сящим только от расстояния исходной точки до начала координат. Если g дважды дифференцируемо и $(x_1, x_2 \dots, x_n) \neq \neq (0, 0, \dots, 0)$ (для того, чтобы r также было дважды дифференцируемым), то для отображения g^* в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует лапласиан $\overrightarrow{\Delta g^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial x_i^2}$. Этот лапласиан может быть вычислен предыдущими методами. Прежде всего

$$\frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial x_i} = \vec{g}' \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{g}' \frac{x_i}{r},$$
$$\frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial x_i^2} = \vec{g}'' \frac{x_i^2}{r^2} + \vec{g}' \frac{1}{r} - \vec{g}' \frac{x_i^2}{r^3}. \tag{III, 4; 69}$$

Складывая затем результаты, полученные для $i = 1, 2, \dots, n$, находим:

$$\overrightarrow{\Delta g^*}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{g}''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right) + \\ + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \vec{g}'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right), \tag{III, 4; 70}$$

что можно коротко записать в виде

$$\overrightarrow{\Delta g} = \vec{g}'' + \frac{n-1}{r} \vec{g}' = \frac{\overrightarrow{d^2 g}}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\overrightarrow{dg}}{dr}. \tag{III, 4; 71}$$

При $n = 2$ эта формула является частным случаем формулы (III, 4; 66), в которой g и g^* поменялись ролями. (Если в (III, 4; 66) предположить, что g^* зависит только от r, то $\frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial \varphi^2} = 0$ и мы получим $\overrightarrow{\Delta g} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 g^*}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\overrightarrow{\partial g^*}}{\partial r}$, что эквивалентно (III, 4; 71) при $n = 2$.) Легко проверяется правильность множителя $n - 1$: при $n = 1$ получаем $\overrightarrow{\Delta g^*} = \vec{g}''$. Можно заметить также, что формула удовлетворяет правилу однородности: правая и левая части имеют размерность gl^{-2} (см. конец примера 2°).)

§ 5. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Предположение, что f имеет производную в точке $a \in \Omega$, означает, что приращение $\overrightarrow{f(a + \vec{h}) - f(a)}$ *для бесконечно малого* $\vec{h}$ выражается по формуле (III, 3; 13), и в этом смысле формулу (III, 3; 13) можно было бы назвать формулой *бесконечно малых* приращений. Однако формула (III, 3; 13) не дает никакой оценки для приращения $\overrightarrow{f(a+\vec{h})-f(a)}$ функции f при определенном приращении аргумента $\vec{h}$. Этой цели будет служить формула конечных приращений, использующая производную функции f в точках, близких к точке a.

Формула (III, 2; 2) непосредственно обобщается на отображения E в F в том случае, *когда F является полем вещественных чисел.*

Теорема 13А. *Пусть f — вещественная непрерывная функция, заданная на открытом множестве Ω аффинного нормированного пространства E над полем вещественных чисел. Если отрезок $[x,\ x+\vec{h}]$ целиком содержится в Ω и если функция f имеет производное отображение в каждой точке открытого интервала $]x,\ x+\vec{h}[$, то*

$$f(x+\vec{h})-f(x)=f'(x+\theta\vec{h})\vec{h}\in\mathbb{R}, \quad \text{где} \quad 0<\theta<1. \qquad \text{(III, 5; 0)}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение Φ: $t\to f(x+t\vec{h})$ вещественного интервала $[0, 1]$ в $F=\mathbb{R}$. Это отображение является композицией отображения $t\to x+t\vec{h}$ отрезка $[0, 1]$ в множество Ω и отображения f множества Ω в $\mathbb{R}$. Согласно теореме о сложной функции, это отображение непрерывно на отрезке $[0, 1]$ (теорема 10 гл. II) и дифференцируемо на интервале $]0, 1[$ (теорема 11 гл. III) и его производная вычисляется по формуле

$$\Phi'(t)=f'(x+t\vec{h})\vec{h}\in\mathbb{R}. \qquad \text{(III, 5; 0}_2\text{)}$$

Поскольку $\Phi(1)-\Phi(0)=f(x+\vec{h})-f(x)$, для получения необходимого результата достаточно к функции Φ на отрезке $[0, 1]$ применить формулу (III, 2; 2).

