространства F определяется через ее координаты $(y_i)_{i \in I}$, а задание функции f, определенной на $\Omega \subset \mathbb{K}$ со значениями в F, эквивалентно заданию скалярных функций $(F_i)_{i \in I}$ по формуле:

$$f(x) = b + \sum_{i \in I} F_i(x)\vec{f}_i, \quad \text{где} \quad y_i = F_i(x). \qquad \text{(III, 3; 2)}$$

При этих условиях производная функции задается формулой:

$$\overrightarrow{f'(x)} = \sum_{i \in I} F'_i(x)\vec{f}_i. \qquad \text{(III, 3; 3)}$$

Для того чтобы функция со значениями в конечномерном аффинном нормированном пространстве была дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее компоненты в некоторой системе координат были скалярными дифференцируемыми функциями. Компоненты производной являются производными соответствующих компонент.

Общий случай. Частная производная вдоль вектора

Пусть теперь f — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное пространство F. Очевидно, теперь нельзя говорить о производной в предыдущем смысле. Поэтому мы вначале введем понятие *производной* или *частной производной вдоль вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$*. Пусть a — некоторая точка Ω. Производной f в точке a вдоль вектора $\vec{X}$ называется производная, если она существует, функции

$t \to f(a+t\vec{X})$ при $t=0$. Эта производная обозначается через $\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(a) \in \vec{F}$. Таким образом, имеем:

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(a) = \left(\frac{d}{dt}\left(f\left(a+t\vec{X}\right)\right)\right)_{t=0} = \lim_{\substack{t \neq 0,\, t \to 0 \\ a+t\vec{X} \in \Omega}} \overrightarrow{\frac{f(a+t\vec{X})-f(a)}{t}}. \quad \text{(III, 3; 4)}$$

Здесь t — скаляр, пробегающий множество $\mathbb{K}_{a,\vec{X}}$ элементов из $\mathbb{K}$, для которых $a+t\vec{X} \in \Omega$. Функция $t \to f(a+t\vec{X})$ является отображением $\mathbb{K}_{a,\vec{X}}$ в F. Множество $\mathbb{K}_{a,\vec{X}}$ является прообразом открытого множества Ω при непрерывном отображении $t \to a+t\vec{X}$ множества $\mathbb{K}$ в E. Это — открытое подмножество $\mathbb{K}$, содержащее нуль, что позволяет вычислить производную в точке $t=0$.

Существование и значение производной вдоль $\vec{X}$ в точке a зависит исключительно от топологии пространства $\vec{F}$, а не от его нормы, поскольку понятие производной связано лишь с понятием предела. Если $\vec{X}=\vec{0}$, то производная существует в каждой точке Ω и равна нулю. Если $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ и если задано направление полупрямой, то существует вектор $\vec{X}$, и притом единственный, с нормой, равной 1, имеющий это направление. Производная вдоль такого вектора $\vec{X}$ называется производной по рассматриваемому направлению. Она зависит, очевидно, от нормы в пространстве $\vec{E}$. Например, если E — евклидово конечномерное пространство, S — регулярная гиперплоскость, содержащаяся в Ω, a — некоторая точка из S, $\vec{\nu}$ — ориентированная нормаль к S в точке a, то нормальная производная $d/d\vec{\nu}$ в точке a является производной вдоль единичного вектора $\vec{\nu}$.

Если E — поле скаляров и $\vec{X}$ — единица этого поля, то производная вдоль $\vec{X}$ является обычной производной в смысле определения (III, 3; 1): $\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(a) = \overrightarrow{f'(a)}$. Если $\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(x)$ существует для всех x, то можно рассматривать *производную функцию вдоль $\vec{X}$ функции* f или просто *производную функции* f *вдоль* $\vec{X}$. Это будет функция $\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}$: $x \to \overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(x)$. Для фиксированного $\vec{X}$ это — отображение Ω в $\vec{F}$. Затем можно, в свою очередь, искать производную (если она существует) функции $\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}$ в точке a

вдоль вектора $\vec{Y}$ (отличного или нет от вектора $\vec{X}$). Ее обозначают через $\overrightarrow{D_{\vec{Y}} D_{\vec{X}} f}(a)$ и называют частной производной второго порядка. Точно так же определяются производные высших порядков.

Матрица Якоби. Якобиан

Если пространство F конечномерно и b, $(\vec{f}_i)_{i \in I}$ образуют систему координат в F, то имеют место формулы:

$$f(x) = b + \sum_{i \in I} F_i(x) \vec{f}_i, \quad \overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(x) = \sum_{i \in I} D_{\vec{X}} F_i(x) \vec{f}_i \text{ [1]}. \qquad \text{(III, 3; 5)}$$

Предположим теперь, что E также конечномерно и a, $(\vec{e}_j)_{j \in J}$ — система координат в E. Тогда производные по векторам $\vec{e}_j$ базиса E являются тем, что обычно называют частными производными функции f. Другими словами, по определению:

$$\vec{\partial}_j f(x) = \frac{\vec{\partial} f}{\partial x_j}(x) = \overrightarrow{D_{\vec{e}_j} f}(x) = \lim_{t \neq 0,\, t \to 0} \overrightarrow{\frac{f(x + t\vec{e}_j) - f(x)}{t}}. \qquad \text{(III, 3; 6)}$$

Наконец, если E и F — конечномерные пространства и если в E выбрана система координат, то производная $\vec{\partial}_j f = \frac{\vec{\partial} f}{\partial x_j}$ выражается следующим образом:

$$\frac{\vec{\partial} f}{\partial x_j} = \sum_{i \in I} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \vec{f}_i. \qquad \text{(III, 3; 7)}$$

Матрица, составленная из элементов $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$, в частном случае при $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{(III, 3; 8)}$$

называется *производной матрицей*, или *матрицей Якоби*, функции f в точке $x \in \Omega$. Если $m = n$, то ее определитель называется

[1] Поскольку F_i — скалярные функции, $D_{\vec{X}} F_i(x)$ являются скалярами.

якобианом функции f в точке x по отношению к рассматриваемой системе координат. Часто через $\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ обозначают якобиан функции $y = f(x)$, определенной в заданной системе координат скалярными функциями $y_i = F_i(x) = F_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Говорят также, что это якобиан n функций $y_i = F_i$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для $n = 1$ якобиан сводится к обычной производной.

