руемо тогда и только тогда, когда функции F_i имеют непрерывные обычные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

§ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть f — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Если это отображение всюду дифференцируемо, то его производная функция f' является отображением Ω в векторное нормированное пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Естественно изучить, будет ли в свою очередь дифференцируемым это отображение. Если это так, то его производная в точке a, обозначаемая $f''(a)$, будет элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))$, и если такая производная существует всюду в Ω, то производная функция f'': $x \to f''(x)$ является отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}))$.

Пусть теперь $\vec{X}$ — некоторый вектор из $\vec{E}$. По определению $f''(a)$, $f''(a)\vec{X}$ является элементом $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, т. е. линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Если взять другой вектор $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, то можно говорить о $(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}$, являющемся вектором из $\vec{F}$. Дадим сейчас иную интерпретацию этому вектору.

Для фиксированного $\vec{Y}$ отображение $u \to u\vec{Y}$ является линейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ в $\vec{F}$ (теорема 54, гл. II). Следовательно, согласно следствию 1 из теоремы 11, это отображение перестановочно с частной производной $D_{\vec{X}}$ вдоль вектора $\vec{X}$. Иначе говоря:

$$\left(\left(D_{\vec{X}}f'\right)(a)\right)\vec{Y} = \left(D_{\vec{X}}(f'(x)\vec{Y})\right)_{x=a} \in \vec{F}, \qquad \text{(III, 6; 1)}$$

где правая часть существует каждый раз, когда существует левая часть равенства. Однако если существует $f''(a)$, то $D_{\vec{X}}f'(a)$ является не чем иным, как $f''(a)\vec{X}$, а, следовательно, левая часть является рассмотренным выше вектором $(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}$. С другой стороны, $f'(x)\vec{Y}$ — это $\overrightarrow{D_{\vec{Y}}f}(x)$, поэтому правая часть существует и равна $\overrightarrow{\left(D_{\vec{X}}\left(D_{\vec{Y}}f\right)\right)}(a)$.

Окончательно, если существует $f''(a)$, то существует $\overrightarrow{D_{\vec{X}}\left(D_{\vec{Y}}f\right)}(a)$ и

$$(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}=\overrightarrow{D_{\vec{X}}\left(D_{\vec{Y}}f\right)}(a). \qquad (\mathrm{III},6;2)$$

Правую часть называют также частной производной второго порядка $\overrightarrow{D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}f}(a)=\overrightarrow{D^2_{\vec{X},\vec{Y}}f}(a)$ (конечно, при частном дифференцировании $D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}$ сначала вычисляют частную производную $D_{\vec{Y}}$, а затем частную производную $D_{\vec{X}}$).

Впрочем, согласно теореме 54_2 гл. II, линейное непрерывное отображение $\vec{E}$ в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})$ можно отождествить с билинейным непрерывным отображением $\vec{E}\times\vec{E}$ в $\vec{F}$. Согласно определению этого отождествления, это означает, что линейному непрерывному отображению U пространства $\vec{E}$ в $\mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F})$ ставится в соответствие билинейное непрерывное отображение u пространства $\vec{E}\times\vec{E}$ в $\vec{F}$, определенное равенством

$$u(\vec{X},\ \vec{Y})=(U\vec{X})\cdot\vec{Y}\,^{1)}. \qquad (\mathrm{III},6;3)$$

Вторая производная часто рассматривается именно в этой форме.

В этом случае выражение $(f''(a)\vec{X})\cdot\vec{Y}$ может быть записано в виде $f''(a)(\vec{X},\ \vec{Y})$, $f''(a)$ становится элементом пространства $\mathscr{L}_2(\vec{E},\ \vec{E};\ \vec{F})$ или $\mathscr{L}_2(\vec{E}^2;\ \vec{F})$ билинейных непрерывных отображений $\vec{E}\times\vec{E}=\vec{E}^2$ в $\vec{F}$, и если $f''(x)$ существует для всех $x\in\Omega$, то f'': $x\to f''(x)$ является функцией, определенной на $\Omega\subset E$, со значениями в $\mathscr{L}_2(\vec{E}^2;\ \vec{F})$. При этом (III, 6; 2) принимает вид

$$f''(a)(\vec{X},\ \vec{Y})=\overrightarrow{D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}f}(a), \qquad (\mathrm{III},6;3_2)$$

где правая часть существует, если только существует левая, т. е. существует $f''(a)$ [2].

---

[1]) Если $\vec{E}_1\neq\vec{E}_2$, то имеется лишь единственный возможный способ отождествления $\mathscr{L}(\vec{E}_1;\mathscr{L}(\vec{E}_2;\vec{F}))$ с $\mathscr{L}_2(\vec{E}_1,\vec{E}_2;\vec{F})$. Поскольку здесь $\vec{E}_1=\vec{E}_2=\vec{E}$, то возможны два варианта отождествления, и мы выбрали один из них.

[2]) Напомним еще раз, что существование $f''(a)$ влечет за собой существование f' если и не во всем Ω, то по крайней мере в некоторой окрестности точки a.

