вещественных чисел $\mathbb{R}$, F — полем $\mathbb{R}$ или полем $\mathbb{C}$, а Ω — компактным интервалом $[a, b]$[1]) (соответственно всей вещественной прямой $\mathbb{R}$), то пространство $(F^\Omega)_{cb;\,1}$ является векторным пространством непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе со своей производной функций на $[a, b]$ (соответственно на $\mathbb{R}$) с вещественными или комплексными значениями. Это пространство очень важно для приложений.

Теорема 10_2. *Отображение, ставящее в соответствие каждой функции f ее производную f', является линейным и непрерывным отображением с нормой $\leqslant 1$ пространства $(\vec{F}^\Omega)_{b;\,1}$ (соответственно $(\vec{F}^\Omega)_{cb;\,1}$) в пространство $((\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))^\Omega)_b$ (соответственно в $((\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))^\Omega)_{cb}$).*

Доказательство очевидно. (Напомним, что если f является функцией на Ω со значениями в $\vec{F}$, то f' является функцией на Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и, кроме того, $|||f'||| \leqslant |||f|||_1$.)

§ 4. ТЕОРЕМА О СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 11. *Пусть E, F, G — нормированные аффинные пространства, Ω — открытое множество из E, Ω' — открытое множество из F. Пусть f — отображение Ω в Ω', а g — отображение Ω' в G. Если отображение f имеет в точке $a \in \Omega$ производную $f'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, а отображение g имеет в точке $b = f(a)$ из Ω' производную $g'(b) \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, то композиция отображений $h = g \circ f$ имеет производную в точке a и эта производная является композицией производных отображений*

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \qquad \text{(III, 4; 1)}$$

Доказательство. Перед доказательством заметим, что если положить $E = F = G = \mathbb{K}$, то производные отображения будут умножением на числа, являющиеся обычными производными, а написанная формула является формулой дифференцирования сложной функции в том виде, в каком она обычно пишется: $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$. Удобство принятых нами общих обозначений заключается в том, что для аффинных пространств произвольного числа измерений, конечно- или бесконечномерных, они дают нам тот же самый формальный аппарат, что и для вещественной функции вещественной переменной.

Выберем приращение $\vec{dx}$ таким образом, чтобы точка $a + \vec{dx}$ принадлежала Ω. Соответствующие приращения переменных y

1) Интервал $[a, b]$ не открыт; см. стр. 198, начало § 2.

и z будем обозначать через $\overrightarrow{\Delta y}$ и $\overrightarrow{\Delta z}$. Тогда можно написать формулы

$$\overrightarrow{\Delta y}=\overrightarrow{f(a+\overrightarrow{dx})-f(a)}=f'(a)\cdot\overrightarrow{dx}+\vec{\alpha}\,\|\overrightarrow{dx}\|, \qquad (\text{III}, 4; 2)$$

где $\|\vec{\alpha}\|$ стремится к 0 при $\overrightarrow{dx}$, стремящемся к $\vec{0}$, и

$$\overrightarrow{\Delta z}=\overrightarrow{g(b+\overrightarrow{\Delta y})-g(b)}=g'(b)\cdot\overrightarrow{\Delta y}+\vec{\beta}\,\|\overrightarrow{\Delta y}\|, \qquad (\text{III}, 4; 3)$$

где $\|\vec{\beta}\|$ стремится к 0, когда $\overrightarrow{\Delta y}$ стремится к $\vec{0}$. Из написанных равенств получаем:

$$\overrightarrow{\Delta z}=g'(b)\cdot f'(a)\cdot\overrightarrow{dx}+g'(b)\cdot\vec{\alpha}\,\|\overrightarrow{dx}\|+\vec{\beta}\,\|\overrightarrow{\Delta y}\|. \qquad (\text{III}, 4; 4)$$

Разность

$$\overrightarrow{\Delta z}-g'(b)\cdot f'(a)\cdot\overrightarrow{dx}=g'(b)\cdot\vec{\alpha}\,\|\overrightarrow{dx}\|+\vec{\beta}\,\|\overrightarrow{\Delta y}\| \qquad (\text{III}, 4; 5)$$

по норме не превосходит

$$\|g'(b)\|\,\|\vec{\alpha}\|\,\|\overrightarrow{dx}\|+\|\vec{\beta}\|\,(\|f'(a)\|\,\|\overrightarrow{dx}\|+\|\vec{\alpha}\|\,\|\overrightarrow{dx}\|)=$$
$$=\|\overrightarrow{dx}\|\,(\|g'(b)\|\,\|\vec{\alpha}\|+\|f'(a)\|\,\|\vec{\beta}\|+\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|). \qquad (\text{III}, 4; 6)$$

Так как отображение f дифференцируемо в точке a, то оно непрерывно в a. Поэтому если $\overrightarrow{dx}$ стремится к $\vec{0}$, то вместе с ним и $\overrightarrow{\Delta y}$ стремится к $\vec{0}$, а, значит, $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ стремятся к $\vec{0}$, и мы заключаем, что последняя скобка стремится к 0. Поскольку отображение $g'(b)\circ f'(a)$ непрерывно (как композиция двух непрерывных отображений), полученный результат означает, что отображение $h=g\circ f$ дифференцируемо в a и его производная равна $g'(b)\circ f'(a)$.