Недостатки понятия производной вдоль вектора

Понятие производной вдоль вектора обладает рядом недостатков. В самом деле:

1°) Функция может в каждой точке иметь производную вдоль любого вектора и в то же время не быть непрерывной. Рассмотрим, например, скалярную функцию, определенную на $\mathbb{R}^2$ формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad (x, y) = (0, 0), \\ \dfrac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} & \text{для} \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{cases} \qquad \text{(III, 3; 9)}$$

Эта функция является отношением двух полиномов. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного для производной вдоль вектора те же, что и для производной функции скалярной переменной, поскольку она сводится к производной некоторой функции от t при $t = 0$ (формула (III, 3; 4)). Так как знаменатель функции f в каждой точке $\neq (0, 0)$ в нуль не обращается, то эта функция дифференцируема в каждой точке. Вычислим ее производную в начале координат вдоль вектора (X, Y). Если $Y \neq 0$, то для $t \neq 0$ имеем

$$f(tX, tY) = \frac{t^5 X^5}{t^2 Y^2 + \ldots} = \frac{X^5}{Y^2} t^3 + \ldots . \qquad \text{(III, 3; 10)}$$

Поскольку функция f в начале координат равна нулю, то при $t = 0$ ее производная вначале координат вдоль рассматриваемого вектора равна нулю. Если $Y = 0$, $X \neq 0$, то для $t \neq 0$

$$f(tX, tY) = \frac{t^5 X^5}{t^4 X^4 + \ldots} = tX + \ldots . \qquad \text{(III, 3; 11)}$$

Так как f в начале координат равна нулю, то при $t = 0$ ее производная вдоль вектора $(X, 0)$ равна X. Производная же вдоль вектора $(0, 0)$ всегда равна нулю. Таким образом, функция f дифференцируема вдоль любого вектора. Однако она разрывна в начале: на параболе $y - x^2 = 0$ имеем $f(x, y) = x^5/x^8 = 1/x^3$ для $x \neq 0$, и это выражение стремится к ∞, когда $x \neq 0$ стремится к 0.

2°) Если не делать никаких предположений о непрерывности частных производных, то может оказаться, что никакой связи между производными вдоль различных векторов из $\vec{E}$ в одной и той же точке области Ω не существует. Конечно, если $\overrightarrow{D_{\vec{X}}f}(a)$ существует, то для скалярного λ будет существовать $\overrightarrow{D_{\lambda\vec{X}}f}(a)$, и при этом

$$\overrightarrow{D_{\lambda\vec{X}}f}(a) = \lambda\overrightarrow{D_{\vec{X}}f}(a). \tag{III, 3; 12}$$

В самом деле, это очевидно, если $\lambda = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то при $t \in \mathbb{K}$ и $a + t\lambda\vec{X} \in \Omega$ отношение $\overrightarrow{[f(a + t\lambda\vec{X}) - f(a)]/t}$ имеет вид $\overrightarrow{\lambda[f(a + s\vec{X}) - f(a)]/s}$, где $s = t\lambda \in \mathbb{K}$, $a + s\vec{X} \in \Omega$ и $s \neq 0$ стремится к 0, если $t \neq 0$ стремится к 0. Отсюда мы получаем (III, 3; 12). Однако нам бы хотелось, чтобы для фиксированного a производная $\overrightarrow{D_{\vec{X}}f}(a)$ линейно зависела от $\vec{X}$. Но это не так, как показывает тот же пример (III, 3; 9), в котором производная в начале координат вдоль вектора $(X, 0)$ равна X, тогда как производная вдоль вектора (X, Y), $Y \neq 0$, равна нулю.

Недостатки понятия частной производной вдоль вектора вытекают из того, что при ее вычислении в точке a используется поведение функции только на прямых аффинного пространства E, исходящих из той точки, тогда как было бы полезнее учесть глобальное поведение функции f во всей окрестности точки a. Поэтому мы введем новое понятие производного отображения.

Полная производная, или производное отображение

Пусть f — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Говорят, что f *имеет в точке* $a \in \Omega$ *производное отображение, или полную производную* L, *или дифференциал, или полный дифференциал* $L\vec{h}$, *если* L *является линейным непрерывным отображением* $\vec{E}$ *в* $\vec{F}$ *и если для* $a + \vec{h} \in \Omega$ *имеет место равенство*

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + L\vec{h} + \varphi(\vec{h})\,\|\vec{h}\|, \tag{III, 3; 13}$$

где $\varphi(\vec{h})$ *стремится к* $\vec{0}$ *при* $\vec{h} \neq \vec{0}$, *стремящемся к* $\vec{0}$. Это равносильно утверждению, что приращение $\overrightarrow{\Delta f} = \overrightarrow{f(a + \vec{h}) - f(a)}$ может быть представлено в виде линейного непрерывного отображения $L\cdot\vec{h}$ с погрешностью, которая является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\|\vec{h}\|$, когда $\vec{h}$ стремится к $\vec{0}$ в $\vec{E}$. Заметим, что $\varphi(\vec{0})$ может выбираться произвольно и не представляет никакого интереса, но $\varphi(\vec{h})$ для $\vec{h}\neq\vec{0}$ определяется единственным образом по формуле

$$\varphi(\vec{h})=\overrightarrow{[f(a+\vec{h})-f(a)-L\cdot\vec{h}]}/\|\vec{h}\|.$$

То, что L является производной отображения f в точке a, означает, что вектор $\varphi(\vec{h})$, определенный для таких $\vec{h}\neq\vec{0}$, что $a+\vec{h}\in\Omega$, стремится к $\vec{0}$, когда $\vec{h}$ стремится к $\vec{0}$. Обычно договариваются считать $\overrightarrow{\varphi(0)}=\vec{0}$, чтобы функция $\vec{\varphi}$ была бы непрерывной в начале пространства $\vec{F}$ и чтобы можно было снять ограничение $\vec{h}\neq\vec{0}$.

В силу теоремы 12 *гл.* II, *существование и значение производного отображения зависят только от топологии пространств* E и F, *а не от их норм.*

Теорема 8. *Если отображение f имеет производную в точке a, то эта производная единственна. В этом случае f непрерывно в a. Кроме того, отображение f имеет в точке a производную вдоль любого вектора $\vec{X}$ из E, а отображение $\vec{X}\to\overrightarrow{D_{\vec{X}}f}(a)$ есть линейное непрерывное отображение $\vec{E}$ в $\vec{F}$, являющееся не чем иным, как самим L, т. е.*

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}}f}(a)=L\cdot\vec{X}. \qquad \text{(III, 3; 14)}$$

Таким образом, существование производного отображения L в точке a влечет за собой существование производной в точке a вдоль любого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$.

Доказательство. Поскольку отображение L предполагалось непрерывным, то, когда $\vec{h}$ стремится к $\vec{0}$, $L\vec{h}$ также стремится к $\vec{0}$. То же самое будет верно и для $\overrightarrow{\varphi(h)}\|\vec{h}\|$, а потому отображение f непрерывно в точке a. Пусть $\vec{X}\in\vec{E}$. Полагая в (III, 3; 13) $\vec{h}=t\vec{X}$ и замечая, что для достаточно малого $|t|$ точка $a+t\vec{X}$ лежит в открытом множестве Ω, получаем следующую формулу:

$$\frac{\overrightarrow{f(a+t\vec{X})-f(a)}}{t}=L\cdot\vec{X}+\frac{|t|}{t}\varphi(t\vec{X})\,\|\vec{X}\|. \qquad \text{(III, 3; 15)}$$

Так как выражение $L \cdot \vec{X}$ определено для любого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$, то, устремляя $t \neq 0$ к нулю, из (III, 3; 15) получаем (III, 3; 14) и одновременно устанавливаем единственность производной. Если через f обозначено отображение $\Omega \subset E$ в F, то через $f'(a)$, или $\frac{df}{dx}(a)$, можно обозначить производное отображение функции f в точке a, так что $f'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Через $f'(a)\vec{X}$, или $\frac{df}{dx}(a) \cdot \vec{X} \in \vec{F}$, можно будет обозначить значение этого отображения на векторе $\vec{X}$ из $\vec{E}$.