Определение. Билинейное отображение u произведения $\vec{E} \times \vec{E}$ в векторное пространство $\vec{F}$ называется *симметричным*, если, каковы бы ни были элементы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ из $\vec{E}$, мы имеем:

$$u(\vec{X}, \vec{Y}) = u(\vec{Y}, \vec{X}). \qquad \text{(III, 6; 4)}$$

Теорема 16. *Пусть f — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Предположим, что оно имеет вторую производную $f''(a)$ в точке $a \in \Omega$. Тогда $f''(a)$ является билинейным непрерывным симметричным отображением $\vec{E} \times \vec{E}$ в $\vec{F}$:*

$$f''(a)(\vec{X}, \vec{Y}) = f''(a)(\vec{Y}, \vec{X}). \qquad \text{(III, 6; 5)}$$

Если $E = \mathbb{K}^n$, то, выбирая в качестве $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ векторы базиса, получаем известное соотношение

$$\frac{\overrightarrow{\partial^2 f}}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\overrightarrow{\partial^2 f}}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\vec{A} = \overrightarrow{f(a + t(\vec{X} + \vec{Y})) - f(a + t\vec{X}) - f(a + t\vec{Y}) + f(a)} \in \vec{F}. \qquad \text{(III, 6; 5}_2\text{)}$$

Предположим, что $a \in \Omega$, $\vec{X} \in \vec{E}$ и $\vec{Y} \in \vec{E}$ фиксированы, и заставим скаляр $t \neq 0$ стремиться к 0. Предположим также, что $\vec{X} \neq \vec{0}$ и $\vec{Y} \neq \vec{0}$, так как в противном случае (III, 6; 5) очевидно. Поскольку множество Ω открыто, оно содержит некоторый шар с центром в точке a некоторого радиуса $\rho > 0$. Мы можем ограничиться такими значениями t, $|t| < \frac{\rho}{\|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|}$, при которых точки a, $a + t\vec{X}$, $a + t\vec{Y}$, $a + t(\vec{X} + \vec{Y})$ находятся в этом шаре, а, следовательно, и в Ω. В силу выпуклости шара, множеству Ω будет принадлежать весь отрезок, соединяющий эти точки, и мы сможем применить формулу конечных приращений (теорема 13).

Выражение $\vec{A}$ можно записать в виде разности

$$\vec{A} = \vec{g}(\vec{X}) - \vec{g}(\vec{0}), \qquad \text{(III, 6; 6)}$$

где $\vec{g}$ — отображение из $\vec{E}$ в $\vec{F}$, определенное в шаре $\{\vec{\xi}; \|\vec{\xi}\| < \|\vec{X}\|\}$ по формуле

$$\vec{g}(\vec{\xi}) = \overrightarrow{f(a+t(\vec{\xi}+\vec{Y})) - f(a+t\vec{\xi})} \in \vec{F} \quad (a,\ \vec{Y},\ t \text{ фиксированы}). \tag{III, 6; 7}$$

Функция g дифференцируема, и ее производная имеет вид

$$g'(\xi) = tf'(a+t(\vec{\xi}+\vec{Y})) - tf'(a+t\vec{\xi}). \tag{III, 6; 8}$$

К ней можно применить следствие 1 теоремы 13. Надо только выбрать подходящим образом L. Рассуждения будут носить интуитивный характер. Так как

$$\vec{g}(\vec{X}) - \vec{g}(\vec{0}) \approx g'(0)\vec{X} \approx t(f'(a+t\vec{Y}) - f'(a))\vec{X} \approx t^2(f''(a)\vec{Y})\cdot\vec{X}, \tag{III, 6; 9}$$

то положим

$$L = t^2(f''(a)\vec{Y}) \in \mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{F}). \tag{III, 6; 10}$$

Тогда формула (III, 5; 8) дает

$$\vec{A} = (\vec{g}(\vec{X}) - \vec{g}(\vec{0})) = L\vec{X} + \vec{\omega}\|\vec{X}\|, \tag{III, 6; 11}$$

где $\vec{\omega} \in \vec{F}$ оценивается по норме следующим образом:

$$\|\vec{\omega}\| \leqslant \sup_{\vec{\xi}\in]\vec{0},\vec{X}[} \|g'(\xi) - L\| =$$

$$= \sup_{\vec{\xi}\in]\vec{0},\vec{X}[} \|tf'(a+t(\xi+Y)) - tf'(a+t\xi) - t^2(f''(a)\vec{Y})\|. \tag{III, 6; 12}$$

Применим к f' определение производной (III, 3; 13):

$$\begin{aligned} f'(a+t(\vec{\xi}+\vec{Y})) &= f'(a) + f''(a)(t(\vec{\xi}+\vec{Y})) + \alpha\|t(\vec{\xi}+\vec{Y})\|, \\ f'(a+t\vec{\xi}) &= f'(a) + f''(a)t\vec{\xi} + \beta\|t\vec{\xi}\|, \end{aligned} \tag{III, 6; 13}$$

где при фиксированных a, $\vec{X}$, $\vec{Y}$ и $\vec{\xi} \in]\vec{0}, \vec{X}[$ функции $\alpha = \alpha(t, \vec{\xi})$ и $\beta = \beta(t, \vec{\xi})$ стремятся равномерно к 0 в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ при t, стремящемся к 0. Подставляя в (III, 6; 12), получаем

$$\|\omega\| \leqslant t^2 \sup_{\vec{\xi}\in]\vec{0},\vec{X}[} \|\alpha(\vec{\xi}+\vec{Y}) + \beta\vec{\xi}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\vec{\xi}\in]\vec{0},\vec{X}[} t^2[(\|\alpha\| + \|\beta\|)(\|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|)], \tag{III, 6; 14}$$

где последняя скобка стремится к 0 вместе с t. Учитывая значение L, из (III, 6; 11) теперь получаем, что $\frac{\vec{A}}{t^2}$ стремится к $(f''(a)\vec{Y})\cdot\vec{X}=f''(a)(\vec{Y},\vec{X})$ при t, стремящемся к 0.