В дифференциальных обозначениях предыдущий результат выражается следующим образом. Дифференциал f задается выражением

$$\overrightarrow{dy}=f'(x)\cdot\overrightarrow{dx}. \qquad (\text{III}, 4; 7)$$

В свою очередь дифференциал g задается формулой

$$\overrightarrow{dz}=g'(y)\cdot\overrightarrow{dy}. \qquad (\text{III}, 4; 8)$$

Теперь *дифференциал сложной функции получается из дифференциала функции g, если заменить y на $f(x)$, а $\overrightarrow{dy}$ на дифференциал $f'(x)\cdot\overrightarrow{dx}$.* Таким образом, непосредственно получаем:

$$\overrightarrow{dz}=h'(x)\cdot\overrightarrow{dx}=g'(f(x))\cdot(f'(x)\cdot\overrightarrow{dx}). \qquad (\text{III}, 4; 9)$$

Следствие 1 (перестановочность дифференцирования и непрерывного линейного отображения). *Если f является отображением $\Omega \subset E$ в F, имеющим производную $f'(a)$ в точке $a \in \Omega$, и если g — непрерывное аффинное отображение F в G, то сложное отображение $g \circ f$ из Ω в G имеет производную в a, определенную формулой:*

$$(g \circ f)'(a) = \vec{g} \circ f'(a). \qquad (\text{III}, 4; 10)$$

Это утверждение вытекает из теорем 11 и 8_2 (впрочем, оно очевидно).

Предположим, в частности, что E является аффинным пространством над полем вещественных чисел, а $\vec{F}$ — векторным пространством над полем комплексных чисел. Во всей этой теории следует оба их рассматривать как аффинные пространства над вещественным полем. Тем не менее, умножение на $\lambda \in \mathbb{C}$ сохраняет смысл в $\vec{F}$ и его можно рассматривать как линейное непрерывное отображение $\vec{F}$ в себя. Поэтому, если $\vec{f}$ есть некоторое дифференцируемое отображение Ω в $\vec{F}$, то же самое можно сказать и о $\lambda\vec{f}$ и при этом $(\lambda\vec{f})' = \lambda(\vec{f}')$. Например, из того, что в $\mathbb{R}$ функция $\cos x$ является производной функции $\sin x$, вытекает, что производной функции $i \sin x$ является $i \cos x$.

Следствие 2. *Пусть E, F, G — конечномерные аффинные пространства с выбранными в них системами координат. Тогда матрица Якоби отображения $h = g \circ f$ в точке a равна произведению матрицы Якоби отображения g в точке $b = f(a)$ на матрицу Якоби отображения f в точке a.*

Это утверждение вытекает непосредственно из того факта, что матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матриц. Мы это запишем в следующей форме. Пусть точка в E (соответственно в F, в G) определяется своими координатами $(x_k)_{k \in K}$, $(y_j)_{j \in J}$, $(z_i)_{i \in I}$. Для простоты возьмем $I = \{1, 2, \ldots, l\}$, $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $K = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда f определяется с помощью m функций от n переменных: $y_j = F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, g определяется с помощью l функций от m переменных: $z_i = G_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, а $h = g \circ f$ определяется с помощью l функций от n переменных: $z_i = H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Кроме того, можно написать

$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = G_i(F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)). \qquad (\text{III}, 4; 11)$$

Тогда имеем:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial H_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial H_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial H_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial H_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial H_l}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial H_l}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial H_l}{\partial x_n}(a) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial G_1}{\partial y_2}(b) & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m}(b) \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial G_2}{\partial y_2}(b) & \ldots & \frac{\partial G_2}{\partial y_m}(b) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_l}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial G_l}{\partial y_2}(b) & \ldots & \frac{\partial G_l}{\partial y_m}(b) \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{Vmatrix}, \qquad \text{(III, 4; 12)}$$

откуда

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j \in J} \frac{\partial G_i}{\partial y_j}(b) \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a), \qquad i \in I, \ k \in K. \qquad \text{(III, 4; 13)}$$

Точно так же имеем

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_k}(a) = \sum_{j \in J} \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_j}(b) \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a), \qquad k \in K. \qquad \text{(III, 4; 13}_2\text{)}$$

Последнюю формулу можно записать короче, введя не совсем корректные, но очень удобные обозначения. Отождествим прежде всего h и g, считая, что речь идет об одной функции g, выражающейся либо через переменную x, либо через переменную y. Затем будем писать частные производные, не уточняя, в какой точке они вычислены. Конечно, при этом предполагается, что производная f вычисляется в точке a, а производная g вычисляется в точке $f(a)=b$. Далее, если не указывать функцию f, то вместо ее частных производных $\partial F_j/\partial x_k$ можно писать частные производные $\partial y_j/\partial x_k$. Тогда рассматриваемая формула примет широко применяемую форму:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_k}=\sum_{j\in J}\frac{\partial G_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k},\qquad i\in J,\ k\in K. \tag{III, 4; 14}$$

Можно даже позволить себе заменить g на текущую переменную z пространства H или полностью удалить g. При этом получим:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}=\sum_{j\in J}\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k},\qquad i\in J,\ k\in K, \tag{III, 4; 15}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{j\in J}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_j},\qquad k\in K. \tag{III, 4; 16}$$

Следствие 3. *Если в условиях следствия 2 пространства E, F, G имеют одну и ту же размерность n, то якобиан сложного отображения h в точке a равен произведению якобиана отображения f в точке a на якобиан отображения g в точке $f(a)=b$, так что имеет место формула*

$$\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{III, 4; 16$_2$}$$

По существу, именно эта формула оправдывает применение обозначения $\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ для якобиана функции $y=f(x)$ в выбранной системе координат.