Напротив, формула (III, 2; 2) в том виде, какой она имеет, не может быть обобщена, если размерность F больше 1 или же если речь идет об аффинных пространствах над комплексным полем. Она не верна уже для комплексной функции вещественной переменной[1]). Рассмотрим, например, комплексную функцию $x\to e^{2i\pi x}$, определенную на отрезке $[0, 1]$ из $\mathbb{R}$. Эта функция принимает одно и то же значение при $x=0$ и $x=1$. Если бы формула конечных приращений была верна в виде (III, 2; 2), то должна была бы существовать точка c интервала $]0, 1[$, в которой производная рассматриваемой комплексной функции

[1]) То есть отображения прямой $\mathbb{R}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, где $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ рассматриваются как векторные пространства размерности 1 и 2 над полем вещественных чисел.

обращалась бы в нуль. Однако ее производная — функция $x \to 2i\pi e^{2i\pi x}$ — нигде в нуль не обращается.

Приведем формулу конечных приращений для общего случая в форме, несколько отличной от предыдущей:

Теорема 13. *Пусть f — непрерывное отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Тогда, если отрезок $[x, x+\vec{h}]$ целиком принадлежит Ω и если f имеет производное отображение в каждой точке открытого интервала $]x, x+\vec{h}[$ и его норма не превосходит M, то имеет место неравенство*

$$\|\overrightarrow{f(x+\vec{h})-f(x)}\| \leqslant M\|\vec{h}\|. \tag{III, 5; 1}$$

Доказательство. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Пусть f — отображение отрезка $[0, 1]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в аффинное нормированное пространство F и g — вещественная функция на отрезке $[0, 1]$. Предположим, что функции f и g непрерывны на замкнутом отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы на открытом интервале $]0, 1[$. Если при этих условиях имеет место неравенство*

$$\|\overrightarrow{f'(x)}\| \leqslant g'(x) \quad \text{для} \quad 0<x<1, \tag{III, 5; 2}$$

то справедливо также неравенство

$$\|\overrightarrow{f(1)-f(0)}\| \leqslant g(1)-g(0). \tag{III, 5; 3}$$

Докажем эту лемму. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через A_ε множество точек x интервала $[0, 1]$, для которых

$$\|\overrightarrow{f(x)-f(0)}\| \leqslant g(x)-g(0)+\varepsilon x+\varepsilon. \tag{III, 5; 4}$$

Функция

$$x \to \|\overrightarrow{f(x)-f(0)}\| - g(x)+g(0)-\varepsilon x-\varepsilon \tag{III, 5; 4$_2$}$$

непрерывна. Множество A_ε точек, в которых эта функция $\leqslant 0$, замкнуто. В частности, A_ε содержит свою точную верхнюю грань β, которая тем самым является максимумом. Заметим, что β не может быть $=0$. В самом деле, точка $x=0$ принадлежит множеству A_ε, так как функция (III, 5; 4_2) при $x=0$ принимает значение $-\varepsilon<0$. Из непрерывности f и g следует, что A_ε содержит некоторую окрестность нуля. Однако неравенство $0<\beta<1$ также невозможно. Действительно, по определению производной (формула (III, 3; 13)), если $0<\beta<1$, то существует число $\delta > 0$, при котором справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}&\|\overrightarrow{f(\beta+\delta)-f(\beta)}\| \leqslant \|\overrightarrow{f'(\beta)}\|\delta+\frac{\varepsilon}{2}\delta \leqslant g'(\beta)\delta+\frac{\varepsilon}{2}\delta,\\ &g(\beta+\delta)-g(\beta) \geqslant g'(\beta)\delta-\frac{\varepsilon}{2}\delta,\end{aligned} \qquad \text{(III, 5; 5)}$$

откуда

$$\|\overrightarrow{f(\beta+\delta)-f(\beta)}\| \leqslant g(\beta+\delta)-g(\beta)+\varepsilon\delta. \qquad \text{(III, 5; 6)}$$

Однако, поскольку $\beta \in A_\varepsilon$, то

$$\|\overrightarrow{f(\beta)-f(0)}\| \leqslant g(\beta)-g(0)+\varepsilon\beta+\varepsilon, \qquad \text{(III, 5; 6}_2\text{)}$$

а, следовательно, после сложения,

$$\|\overrightarrow{f(\beta+\delta)-f(0)}\| \leqslant g(\beta+\delta)-g(0)+\varepsilon(\beta+\delta)+\varepsilon. \qquad \text{(III, 5; 6}_3\text{)}$$

Отсюда следует, что $\beta+\delta \in A_\varepsilon$, что невозможно, поскольку β является максимумом для множества A_ε.