Так как $\vec{A}$ симметрично относительно $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, то таким же будет предел $\frac{\vec{A}}{t^2}$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) В видоизмененной форме

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}f}(a)=\overrightarrow{D_{\vec{Y}}D_{\vec{X}}f}(a) \qquad \text{(III, 6; 17)}$$

получаем соотношение, в которое входит лишь сужение f на пересечение множества Ω с линейным многообразием, проходящим через a параллельно векторам $\vec{X}$, $\vec{Y}$. Поэтому нет необходимости предполагать само f дважды дифференцируемым. *Достаточно предполагать, что сужение f на это многообразие имеет вторую производную в точке a.*

2°) Имеется вариант этой теоремы, в котором существование $f''(a)$ не предполагается, но в котором говорится, что *если $\overrightarrow{D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}f}$ и $\overrightarrow{D_{\vec{Y}}D_{\vec{X}}f}$ существуют в каждой окрестности точки a и непрерывны в a, то они равны в a.*

Такая формулировка не сильнее и не слабее того, что мы привели, но имеется различие: если мы возьмем для простоты $\vec{E}=\mathbb{R}^2$, то существование полной второй производной в точке влечет за собой существование $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial y\,\partial x}$ в этой точке, но из него не следует ни их существование в ее окрестности, ни их непрерывность. Обратно, непрерывность этих частных производных недостаточна для того, чтобы обеспечить существование второй полной производной $\left(\text{включающей в себя еще частные производные } \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\vec{f}}{\partial y^2}\right)$. Известно, что одно только предположение о существовании производных $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial y\,\partial x}$ недостаточно для того, чтобы обеспечить их равенство.

Последовательные производные

Точно таким же образом определяются производные более высоких порядков. Производная порядка m в точке $a\in\Omega$ (которая определена только тогда, когда все производные порядков $\leqslant m-1$ существуют во всей окрестности точки a) может быть отождествлена с некоторым m-линейным отображением $\vec{E}^m$ в $\vec{F}$. Если $f^{(m)}(x)$ существует для каждого $x \in \Omega$, то $f^{(m)}: x \to f^{(m)}(x)$ является отображением множества Ω в пространство $\mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F})$ этих m-линейных непрерывных отображений. Точнее, $f^{(m)}$ определяется следующим образом. Пусть $f^{(m-1)}$ — производная порядка $m-1$, отождествляемая с некоторой функцией на Ω со значениями в $\mathscr{L}_{m-1}(\vec{E}^{m-1}; \vec{F})$. Тогда ее производная в точке a: $(f^{(m-1)})'(a) = f^{(m)}(a)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\mathscr{L}_{m-1}(\vec{E}^{m-1}; \vec{F})$; оно отождествляется с некоторым элементом из $\mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F})$, обозначаемым через $f^{(m)}(a)$, так что

$$f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) = ((f^{(m-1)})'(a)\vec{X}_1) \cdot (\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m). \quad (\text{III}, 6; 18)$$

По индукции теперь доказывается, что:

1°) Если $p \leqslant m$ и если рассматривать $f^{(p)}$ как функцию на Ω со значениями в $\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$, то ее производная $(m-p)$-го порядка в a, если она существует, является элементом пространства $\mathscr{L}_{m-p}(\vec{E}^{m-p}; \mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F}))$. Этот элемент можно отождествлять с некоторым элементом $f^{(m)}(a)$ из $\mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F})$, если он существует. Оба этих элемента существуют одновременно, и при этом

$$(f^{(p)})^{(m-p)}(a) = f^{(m)}(a) \in \mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F}),$$
$$[((f^{(p)})^{(m-p)}(a))(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{m-p})] \cdot (\vec{X}_{m-p+1}, \ldots, \vec{X}_m) =$$
$$= f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) \in \vec{F}. \quad (\text{III}, 6; 19)$$

2°) Если существует $f^{(m)}(a)$, то существует

$$\overrightarrow{D_{\vec{X}_1} D_{\vec{X}_2} \ldots D_{\vec{X}_m} f}(a) \in \vec{F} \text{ и}$$

$$f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) = \overrightarrow{D_{\vec{X}_1} D_{\vec{X}_2} \ldots D_{\vec{X}_m} f}(a) \in \vec{F}. \quad (\text{III}, 6; 20)$$

Определение. m-линейное отображение u пространства $\vec{E} \times \vec{E} \times \ldots \times \vec{E} = \vec{E}^m$ в пространство $\vec{F}$ называется *симметричным*, если при любой перестановке σ: $k \to \sigma_k$ множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ и любой системы векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ из $\vec{E}$ имеет место формула

$$u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_m}) = u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m). \quad (\text{III}, 6; 21)$$

Теорема 16 теперь может быть обобщена на производные произвольных порядков:

Теорема 16_2. *Если отображение f множества $\Omega \subset E$ в пространство F имеет производную порядка m в точке $a \in \Omega$, то эта производная $f^{(m)}(a)$ является m-линейным непрерывным симметричным отображением $\vec{E}^m$ в пространство $\vec{F}$, т. е. для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ и любой системы векторов $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) \in \vec{E}^m$ имеют место равенства*

$$\begin{gathered} f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) = f^{(m)}(a)(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_m}), \\ \overrightarrow{D_{\vec{X}_1} D_{\vec{X}_2} \ldots D_{\vec{X}_m} f}(a) = \overrightarrow{D_{\vec{X}_{\sigma_1}} D_{\vec{X}_{\sigma_2}} \ldots D_{\vec{X}_{\sigma_m}} f}(a). \end{gathered} \tag{III, 6; 22}$$

Доказательство. Эта теорема была доказана для производных второго порядка. Предположим, что она справедлива для производных порядка $\leqslant m-1$, и докажем ее для производных порядка $m \geqslant 3$. Предположим прежде всего, что $\sigma_1 = 1$ и что σ переставляет только числа $2, 3, \ldots, m$. Тогда функции $\overrightarrow{D_{\vec{X}_2} \ldots D_{\vec{X}_m} f}$ и $\overrightarrow{D_{\vec{X}_{\sigma_2}} \ldots D_{\vec{X}_{\sigma_m}} f}$, определенные в Ω, со значениями в $\vec{F}$ по предположению индукции совпадают. Следовательно, их производные в a вдоль вектора $\vec{X}_1 = \vec{X}_{\sigma_1}$ одинаковы и мы имеем равенство (III, 6; 22).

Предположим теперь, что $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$ и что σ сохраняет каждое из чисел $3, 4, \ldots, m$. Тогда $\overrightarrow{D_{\vec{X}_3} \ldots D_{\vec{X}_m} f} = \overrightarrow{D_{\vec{X}_{\sigma_3}} \ldots D_{\vec{X}_{\sigma_m}} f}$ является функцией, определенной в Ω и имеющей первую производную всюду и вторую производную в точке a. Следовательно, к ней можно применить теорему 16 относительно производных вдоль $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ и снова получить (III, 6; 22).

Так как каждая перестановка чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ является композицией перестановок этих двух типов (это очевидно, если $\sigma_1 = 1$; в любой перестановке можно от $1, 2, \ldots, m$ перейти к $1, \sigma_1, \ldots, m$, затем от $1, \sigma_1, \ldots, m$ к $\sigma_1, 1, \ldots, m$ и, наконец, от $\sigma_1, 1, \ldots, m$ к $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$), то теорема будет справедливой в общем случае.

Упражнение. Шаг за шагом можно доказать следующее. Пусть L есть m-линейное непрерывно симметричное отображение $\vec{E}^m$ в $\vec{F}$. Оно определяет некоторое p-линейное непрерывное симметричное отображение L_p пространства $\vec{E}^p$ в пространство $\mathscr{L}_{m-p}(\vec{E}^{m-p}; \vec{F})$.

Тогда k-я производная функция «одночленной» функции $\vec{x} \to L\vec{x}^m$, действующей из $\vec{E}$ в $\vec{F}$, является функцией вида [1])

$$\vec{x} \to m(m-1)\ldots(m-k+1)L_{m-k}\vec{x}^{m-k} \in \mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F}). \quad (\text{III}, 6; 22_2)$$

Полагая $E = F = \mathbb{K}$, получаем элементарную формулу дифференцирования одночленов.

Замечание. Теорема 8_3 (о линейности производной), теорема 8_4 (о дифференцировании функции со значениями в произведении пространств) и следствие 1 теоремы 11 (о перестановочности производной и линейного непрерывного отображения) с помощью индукции по m непосредственно обобщаются на производные порядка m.

Случай, когда $E = \mathbb{K}^n$. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда пространство E конечномерно и в нем выбрана система координат 0, $(\vec{e}_i)_{i \in I}$. Тогда для второй полной производной при $\vec{X} = \sum\limits_{i \in I} X_i\vec{e}_i$ и $\vec{Y} = \sum\limits_{i \in I} Y_i\vec{e}_i$ имеем следующую формулу:

$$f''(a)(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i,\, j \in I} X_iY_jf''(a)(e_i, e_j) = \sum_{i,\, j \in I} X_iY_j \frac{\overrightarrow{\partial^2 f}}{\partial x_i \partial x_j}(a) \in \vec{F}. \quad (\text{III}, 6; 23)$$

Для третьей производной получаем

$$f'''(a)(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \sum_{i,\, j,\, k \in I} X_iY_jZ_k \frac{\overrightarrow{\partial^3 f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a). \quad (\text{III}, 6; 24)$$

Более общо: если $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, то

$$f^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m) = \\ = \sum_j \frac{\overrightarrow{\partial^m f}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}}(a) X_{1,\, j_1} X_{2,\, j_2} \ldots X_{m,\, j_m} \in \vec{F}, \quad (\text{III}, 6; 25)$$

---

[1]) L_m и L_0 по условию совпадают с L, а $\vec{x}^0$ есть $1 \in \mathbb{K}$. Через $L_p\vec{x}^p$ будем обозначать $L_p(\underbrace{\vec{x}, \vec{x}, \ldots, \vec{x}}_{p})$.