Следствие 4. *Пусть Ω — открытое множество пространства E, Ω' — открытое множество пространства F, а f — некоторая биекция Ω на Ω', дифференцируемая в каждой точке вместе со своей обратной биекцией f^{-1}. Тогда производное отображение $f'(a)$ является биекцией $\vec{E}$ на $\vec{F}$, а его обратная биекция является производной в точке $b=f(a)$ обратной биекции f^{-1}. Другими словами, имеет место формула*

$$\left(f'(a)\right)^{-1}=\left(f^{-1}\right)'(b). \tag{III, 4; 17}$$

В частности, если E и F конечномерны, то их размерности одинаковы [1]).

[1]) Из линейной алгебры известно, что если существует *линейная* биекция конечномерного векторного пространства на другое пространство, то они имеют одинаковую размерность. Мы здесь получили нечто более сильное: если существует биекция некоторого открытого множества конечномерного аффинного пространства E на открытое множество конечномерного аффинного пространства F, дифференцируемая вместе со своей обратной биекцией, то E

В самом деле, применим теорему о сложной функции к отображениям f и f^{-1}, удовлетворяющим равенствам: $f\circ f^{-1}=I_F$, $f^{-1}\circ f=I_E$. Поскольку производное отображение тождественного отображения является тождественным отображением, получаем: $f'(a)\circ(f^{-1})'(b)=I_{\vec{F}}$ и $(f^{-1})'(b)\circ f'(a)=I_{\vec{E}}$, чем и доказывается тот факт, что $f'(a)$ является биекцией и что ее обратной биекцией будет $(f^{-1})'(b)$. В частности, *если E и F конечномерны, то их размерности одинаковы, и если в них выбраны системы координат, то матрица Якоби обратной биекции f^{-1} в точке $b=f(a)$ является обратной матрицей матрицы Якоби отображения f в точке a. Якобиан обратной биекции f^{-1} в точке b обратен якобиану f в точке a.* Последнее записывается в сжатой форме:

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\left(\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right)^{-1}. \qquad (III, 4; 18)$$

Следствие 5. *Композиция двух непрерывно дифференцируемых отображений является непрерывно дифференцируемым отображением.*

Надо доказать, что отображение $x\to h'(x)=g'(f(x))\circ f'(x)$ является непрерывным отображением $\Omega\subset E$ в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{G})$. Отображение $x\to f'(x)$ является, по условию, непрерывной функцией f'. Отображение $x\to g'(f(x))$ есть функция $g'\circ f$. Здесь g' непрерывна по предположению, а f непрерывна в силу дифференцируемости. Следовательно, согласно теореме о сложной функции, функция $g'\circ f$ непрерывна (теорема 10 гл. II). Отсюда следует, что $x\to(f'(x), g'(f(x)))$ является непрерывным отображением Ω в произведение $(\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})\times\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G}))$ (замечание, следующее за теоремой 17 гл. II). Но отображение $x\to h'(x)$ является композицией рассмотренного отображения и билинейного непрерывного отображения $(u, v)\to v\circ u$ пространства $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})\times\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{G})$. Из той же самой теоремы 10 гл. II следует, что это отображение непрерывно.

Примеры вычисления обычных производных

Пример 1. Пусть u — отображение открытого множества Ω нормированного аффинного пространства E на прямую $\mathbb{R}$. Применим после него отображение $x\to\operatorname{arc\,tg} x$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тем самым мы определим новое отображение Ω в $\mathbb{R}$, которое

и F имеют одинаковую размерность. С помощью методов, напоминающих примененные на стр. 98, можно доказать большее: если существует гомеоморфизм некоторого открытого множества E на открытое множество F, то E и F имеют одну и ту же размерность. Здесь не требуется никакого предположения о дифференцируемости.

обозначается просто через $\operatorname{arc\,tg} u$. Если отображение u предполагать дифференцируемым, то, учитывая, что функция $\operatorname{arc\,tg} x$ дифференцируема и что ее производная равна $\frac{1}{1+x^2}$ (напомним, что для вещественных функций вещественной переменной производное отображение является умножением на скаляр — обычную производную; замечание 2, стр. 215), согласно теореме о сложной функции получаем, что отображение $\operatorname{arc\,tg} u$ имеет производное отображение, определяемое формулой

$$(\operatorname{arc\,tg} u)'(a) = \frac{u'(a)}{1+(u(a))^2}, \quad \text{или} \quad (\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \tag{III, 4; 19}$$

или в дифференциальных обозначениях:

$$d(\operatorname{arc\,tg} u) = \frac{du}{1+u^2}. \tag{III, 4; 20}$$

Точно такие же рассуждения можно провести, если вместо $\operatorname{arc\,tg}$ рассматриваются другие функции. Взяв, например, ln, получаем (считая $u(x) > 0$ для $x \in \Omega$) следующие формулы[1]):

$$(\ln u)'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}, \text{ или } (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ или } d(\ln u) = \frac{du}{u}. \tag{III, 4; 21}$$

Пример 2. *Производная произведения.* Классическая формула производной произведения функций $(uv)' = u'v + uv'$ является частным случаем производной билинейного непрерывного отображения.

