§ 8. ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть f — отображение множества E в множество F. Тогда, если b — некоторая точка F, можно поставить задачу отыскания множества тех x из E, для которых $f(x)=b$, т. е. задачу отыскания прообраза $f^{-1}(\{b\})$. Поставленная задача называется задачей о *решении уравнения* $f(x)=b$. Пусть теперь f — отображение произведения множеств $E\times F$ в множество G, и пусть c — некоторая точка множества G.

Рассмотрим уравнение

$$f(x,\ y)=c. \qquad \text{(III, 8; 1)}$$

Может случиться, что для заданного x уравнение $f(x,y)=c$ относительно y имеет решение, и притом единственное, при любом заданном значении x. В таком случае это уравнение определяет y как некоторую функцию $g(x)$ переменной x. Эта функция называется *неявной функцией*, определенной предыдущим уравнением. Она характеризуется следующим свойством:

$$f(x,\ g(x))=c. \qquad \text{(III, 8; 2)}$$

Можно еще сказать, что для $(x,y)\in E\times F$ соотношение (III, 8; 2) равносильно соотношению $y=g(x)$.

Естественно, это такие счастливые совпадения случаются редко. Чаще всего для некоторых значений x решения относительно y не существует, для других же значений x имеется несколько решений, а то и бесконечное множество их. Мы изучим следующий частный случай: E, F, G — топологические пространства. Имеется *частное решение* рассматриваемого уравнения: $x=a$, $y=b$. Предлагается выяснить, существует ли и притом единственно ли решение данного уравнения относительно y для x, *достаточно близких к* a, при условии, что это решение достаточно близко к b. Если это так, то можно будет определить неявную функцию $y=g(x)$, исходя из данного уравнения, по *крайней мере в некоторой окрестности точки* $(a,\ b)$. Геометрический смысл рассматриваемой задачи станет особенно понятным, если мы предположим, что каждое из пространств E, F и G является полем вещественных чисел. В этом случае уравнение $f(x,\ y)=0$ определяет некоторую кривую в $\mathbb{R}^2$, и мы хотим выразить эту кривую в обычной форме, представив y как функцию от x по крайней мере в некоторой окрестности точки (a, b) [1]).

---

[1]) Легко видеть, почему такие сужения на окрестности неизбежны: кривая $f(x,y)=0$, вообще говоря, не может быть полностью задана в виде $y=g(x)$.

Существование неявной функции

Теорема 25. *Пусть E — топологическое пространство, F и G — аффинные нормированные пространства, Ω — открытое множество из $E\times F$ и (a,b) — точка Ω. Пусть f — непрерывное отображение Ω в G и $f(a,b)=c$. Предположим, что при каждом фиксированном x функция f имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\in\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ и что частная производная функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ является непрерывным отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$. Предположим, кроме того, что $Q=\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ является обратимым отображением пространства $\vec{F}$ на пространство $\vec{G}$, т. е. является биекцией, имеющей обратную биекцию Q^{-1}, линейную и непрерывную. Предположим, наконец, что F полно. Тогда существуют такие открытые множества A и B в пространствах E и F, содержащие a и b соответственно, что для любого x из A уравнение* (III, 8; 1) *относительно y имеет решение в B, и притом единственное. Это решение y является функцией x, и так определенная функция $y=g(x)$ является непрерывным отображением A в B.*

Доказательство. Напомним сначала бегло условия теоремы. Ищется решение уравнения относительно y, налагаются некоторые ограничения на частную производную по y, пространство F переменной y предполагается полным. Подвергнем уравнение трем последовательным преобразованиям:

1°) Пусть $\vec{\Omega}_1$ — множество точек $(x, \overrightarrow{y-b})$, где $(x,y)\in\Omega$. Положим $y=b+\vec{Y}$ и обозначим через $\vec{f}_1$ отображение множества $\vec{\Omega}_1$ в пространство $\vec{G}$, определенное формулой

$$\overrightarrow{f_1(x, \vec{Y})}=\overrightarrow{f(x, b+\vec{Y})-\vec{c}}\ ^{1)}. \tag{III, 8; 3}$$

Уравнение (III, 8; 1) эквивалентно уравнению

$$\overrightarrow{f_1(x, \vec{Y})}=\vec{0} \tag{III, 8; 4}$$

в окрестности частного решения $(a, \vec{0})$.