Таким образом, имеем формулу:

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}} f}(a) = f'(a)\vec{X} \in \vec{F}. \qquad \text{(III, 3; 14}_2\text{)}$$

Замечания. 1°) Пусть E и F — аффинные пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда они заведомо являются аффинными над вещественным полем $\mathbb{R}$. Отображение L пространства $\vec{E}$ в $\vec{F}$ линейно, когда $\vec{E}$ и $\vec{F}$ рассматриваются как векторные пространства над полем $\mathbb{C}$, и a fortiori обладает этим свойством, когда $\vec{E}$ и $\vec{F}$ рассматриваются как векторные пространства над полем $\mathbb{R}$. Значит, отображение f множества $\Omega \subset E$ в F имеет производную $L \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ в точке $a \in \Omega$, когда E и F рассматриваются как аффинные пространства над полем $\mathbb{C}$, и a fortiori имеет отображение L в качестве производной, когда E и F рассматриваются как аффинные пространства над полем $\mathbb{R}$. Обратное, вообще говоря, не верно, в чем мы убедимся позже в теории аналитических функций комплексной переменной.

2°) Из определения производной вытекает, что $f'(a)$ не есть вектор пространства $\vec{F}$, *а линейное непрерывное отображение пространства* $\vec{E}$ *в пространство* $\vec{F}$. Это $f'(a) \cdot \vec{X}$ для $\vec{X} \in \vec{E}$ является вектором из $\vec{F}$. Однако предположим, что $\vec{E}$ является полем скаляров $\mathbb{K}$. Тогда *мы можем определить производный вектор* $\overrightarrow{f'(a)} \in \vec{F}$ по формуле (III, 3; 1) и производное отображение $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; \vec{F})$ по формуле (III, 3; 13). Между этими двумя понятиями имеется простая связь. Если существует производный вектор, то существует производное отображение, и наоборот; при этом

$$\overrightarrow{f'(a)} = f'(a) \cdot \vec{1}, \quad \vec{1} \in \mathbb{K}. \qquad \text{(III, 3; 15}_2\text{)}$$

В самом деле, если существует полная производная $f'(a) \in \in \mathscr{L}(\mathbb{K};\ \vec{F})$, то из теоремы 8 следует, что существует производный вектор $\overrightarrow{f'(a)} = \overrightarrow{D_{\vec{1}}f}(a)$, равный $f'(a)\cdot\vec{1}$. Обратно, если существует производный вектор $\overrightarrow{f'(a)}$, то для каждого $h \in K$

$$f(a+h) = f(a) + h\overrightarrow{f'(a)} + \vec{\alpha}\,|\,h\,|,$$

где $\vec{\alpha}$ стремится к $\vec{0}$, когда h стремится к 0. Это означает, что существует производная $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{K};\ \vec{F})$, являющаяся отображением $X \to \overrightarrow{f'(a)}\cdot X$. Впрочем, так как $X \in \mathbb{K}$, мы можем писать или $f'(a)\cdot X$, или $\overrightarrow{f'(a)}\,X$.

Слово производная неоднозначно, поскольку оно может обозначать как производное отображение $f'(a)$, так и производный вектор $\overrightarrow{f'(a)} = f'(a)\cdot\vec{1}$. *Эта неоднозначность почти не мешает на практике.* Если $E = F = \mathbb{K}$, то производный вектор является обычной производной $f'(a) \in \mathbb{K}$, а производное отображение является гомотетией $X \to f'(a)X$ из $\mathbb{K}$ в $\mathbb{K}$.

3°) Если пространство E конечномерно и в нем выбрана система координат a, $(\vec{e}_j)_{j\in J}$, то производная $f'(x) \in \mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F})$ связана с частными производными $f'(x)\cdot\vec{e}_j = \dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}(x)$ следующим образом:

$$f'(x)\cdot\vec{X} = f'(x)\cdot\left(\sum_{j\in J} X_j\vec{e}_j\right) = \sum_{j\in J} X_j f'(x)\,\vec{e}_j = \sum_{j\in J} X_j\,\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}\,(x) \qquad \text{(III, 3; } 15_3\text{)}$$

Пусть теперь оба пространства E и F конечномерны и в каждом из них выбрана система координат, а именно: a, $(\vec{e}_j)_{j\in J}$ в E и b, $(\vec{f}_i)_{i\in I}$ в F. Тогда каждая точка из E и F полностью определяется своими координатами и отображение f из Ω в F может быть определено системой m функций от n скалярных переменных, а именно: $y_i = F_i\big((x_j)_{j\in J}\big)$, $i \in I$. (Если $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, то это будут функции $y_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для $i = 1, 2, \ldots, m$.) В этом случае производное отображение в точке x, если оно существует, определяется следующим образом: полагают $\vec{X} = \sum_{j\in J} X_j\vec{e}_j$ и обозначают через $\vec{Y} = \sum_{i \in I} Y_i \vec{f}_i$ его образ при производном отображении. Тогда

$$\sum_{i \in I} Y_i \vec{f}_i = f'(x) \cdot \vec{X} = \sum_{j \in J} \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}(x) X_j = \sum_{i, j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) X_j \vec{f}_i, \qquad \text{(III, 3; 16)}$$

откуда

$$Y_i = \sum_{j \in J} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) X_j, \qquad i \in I.$$

Полученная формула показывает, что *матрица производного отображения $f'(x)$ по отношению к рассматриваемым системам координат является матрицей Якоби* (III, 3; 8). Как всегда, столбцы матрицы линейного преобразования представляют собой векторы, являющиеся образами векторов базиса $\vec{E}$ при этом преобразовании; другими словами, $f'(x) \cdot \vec{e}_j = \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}(x)$. Существование производного отображения $f'(x)$ влечет существование $\overrightarrow{\partial f}/\partial x_j$, а, следовательно, существование $\partial F_i/\partial x_j$ и существование матрицы Якоби, но обратное не верно, как показывает пример (III, 3; 9). Если E и F имеют одинаковую размерность, то *якобиан в x является определителем отображения $f'(x) \in \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ по отношению к рассматриваемым системам координат.*

Напомним, что можно также говорить об определителе линейного отображения конечномерного пространства $\vec{E}$ *в себя*, не выделяя при этом какого-либо базиса (поскольку определитель отображения, вычисленный в некотором базисе, не зависит от этого базиса). Таким образом, *можно говорить о якобиане f в точке x, или определителе отображения $f'(x)$, для отображения f открытого множества из E в E без выделения какого-либо базиса в пространстве E.*