Теорема 12. *Пусть $\vec{u}$, $\vec{v}$ — дифференцируемые (соответственно непрерывно дифференцируемые) отображения открытого множества Ω нормированного аффинного пространства E в нормированные векторные пространства $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, и пусть B — билинейное непрерывное отображение $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ в $\vec{G}$. Тогда отображение $B(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$: $x \to B(\vec{u}_1(x), \vec{u}_2(x))$ из E в $\vec{G}$ дифференцируемо (соответственно непрерывно дифференцируемо) и его производное отображение для $\vec{X} \in \vec{E}$ определяется следующей формулой:*

$$(B(\vec{u}_1, \vec{u}_2))'(a) \cdot \vec{X} = B(u_1'(a) \cdot \vec{X};\ \vec{u}_2(a)) + B(\vec{u}_1(a);\ u_2'(a) \cdot \vec{X}), \tag{III, 4; 22}$$

или

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}} B(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}(a) = B\left(\overrightarrow{D_{\vec{X}} \vec{u}_1}(a), \vec{u}_2(a)\right) + B\left(\vec{u}_1(a), \overrightarrow{D_{\vec{X}} \vec{u}_2}(a)\right), \tag{III, 4; 23}$$

---

[1]) Во второй формуле (III, 4; 19) или (III, 4; 21) правые части являются линейными непрерывными отображениями $\vec{E}$ в $\mathbb{R}$, т. е. элементами сопряженного пространства $\overleftarrow{E'}$.

или в дифференциальных обозначениях

$$d\left(B\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2\right)\right) = B\left(u_1'(a)\cdot \overrightarrow{dx}, \vec{u}_2(a)\right) + B\left(\vec{u}_1(a), \vec{u}_2'(a)\cdot \overrightarrow{dx}\right) = \\ = B\left(\overrightarrow{du_1}, \vec{u}_2\right) + B\left(\vec{u}_1, \overrightarrow{du_2}\right). \quad \text{(III, 4; 24)}^{1)}$$

Доказательство. Рассматриваемое отображение является композицией двух отображений: сначала берется отображение пространства E в $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$, определяемое формулой $x \to (\overrightarrow{u_1(x)}, \overrightarrow{u_2(x)})$, а затем — отображение B пространства $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ в $\vec{G}$. Каждое из этих двух отображений дифференцируемо (соответственно непрерывно дифференцируемо) (теоремы 8_4 и 9_2), и остается лишь применить теорему о сложной функции (соответственно ее следствие 5).

В качестве непосредственного применения предположим, что в некоторой механической задаче $\vec{u}$ и $\vec{v}$ представляют собой векторы ориентированного трехмерного евклидова аффинного пространства, являющиеся дифференцируемыми функциями времени t с производными $\vec{u}'(t)$ и $\vec{v}'(t)$. Тогда скалярное произведение и векторное произведение этих двух векторов также являются дифференцируемыми функциями времени и имеют место формулы[2])

$$\begin{aligned} &(\vec{u} \,|\, \vec{v})' = (\vec{u}' \,|\, \vec{v}) + (\vec{u} \,|\, \vec{v}') && \text{(скалярное произведение)}, \\ &(\vec{u} \wedge \vec{v})' = \vec{u}' \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}' && \text{(векторное произведение)}. \end{aligned} \quad \text{(III, 4; 32)}$$

То, что нами было получено для билинейного отображения, естественно, годится и для мультилинейного отображения: если задано m дифференцируемых отображений $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ открытого множества $\Omega \subset E$ в нормированные векторные пространства $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m$ и если B есть m-линейное непрерывное отображение $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \times \ldots \times \vec{F}_m$ в $\vec{G}$, то функция $B^* = B(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)\colon x \to B(\overrightarrow{u_1(x)}, \overrightarrow{u_2(x)}, \ldots, \overrightarrow{u_m(x)})$ дифференцируема и ее производное отображение задается формулой

$$B^{*\prime}(a)\cdot \vec{X} = \sum_{j=1}^{m} B\left(\overrightarrow{u_1(a)}, \ldots, \overrightarrow{u_{j-1}(a)}, u_j'(a)\cdot \vec{X}, \overrightarrow{u_{j+1}(a)}, \ldots, \overrightarrow{u_m(a)}\right). \quad \text{(III, 4; 33)}$$

---

1) Здесь и далее нумерация формул соответствует оригиналу. — *Прим. ред.*

2) Поскольку t пробегает вещественную прямую $\mathbb{R}$, вместо производных отображений в смысле (III, 3; 13) мы имеем производные векторы в смысле (III, 3; 1). Для этого достаточно в (III, 4; 22) положить $X = 1 \in \mathbb{R}$.

Например, если три вектора $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ориентированного трехмерного евклидова аффинного пространства — дифференцируемые функции времени, то их смешанное произведение $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ является дифференцируемой скалярной функцией времени и его производная вычисляется по формуле

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})' = (\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}', \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'). \quad \text{(III, 4; 34)}$$

Пусть $\vec{H}$ — нормированное векторное пространство. Рассмотрим отображение $u \to u \circ u \circ \ldots \circ u = u^m$ пространства $\mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H})$ в себя. Это отображение является композицией отображения $u \to (u, u, \ldots, u)$ из $\vec{E} = \mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H})$ в пространство $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \times \ldots \times \vec{F}_m = \mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H}) \times \mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H}) \times \ldots \times \mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H})$ и мультилинейного непрерывного отображения $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \to u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m$ пространства $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \times \ldots \times \vec{F}_m$ в пространство $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H})$ (теорема 54 гл. II). Применяя теорему 12, получаем

$$\begin{aligned} d(u^m) &= du \circ u \circ \ldots \circ u + u \circ du \circ u \circ \ldots \circ u + \ldots + u \circ u \circ \ldots \circ du = \\ &= du \circ u^{m-1} + u \circ du \circ u^{m-2} + \ldots + u^{m-1} \circ du. \quad \text{(III, 4; 35)} \end{aligned}$$