Таким образом, $\beta=1$. При этом (III, 5; 6_2) запишется в виде

$$\|\overrightarrow{f(1)-f(0)}\| \leqslant g(1)-g(0)+2\varepsilon. \qquad \text{(III, 5; 6}_4\text{)}$$

Так как это неравенство справедливо при любом $\hat{\varepsilon}$, отсюда следует справедливость неравенства (III, 5; 3), и лемма полностью доказана.

Замечания к лемме. 1°) Вместо того чтобы предполагать функции f и g дифференцируемыми, можно ограничиться дифференцируемостью справа и соответственно условием $\|\vec{f}'_п\| \leqslant g'_п$. Это видно непосредственно из доказательства. Если заменить $f(x)$, $g(x)$ на $-f(1-x)$, $-g(1-x)$, то можно обойтись дифференцируемостью слева.

2°) Предположим сверх того, что в интервале $]0, 1[$ имеется хотя бы одна точка c, в которой выполняется строгое неравенство $\|\overrightarrow{f'_п(c)}\| < g'_п(c)$. Тогда $\|\overrightarrow{f(1)-f(0)}\| < g(1)-g(0)$. В самом деле, если $\delta = g'_п(c) - \|\overrightarrow{f'_п(c)}\| > 0$, то для достаточно малого $h > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}&\|\overrightarrow{f(c+h)-f(c)}\| \leqslant \|\overrightarrow{f'_п(c)}\|h+\frac{1}{3}h = g'_п(c)-\frac{2}{3}\delta h,\\ &g(c+h)-g(c) \geqslant g'_п(c)-\frac{\delta}{3}h,\end{aligned}$$

откуда

$$\|\overrightarrow{f(c+h)-f(c)}\| \leqslant g(c+h)-g(c)-\frac{\delta}{3}h < g(c+h)-g(c). \tag{III, 5; 6$_5$}$$

Однако лемма, примененная к интервалам $[0, c]$, $[c+h, 1]$ вместо интервала $[0, 1]$, дает

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{f(c)-f(0)}\| \leqslant g(c)-g(0), \\ &\|\overrightarrow{f(1)-f(c+h)}\| \leqslant g(1)-g(c+h). \end{aligned} \tag{III, 5; 6$_6$}$$

Результат получается сложением (III, 5; 6_5) и (III, 5; 6_6).

3°) Если функция f также вещественна, то можно предполагать, что она всюду на $[0, 1]$ имеет производную, конечную или равную $-\infty$, и что имеется только неравенство вида $f'_п \leqslant g'_п$. Тогда справедливо неравенство $f(1)-f(0) \leqslant g(1)-g(0)$, а если хотя бы в одной точке $c \in]0, 1[$ имеет место строгое неравенство $f'_п(c) < g'_п(0)$, то $f(1)-f(0) < g(1)-g(0)$.

4°) Отсюда вытекают обобщения, указанные в замечаниях после теорем 4, 5, 7. Рассмотрим теорему 4 (Ролля), из которой следуют остальные. Неравенство $f'_п(x) < 0$ не может выполняться всюду. В самом деле, если положить $g=0$, то $f(1)-f(0) < 0$, что противоречит условию. По той же причине не может всюду выполняться и неравенство $f'_п(x) > 0$. Следовательно, существует точка c_1, в которой $f'_п(c_1) \leqslant 0$, и точка c_2, где $f'_п(c_2) \geqslant 0$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим отображение Φ: $t \to f(x+t\vec{h})$ отрезка $[0, 1]$ в F, введенное при доказательстве теоремы 13А. Его производная записывается в виде

$$\overrightarrow{\Phi'(t)} = f'(x+t\vec{h})\,\vec{h}. \tag{III, 5; 7}$$

Отсюда вытекает, что в условиях теоремы норма этой производной не превосходит $M\|\vec{h}\|$. Если теперь применить лемму, выбирая в качестве g линейную функцию $t \to M\|\vec{h}\|t$, то получим неравенство (III, 5; 1).

Теорема о конечных приращениях допускает следующее интересное дополнение:

Следствие 1. *Пусть L — линейное непрерывное отображение $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Тогда при условиях теоремы* 13 *имеет место* *неравенство*

$$\|\overrightarrow{f(x+\vec{h})-f(x)-L\vec{h}}\| \leqslant \omega \|\vec{h}\|, \qquad \text{(III, 5; 8)}$$

где ω — точная верхняя грань величины $\|f'(\xi)-L\|$ при ξ, изменяющемся в интервале $]x, x+h[$. Часто предполагают, что функция f имеет производную в x, и тогда полагают $L=f'(x)$.