Понятие дифференциала

Вместо того чтобы через x, y и т. д. обозначать точки пространств E и F, а через $\vec{X}$, $\vec{Y}$ и т. д. — векторы пространств $\vec{E}$ и $\vec{F}$, часто оказывается удобным, оставляя для точек пространств E и F обозначение x и y, векторы пространств $\vec{E}$ и $\vec{F}$ обозначать через $\overrightarrow{dx}$, $\overrightarrow{dy}$. Тогда выражение для производной отображения f множества Ω в F-запишется в виде

$$\overrightarrow{dx} \to \overrightarrow{dy} = f'(x) \cdot \overrightarrow{dx}. \qquad \text{(III, 3; 17)}$$

В частности, если пространство E конечномерно и в нем выбрана система координат, то эта формула запишется следующим образом:

$$\overrightarrow{dx}=\sum_{j\in J} dx_j\vec{e}_j\to\overrightarrow{dy}=f'(x)\cdot\overrightarrow{dx}=\sum_{j\in J}\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}dx_j. \qquad \text{(III, 3; 18)}$$

Когда f является функцией над полем $\mathbb{K}^2$, т. е. функцией двух скалярных переменных x, y, то ее часто обозначают через $\vec{z}$, а через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ обозначают ее частные производные по x и y. Полная производная в дифференциальных обозначениях запишется в виде

$$(dx, dy)\to\overrightarrow{dz}=\vec{p}\,dx+\vec{q}\,dy. \qquad \text{(III, 3; 19)}$$

Последняя формула из (III, 3; 16) после замены X_j, Y_i на dx_j, dy_i примет такой вид

$$dy_i=\sum_{j\in J}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\,dx_j, \qquad i\in I. \qquad \text{(III, 3; 19A)}$$

Геометрическая интерпретация производного отображения: дифференцируемое многообразие и линейное касательное многообразие

Пусть f — отображение открытого множества Ω пространства E в пространство F. Его графиком называется множество $\mathscr{E}$ точек $(x, f(x))$, $x\in\Omega$, из $E\times F$. Если f дифференцируемо в каждой точке Ω, то говорят, что $\mathscr{E}$ является *дифференцируемым многообразием* с уравнением $y=f(x)$. Если, например, $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$, то $\mathscr{E}$ является поверхностью в $\mathbb{R}^3$, задаваемой уравнением $z=f(x, y)$. Если $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}^2$, то $\mathscr{E}$ есть кривая в $\mathbb{R}^3$, описываемая уравнениями $y=g(x)$, $z=h(x)$ [1].

Выясним, какой смысл следует придать понятию линейного многообразия, касательного к графику $\mathscr{E}$ в точке $A=(a, f(a))$?

Рассмотрим произвольное множество $\mathscr{E}$ аффинного нормированного пространства G. Пусть A — точка из $\mathscr{E}$. Говорят, что *вектор $\vec{X}$ из $\vec{G}$ является касательным в точке A к множеству $\mathscr{E}$*, если существуют последовательность точек M_0, M_1, ..., M_n, ... из $\mathscr{E}$, стремящаяся к A при n, стремящемся к бесконечности, и последовательность вещественных скаляров λ_0,

[1]) Вместо x и y мы пишем x, y, z, поскольку $E\times F=\mathbb{R}^3$. Конечно, фраза «уравнением множества $\mathscr{E}$ является $y=f(x)$» ничего не означает. Она является очевидным сокращением фразы: «$\mathscr{E}$ есть множество пар (x, y) из $E\times F$, удовлетворяющих равенству $y=f(x)$», или «$\mathscr{E}=\{(x, y): x\in\Omega, y=f(x)\}$».

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \geqslant 0$, такие, что векторы $\lambda_n \overrightarrow{AM_n}$ стремятся к $\vec{X}$ при n, стремящемся к бесконечности. Вектор $\vec{0}$ всегда является касательным. Если $\vec{X}$ — касательный вектор, то при вещественном $\lambda \geqslant 0$ вектор $\lambda\vec{X}$ тоже является касательным. Если $\vec{X} \neq 0$ — касательный вектор, то λ_n заведомо стремится к $+\infty$. Как и само понятие предела, касательные векторы в точке A к множеству $\mathscr{E}$ зависят лишь от топологии, а не от нормы пространства $\vec{G}$. Множество касательных векторов в точке A к множеству $\mathscr{E}$ называется *векторной контингенцией множества $\mathscr{E}$ в точке A*. Множество точек $A + \vec{X}$, где $\vec{X}$ пробегает векторную контингенцию, называется *аффинной контингенцией множества $\mathscr{E}$ в точке A*.

Теорема 8А. *Пусть f — отображение открытого множества Ω из E в F, дифференцируемое в точке $a \in \Omega$. Векторной (соответственно аффинной) контингенцией в точке $A = (a, f(a) = b)$ множества $\mathscr{E}$, определяемого уравнением $y = f(x)$ в $E \times F$, является векторное подпространство в $\vec{E} \times \vec{F}$, определяемое уравнением*

$$\vec{Y} = f'(a)\vec{X} \tag{III, 3; 19$_2$}$$

(соответственно аффинное подпространство из $E \times F$, определяемое уравнением

$$\overrightarrow{y - b} = f'(a) \cdot \overrightarrow{x - a}). \tag{III, 3; 19$_3$}$$

Доказательство. Второе утверждение тождественно первому, поэтому достаточно доказать первое. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность точек из Ω, сходящаяся к a, и $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность вещественных скаляров $\geqslant 0$, таких, что $\lambda_n \overrightarrow{(x_n - a)}$ стремится к некоторому пределу $\vec{X}$. По определению (III, 3; 13) производного отображения имеем:

$$\overrightarrow{f(x_n) - b} = f'(a) \cdot \overrightarrow{x_n - a} + \vec{\alpha}_n \| \overrightarrow{x_n - a} \|, \tag{III, 3; 19$_4$}$$

где $\vec{\alpha}_n$ стремится к $\vec{0}$ при n, стремящемся к бесконечности. Отсюда

$$\lambda_n \overrightarrow{(f(x_n) - b)} = f'(a) \cdot \lambda_n \overrightarrow{(x_n - a)} + \vec{\alpha}_n \lambda_n \| \overrightarrow{x_n - a} \|. \tag{III, 3; 19$_5$}$$

Так как отображение $f'(a)$ по условию непрерывно, а $\lambda_n \overrightarrow{(x_n - a)}$ сходится к $\vec{X}$, то при n, стремящемся к бесконечности, первый член правой части последнего равенства стремится к $f'(a)\cdot\vec{X}$. Поскольку $\|\lambda_n\overrightarrow{(x_n-a)}\|$ сходится к $\|\vec{X}\|$, а $\|\vec{\alpha}_n\|$ стремится к 0, то второй член сходится к $\vec{0}$. Таким образом, получаем, что левая часть этого равенства при n, стремящемся к бесконечности, сходится к $\vec{Y}=f'(a)\cdot\vec{X}$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. В самом деле,

1°) Пусть вектор $(\vec{X}, \vec{Y})$ касателен в точке A к множеству $\mathcal{E}$, и пусть $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ — последовательность точек $(x_n, f(x_n))$ из $\mathcal{E}$, сходящихся к $A\in E\times F$, а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность скаляров $\geqslant 0$, таких, что $\lambda_n\overrightarrow{AM_n}$ имеет своим пределом $(\vec{X}, \vec{Y})$ в $\vec{E}\times\vec{F}$. Последнее означает, что $\lambda_n\overrightarrow{(x_n-a)}$ сходится к $\vec{X}$, а $\lambda_n\overrightarrow{(f(x_n)-b)}$ сходится к $\vec{Y}$. Мы только что видели, что тогда имеет место равенство (III, 3; 19_2).