Если $\vec{H}$ является полем скаляров $\mathbb{K}$, то $\mathscr{L}(\vec{H}; \vec{H})$ — коммутативное поле скаляров и мы возвращаемся к классическому случаю дифференцирования степенной функции:

$$d(x^m) = mx^{m-1}\,dx.$$

Пример 3. *Производная отношения.* Пусть $\vec{u}$ есть отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в векторное нормированное пространство $\vec{F}$, и пусть v — скалярная функция, определенная на Ω и всюду $\neq 0$. Тогда можно определить отношение $\vec{u}/v$: $x \to \vec{u}(x)/v(x)$. Если $\vec{u}$ и v — дифференцируемые функции, то это отношение также дифференцируемо и его производная определяется формулой

$$d\left(\frac{\vec{u}}{v}\right) = \frac{v\,\overrightarrow{du} - dv\,\vec{u}}{v^2}. \quad \text{(III, 4; 36)}$$

Доказательство очевидно. Отображение $\vec{u}/v$ является композицией отображения $x \to (\vec{u}(x), 1/v(x))$ множества Ω в $\vec{F} \times \mathbb{K}$ и билинейного отображения $(\vec{u}, \lambda) \to \lambda\vec{u}$ пространства $\vec{F} \times \mathbb{K}$ в $\vec{F}$.

Поскольку, согласно примеру 1, $d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2} = -\frac{v'(x)\,\overrightarrow{dx}}{v^2(x)}$, то по формуле (III, 4; 24) получаем (III, 4; 36).

Применение к замене переменных. Пусть g — некоторая функция переменной x, т. е. некоторое отображение открытого множества Ω нормированного аффинного пространства E в нормированное аффинное пространство G. Практически эти пространства обычно конечномерны и в них заданы системы координат. Предположим теперь, что g удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных или системе уравнений в частных производных, и мы хотим сделать замену переменной $y = f(x)$. *Если речь идет о некоторой биекции*, то g станет функцией переменной y, т. е. отображением некоторого открытого множества из F в пространство G. Теперь g будет удовлетворять новому уравнению или новой системе уравнений в частных производных относительно y, и наша задача состоит в том, чтобы найти эту систему уравнений. Такая постановка предполагает заранее известным, что дифференцируемость g по x эквивалентна ее дифференцируемости по y. Предполагается также, что f дифференцируема вместе с обратной биекцией f^{-1}. Будем называть x *старой переменной*, y — *новой переменной* и будем искать *новое уравнение* в частных производных исходя из *старого*. Поскольку старое уравнение содержит производную dg/dx, достаточно выразить ее через производную dg/dy, что делается по формуле $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \circ f'(x)$, а затем подставить результат в рассматриваемое уравнение в частных производных. Так получается новое уравнение, содержащее только производную dg/dy, являющееся искомым уравнением, конечно, при условии, что оно содержит лишь переменную y, т. е. что повсюду переменная x заменена на переменную y через ее выражение $x = f^{-1}(y)$, требующее введения обратной биекции f^{-1}.

Пример 1. *Уравнение колебания струны.* Так называют уравнение[1])

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{U}}{dt^2} = \vec{0}, \qquad \text{(III, 4; 37)}$$

где x — пространственная вещественная переменная, t — временная вещественная переменная и $\vec{U}$ — векторная функция двух переменных x и t, т. е. отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\vec{F}$.

---

[1]) Мы должны были бы дать этот пример лишь после изучения производных порядка >1. Однако они уже прежде изучались. Необходимое обоснование будет дано в § 6; см. теорему 19.

Это уравнение имеет следующее физическое происхождение. Рассмотрим однородную струну с закрепленными концами A и B, способную совершать поперечные колебания в окрестности своего положения равновесия. Точка струны, занимавшая в равновесии положение M_0, во время движения занимает положение M. Ее перемещение в каждый момент времени определяется вектором $\vec{U}=\overrightarrow{M_0M}$. Если точка M_0 струны имеет на ней абсциссу x, то $\vec{U}$ является функцией двух переменных x и t. Существенно заметить, что речь идет о *малых колебаниях* в некоторой окрестности положения равновесия, т. е. струна предполагается сильно натянутой, почти прямолинейной между A и B. Без этих предположений уравнение движения не будет таким простым, как указанное выше. Функция $\vec{U}$ принимает свои значения в двумерном векторном подпространстве, перпендикулярном $\overrightarrow{AB}$. Величина v в уравнении — скорость распространения поперечных колебаний вдоль струны, определяемая по формуле

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad \text{(III, 4; 38)}$$

где T — среднее натяжение струны и ρ — линейная плотность, т. е. масса единицы длины струны. Заметим, что уравнение физически однородно, ибо размерность величины v, вычисляемой по последней формуле, в единицах массы, длины и времени равна $\sqrt{\dfrac{mlt^{-2}}{ml^{-1}}}=lt^{-1}$, т. е. является размерностью скорости[1]).

Выполним теперь замену переменных

$$\xi=x+vt, \qquad \eta=x-vt. \qquad \text{(III, 4; 39)}$$

Здесь речь идет о некоторой биекции, дифференцируемой вместе со своей обратной биекцией, определяемой линейными дифференцируемыми функциями

$$x=\frac{\xi+\eta}{2}, \qquad t=\frac{\xi-\eta}{2v}. \qquad \text{(III, 4; 40)}$$

Если в функции $\vec{U}$ мы заменим x и t их значениями, то получим сложную функцию $\vec{U}^*$, определенную соотношениями

$$\xi,\ \eta\to\vec{U}^*(\xi,\ \eta)=\vec{U}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2v}\right). \qquad \text{(III, 4; 41)}$$

Коротко ее можно обозначить через $\vec{U}$, «считая выраженной через ξ и η».