где $X_{\alpha,\beta}$ является β-й координатой вектора $\vec{X}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$; $\beta = 1, 2, \ldots, n$) и где j пробегает множество всевозможных отображений $\alpha \to j_\alpha$ множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если $E = \mathbb{K}$ — поле скаляров, то производный вектор порядка m, $\overrightarrow{f^{(m)}(a)} \in \vec{F}$, определенный на стр. 208, связан с производным отображением порядка m, $f^{(m)}(a) \in \mathscr{L}_m(\mathbb{K}^m; \vec{F})$, формулой

$$\overrightarrow{f^{(m)}(a)} = f^{(m)}(a)(1, 1, \ldots, 1). \qquad \text{(III, 6; 25}_2\text{)}$$

Для частных производных можно ввести сокращенные обозначения, объединив одинаковые производные $\frac{\partial}{\partial x_k}$. Пусть $\vec{p}$ [1]) — некоторый элемент из $\mathbb{N}^n$, т. е. система n целых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n \geqslant 0$. Тогда через $\vec{D}^p$ или $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\vec{p}}$ будем обозначать частную производную

$$D^{\vec{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{p_m}. \qquad \text{(III, 6; 26)}$$

Например, если $n = 3$, $\vec{p} = (1, 0, 2)$, то $D^{\vec{p}}$ будет означать производную $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2$. Если $\vec{p} = \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, то $D^{\vec{p}} f = f$. Величина $|\vec{p}| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ называется порядком $\vec{p}$ или порядком частной производной. Если $\vec{q}$ — некоторый другой элемент из $\mathbb{N}^n$, то через $\vec{p} + \vec{q}$ обозначается элемент $\overrightarrow{(p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n)}$, так что $D^{\vec{p}+\vec{q}} f = D^{\vec{p}}(D^{\vec{q}} f)$.

Говорят, что $\vec{p} \geqslant \vec{q}$, если $p_1 \geqslant q_1$, $p_2 \geqslant q_2$, $\ldots$, $p_n \geqslant q_n$ (это некоторое отношение порядка в $\mathbb{N}^n$). В этом случае через $\vec{p} - \vec{q}$ обозначается элемент $(p_1 - q_1, p_2 - q_2, \ldots, p_n - q_n)$ и $\vec{p} = \vec{q} + (\vec{p} - \vec{q})$.

---

[1]) Хотя $\mathbb{N}^n$ не является векторным пространством, удобнее писать $\vec{p}$ вместо p для того, чтобы напомнить, что это не целое число, а система n целых чисел.

В дальнейшем нам понадобятся также следующие обозначения:

$$\vec{p}! = p_1!\, p_2! \ldots p_n!,$$

$$\binom{\vec{p}}{\vec{q}} = \binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}\ldots\binom{p_n}{q_n}^{1)} \quad \text{для} \quad \vec{q} \leqslant \vec{p}, \tag{III, 6; 27}$$

$$\vec{X}^{\vec{p}} = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_n^{p_n} \in \mathbb{K} \quad \text{для} \quad \vec{X} \in \mathbb{K}^n,\ \vec{p} \in \mathbb{N}^n.$$

Определение. *Говорят, что функция f является m раз непрерывно дифференцируемой, или принадлежит классу C^m, в Ω, если она имеет производные порядков $\leqslant m$, непрерывные в Ω. Каждое m раз дифференцируемое в Ω отображение принадлежит по крайней мере классу C^{m-1}.*

Случай произведения пространств. Полная и частная дифференцируемость

Теорема 15 может быть обобщена следующим образом:

Теорема 17. *Для того чтобы отображение f некоторого открытого множества Ω произведения $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в F принадлежало классу C^m, необходимо и достаточно, чтобы оно имело непрерывные в Ω частные производные порядков $\leqslant m$.*

Доказательство. 1°) Поскольку каждый элемент u из $\mathscr{L}(E; F)$ эквивалентен системе элементов u_i пространств $\mathscr{L}(E_i; F)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то тем самым определяется взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{L}(E; F)$ и произведением пространств $\mathscr{L}(E_i; F)$, сохраняющее векторную структуру. С другой стороны, из неравенств $\|u_i\| \leqslant \|u\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следует, что норме в пространстве $\mathscr{L}(E; F)$ соответствует в произведении пространств $\mathscr{L}(E_i; F)$ некоторая норма, эквивалентная одной из их естественных норм. Поэтому, согласно замечанию на стр. 264 (обобщение теоремы 8_4), отображение множества $\Omega \subset E$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ принадлежит классу C^k тогда и только тогда, когда отображения множества Ω в пространства $\mathscr{L}(\vec{E}_i; \vec{F})$, определяющие это отображение, принадлежат классу C^k.

2°) Теорема 17 верна для $m = 1$ (теорема 15). Докажем ее справедливость для любого m методом математической ин-

---

1) Напомним, что $\binom{r}{s} = C_r^s = \dfrac{r!}{s!\,(r-s)!}$.

дукции. Предположим, что она верна для $m \geqslant 2$. Пусть f принадлежит классу C^m. Тогда f' принадлежит классу C^{m-1}. Поскольку f' является отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, определенным отображениями $\partial f/\partial x_i$ множества Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}_i; \vec{F})$, каждое отображение $\partial f/\partial x_i$, согласно 1°), принадлежит классу C^{m-1}. По индуктивному предположению отображение $\partial f/\partial x_i$ имеет непрерывные в Ω частные производные порядка $\leqslant m-1$ и, следовательно, отображение f имеет непрерывные в Ω частные производные порядка $\leqslant m$. Обратно, если отображение f имеет частные производные порядка $\leqslant m$, непрерывные в Ω, то отображения $\partial f/\partial x_i$ существуют и имеют частные производные порядка $\leqslant m-1$, непрерывные в Ω. Поэтому, согласно индуктивному предположению, они принадлежат классу C^{m-1}.