2°) Обратно, пусть $(\vec{X}, \vec{Y})$ — некоторый вектор из $\vec{E}\times\vec{F}$, удовлетворяющий условию (III, 3; 19_2). Рассмотрим последовательность точек x_n из Ω, определенных равенством $x_n=a+t_n\vec{X}$, где числа t_n вещественны, положительны и стремятся к 0 при n, стремящемся к бесконечности, и последовательность λ_n, определенную равенством $\lambda_n=1/t_n$. Тогда $\lambda_n\overrightarrow{(x_n-a)}=\vec{X}$. Следовательно, как мы видели выше, $\lambda_n\overrightarrow{(f(x_n)-b)}$ стремится к $f'(a)\cdot\vec{X}$, т. е. к $\vec{Y}$. Последовательность $M_n=(x_n, f(x_n))$ принадлежит к $\mathcal{E}$ и стремится к A, а $\lambda_n\overrightarrow{AM_n}$ сходится к вектору $(\vec{X}, \vec{Y})$, являющемуся касательным вектором к множеству $\mathcal{E}$ в точке A.

Векторное подпространство пространства $\vec{E}\times\vec{F}$, определяемое уравнением (III, 3; 19_2) (соответственно аффинное подпространство из $E\times F$, определяемое уравнением (III, 3; 19_3)) называется *векторным подпространством, касательным к многообразию $\mathcal{E}$ в точке A* (соответственно линейным многообразием, касательным к многообразию $\mathcal{E}$ в точке A). Аффинная функция (аффинное отображение из E в F) $x\to b+f'(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)}$ называется *аффинной функцией, касательной в точке a к функции f. Итак, аффинное линейное многообразие, касательное в точке $A=(a, f(a)=b)$ к дифференцируемому многообразию, определяемому уравнением $y=f(x)$ в $E\times F$, получается заменой $\overrightarrow{dx}$ на $\overrightarrow{x-a}$ и $\overrightarrow{dy}$ на $\overrightarrow{y-b}$ в дифференциале $\overrightarrow{dy}=f'(a)\cdot\overrightarrow{dx}$.*

Так, например, если $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$, то касательная плоскость в точке (a, b, c) к поверхности, определяемой уравнением $z=$

$=f(x, y)$, имеет уравнение

$$z-c=\frac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)(y-b)=p(x-a)+q(y-b). \qquad (\text{III}, 3;\ 19_6)$$

Если $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}^2$, то касательная в точке $(a,\ b,\ c)$ к кривой, определяемой уравнением $y=g(x)$, $z=h(x)$, имеет уравнение

$$\begin{aligned} y-b&=g'(a)(x-a),\\ z-c&=h'(a)(x-a). \end{aligned} \qquad (\text{III}, 3;\ 19_7)$$

Градиент вещественной функции в евклидовом пространстве

Пусть E — конечномерное аффинное евклидово пространство над полем вещественных чисел. Пусть f — вещественная функция, определенная в открытом множестве Ω пространства E. Если в некоторой точке x из E функция f имеет производную $f'(x)$, то эта производная является линейным отображением $\vec{E}$ в $\mathbb{R}$, т. е. линейной формой или элементом из $\overleftarrow{E}'$. Согласно сказанному в теореме 2_4, существует вектор $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, и притом единственный, такой, что

$$f'(x)\cdot\vec{X}=(\vec{X}\,|\,\vec{Y}) \quad \text{для любого} \quad \vec{X} \quad \text{из} \quad \vec{E}. \qquad (\text{III}, 3;\ 20)$$

Этот вектор называется градиентом f в точке x и обозначается через $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)$. Заменяя $\vec{X}$ на $\overrightarrow{dx}$ и $f'(x)\cdot\overrightarrow{dx}$ на $df\in\mathbb{R}$, согласно определению дифференциала, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{\vec{X}}}f(x)&=(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)\,|\,\vec{X}),\\ df&=(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)\,|\,\overrightarrow{dx}). \end{aligned} \qquad (\text{III}, 3;\ 21)$$

Пусть $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ — *ортонормированный* базис в $\vec{E}$. Тогда, учитывая выражение скалярного произведения в ортонормированном базисе, формулу (III, 3; 21) можно записать в виде

$$df=\sum_{i\in I} Y_i\,dx_i, \qquad (\text{III}, 3;\ 22)$$

где Y_i — компоненты градиента. Учитывая (III, 3; 18), имеем:

$$Y_i=(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x))_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad (\text{III}, 3;\ 23)$$

Координатами градиента f в ортонормированном базисе являются частные производные $\partial f/\partial x_i$.

Это же утверждение остается справедливым в случае обобщенного евклидова пространства, но только тогда следует воспользоваться формулой (III, 1; 25). При этом (III, 3; 22) заменится на

$$df = \sum_{i \in I} \varepsilon_i Y_i \, dx_i, \tag{III, 3; 24}$$

а, следовательно, координатами градиента будут $\varepsilon_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. В частности, в специальной теории относительности это будут величины

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x_0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Если градиент определен на всем Ω, то функция $x \to \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)$ называется *векторным полем* над Ω, или отображением Ω в $\vec{E}$. Это отображение обозначают через $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$.

Теорема 8_2 (производная постоянной, производная аффинной функции). *Постоянное отображение дифференцируемо и производная является присоединенным линейным отображение f из E в F дифференцируемо в каждой точке a из E, и его производная является присоединенным линейным отображением: $f'(a) = \vec{f} \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$.*

Производная функция (которую мы определили на стр. 213) является, следовательно, постоянным отображением E в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}) : x \to f'(x) = \vec{f}$. Этот результат обобщает тот факт, что производная аффинной функции $y = \alpha x + \beta$ является постоянной.

Доказательство очевидно.

Теорема 8_3 (дифференцирование является линейной операцией). *Если f — отображение из $\Omega \subset E$ в F и $\vec{g}$ — отображение из Ω в $\vec{F}$ и если f и $\vec{g}$ имеют производные в точке $a \in \Omega$, то функция $f + \vec{g}$: $x \to f(x) + \overrightarrow{g(x)}$ имеет производную в a, равную сумме производных:*

$$(f + \vec{g})'(a) = f'(a) + g'(a). \tag{III, 3; 25}$$

Если λ — постоянный скаляр, то функция $\lambda\vec{g}$: $x \to \overrightarrow{\lambda g(x)}$ имеет производную в a, равную $\lambda g'(a)$.

Доказательство очевидно.