---

[1]) Разумеется, предполагается, что во время колебаний длина струны изменяется пренебрежимо мало.

Обратно, имеет место формула

$$\vec{U}(x,\ t)=\vec{U}^*(x+vt,\ x-vt). \qquad (III, 4; 42)$$

Вычисляя старые производные с помощью новых, получаем формулы

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=v\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi}-\frac{\partial\vec{U}}{\partial\eta}\right), \qquad (III, 4; 43)$$

которые позволяют найти формулы для частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\eta^2},\qquad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\eta^2}. \qquad (III, 4; 44)$$

Отсюда теперь получаем, что

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi\,\partial\eta}. \qquad (III, 4; 45)$$

В этой записи смешаны функции $\vec{U}$ и $\vec{U}^*$. В действительности эту формулу надо было бы записать так[1]):

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}(x,\ t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}(x,\ t)=4\frac{\partial^2\vec{U}^*}{\partial\xi\,\partial\eta}(x+vt,\ x-vt). \qquad (III, 4; 46)$$

Полученное новое уравнение относительно переменной $\vec{U}$, выраженной как функция от ξ и η (в действительности относительно $\vec{U}^*$), является значительно более простым уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \qquad (III, 4: 47)$$

Нетрудно решить это уравнение. В самом деле, если мы рассмотрим частную производную $\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi}$, то заметим, что ее частная производная по η равна нулю. Отсюда следует, что она постоянна по η, т. е. является «произвольной» функцией ξ. Но теперь видно, что $\vec{U}$ является суммой какой-либо первообразной этой функции ξ, которая сама является «произвольной»

[1]) Правые части равенства являются функциями от x и t. Как обычно, $\frac{\partial^2\vec{U}^*}{\partial\xi\,\partial\eta}(x+vt, x-vt)$ — это значение $\frac{\partial^2\vec{U}^*}{\partial\xi\,\partial\eta}$ в точке $(x+vt,\ x-vt)$.

функцией ξ, и некоторой постоянной относительно ξ, т. е. «произвольной» функции η. Окончательно получаем формулу

$$\vec{U}=\vec{f}(\xi)+\vec{g}(\eta), \tag{III, 4; 47$_2$}$$

дающую искомое решение уравнения колебания струны:

$$\vec{U}(x, t)=\vec{f}(x+vt)+\vec{g}(x-vt), \tag{III, 4; 48}$$

где $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — «произвольные» функции вещественной переменной. Выражение «произвольные функции» не точно. Надо, чтобы были обоснованы все вычисления при замене переменных (см. теорему 19), для чего необходимо, чтобы функция $\vec{U}$ имела полную производную 2-го порядка, а это в свою очередь означает, что функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ дважды дифференцируемы.

Упражнение. Решить тем же самым методом уравнение колебания струны с правой частью:

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=\vec{g}(x, t), \tag{III, 4; 49}$$

где правая часть является заданной непрерывной функцией x и t. Это уравнение возникает в том случае, когда струна, кроме натяжения, подвергается действию других сил, поперечно направленных и зависящих только от x и t.

Пример 2. *Частные производные в декартовых и полярных координатах на плоскости.*

1°) *Выражение производных в полярной системе координат через производные в декартовой системе координат.*

По формулам замены переменных

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi, \tag{III, 4; 50}$$

пользуясь указанными ранее краткими обозначениями, получаем формулы:

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}. \tag{III, 4; 51}$$

Каков же точный смысл этих формул?

Пусть g — отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ в аффинное пространство над полем вещественных чисел. Его можно записать в виде $(x, y)\to g(x, y)$.

Пусть, с другой стороны, P — отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, определенное формулами

$$(r, \varphi)\to(x, y), \qquad x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi. \tag{III, 4; 52}$$

(Внимание! Через (r, φ) обозначена точка плоскости $\mathbb{R}^2$, для которой r и φ — ее обычные декартовы координаты. Ее образ $P(r, \varphi)$ имеет декартовы координаты x, y, определяемые по формулам (III, 4; 52), а, следовательно, (r, φ) являются полярными координатами этого образа.)

Отображение P дифференцируемо, и его матрица Якоби определяется формулой

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{1)}. \qquad \text{(III, 4; 53)}$$

Отсюда вытекает, что если g является дифференцируемой функцией, то сложное отображение $g^* = g \circ P$ также дифференцируемо и имеют место формулы

$$\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$\text{(III, 4; 54)}$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial \varphi}(r, \varphi) = -\frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\sin\varphi + \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi,$$

которые, пользуясь принятыми краткими обозначениями, можно записать в виде.

$$\frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial r} = \cos\varphi \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial y}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial y} = -r\sin\varphi \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial x} + r\cos\varphi \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial y} \qquad \text{(III, 4; 55)}$$

(как обычно, g^* и g отождествлены). Отсюда получаются формулы (III, 4; 51).