[1]) На практике F не обязательно должно быть векторным пространством, в то время как G — почти всегда векторное пространство. Обычно рассматривается уравнение $\vec{f}(x, y)=\vec{0}$. Мы считаем G аффинным пространством, а c произвольным для того, чтобы сохранить симметрию между F и G. Во всяком случае, можно всегда перейти к случаю векторных F и G с $\vec{b}=\vec{0}$ и $\vec{c}=\vec{0}$.

2°) Рассмотрим функцию $\vec{f}_2$, определенную формулой

$$Q^{-1} \circ \vec{f}_1\colon (x, \vec{Y}) \to Q^{-1}(\vec{f}_1(x, \vec{Y})). \qquad \text{(III, 8; 5)}$$

Это некоторое отображение $\vec{\Omega}_1$ в $\vec{F}$, обладающее свойствами, аналогичными свойствам отображения $\vec{f}$. Его частная производная по второй переменной в начале координат, в силу следствия теоремы 11, определяется формулой

$$\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial \vec{Y}}(\vec{a}, \vec{0}) = Q^{-1} \circ Q = I \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F}), \qquad \text{(III, 8; 6)}$$

где I — тождественное отображение. Уравнение (III, 8; 1) эквивалентно новому уравнению

$$\vec{f}_2(x, \vec{Y}) = \vec{0}, \qquad \text{(III, 8; 7)}$$

ибо от (III, 8; 4) к (III, 8; 7) можно перейти с помощью Q^{-1}, а от (III, 8; 7) к (III, 8; 4) с помощью Q.

3°) Рассмотрим, наконец, функцию $\vec{\Phi}$, определенную формулой

$$\vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y}) = \vec{Y} - \vec{f}_2(\lambda, \vec{Y}); \qquad \text{(III, 8; 8)}$$

$\vec{\Phi}$ является отображением $\vec{\Omega}_1$ в $\vec{F}$, обладающим свойствами, аналогичными свойствам $\vec{f}$ всюду, *кроме одной особой точки*: его частное производное отображение по второй переменной в начале координат равно нулю, так как $I - I = 0$. Уравнение (III, 8; 1) теперь эквивалентно уравнению

$$\Phi(\lambda, \vec{Y}) = \vec{Y}, \qquad \lambda = x, \qquad \vec{Y} = \overrightarrow{y - b}, \qquad \text{(III, 8; 9)}$$

которое нужно решать в окрестности $\lambda = a$, $\vec{Y} = \vec{0}$.

Теперь видно, что мы находимся в условиях, напоминающих условия теорем 46 и 46_2 гл. II (*теоремы о неподвижной точке*). Пусть A_1 и $\vec{B}_1$ — такие окрестности точек a и $\vec{0}$ в E и $\vec{F}$ соответственно, что $A_1 \times \vec{B}_1 \subset \vec{\Omega}_1$. Если пространства E и Λ из теоремы 46_2 заменить соответственно на $\vec{B}_1$ и A_1, то функция $\vec{\Phi}$ будет непрерывной и тем более раздельно непрерывной на $A_1 \times \vec{B}_1$. Однако для применения этих теорем нужны условия, которые здесь нельзя непосредственно проверить и которые требуют еще некоторого изменения исходных данных задачи.

1°) Отображение Φ должно быть отображением $A_1 \times \vec{B}_1$ в $\vec{B}_1$; однако оно отображает $A_1 \times \vec{B}_1$ в $\vec{F}$ и не обязательно в $\vec{B}_1$. Именно это вынуждает нас заменить A_1 и $\vec{B}_1$ на две меньшие окрестности A_2 и $\vec{B}_2$ точек a и $\vec{0}$ с тем, чтобы сужение Φ на $A_2 \times \vec{B}_2$ отображало это множество в $\vec{B}_2$.