В частности, эти отображения непрерывны, а, следовательно, согласно теореме 15, существует f'. Это — функция в Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, определенная при помощи функций $\partial f/\partial x_i$ на Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}_i; \vec{F})$. Поскольку $\partial f/\partial x_i$ принадлежат классу C^{m-1}, то f', согласно 1°), принадлежит классу C^{m-1} и, следовательно, отображение f принадлежит классу C^m.

Пространства m раз дифференцируемых функций

Обобщая понятия, введенные в конце § 3, мы будем обозначать через $(F^\Omega)_{b;\,m}$ (соответственно через $(F^\Omega)_{cb;\,m}$) пространство m раз дифференцируемых (соответственно m раз непрерывно дифференцируемых) ограниченных вместе с каждой производной порядка $\leqslant m$ отображений множества Ω в F.

Это пространство является аффинным, имеющим присоединенное векторное пространство $(\vec{F}^\Omega)_{b;\,m}$ (соответственно $(\vec{F}^\Omega)_{cb;\,m}$). Его можно считать аффинным нормированным пространством, если в присоединенном векторном пространстве ввести норму

$$|||\vec{f}\,|||_m = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ 0\leqslant k\leqslant m}} (\|f^{(k)}(x)\|), \qquad \text{(III, 6; 27}_2\text{)}$$

где $\|f^{(k)}(x)\|$ — норма в $\mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F})$.

Отсюда видно, зачем введен индекс 1 в обозначениях $(F^\Omega)_{b;\,1}$ и $(F^\Omega)_{cb;\,1}$. В этих обозначениях $(F^\Omega)_b$ (соответственно $(F^\Omega)_{cb}$) можно записать в виде $(F^\Omega)_{b;\,0}$ (соответственно $(F^\Omega)_{cb;\,0}$) и $|||\vec{f}\,|||$ в виде $|||\vec{f}\,|||_0$.

Теорема 17_2. *Отображение, ставящее в соответствие каждой функции f ее производную функцию порядка $k \leqslant m$, есть линейное непрерывное отображение пространства $(\vec{F}^\Omega)_{b;\,m}$ (соответственно $(\vec{F}^\Omega)_{cb;\,m}$) в пространство $\left((\mathscr{L}_k(\vec{E}^k;\ \vec{F}))^\Omega\right)_{b;\,m-k}$ соответственно $\left((\mathscr{L}_k(\vec{E}^k;\ \vec{F}))^\Omega\right)_{cb;\,m-k}$ с нормой $\leqslant 1$.*

Несмотря на несколько пугающую формулировку, утверждение это очевидно.

Очень часто в предыдущих пространствах рассматривают другие эквивалентные нормы, например определяют $|||\vec{f}|||_m$ как $\sum\limits_{k=0}^{m} (\sup\limits_{x\in\Omega} \| f^{(k)}(x)\|)$. Если пространство E n-мерно и если в нем выбрана система координат, то в качестве нормы часто берут числа

$$|||\vec{f}|||_m = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ |\vec{p}|\leqslant m}} \|\overrightarrow{D^{\vec{p}} f(x)}\| \quad \text{или} \quad |||\vec{f}|||_m = \sum_{|\vec{p}|\leqslant m} (\sup_{x\in\Omega} \|\overrightarrow{D^{\vec{p}} f(x)}\|).$$

Производная произведения (формула Лейбница)

Теорема 18. *Пусть E — аффинное нормированное пространство, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{G}$ — векторные нормированные пространства. Пусть B — билинейное непрерывное отображение $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ в $\vec{G}$. Если $\vec{u}_1$ (соответственно $\vec{u}_2$) является m раз дифференцируемым или m раз непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $\Omega \subset E$ в F_1 (соответственно в F_2), то таким же будет отображение $B(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$: $x \to B(\vec{u}_1(x), \vec{u}_2(x))$ множества Ω в G. Производные этой функции вычисляются по формуле Лейбница.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями теоремы 9_2. Тогда формула (III, 4; 22) запишется в виде

$$(B(u_1, u_2))'(x)\vec{X} = B_{\vec{u}_2(x)}(u_1'(x)\vec{X}) + B_{\vec{u}_1(x)}(u_2'(x)\vec{X}) \in \vec{G}, \quad \text{(III, 6; 28)}$$

и, следовательно,

$$(B(u_1, u_2))'(x) = B_{\vec{u}_2(x)} \circ u_1'(x) + B_{\vec{u}_1(x)} \circ u_2'(x) \in \mathscr{L}(\vec{E};\ \vec{G}). \quad \text{(III, 6; 29)}$$

Воспользуемся теперь индукцией по m. При $m = 1$ теорема верна (теорема 12). Предполагая ее справедливой для производной порядка $m - 1$, докажем, что она верна для производной порядка m.