2°) *Выражение производных в декартовых координатах через производные в полярных координатах.*

Можно попытаться выразить частные производные по x и y, исходя из частных производных по r и φ. Однако следует заметить, что отображение P не является биекцией. Отображение P сюръективно, но не инъективно, ибо точка (x, y) имеет бесконечное множество полярных координат. Поэтому следует ожидать, что производное отображение отображения P не будет линейной биекцией. Тем не менее в окрестности точки (r, φ),

---

1) Из теоремы 8_4 следует, что если обе скалярные функции $(r, \varphi) \to r\cos\varphi$, $(r, \varphi) \to r\sin\varphi$ дифференцируемы, то отображение P также дифференцируемо. Каждая из этих двух функций дифференцируема, если дифференцируемы сомножители. Итак, остается показать, что дифференцируемы функции $(r, \varphi) \to r$ и $(r, \varphi) \to \cos\varphi$ или $\sin\varphi$. Далее, функция $(r, \varphi) \to r$ линейна, а функция $(r, \varphi) \to \cos\varphi$ является композицией отображений $(r, \varphi) \to \varphi$ и $\varphi \to \cos\varphi$, из которых первое линейно, а второе известно как дифференцируемая вещественная функция вещественной переменной.

Можно также применить следствие 2 теоремы 15: $(r, \varphi) \to r\cos\varphi$ и $(r, \varphi) \to r\sin\varphi$ имеют непрерывные частные производные.

в которой якобиан преобразования P: $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$ отличен от 0, т. е. в точке $(x, y) \neq (0, 0)$, уравнения (III, 4; 54) разрешимы[1]), и, исходя из частных производных $\partial\vec{g}^*/\partial r$, $\partial\vec{g}^*/\partial\varphi$, можно вычислить частные производные $\partial\vec{g}/\partial x$, $\partial\vec{g}/\partial y$. Непосредственными вычислениями получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{g}}{\partial x}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) &= \cos\varphi\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial r}(r,\ \varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial\varphi}(r,\ \varphi), \\ \frac{\partial\vec{g}}{\partial y}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) &= \sin\varphi\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial r}(r,\ \varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial\varphi}(r,\ \varphi). \end{aligned} \tag{III, 4; 56}$$

Заметим, что в этой формуле можно заменить r и φ соответствующими функциями от x и y.

Можно также посмотреть на вышеизложенное с другой точки зрения. Пусть (r_0, φ_0) — некоторая точка $\mathbb{R}^2$, $r_0 > 0$, и пусть (x_0, y_0) ее образ при отображении P. Если P сузить на открытое множество Ω из $\mathbb{R}^2$, определенное неравенствами $r > 0$, $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0 + \pi$, то получим некоторую биекцию P_Ω (и даже гомеоморфизм) множества Ω на $P(\Omega)$, имеющую обратную биекцию P^{-1}. Когда точка (x, y) изменяется в $P(\Omega)$, ей можно отнести единственную непрерывно изменяющуюся систему полярных координат, т. е. единственный прообраз в Ω, и мы будем иметь: $\vec{g} = \vec{g}^* P_\Omega^{-1}$. При этом формулы (III, 4; 56), в которых r и φ заменены их выражениями в виде функций от x и y, будут иметь тот же смысл, что и формулы (III, 4; 54). Запишем эти формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{g}}{\partial x}(x,\ y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial r}\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi(x,\ y)\right) - \\ &\qquad - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial\varphi}\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi(x,\ y)\right), \\ \frac{\partial\vec{g}}{\partial y}(x,\ y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial r}\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi(x,\ y)\right) + \\ &\qquad + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial\varphi}\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi(x,\ y)\right). \end{aligned} \tag{III, 4; 56$_2$}$$

Аналогичные формулы можно получить для $r_0 < 0$, если взять $r < 0$ и $r = -\sqrt{x^2+y^2}$. Что же касается непрерывной функции φ: $(x, y) \to \varphi(x, y)$, то у нее нет простого аналитиче-

[1]) Мы применили здесь непосредственно очевидный частный случай теоремы о неявной функции (§ 8; см., в частности, замечание на стр. 311).

ского выражения. Очевидно, $\varphi(x, y) = \operatorname{arc\,tg} y/x + k\pi$, где k зависит от x, y и не всегда одно и то же для $(x, y) \in P(\Omega)$.

Можно было бы для решения обеих задач применить дифференциальные обозначения. В самом деле, запишем дифференциал в виде

$$\overrightarrow{dg} = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial x}}\, dx + \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial y}}\, dy, \qquad \text{(III, 4; 57)}$$

а затем воспользуемся формулами

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi, \qquad \text{(III, 4; 58)}$$

которые дадут новое выражение дифференциала

$$\overrightarrow{dg^*} = \left(\cos\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial x}} + \sin\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial y}}\right) dr + \left(-r\sin\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial x}} + r\cos\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial y}}\right) d\varphi. \qquad \text{(III, 4; 59)}$$

Коэффициенты при dr и $d\varphi$ являются частными производными $\overrightarrow{\partial g^*/\partial r}$ и $\overrightarrow{\partial g^*/\partial \varphi}$, что снова дает решение 1-й задачи и формулу (III, 4; 54).

Для того чтобы снова получить выражение (III, 4; 56), можно провести то же самое рассуждение, исходя из формулы

$$\overrightarrow{dg^*} = \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial r}}\, dr + \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial \varphi}}\, d\varphi. \qquad \text{(III, 4; 60)}$$

Затем dr и $d\varphi$ следует выразить как функции от dx и dy путем решения системы (III, 4; 58), т. е. положить

$$dr = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy \quad \text{и} \quad d\varphi = -\frac{1}{r}\sin\varphi\, dx + \frac{1}{r}\cos\varphi\, dy, \qquad \text{(III, 4; 61)}$$

откуда подстановкой в (III, 4; 60) получается:

$$\overrightarrow{dg} = \left(\cos\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial r}} - \frac{\sin\varphi}{r}\, \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial \varphi}}\right) dx + \left(\sin\varphi\, \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial r}} + \frac{\cos\varphi}{r}\, \overrightarrow{\frac{\partial g^*}{\partial \varphi}}\right) dy. \qquad \text{(III, 4; 62)}$$

Отсюда снова находится решение 2-й задачи и формула (III, 4; 56).