2°) Теперь надо проверить, что для фиксированного λ в A_2 отображение $\vec{\Phi}_\lambda$: $\vec{Y} \to \vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y})$ окрестности $\vec{B}_2$ в себя является сжатием с коэффициентом сжатия $k < 1$, не зависящим от выбора λ в A_2.

3°) Надо, чтобы метрическое пространство $\vec{B}_2$ было полным.

Займемся сначала условием 2°). Поскольку частная производная $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{Y}}$ непрерывна и равна нулю в $(a, \vec{0})$, можно найти такую окрестность A_2' точки a в A_1 и такой *замкнутый* шар[1]) $\vec{B}_2$ в $\vec{B}_1$ с центром в нуле радиуса $\beta > 0$, что из соотношений $\lambda \in A_2'$ и $\vec{Y} \in \vec{B}_2$ следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{Y}} (\vec{\lambda}, \vec{Y}) \right\| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad \text{(III, 8; 10)}$$

Применим теперь теорему о конечных приращениях. Это возможно, поскольку шар $\vec{B}_2$ выпуклый, и, следовательно, если $\vec{Y}'$ и $\vec{Y}''$ лежат в этом шаре, то в нём лежит и весь отрезок $[\vec{Y}', \vec{Y}'']$. Получим неравенство

$$\| \vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y}') - \vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y}'') \| \leqslant \frac{1}{2} \| \vec{Y}' - \vec{Y}'' \|. \qquad \text{(III, 8: 11)}$$

Таким образом, условие 2°) выполняется с $k = 1/2$ для шаров A_2' и B_2 или для меньших множеств.

Займемся теперь условием 1°). Нам надо выбрать A_2 и $\vec{B}_2$ так, чтобы $\vec{\Phi}$ было отображением $A_2 \times \vec{B}_2$ в $\vec{B}_2$. Окрестности A_2' и $\vec{B}_2$ уже выбраны. Учитывая непрерывность функции Φ и тот факт, что $\vec{\Phi}(a, \vec{0}) = \vec{0}$, мы можем найти такую окрестность $A_2 \subset A_2'$ точки a, в которой имеет место неравенство

$$\| \vec{\Phi}(\lambda, \vec{0}) \| \leqslant \frac{\beta}{2} \quad \text{для} \quad \lambda \in A_2. \qquad \text{(III, 8; 12)}$$

---

[1]) *Мы увидим несколько ниже, почему B_2 должно быть замкнутым.*

При этих условиях для $\lambda \in A_2$ и $\|\vec{Y}\| \leqslant \beta$ имеет место неравенство

$$\|\vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y})\| \leqslant \|\vec{\Phi}(\lambda, \vec{0})\| + \|\vec{\Phi}(\lambda, \vec{Y}) - \vec{\Phi}(\lambda, \vec{0})\| \leqslant \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\|\vec{Y}\| \leqslant \beta. \tag{III, 8; 13}$$

Это неравенство доказывает, что функция $\vec{\Phi}$ отображает $A_2 \times \vec{B}_2$ в $\vec{B}_2$. Наконец, условие 3°) теперь выполнено, поскольку, в силу теоремы 43 гл. II, $\vec{B}_2$, как замкнутая часть полного метрического пространства $\vec{F}$, является полным метрическим пространством. Итак, мы находимся в условиях применимости теорем 46 и 46_2. Следовательно, для заданного λ в A_2 имеется, и притом единственное, решение уравнения (III, 8; 9) относительно $\vec{Y}$, такое, что $\|\vec{Y}\| \leqslant \beta$ и $\vec{Y}$ является непрерывной функцией λ, $\vec{Y} = \vec{\Psi}(\lambda)$.