Пусть $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ m раз дифференцируемы или m раз непрерывно дифференцируемы. Тогда $x \to u_1'(x)$ есть $m-1$ раз дифференцируемая или непрерывно дифференцируемая функция со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. С другой стороны, функция $x \to B_{\vec{u}_2(x)}$, определенная на Ω, со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F}_1; \vec{G})$ является композицией m раз дифференцируемой или непрерывно дифференцируемой функции $x \to \vec{u}_2(x)$ из множества Ω в пространство $\vec{F}_2$ и линейного непрерывного отображения $\vec{v}_2 \to B_{\vec{v}_2}$ пространства $\vec{F}_2$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}_1; \vec{G})$. В силу перестановочности производной и линейного непрерывного отображения (следствие 1 теоремы 11), функция $x \to B_{\vec{u}_2(x)}$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F}_1; \vec{G})$ является m раз дифференцируемой или непрерывно дифференцируемой. Поскольку $(U_1, U_2) \to U_2 \circ U_1$ является билинейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}_1) \times \times \mathscr{L}(\vec{F}_1; \vec{G})$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$, индуктивное предположение позволяет утверждать, что $x \to B_{\vec{u}_2(x)} \circ u_1'(x)$ является $m-1$ раз дифференцируемым или непрерывно дифференцируемым отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$. Поскольку то же самое имеет место для отображения $x \to B_{\vec{u}_1(x)} \circ u_2'(x)$, функция $(B(u_1, u_2))'$ является $m-1$ раз дифференцируемой или непрерывно дифференцируемой, а, значит, m раз дифференцируема или непрерывно дифференцируема функция $B(u_1, u_2)$[1]).

В общем случае формула Лейбница является бесполезным усложнением полученного результата; поэтому мы ее приведем

[1]) Обычно E конечномерно, и в нем можно выбрать некоторую систему координат. По теореме 17, для того чтобы показать, что $B(u_1, u_2)$ принадлежит классу C^m, когда u_1 и u_2 принадлежат этому классу, достаточно доказать, что их частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порядка $\leqslant m$ непрерывны. Но это легко проверяется по индукции. Утверждение верно при $m = 1$. Предполагая его справедливость для $m-1$, докажем, что оно верно для $m \geqslant 2$. Имеем: $\frac{\partial}{\partial x_i}(B(\vec{u}_1, \vec{u}_2)) = B\left(\overrightarrow{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}, \vec{u}_2\right) + B\left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\frac{\partial u_2}{\partial x_i}}\right)$. Здесь $\overrightarrow{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}$ и $\vec{u}_2$ имеют непрерывные частные производные порядка $\leqslant m-1$, а, следовательно, по индуктивному предположению такой же будет $B\left(\overrightarrow{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}, \vec{u}_2\right)$. То же самое можно сказать и о функции $B\left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\frac{\partial u_2}{\partial x_i}}\right)$. Но тогда $B(u_1, u_2)$ имеет непрерывные частные производные порядка $\leqslant m$.

лишь для частного случая конечномерного пространства E с системой координат $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Если воспользоваться обозначением (III, 6; 26), то формулу Лейбница можно записать в виде

$$D^{\vec{p}}(B(u_1, u_2)) = \sum_{\vec{q} \leqslant \vec{p}} \binom{\vec{p}}{\vec{q}} B\left(\overrightarrow{D^{\vec{q}} u_1}, \overrightarrow{D^{\vec{p}-\vec{q}} u_2}\right). \qquad \text{(III, 6; 36)}$$

Наиболее важен тот случай, когда $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{G} = \mathbb{K}$ — поле скаляров и $B(u_1, u_2) = u_1 u_2$ — обычное произведение. Тогда

$$D^{\vec{p}} u_1 u_2 = \sum_{\vec{q} \leqslant \vec{p}} \binom{\vec{p}}{\vec{q}} D^{\vec{q}} u_1 D^{\vec{p}-\vec{q}} u_2. \qquad \text{(III, 6; 36}_2\text{)}$$

Применяемые здесь обозначения таковы, что в случае n-мерного пространства формула сохраняет точно такой же вид, как и в случае функции одной переменной.

Доказать эту формулу очень просто. В случае одной переменной ($n = 1$) она записывается в виде

$$(u_1 u_2)^{(m)} = \sum_{k \leqslant m} \binom{m}{k} u_1^{(k)} u_2^{(m-k)}. \qquad \text{(III, 6; 36}_3\text{)}$$

Эта формула известна для $m = 1$ и по индукции легко доказывается для любого m. В самом деле, предположим, что она верна для $m - 1$. Тогда

$$(u_1 u_2)^{(m)} = \left((u_1 u_2)^{(m-1)}\right)' = \left(\sum_{k' \leqslant m-1} \binom{m-1}{k'} u_1^{(k')} u_2^{(m-k'-1)}\right)' =$$

$$= \sum_{k' \leqslant m-1} \left[\binom{m-1}{k'} u_1^{(k'+1)} u_2^{(m-k'-1)} + \binom{m-1}{k'} u_1^{(k')} u_2^{(m-k')}\right] =$$

$$= \sum_{k \leqslant m} u_1^{(k)} u_2^{(m-k)} \left(\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\right) = \sum_{k \leqslant m} \binom{m}{k} u_1^{(k)} u_2^{(m-k)}.$$

Теперь проведем индукцию по числу n переменных. Предположим, что формула доказана для $n - 1$ переменных, и докажем ее справедливость для n. Имеем:

$$D^{\vec{p}}(u_1 u_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} D^{\vec{p}'}(u_1 u_2), \quad \text{где} \quad \vec{p}' = (p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^{n-1}.$$