Случай, когда F является произведением аффинных пространств

Предположим, что f является отображением множества $\Omega \subset E$ в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ аффинных нормированных пространств. Оно определяется заданием отображений f_i пространства E в F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ (см. стр. 13). Известно, что отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны функции f_i (теорема 17 гл. II и следующие за ней). Отображение f аффинно тогда и только тогда, когда аффинны f_i.

Теорема 8_4. *Пусть E и F_i, $i=1, 2, \ldots, m$, — аффинные нормированные пространства. Пусть f — отображение открытого множества $\Omega \subset E$ в $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$, определенное отображениями f_i множества Ω в F_i. Для того чтобы f было дифференцируемым в точке $a \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы f_i были дифференцируемы в a, и тогда $f'(a)$ является линейным непрерывным отображением пространства $\vec{E}$ в $\vec{F} = \vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \times \ldots \times \vec{F}_m$, определенным линейными отображениями $f'_i(a)$ из $\vec{E}$ в $\vec{F}_i$.*

Другими словами, *компоненты производной являются производными компонент, и при этом*

$$f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \ldots, f'_m(a)), \quad \overrightarrow{df} = (\overrightarrow{df}_1, \overrightarrow{df}_2, \ldots, \overrightarrow{df}_m). \tag{III, 3; 26}$$

Доказательство. Предположим, что отображения f_i дифференцируемы в точке a. Для приращения $\overrightarrow{dx}$ аргумента x имеем приращения $\overrightarrow{\Delta y_i}$ функций $y_i = f_i(x)$, такие, что

$$\overrightarrow{\Delta y_i} = f'_i(a)\,\overrightarrow{dx} + \vec{\alpha}_i \|\overrightarrow{dx}\|, \tag{III, 3; 27}$$

где $\vec{\alpha}_i$ стремятся к $\vec{0}$ вместе с $\overrightarrow{dx}$. По определению аффинного произведения

$$\overrightarrow{\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = (\overrightarrow{\Delta y_1}, \overrightarrow{\Delta y_2}, \ldots, \overrightarrow{\Delta y_m}) =$$
$$= (f'_1(a)\,\overrightarrow{dx}, f'_2(a)\,\overrightarrow{dx}, \ldots, f'_m(a)\,\overrightarrow{dx}) +$$
$$+ (\vec{\alpha}_1 \|\overrightarrow{dx}\|, \vec{\alpha}_2 \|\overrightarrow{dx}\|, \ldots, \vec{\alpha}_m \|\overrightarrow{dx}\|) =$$
$$= (f'_1(a), f'_2(a), \ldots, f'_m(a))\,\overrightarrow{dx} + (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_m)\|\overrightarrow{dx}\|, \tag{III, 3; 28}$$

где, согласно определению топологического произведения, $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_m)$ стремится к $\vec{0}$ в $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \times \ldots \times \vec{F}_m$, когда $\overrightarrow{dx}$

стремится к $\vec{0}$. Это говорит о том, что f дифференцируема в a и что $f'(a)=(f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_m'(a))$.

Обратное утверждение доказывается аналогично, но в обратном порядке.

Случай, когда E является произведением аффинных пространств. Частные производные отображения

Если E является произведением аффинных пространств $E_1 \times E_2$, то отображение f множества $\Omega \subset E_1 \times E_2$ в F становится функцией двух переменных. Мы будем записывать ее в виде $y=f(x_1, x_2)$. При фиксированном x_1 в точке a_1 можно рассматривать частное отображение f_{a_1}: $x_2 \to f(x_1, x_2)$ и искать, если оно существует, производное отображение в точке a_2. Если это возможно, то полученное производное отображение является отображением из E_2 в F. Его называют *частным производным отображения f по x_2 в точке* (a_1, a_2) и обозначают одним из следующих символов: $\partial_2 f(a_1, a_2)$ или $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$. Точно так же можно рассматривать частное отображение f_{a_2} и соответствующее ему частное производное отображение $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$ в той же самой точке (a_1, a_2). Как и ранее (пример (III, 3; 9)), *тот факт, что f имеет частные производные в некоторой точке, не влечет за собой с необходимостью того, что оно имеет полное производное отображение в этой точке* (*и даже того, что оно там непрерывно*)[1]. Верным будет лишь обратное утверждение. Точнее, имеет место

Теорема 9. *Если E является произведением двух аффинных пространств $E=E_1 \times E_2$ и f имеет производное отображение $f'(a_1, a_2)$ в некоторой точке $a=(a_1, a_2)$ открытого подмножества Ω произведения $E_1 \times E_2$, то оно имеет в этой точке частные производные отображения и его полное производное отображение задается формулой*:

$$\frac{df}{dx}(a_1, a_2)(\vec{X}_1, \vec{X}_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\vec{X}_1+\frac{\partial f}{dx_2}(a_1, a_2)\vec{X}_2. \quad (\text{III}, 3; 29)$$

Доказательство. Из теоремы 51 гл. II мы видим, что линейное непрерывное отображение $\frac{df}{dx}(a_1, a_2)$ из $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в $\vec{F}$ определяет линейные непрерывные отображения L_1 и L_2 про-

[1]) Однако из теоремы 15 будет видно, что существование непрерывных частных производных влечет за собой существование полной производной функции, которая в этом случае будет непрерывной.

странств $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в $\vec{F}$ и что оно задается формулой

$$\frac{df}{dx}(a_1, a_2)(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = L_1\vec{X}_1 + L_2\vec{X}_2. \qquad \text{(III, 3; 30)}$$

Если теперь переменной придать приращение $\vec{h} = (\vec{0}, \vec{h}_2)$, то, согласно определению производного отображения, приращение выразится формулой

$$\overrightarrow{f(a_1, a_2 + \vec{h}_2) - f(a_1, a_2)} = L_2 \cdot \vec{h}_2 + \overrightarrow{\varphi(\vec{0}, \vec{h}_2)} \, \|\vec{h}_2\|, \qquad \text{(III, 3; 31)}$$

где $\overrightarrow{\varphi(0, \vec{h}_2)}$ стремится к $\vec{0}$, когда $\vec{h}_2$ стремится к $\vec{0}$. Но это как раз означает, что L_2 является частным производным отображением отображения f по второй переменной в точке (a_1, a_2).

Мы предоставляем читателю перенести результат на произведение $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ аффинных пространств. В дифференциальных обозначениях получим, что

$$\overrightarrow{df} = f'(x)\,\overrightarrow{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\overrightarrow{dx_j}, \qquad \text{(III, 3; 32)}$$

где на этот раз $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathscr{L}(\vec{E}_j; \vec{F})$, $\overrightarrow{dx_j} \in \vec{E}_j$ и $\overrightarrow{dx} = (\overrightarrow{dx_1}, \overrightarrow{dx_2}, \ldots, \overrightarrow{dx_n}) \in \vec{E} = \vec{E}_1 \times \vec{E}_2 \times \ldots \times \vec{E}_n$.

Если множители $\vec{E}_j$ совпадают с полем скаляров, то мы возвращаемся к формуле (III, 3; 18) (с отождествлением производного вектора и производного отображения, указанным в замечании 2°) на стр. 215).