Уравнение (III, 8; 1) эквивалентно уравнению (III, 8; 9) и, следовательно, имеет, и притом единственное, решение относительно y в шаре B_2 пространства F с центром в b радиуса β для любого заданного x из A_2. Кроме того, если мы обозначим через g отображение, которое каждой точке x из A_2 ставит в соответствие единственное решение y из B_2, $y = g(x)$, то $g(x) = b + \Psi(x)$ и, следовательно, g является непрерывным отображением A_2 в B_2.

Заметим, что определение окрестностей A_2 и B_2 проводилось *в два приема*. Сначала были найдены достаточно малые A_2' и B_2. Естественно, их можно по желанию еще уменьшить. Однако, *как только B_2 фиксировано, достаточно малое множество A_2 выбирается уже в зависимости от B_2*. Результат a posteriori представляется очевидным, поскольку функция g непрерывна. Из непрерывности функции g следует также, что если B является внутренностью $\mathring{B}_2$ множества B_2, то существует открытое множество[1]) в E, содержащее a, такое, что из $x \in A$ следует $g(x) \in B$, и теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим уравнение более общего вида:

$$f(x, y) = z, \tag{III, 8; 14}$$

в котором ищется y, близкое к b, как функция x и z, близких к токам a и c, таким, что $f(a, b) = c$.

[1]) Для проведения доказательства мы *были вынуждены* брать замкнутый шар B_2, ибо нам нужна была замкнутость шара $\vec{B}_2$ для того, чтобы он был полным! Но удобнее формулировать теорему для открытых множеств A и B.

Это уравнение сводится к уравнению теоремы 25:

$$\vec{f}_1((x, z), y) = \vec{0}, \quad \text{где} \quad \vec{f}_1((x, z), y) = \overrightarrow{f(x, y) - z}; \qquad \text{(III, 8; 15)}$$

f_1 является отображением некоторого открытого множества из $(E \times G) \times F$ в $\vec{G}$ и ищется y, близкое к b, как функция точки (x, z), близкой к точке (a, c), такой, что $\vec{f}_1((a, c), b) = \vec{0}$.

Дифференцируемость неявной функции

Предположим теперь, что функция f дифференцируема, и выясним, влечет ли это за собой дифференцируемость неявной функции g, определенной заданной функцией f. При этом мы несколько изменим условия теоремы: мы будем предполагать, что неявная функция существует и непрерывна, даже если существование и непрерывность не следуют непосредственно из теоремы 25 (мы предполагаем существование производной только в точке (a, b)). Кроме того, пространство E будет предполагаться аффинным для того, чтобы можно было говорить о дифференцируемости функции g.

Теорема 26. *Пусть E, F, G — три аффинных нормированных пространства, Ω — открытое множество из $E \times F$, f — отображение Ω в G. Пусть A и B — открытые множества пространств E и F соответственно, $A \times B \subset \Omega$ и g является отображением A в B, тождественно удовлетворяющим соотношению* (III, 8; 2). *Пусть, далее, отображение f дифференцируемо в точке (a, b), $b = g(a)$, и его частные производные P и Q в рассматриваемой точке являются линейными непрерывными отображениями $\vec{E}$ и $\vec{F}$ в $\vec{G}$ соответственно, причем отображение Q обратимо. Тогда, если отображение g непрерывно в точке a, то оно дифференцируемо в точке a и его производное отображение задается формулой*

$$g'(a) = -Q^{-1} \circ P = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right). \qquad \text{(III, 8; 16)}$$

Доказательство. Если заранее предположить существование производной отображения g, то формула (III, 8; 16) получается сразу. В самом деле, мы можем продифференцировать тождество (III, 8; 2), пользуясь теоремой о сложной функции, и получить уравнение

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \circ g'(a) = 0 \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G}), \\ \text{или} \quad P + Q \circ g'(a) = 0, \end{gathered} \qquad \text{(III, 8; 17)}$$