Функция $D^{\vec{p}'}(u_1u_2)$ для фиксированного x_1 является производной по $n-1$ переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, в то время как $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}$ — производная по первой переменной. Поэтому

$$D^{\vec{p}}(u_1u_2)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\sum_{\vec{q}'\leqslant\vec{p}'}\binom{\vec{p}'}{\vec{q}'}D^{\vec{q}'}u_1D^{\vec{p}'-\vec{q}'}u_2=$$

$$=\sum_{q_1\leqslant p_1}\sum_{\vec{q}'\leqslant\vec{p}'}\binom{p_1}{q_1}\binom{\vec{p}'}{\vec{q}'}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{q_1}D^{\vec{q}'}u_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1-q_1}D^{\vec{p}'-\vec{q}'}u_2=$$

$$=\sum_{\vec{q}\leqslant\vec{p}}\binom{\vec{p}}{\vec{q}}D^{\vec{q}}u_1D^{\vec{p}-\vec{q}}u_2.$$

Теорема 19. *Пусть E, F, G — три аффинных нормированных пространства, Ω и Ω' — открытые множества в E и F соответственно. Пусть f — отображение Ω в Ω', а g — отображение Ω' в G. Если f и g являются m раз дифференцируемыми или m раз непрерывно дифференцируемыми, то таким же будет сложное отображение $h = g\circ f$.*

Доказательство. Теорема верна для производной 1-го порядка (теорема 11 и ее следствие 5). Предполагая ее справедливой для производных порядка $\leqslant m-1$, докажем, что она верна для производных порядка m, $m\geqslant 2$.

Перепишем формулу (III, 4; 1):

$$h'(x)=g'(f(x))\circ f'(x). \qquad \text{(III, 6; 37)}$$

Согласно предположению, функция f дифференцируема m раз, а, следовательно, функция f' дифференцируема $m-1$ раз. С другой стороны, так как функции f и g' обе $m-1$ раз дифференцируемы, то функция $g'\cdot f$: $x\to g'(f(x))$ также $m-1$ раз дифференцируема. Но тогда отображение $x\to f'(x)$ множества Ω в пространство $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})$ и отображение $x\to g'(f(x))$ множества Ω в пространство $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$ дифференцируемы $m-1$ раз, а $(u, v)\to v\circ u$ является билинейным непрерывным отображением $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})\times\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$ в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{G})$ (теорема 54 гл. II). Из теоремы 18 следует, что $x\to g'(f(x))\circ f'(x)$ также $m-1$ раз дифференцируема. Таким образом, отображение h' дифференцируемо $m-1$ раз, а это означает, что отображение h дифференцируемо m раз.

Замечания. 1°) Теоремы 18 и 19 можно было бы доказать, проводя индукцию *одновременно для обеих теорем.*

В самом деле, теорема 19 для числа m опирается на утверждение теоремы 18 только для $m-1$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 18 для $m-1$ следует учесть, что функция $x \to B(u_1(x), u_2(x))$ является композицией функции $x \to (u_1(x), u_2(x))$ класса C^{m-1} и билинейной непрерывной, а, следовательно, бесконечно дифференцируемой функции $(u_1, u_2) \to B(u_1, u_2)$, и, значит, можно воспользоваться теоремой 19 для $m-1$.

Далее, теоремы 18 и 19 доказаны для $m=1$. Отсюда можно получить теорему 19 для $m=2$, а, следовательно, теорему 18 для $m=2$, затем теорему 19 для $m=3$, а, следовательно, теорему 18 для $m=3$, и т. д.

2°) Вычислять последовательные производные функции $h = g \circ f$ можно по явным формулам, но они довольно сложны. Так, например, если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ — векторы из $\vec{E}$, то

$$h''(x)(\vec{X}, \vec{Y}) = g''(f(x))(f'(x)\vec{X}, f'(x)\vec{Y}) + \\ + g'(f(x))(f''(x)(\vec{X}, \vec{Y})) \in \vec{G}. \qquad (III, 6; 38)$$

Если E, F, G — поля скаляров $\mathbb{K}$ и если выбрано $X = Y = 1$, то получается элементарная формула

$$h''(x) = g''(f(x)) f'^2(x) + g'(f(x)) f''(x). \qquad (III, 6; 39)$$

Иногда полезно иметь выражение производной порядка m для функции $h = g \circ f$ в частном случае $E = F = G = \mathbb{K}$. Мы его приведем в теореме 21_3.

§ 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Так как производная $f^{(m)}(a)$ порядка m является m-линейным отображением, то можно вычислить ее значение на системе векторов $(\vec{X}, \vec{X}, \ldots, \vec{X}) \in \vec{E}^m$, определенной одним вектором $\vec{X}$ из $\vec{E}$. Выражение $f^{(m)}(a)(\vec{X}, \vec{X}, \ldots, \vec{X})$ удобно записывать кратко в виде

$$f^{(m)}(a)\vec{X}^m = f^{(m)}(a)(\vec{X}, \vec{X}, \ldots, \vec{X}). \qquad (III, 7; 1)$$

Имеется столько формул Тейлора, сколько существует формул конечных приращений.

Теореме 13А соответствует формула Тейлора, обобщающая теорему 6:

Теорема 20А. *Пусть f — вещественная m раз дифференцируемая функция, определенная на открытом множестве $\Omega \subset E$. Предположим, что замкнутый отрезок $[x, x+\vec{h}]$ пол-*