В качестве применения вычислим, например, *лапласиан в полярных координатах.*

Лапласиан функции g переменных x и y определяется формулой

$$\overrightarrow{\Delta g} = \overrightarrow{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}} + \overrightarrow{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}. \qquad \text{(III, 4; 63)}$$

Для частных производных 1-го порядка уже имеются формулы (III, 4; 56). Вычисляя частные производные 2-го порядка как производные от производных 1-го порядка:

$$\frac{\overrightarrow{\partial^2 g}}{\partial x^2}=\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial\varphi}\right), \qquad \text{(III, 4; 64)}$$

получаем выражение вида

$$\vec{\alpha}\cos^2\varphi+\vec{\beta}\sin\varphi\cos\varphi+\vec{\gamma}\sin^2\varphi. \qquad \text{(III, 4; 65)}$$

От частных производных по x к частным производным по y можно перейти, заменяя φ на $\varphi-\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ на $\sin\varphi$ и $-\cos\varphi$ соответственно. Выражение для $\overrightarrow{\partial^2 g}/\partial y^2$ при этом получит вид $\vec{\alpha}\sin^2\varphi-\vec{\beta}\sin\varphi\cos\varphi+\vec{\gamma}\cos^2\varphi$, а лапласиан будет равен $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, т. е. будет суммой коэффициентов при $\cos^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$ в выражении (III, 4; 65). Непосредственное вычисление дает

$$\overrightarrow{\Delta g}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=\frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial r^2}(r,\ \varphi)+\frac{1}{r}\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial r}(r,\ \varphi)+\frac{1}{r^2}\frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial\varphi^2}(r,\ \varphi), \qquad \text{(III, 4; 66)}$$

что можно коротко записать в виде:

$$\overrightarrow{\Delta g}=\frac{\overrightarrow{\partial^2 g}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\overrightarrow{\partial^2 g}}{\partial\varphi^2},$$

или (III, 4; 67)

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Замечания. 1°) Эта формула удовлетворяет правилу однородности. Если величины x, y, r имеют размерность длины l, а φ безразмерна, то размерность $\overrightarrow{\Delta g}$ равна gl^{-2} и то же самое имеет место для членов правой части.

2°) Во всех вычислениях предполагается, что g имеет полную производную 2-го порядка (см. § 6, теорема 19).

Пример 3. *Вычисление лапласиана от функции, определенной в $\mathbb{R}^n$ и зависящей только от расстояния до начала координат.*

Пусть g — отображение полупрямой $\mathbb{R}_+$ (множество вещественных чисел $\geqslant 0$) в нормированное аффинное пространство G. Рассмотрим отображение r пространства $\mathbb{R}^n$ в полупрямую $\mathbb{R}_+$, определенное по формуле

$$r(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \qquad \text{(III, 4; 68)}$$

Сложное отображение $g^*=g\circ r$, которое будет кратко записываться в виде $g(r)$, является отображением $\mathbb{R}^n$ в G, зависящим только от расстояния исходной точки до начала координат. Если g дважды дифференцируемо и $(x_1, x_2 \ldots, x_n) \neq \neq (0, 0, \ldots, 0)$ (для того, чтобы r также было дважды дифференцируемым), то для отображения g^* в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует лапласиан $\overrightarrow{\Delta g^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial x_i^2}$. Этот лапласиан может быть вычислен предыдущими методами. Прежде всего

$$\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial x_i} = \vec{g}' \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{g}' \frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial x_i^2} = \vec{g}'' \frac{x_i^2}{r^2} + \vec{g}' \frac{1}{r} - \vec{g}' \frac{x_i^2}{r^3}. \tag{III, 4; 69}$$

Складывая затем результаты, полученные для $i = 1, 2, \ldots, n$, находим:

$$\overrightarrow{\Delta g^*}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{g}''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \vec{g}'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right), \tag{III, 4; 70}$$

что можно коротко записать в виде

$$\overrightarrow{\Delta g} = \vec{g}'' + \frac{n-1}{r} \vec{g}' = \frac{\overrightarrow{d^2 g}}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\overrightarrow{dg}}{dr}. \tag{III, 4; 71}$$

При $n = 2$ эта формула является частным случаем формулы (III, 4; 66), в которой g и g^* поменялись ролями. (Если в (III, 4; 66) предположить, что g^* зависит только от r, то $\frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial \varphi^2} = 0$ и мы получим $\overrightarrow{\Delta g} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial r}$, что эквивалентно (III, 4; 71) при $n = 2$.) Легко проверяется правильность множителя $n - 1$: при $n = 1$ получаем $\overrightarrow{\Delta g^*} = \vec{g}''$. Можно заметить также, что формула удовлетворяет правилу однородности: правая и левая части имеют размерность gl^{-2} (см. конец примера 2°).)

§ 5. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Предположение, что f имеет производную в точке $a \in \Omega$, означает, что приращение $\overrightarrow{f(a + \vec{h}) - f(a)}$ *для бесконечно малого* $\vec{h}$ выражается по формуле (III, 3; 13), и в этом смысле формулу (III, 3; 13) можно было бы назвать формулой