откуда путем композиции слева с Q^{-1} вытекает (III, 8; 16). Но доказательство получается более сложным, так как *мы не знаем заранее*, дифференцируема ли функция g в точке a. Пусть $\overrightarrow{dx}=\overrightarrow{x-a}$ — некоторое приращение x, а $\overrightarrow{\Delta y}$ — соответствующее приращение $y=g(x)$. Из того факта, что g является неявной функцией, определенной рассматриваемым уравнением, и что функция f дифференцируема в (a, b), следует формула

$$\vec{0}=\overrightarrow{\Delta f}=P\overrightarrow{dx}+Q\overrightarrow{\Delta y}+\vec{\alpha}(\|\overrightarrow{dx}\|+\|\overrightarrow{\Delta y}\|). \qquad \text{(III, 8; 18)}$$

Вектор $\vec{\alpha}$ зависит от $\overrightarrow{dx}$ и $\overrightarrow{\Delta y}$, т. е. в конечном счете только от $\overrightarrow{dx}$. Он стремится к $\vec{0}$, если $\overrightarrow{dx}$ и $\overrightarrow{\Delta y}$ стремятся к $\vec{0}$, т. е. при $\overrightarrow{dx}$, стремящемся к $\vec{0}$, ибо, в силу непрерывности g в точке a, $\overrightarrow{\Delta y}$ стремится к $\vec{0}$ вместе с $\overrightarrow{dx}$. Отсюда вытекает следующий результат для $\overrightarrow{\Delta y}$:

$$Q\overrightarrow{\Delta y}=-P\overrightarrow{dx}-\vec{\alpha}(\|\overrightarrow{dx}\|+\|\overrightarrow{\Delta y}\|),$$

или

$$\overrightarrow{\Delta y}=-(Q^{-1}\circ P)\overrightarrow{dx}-(Q^{-1}\alpha)(\|\overrightarrow{dx}\|+\|\overrightarrow{\Delta y}\|). \qquad \text{(III, 8; 19)}$$

Теперь необходимо избавиться от $\overrightarrow{\Delta y}$ в правой части. Это можно сделать с помощью некоторых оценок. С этой целью напишем сначала неравенство

$$\|\overrightarrow{\Delta y}\|\leqslant\|Q^{-1}\|\|P\|\|\overrightarrow{dx}\|+\|Q^{-1}\|\|\vec{\alpha}\|\|\overrightarrow{dx}\|+\|Q^{-1}\|\|\vec{\alpha}\|\|\overrightarrow{\Delta y}\|. \qquad \text{(III, 8; 20)}$$

Мы видели, что при $\overrightarrow{dx}$, стремящемся к $\vec{0}$, $\vec{\alpha}$ также стремится к $\vec{0}$. Следовательно, можно выбрать $\overrightarrow{dx}$ настолько малым, чтобы коэффициент $\|Q^{-1}\|\|\vec{\alpha}\|$ не превосходил 1/2. Перенося затем налево последний член, получим следующее неравенство, имеющее место для всех достаточно малых $\|\overrightarrow{dx}\|$:

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\Delta y}\|\leqslant\left(\|Q^{-1}\|\|P\|+\frac{1}{2}\right)\|\overrightarrow{dx}\|,$$

или

$$\|\overrightarrow{\Delta y}\|\leqslant(2\|Q^{-1}\|\|P\|+1)\|\overrightarrow{dx}\|, \qquad \text{(III, 8; 21)}$$

или

$$\|\overrightarrow{dx}\|+\|\overrightarrow{\Delta y}\|\leqslant 2(\|Q^{-1}\|\|P\|+1)\|\overrightarrow{dx}\|=k\|\overrightarrow{dx}\|,$$

где k — некоторая постоянная. Используя теперь эту оценку для последнего члена правой части равенства (III, 8; 19), окончательно получаем

$$\overrightarrow{\Delta y} = -(Q^{-1} \circ P)\overrightarrow{dx} + \vec{\beta}\|\overrightarrow{dx}\|, \quad \text{где} \quad \|\vec{\beta}\| \leqslant k\|Q^{-1}\|\|\vec{\alpha}\|. \qquad \text{(III, 8; 22)}$$