Доказательство. Достаточно применить теорему к функции $\xi \to \overrightarrow{f(\xi)-L\cdot(\xi-x)}$, производная которой в точке ξ равна $f'(\xi)-L$.

Следствие 2. *Если Ω является открытым выпуклым*[1]) *множеством аффинного нормированного пространства E и если f есть дифференцируемое отображение Ω в F, производная которого в каждой точке Ω по норме не превосходит некоторой постоянной M, то функция f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывна.*

Доказательство. Из выпуклости множества Ω следует, что если x' и x'' — любые две точки Ω, то весь отрезок $[x', x'']$ принадлежит Ω. Следовательно, к нему можно применить формулу конечных приращений, и мы получим неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x')-f(x'')}\| \leqslant M\|x'-x''\|, \qquad \text{(III, 5; 9)}$$

чем и доказывается теорема.

Следствие 3. *Пусть f — дифференцируемое отображение аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Предположим, кроме того, что его производная f' является равномерно непрерывным отображением пространства E в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. При этих условиях функция $x \to \dfrac{\overrightarrow{f(x+\vec{h})-f(x)}-f'(x)\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$ равномерно сходится к $\vec{0}$ при $\vec{h} \neq \vec{0}$, стремящемся к $\vec{0}$.*

Доказательство. В силу предположения о равномерной непрерывности производной f', по заданному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta > 0$, что из неравенства $\|\overrightarrow{x'-x''}\| \leqslant \eta$ будет следовать неравенство $\|f'(x')-f'(x'')\| \leqslant \varepsilon$. Но тогда, как только $\|\vec{h}\| \leqslant \eta$, величина ω, входящая в формулу (III, 5; 8), соответствующую $L=f'(x)$, будет по норме не больше ε, что и доказывает высказанное утверждение.

---

[1]) Условие выпуклости весьма существенно.

Замечания. 1°) Пусть E — поле скаляров. Тогда, согласно следствию 3, функция $x \to (f(x+\vec{h})-f(x))/\|\vec{h}\|$ сходится равномерно к производной функции f' при $\vec{h} \neq \vec{0}$, стремящемся к $\vec{0}$. В этом случае говорят, что f *равномерно дифференцируема*.

2°) Эту теорему часто применяют в следующем случае. Предположим, что f определена лишь в открытом множестве Ω из E (возможно, на полуоткрытом или замкнутом интервале, если $E=\mathbb{R}$). Тогда функция $x \to \dfrac{f(x+\vec{h})-f(x)-f'(x)\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$, очевидно, не определена на всем множестве Ω. Ограничимся рассмотрением множества значений $\vec{h}$, норма которых не превосходит некоторого фиксированного числа $\delta > 0$. Тогда все рассматриваемые функции будут определены на одном и том же открытом множестве Ω_δ точек из E, расстояние которых до $\complement\,\Omega$ больше δ. Если производная f' равномерно непрерывна, то отсюда получаем, что на множестве Ω_δ функция $x \to \dfrac{f(x+\vec{h})-f(x)-f'(x)\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$ равномерно сходится к $\vec{0}$, когда $\vec{h}\neq\vec{0}$ стремится к $\vec{0}$.

Теорема 14. *Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E. Пусть c — некоторая точка Ω и Ω_0 — дополнение к c в Ω. Пусть f — непрерывное отображение Ω в F, всюду дифференцируемое в Ω_0. Если производная $f'(x)$ стремится к некоторому пределу L в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})$ при $x \in \Omega_0$, стремящемся к c, то f дифференцируема в точке c и ее производная в точке c является линейным непрерывным отображением L.*

Доказательство. Достаточно применить к $x=c$ неравенство (III, 5; 8). Результат вытекает из того, что, в силу высказанных предположений, ω стремится к 0, когда $\vec{h}$ стремится к $\vec{0}$. Теперь видно, почему в теореме 13 и ее следствии 1 было существенным не предполагать f дифференцируемой на концах интервала.