Производная билинейного непрерывного отображения

Классическая формула $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ для дифференциала произведения обобщается следующим образом:

Теорема 9_2. *Пусть B — билинейное непрерывное отображение $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в $\vec{F}$. Тогда B дифференцируемо в каждой точке $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ из $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$. Его частная производная $\frac{\partial B}{\partial x_1}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ является частным отображением $B_{\vec{a}_2} \in \mathscr{L}(\vec{E}_1; \vec{F})$, определенным формулой* (см. стр. 122)

$$B_{\vec{a}_2}(\vec{X}_1) = B(\vec{X}_1, \vec{a}_2) \in \vec{F}. \qquad \text{(III, 3; 33)}$$

Точно так же, его частная производная $\frac{\partial B}{\partial x_2}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ *является частным отображением* $B_{\vec{a}_1} \in \mathscr{L}(\vec{E}_2; \vec{F})$, *определенным формулой*

$$B_{\vec{a}_1}(\vec{X}_2) = B(\vec{a}_1, \vec{X}_2) \in \vec{F}. \qquad \text{(III, 3; 34)}$$

Его полная производная равна

$$B'(a_1, a_2) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2) = B(\vec{X}_1, \vec{a}_2) + B(\vec{a}_1, \vec{X}_2), \qquad \text{(III, 3; 35)}$$

или в дифференциальных обозначениях:

$$dB = B(\overrightarrow{dx}_1, \vec{x}_2) + B(\vec{x}_1, \overrightarrow{dx}_2). \qquad \text{(III, 3; 36)}$$

Доказательство. Результаты, относящиеся к частным производным, очевидны: частное отображение $B_{\vec{a}_2}: \vec{x}_1 \to B(\vec{x}_1, \vec{a}_2)$ является линейным и непрерывным, а, следовательно, его производная в a_1 совпадает с самим отображением (теорема 8_2), т. е. с отображением $\vec{X}_1 \to B(\vec{X}_1, \vec{a}_2)$. Если отображение B дифференцируемо, то формула (III, 3; 35) вытекает из формулы (III, 3; 30). Однако частная дифференцируемость отображения B не влечет за собой его полной дифференцируемости и, следовательно, ее надо доказывать [1]).

Дадим $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ приращения $\overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2$, и пусть $\overrightarrow{\Delta B}$ является приращением отображения B. Тогда

$$\overrightarrow{\Delta B} = B(\vec{a}_1 + \overrightarrow{dx}_1, \vec{a}_2 + \overrightarrow{dx}_2) - B(\vec{a}_1, \vec{a}_2) =$$
$$= B(\vec{a}_1 + \overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2) + B(\overrightarrow{dx}_1, \vec{a}_2). \qquad \text{(III, 3; 37)}$$

Теперь имеем

$$\overrightarrow{\Delta B} - B(\overrightarrow{dx}_1, \vec{a}_2) - B(\vec{a}_1, \overrightarrow{dx}_2) = B(\overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2). \qquad \text{(III, 3; 38)}$$

Правая часть оценивается по норме величиной

$$\|B\| \|\overrightarrow{dx}_1\| \|\overrightarrow{dx}_2\| \leqslant \|B\| (\|dx_1\| + \|dx_2\|)^2, \qquad \text{(III, 3; 39)}$$

бесконечно малой более высокого порядка, чем $\|\overrightarrow{dx}_1\| + \|\overrightarrow{dx}_2\|$, когда $(\overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2)$ стремится к $\vec{0}$ в $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$. Если в $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ взять норму $\| \|_1 + \| \|_2$, то, согласно определению производного отображения (III, 3; 13), производная B в $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ существует

[1]) Теорема 15 позволила бы нам от этого избавиться, ибо частные производные непрерывны.

и задается формулой (III, 3; 35), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Оставим читателю заботу о распространении этого результата на произведение n нормированных векторных пространств. На этот раз

$$\overrightarrow{dB} = B(\overrightarrow{dx_1}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) + B(\vec{x}_1, \overrightarrow{dx_2}, \ldots, \vec{x}_n) + \ldots$$
$$\ldots + B(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \overrightarrow{dx_n}). \quad \text{(III, 3; 40)}$$

Замечание. Отображение B', ставящее вектору $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in \vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в соответствие производную $B'(\vec{x}) = B'(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in \mathscr{L}(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2; \vec{F})$, определенную по формуле (III, 3; 35), является линейным и непрерывным отображением $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в $\mathscr{L}(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2; \vec{F})$. Оно очевидным образом линейно, и имеет место оценка

$$\| B'(\vec{x}) \cdot \vec{X} \| = \| B'(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2) \| \leqslant \| B(\vec{X}_1, \vec{x}_2) \| +$$
$$+ \| B(\vec{x}_1, \vec{X}_2) \| \leqslant 2 \| B \| \| \vec{x} \| \| \vec{X} \|, \quad \text{(III, 3; 40}_2\text{)}$$

а, следовательно,

$$\| B'(\vec{x}) \| = \sup_{\|\vec{X}\| \leqslant 1} \| B'(\vec{x}) \vec{X} \| \leqslant 2 \| B \| \| \vec{x} \|, \quad \text{(III, 3; 40}_3\text{)}$$

откуда и вытекает, что B' непрерывно; кроме того, $B' \in \mathscr{L}(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2; \mathscr{L}(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2; \vec{F}))$ и

$$\| B' \| \leqslant 2 \| B \|.^{1)} \quad \text{(III, 3; 40}_4\text{)}$$

Дифференцируемые функции.
Непрерывно дифференцируемые функции

Если f имеет производную $f'(x)$ в каждой точке из Ω, то она называется *дифференцируемой* в Ω. Отображение $x \to f'(x)$ является ее производной функцией. Оно обозначается через f', или df/dx, или Df и является отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой*, или принадлежащей классу C^1, если производное отображение f' множества Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ непрерывно.

Теорема 10. *Если f является непрерывно дифференцируемым отображением Ω в F, то отображение $(x, \vec{X}) \to f'(x) \cdot \vec{X}$ из $\Omega \times \vec{E}$ в $\vec{F}$ непрерывно. Обратно, если это отображение непрерывно*

[1]) Если считать $\|\vec{x}\| = \|\vec{x}_1\|_1 + \|\vec{x}_2\|_2$ и $\|\vec{X}\| = \|\vec{X}_1\|_1 + \|\vec{X}_2\|_2$, то коэффициент 2 в формулах (III, 3; 40_2)—(III, 3; 40_4) не появляется. — *Прим. ред.*

и если E конечномерно, то отображение f непрерывно дифференцируемо.