Здесь $\vec{\beta}$ стремится к $\vec{0}$, когда $\overrightarrow{dx}$ стремится к $\vec{0}$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. В дифференциальных обозначениях без труда приходим к следующему правилу:

Правило. *Для нахождения дифференциала функции y как функции x, неявно определяемой уравнением $f(x, y) = c$, следует продифференцировать это уравнение, что дает*

$$P\overrightarrow{dx} + Q\overrightarrow{dy} = 0, \qquad \text{(III, 8; 23)}$$

а затем разрешить полученное соотношение относительно $\overrightarrow{dy}$:

$$\overrightarrow{dy} = -(Q^{-1} \circ P)\overrightarrow{dx}. \qquad \text{(III, 8; 24)}$$

Дифференцируемость функции $u \to u^{-1}$ на $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$

Для того чтобы иметь возможность в полной мере использовать теоремы 25 и 26, надо знать, как изменяется $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^{-1}$ при изменении (x, y). Точно так же, как при обосновании дифференцируемости сложной функции (теорема 19) была использована дифференцируемость произведения (теорема 18), для обоснования дифференцируемости неявной функции будет нужна производная обратной функции.

Теорема 27. *Пусть $\vec{F}$, $\vec{G}$ — векторные нормированные пространства, и пусть $\mathscr{U}$ (соответственно $\mathscr{U}^{-1}$) — множество обратимых элементов пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ (соответственно $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$). Тогда:*

1°) *Биекция $u \to u^{-1}$ множества $\mathscr{U}$ на множество $\mathscr{U}^{-1}$ является гомеоморфизмом.*

2°) *Если пространства $\vec{F}$ и $\vec{G}$ полны, то множества $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^{-1}$ открыты, а биекция $u \to u^{-1}$ дифференцируема вместе со своей обратной биекцией и ее производная в точке $u \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ является отображением*

$$du \to -u^{-1} \circ du \circ u^{-1} \qquad \text{(III, 8; 25)}$$

пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$.

Первое доказательство. Для простоты во всех случаях будем предполагать пространства $\vec{F}$ и $\vec{G}$ полными. Тогда, как мы видели в теореме 62 гл. II, если $u_0 \in \mathcal{U}$, то всякий элемент из $\mathcal{L}(\vec{F}; \vec{G})$, принадлежащий открытому шару с центром в u_0 радиуса $\|u_0^{-1}\|^{-1}$, будет находиться в $\mathcal{U}$, а, следовательно, $\mathcal{U}$ открыто. Точно такие же рассуждения можно провести для множества $\mathcal{U}^{-1}$, меняя ролями $\vec{F}$ и $\vec{G}$.

Покажем теперь, что отображение $u \to u^{-1}$ дифференцируемо в точке $u_0 \in \mathcal{U}$. Это отображение непрерывно и, поскольку обратное к нему отображение также непрерывно (стоит лишь поменять ролями $\vec{F}$ и $\vec{G}$), оно является гомеоморфизмом, дифференцируемым вместе с обратным гомеоморфизмом. Формула (II, 14; 26) дает $\left(\text{для } \|du\| < \|u_0^{-1}\|^{-1}\right)$

$$(u_0 + du)^{-1} = u_0^{-1} - u_0^{-1}\, du\, u_0^{-1} + u_0^{-1}\, du\, u_0^{-1}\, du\, u_0^{-1} - \ldots \quad \text{(III, 8; 26)}$$

Отсюда получается неравенство

$$\left\|\left((u_0 + du)^{-1} - u_0^{-1}\right) + u_0^{-1}\, du\, u_0^{-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|u_0^{-1}\|^3 \|du\|^2 \left(1 + \|u_0^{-1}\| \|du\| + \left(\|u_0^{-1}\| \|du\|\right)^2 + \ldots\right) =$$
$$= \frac{\|u_0^{-1}\|^3 \|du\|^2}{1 - \|u_0^{-1}\| \|du\|} = \frac{\|u_0^{-1}\|^2 \|du\|^2}{\|u_0^{-1}\|^{-1} - \|du\|}. \quad \text{(III, 8; 27)}$$