Полная дифференцируемость и частная дифференцируемость

Теорема 15. *Пусть E_1, E_2, F — аффинные нормированные пространства, f — отображение открытого множества Ω пространства $E_1 \times E_2$ в F. Для того чтобы отображение f было* *непрерывно дифференцируемым в Ω, необходимо и достаточно, чтобы оно имело частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, непрерывные в Ω.*

Доказательство. Если отображение f дифференцируемо в множестве Ω, то из теоремы 9 следует существование частных производных и формула (III, 3; 29). Кроме того, неравенства (II, 13; 28) и (II, 13; 30) говорят о том, что если линейное непрерывное отображение u пространства $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в $\vec{F}$ представимо по формуле (II, 13; 26) в виде суммы двух линейных непрерывных отображений u_1, u_2 пространств $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ соответственно в $\vec{F}$, то

$$\begin{gathered} \|u_1\| \leqslant \|u\|, \quad \|u_2\| \leqslant \|u\|, \\ \|u\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|. \end{gathered} \tag{III, 5; 10}$$

Если отображение f непрерывно дифференцируемо, то при x, стремящемся к x_0, норма $\|f'(x) - f'(x_0)\|$ стремится к 0 и из первого неравенства (III, 5; 10) следует, что $\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right\|$ $(i=1, 2)$ стремится к 0, а это означает, что частные производные f непрерывны.

Обратно, пусть существуют частные производные функции f. Мы уже знаем, что отсюда еще не следует существование ее полной производной[1]) (пример (III, 3; 9)). Однако существование *непрерывных* частных производных влечет за собой существование и непрерывность полной производной (а значит, и непрерывность f).

В самом деле, пусть заданы $\vec{h}_1 \in \vec{E}_1$ и $\vec{h}_2 \in \vec{E}_2$. Если $a = (a_1, a_2) \in \Omega$, то, поскольку множество Ω открыто, существует такое число $\rho > 0$, что при $\|\vec{h}_1\| \leqslant \rho$, $\|\vec{h}_2\| \leqslant \rho$ точка $(a_1 + \vec{h}_1, a_2 + \vec{h}_2) \in \Omega$. При этом

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{f(a_1 + \vec{h}_1, a_2 + \vec{h}_2) - f(a_1, a_2)} = \\ &\quad = \overrightarrow{f(a_1 + \vec{h}_1, a_2 + \vec{h}_2) - f(a_1 + \vec{h}_1, a_2)} + \overrightarrow{f(a_1 + \vec{h}_1, a_2) - f(a_1, a_2)}. \end{aligned} \tag{III, 5; 11}$$

[1]) И даже непрерывность f.

Применим следствие 1 теоремы 13 к непрерывно дифференцируемой функции $x_2 \to f(a_1+\vec{h}_1, x_2)$ с $L = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$:

$$\overrightarrow{f(a_1+\vec{h}_1, a_2+\vec{h}_2) - f(a_1+\vec{h}_1, a_2)} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\vec{h}_2 + \vec{\omega}\|\vec{h}_2\|, \tag{III, 5; 12}$$

где

$$\|\vec{\omega}\| \leqslant \sup_{0<\theta<1}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+\vec{h}_1, a_2+\theta\vec{h}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right\|. \tag{III, 5; 13}$$

Если $\vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2)$ стремится к $\vec{0}$, то в силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ в точке (a_1, a_2) последнее выражение стремится к 0.

С другой стороны, по самому определению производного отображения (III, 3; 13)

$$\overrightarrow{f(a_1+\vec{h}_1, a_2) - f(a_1, a_2)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\vec{h}_1 + \vec{\alpha}\|\vec{h}_1\|, \tag{III, 5; 14}$$

где $\vec{\alpha}$ стремится к $\vec{0}$ вместе с $\vec{h}_1$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{f(a_1+\vec{h}_1, a_2+\vec{h}_2) - f(a_1, a_2)} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\vec{h}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\vec{h}_2\right) + (\vec{\alpha}\|\vec{h}_1\| + \vec{\omega}\|\vec{h}_2\|),\end{aligned} \tag{III, 5; 15}$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\omega}$ стремятся к $\vec{0}$ вместе с $\vec{h}$.

Первая скобка определяет линейное непрерывное отображение u пространства $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ в пространство $\vec{F}$ с помощью линейных отображений u_1 и u_2 пространств $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в $\vec{F}$. Вторая скобка по норме не превосходит $(\|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\omega}\|)\|\vec{h}\|$, где $\|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\omega}\|$ стремится к 0 вместе с $\|\vec{h}\|$. Следовательно, f имеет полную производную $f'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2; \vec{F})$ в точке a, определяемую с помощью $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(\vec{E}_1; \vec{F})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(\vec{E}_2; \vec{F})$.