Доказательство. Предположим, что f' является непрерывным отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность, сходящаяся к x в Ω, и $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots$ — последовательность, сходящаяся к $\vec{X}$ в $\vec{E}$. Тогда, в силу непрерывности f', последовательность $f'(x_n)$ сходится к $f'(x)$ в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Далее, в силу теоремы 17 гл. II, последовательность $(f'(x_n), \vec{X}_n)$ сходится к $(f'(x), \vec{X})$ в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}) \times \vec{E}$. Поскольку каноническое отображение $(u, \vec{X}) \to u \cdot \vec{X}$ пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}) \times \vec{E}$ в пространство $\vec{F}$ непрерывно (теорема 54 гл. II), то последовательность $f'(x_n) \cdot \vec{X}_n$ сходится к $f'(x) \cdot \vec{X}$ в $\vec{F}$, что и доказывает непрерывность отображения $(x, \vec{X}) \to f'(x) \cdot \vec{X}$ множества $\Omega \times \vec{E}$ в $\vec{F}$.

Обратно, предположим, что это отображение непрерывно. Выберем какой-либо базис $(\vec{e}_j)_{j \in J}$ в $\vec{E}$. Высказанное предположение тем более влечет за собой непрерывность каждой частной производной $x \to f'(x) \cdot \vec{e}_j = \dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_j}(x)$. Позднее мы увидим (теорема 15), что даже без предположения дифференцируемости f существование и непрерывность частных производных $\overrightarrow{\partial f / \partial x_j}$ влечет за собой существование и непрерывность полной производной. Этим будет доказано обратное утверждение (легко убедиться, что следующие далее теоремы, вплоть до теоремы 15, не опираются на теорему 10).

Примеры непрерывно дифференцируемых функций

Поскольку производная аффинной функции постоянна (теорема 8_2), такая функция непрерывно дифференцируема. Билинейная непрерывная функция также непрерывно дифференцируема, поскольку ее производная является непрерывной линейной функцией (см. замечание, следующее за теоремой 9_2).

Отображение множества Ω в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ непрерывно дифференцируемо тогда и только тогда, когда каждая из его компонент непрерывно дифференцируема (теорема 8_4).

В дальнейшем нам встретится много других примеров таких функций (теорема 15).

Пространства дифференцируемых функций

В гл. II на стр. 146 мы видели, что если E является произвольным множеством, а $\vec{F}$ — векторным пространством, то множество $\vec{F}^E$ всевозможных отображений E в $\vec{F}$ является векторным пространством. Если же F является аффинным пространством, то F^E также является аффинным пространством с присоединенным векторным пространством $\vec{F}^E$. Если f и g — два отображения E в F, то формулой $\overrightarrow{g(x)-f(x)}$ определяется отображение $\overrightarrow{g-f}$ множества E в $\vec{F}$[1]. Если F является нормированным аффинным пространством, то пространство $(F^E)_b$ ограниченных отображений E в F является нормированным аффинным пространством с присоединенным векторным пространством $(\vec{F}^E)_b$. Это пространство полно, если полно F (теорема 64 гл. II). То же самое имеет место для $(F^E)_{cb}$ и $(\vec{F}^E)_{cb}$, если E является топологическим пространством.

Пусть, далее, E, F — аффинные нормированные пространства и Ω — открытое множество в E. Договоримся через $(F^\Omega)_{b;1}$ (и соответственно $(F^\Omega)_{cb;1}$) обозначать пространство функций, заданных в Ω, со значениями в F, дифференцируемых и ограниченных вместе со своими производными (соответственно непрерывно дифференцируемых, ограниченных вместе со своими производными)[2]. Это аффинное пространство с присоединенным векторным пространством $(\vec{F}^\Omega)_{b;1}$ (соответственно $(\vec{F}^\Omega)_{cb;1}$).

Образуем теперь нормированное аффинное пространство, вводя в присоединенном векторном пространстве норму

$$|||\vec{f}|||_1 = \max_{x\in\Omega}(\|\vec{f}(x)\|, \|f'(x)\|) = \max(|||\vec{f}|||, |||\vec{f'}|||) \qquad (III, 3; 41)$$

(где $\|\vec{f}(x)\|$ — норма в F, а $\|f'(x)\|$ — норма в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$).

Позже мы увидим (теорема 113 гл. IV), что эти пространства полны, если полно F. Сказать, что последовательность дифференцируемых функций f_n сходится при n, стремящемся к бесконечности, к некоторой дифференцируемой функции f в смысле $(F^\Omega)_{b;1}$, означает сказать, что функции f_n сходятся равномерно к f, а функции f'_n сходятся равномерно к f'. Эта сходимость более сильная, чем сходимость в $(F^\Omega)_b$. Если E является полем

---

[1]) Если E является двухэлементным множеством $\{1, 2\}$, то можно убедиться в том, что $F^2 = F\times F$ является аффинным пространством с присоединенным векторным пространством $\vec{F}^2 = \vec{F}\times\vec{F}$.

[2]) Причина, по которой приписывается индекс 1, выяснится на стр. 267. Речь идет о пространстве функций, один раз дифференцируемых.

вещественных чисел $\mathbb{R}$, F — полем $\mathbb{R}$ или полем $\mathbb{C}$, а Ω — компактным интервалом $[a, b]$[1]) (соответственно всей вещественной прямой $\mathbb{R}$), то пространство $(F^{\Omega})_{cb;\,1}$ является векторным пространством непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе со своей производной функций на $[a, b]$ (соответственно на $\mathbb{R}$) с вещественными или комплексными значениями. Это пространство очень важно для приложений.

Теорема 10_2. *Отображение, ставящее в соответствие каждой функции f ее производную f', является линейным и непрерывным отображением с нормой $\leqslant 1$ пространства $(\vec{F}^{\Omega})_{b;\,1}$ (соответственно $(\vec{F}^{\Omega})_{cb;\,1}$) в пространство $((\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))^{\Omega})_b$ (соответственно в $((\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))^{\Omega})_{cb}$).*

Доказательство очевидно. (Напомним, что если f является функцией на Ω со значениями в $\vec{F}$, то f' является функцией на Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и, кроме того, $|||f'||| \leqslant |||f|||_1$.)

§ 4. ТЕОРЕМА О СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 11. *Пусть E, F, G — нормированные аффинные пространства, Ω — открытое множество из E, Ω' — открытое множество из F. Пусть f — отображение Ω в Ω', а g — отображение Ω' в G. Если отображение f имеет в точке $a \in \Omega$ производную $f'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, а отображение g имеет в точке $b = f(a)$ из Ω' производную $g'(b) \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, то композиция отображений $h = g \circ f$ имеет производную в точке a и эта производная является композицией производных отображений*

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \qquad \text{(III, 4; 1)}$$

Доказательство. Перед доказательством заметим, что если положить $E = F = G = \mathbb{K}$, то производные отображения будут умножением на числа, являющиеся обычными производными, а написанная формула является формулой дифференцирования сложной функции в том виде, в каком она обычно пишется: $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$. Удобство принятых нами общих обозначений заключается в том, что для аффинных пространств произвольного числа измерений, конечно- или бесконечномерных, они дают нам тот же самый формальный аппарат, что и для вещественной функции вещественной переменной.

Выберем приращение $\vec{dx}$ таким образом, чтобы точка $a + \vec{dx}$ принадлежала Ω. Соответствующие приращения переменных y

[1]) Интервал $[a, b]$ не открыт; см. стр. 198, начало § 2.