При $\|du\|$, стремящемся к 0, это выражение мажорируется постоянной, умноженной на $\|du\|^2$, и, следовательно, является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\|du\|$. Поскольку $du \to -u_0^{-1}\, du\, u_0^{-1}$ является линейным непрерывным отображением $\mathcal{L}(\vec{F}; \vec{G})$ в $\mathcal{L}(\vec{G}; \vec{F})$, оно, в силу определения (III, 3; 13)[1]), является производной отображения $u \to u^{-1}$ в точке u_0.

Второе доказательство. Ограничимся снова случаем, когда $\vec{F}$ и $\vec{G}$ полны. Тогда такими же будут пространства

---

[1]) Заметим, что если $\vec{F}$ и $\vec{G}$ произвольны, то $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ могут оказаться пустыми! Например, если $\vec{F}$ и $\vec{G}$ конечномерны, то обратные отображения $\vec{F}$ на $\vec{G}$ существуют лишь в том случае, когда $\vec{F}$ и $\vec{G}$ имеют одинаковую размерность.

Заметим также, что если $\mathcal{U}$ не пусто, то F не может быть полным, если не полно G, и обратно, ибо каждый элемент из $\mathcal{U}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\vec{F}$ и $\vec{G}$, сохраняющее сходимость и последовательности Коши.

$\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ и $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ (теорема 50 гл. II). Пусть $u_0 \in \mathscr{U}$. Элемент v из $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ называется *обратным справа* к элементу $u \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, если $u \circ v = I$. Такой элемент v существует не всегда (например, для $u=0$ не существует обратного справа элемента). Может существовать бесконечное множество таких элементов. Однако, если элемент u обратим, то существует лишь один такой элемент, а именно u^{-1}, ибо из $u \circ v = I$ умножением слева на u^{-1} получаем $v = u^{-1}$.

Поиски элемента, обратного справа к элементу u, приводят к решению уравнения $uv = I$ относительно v. Мы можем, следовательно, применить теорему о неявной функции. Отображение $(u, v) \to uv$, как билинейное непрерывное отображение, непрерывно дифференцируемо (теорема 9_2). Его частная производная по v в точке (u_0, v_0), $v_0 = u_0^{-1}$, является линейным непрерывным отображением $V \to W = u_0 V$ [1]) пространства $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$ (формула (II, 3; 34)). Это отображение обратимо, и обратное к нему отображение является непрерывным отображением $W \to V = u_0^{-1} W$ пространства $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Теорема 25 показывает, что тогда существует открытая окрестность $(\mathscr{U}_0)_\text{п}$ элемента u_0 в пространстве $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ и открытая окрестность $(\mathscr{U}_0)_\text{п}^{-1}$ элемента u_0^{-1} в пространстве $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$, такие, что каждый элемент u окрестности $(\mathscr{U}_0)_\text{п}$ имеет единственный обратный справа элемент $u_\text{п}^{-1}$, лежащий в $(\mathscr{U}_0)_\text{п}^{-1}$. Кроме того, согласно теореме 26, отображение $u \to u_\text{п}^{-1}$ является непрерывным отображением $(\mathscr{U}_0)_\text{п}$ в $(\mathscr{U}_0)_\text{п}^{-1}$, дифференцируемым в точке u_0. То же самое рассуждение можно провести для обратного слева элемента $w \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ к элементу $u \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, удовлетворяющего условию $wu = I$. Точно так же определяются открытые множества $(\mathscr{U}_0)_\text{л}$ и $(\mathscr{U}_0)_\text{л}^{-1}$ и отображение $u \to u_\text{л}^{-1}$ множества $(\mathscr{U}_0)_\text{л}$ в $(\mathscr{U}_0)_\text{л}^{-1}$. Обозначим теперь $\mathscr{U}_0 = (\mathscr{U}_0)_\text{п} \cap (\mathscr{U}_0)_\text{л}$. Это некоторая открытая окрестность точки u_0. Если $u \in \mathscr{U}_0$, то одновременно существует обратный слева элемент $u_\text{л}^{-1}$ в $(\mathscr{U}_0)_\text{л}^{-1}$ и обратный справа $u_\text{п}^{-1}$ в $(\mathscr{U}_0)_\text{п}^{-1}$. Однако, если некоторый элемент имеет одновременно обратный справа и обратный слева, то они совпадают и