Покажем, что из непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ следует непрерывность f'. Если x стремится к x_0 в Ω, то $\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right\|$ стремится к 0 $(i = 1, 2)$, и тогда из второго неравенства (III, 5; 10) следует, что $\|f'(x) - f'(x_0)\|$ стремится к 0, чем и заканчивается доказательство.

Замечания. 1°) Непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ и только *существование* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ достаточны для существования f', как это видно непосредственно из доказательства (но не достаточны для непрерывности f').

2°) Теорема, доказанная для произведения двух пространств E_1 и E_2, очевидно, справедлива для произведения n пространств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (доказать это можно или непосредственно, или по индукции). Кроме того, непрерывность всех частных производных, кроме, может быть, одной, и только существование этой производной достаточны для того, чтобы повлечь за собой существование полной производной.

3°) Пользуясь теми же самыми неравенствами (III, 5; 10), можно показать, что, если функция f зависит от параметра λ, пробегающего некоторое топологическое пространство Λ, и если $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda)$ непрерывно зависят от x_1, x_2, λ, то тоже самое верно и для $f'(x_1, x_2, \lambda)$.

Следствие 1. *Пусть E, F — аффинные пространства, причем пространство E конечномерно и в нем выбрана система координат 0, $(\vec{e}_j)_{j\in J}$. Для того чтобы отображение f открытого множества Ω из E в F было непрерывно дифференцируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно имело частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, непрерывные в Ω.*

Результат вытекает из того, что введение системы координат отождествляет E с $\mathbb{K}^J$.

Сказанное выше объясняет, почему в математических курсах для применения теоремы о сложной функции (теорема 11) всегда требуют, чтобы рассматриваемые функции имели непрерывные частные производные. В действительности такое предположение слишком сильно, поскольку оно влечет за собой существование и непрерывность полной производной, в то время как требуется установить лишь ее существование. Однако непрерывность частных производных обеспечивает существование полной производной, а одно лишь существование их этого обеспечить не может.

Следствие 2. *Если, кроме того, в условиях следствия 1 пространство F конечномерно и в нем выбрана система координат 0, $(\vec{f}_i)_{i\in I}$, то отображение f, определенное функциями F_i $(i\in I)$ переменных x_j $(j\in J)$* [1]*, непрерывно дифференци-*

---

[1] Обозначения формулы (III, 3; 16).

руемо тогда и только тогда, когда функции F_i имеют непрерывные обычные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

§ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть f — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Если это отображение всюду дифференцируемо, то его производная функция f' является отображением Ω в векторное нормированное пространство $\mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F})$. Естественно изучить, будет ли в свою очередь дифференцируемым это отображение. Если это так, то его производная в точке a, обозначаемая $f''(a)$, будет элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E};\ \mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F}))$, и если такая производная существует всюду в Ω, то производная функция f'': $x \to f''(x)$ является отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E};\ \mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F}))$.

Пусть теперь $\vec{X}$ — некоторый вектор из $\vec{E}$. По определению $f''(a)$, $f''(a)\vec{X}$ является элементом $\mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F})$, т. е. линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Если взять другой вектор $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, то можно говорить о $(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}$, являющемся вектором из $\vec{F}$. Дадим сейчас иную интерпретацию этому вектору.

Для фиксированного $\vec{Y}$ отображение $u \to u\vec{Y}$ является линейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F})$ в $\vec{F}$ (теорема 54, гл. II). Следовательно, согласно следствию 1 из теоремы 11, это отображение перестановочно с частной производной $D_{\vec{X}}$ вдоль вектора $\vec{X}$. Иначе говоря:

$$\left(\left(D_{\vec{X}}f'\right)(a)\right)\vec{Y} = \left(D_{\vec{X}}\left(f'(x)\vec{Y}\right)\right)_{x=a} \in \vec{F}, \qquad \text{(III, 6; 1)}$$

где правая часть существует каждый раз, когда существует левая часть равенства. Однако если существует $f''(a)$, то $D_{\vec{X}}f'(a)$ является не чем иным, как $f''(a)\vec{X}$, а, следовательно, левая часть является рассмотренным выше вектором $(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}$. С другой стороны, $f'(x)\vec{Y}$ — это $\overrightarrow{D_{\vec{Y}}f}(x)$, поэтому правая часть существует и равна $\left(\overrightarrow{D_{\vec{X}}\left(D_{\vec{Y}}f\right)}\right)(a)$.