[1]) В дифференциальных обозначениях $d(uv) = du\, v_0 + u_0\, dv$, и частная производная по v в точке (u_0, v_0) есть отображение $dv \to u_0\, dv$.

рассматриваемый элемент обратим, ибо из $uu_{\text{п}}^{-1}=I$ и $u_{\text{л}}^{-1}u=I$ следует $u_{\text{л}}^{-1}uu_{\text{п}}^{-1}=(u_{\text{л}}^{-1}u)\,u_{\text{п}}^{-1}=u_{\text{п}}^{-1}$ и точно так же $u_{\text{л}}^{-1}(uu_{\text{п}}^{-1})=$ $=u_{\text{л}}^{-1}$.

Мы видим теперь, что каждый элемент окрестности $\mathcal{U}_0$ обратим. Отсюда следует, что $\mathcal{U}$ является окрестностью каждой своей точки, т. е. является открытым множеством. Меняя ролями $\vec{F}$ и $\vec{G}$, получаем тот же результат для множества $\mathcal{U}^{-1}$. Далее, отображение $u\to u^{-1}$, совпадающее в окрестности $\mathcal{U}_0$ точки u_0 с отображением $u\to u_{\text{п}}^{-1}$, непрерывно в точке u_0, а, следовательно, и всюду на $\mathcal{U}$. Его обратное отображение обладает тем же свойством (в чем легко убедиться, меняя ролями $\vec{F}$ и $\vec{G}$), а, значит, мы имеем гомеоморфизм $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}^{-1}$. Наконец, по той же самой причине, это отображение дифференцируемо вместе с обратным отображением.

Вычисление производной выполняется по правилу (III, 8; 23). Дифференцируя $uv=I$, получаем

$$du\circ v+u\circ dv=0. \tag{III, 8; 31}$$

Умножая слева на u^{-1}, находим

$$dv=-u^{-1}\circ du\circ v=-u^{-1}\circ du\circ u^{-1}. \tag{III, 8; 32}$$

Третье доказательство. Это доказательство пригодно лишь в случае конечномерных пространств $\vec{F}$ и $\vec{G}$. Тогда их следует считать пространствами одинаковой размерности n [1]). Выберем в каждом из них систему координат. Тогда их можно отождествить с пространством $\mathbb{K}^n$, а $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$ и $\mathscr{L}(\vec{G};\vec{F})$ отождествить с векторным пространством K^{n^2} квадратных матриц из n строк и n столбцов. Пусть $\mathfrak{M}$ — такая матрица, а m_{ij}, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, — ее элементы. Функция $\mathfrak{M}\to f(\mathfrak{M})$ принадлежит классу C^m тогда и только тогда, когда она является функцией n^2 скалярных переменных m_{ij}, принадлежащей классу C^m. Определитель $\mathfrak{M}\to\det\mathfrak{M}$ является полиномом относительно m_{ij} и, следовательно, является скалярной бесконечно дифференцируемой функцией от $\mathfrak{M}$. Множество $\mathcal{U}$ обратимых матриц является прообразом множества $\complement 0$ при этом непрерывном отображении, ибо матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель $\neq 0$. Так как множество $\complement 0$ открыто в $\mathbb{K}$, то $\mathcal{U}$ также открыто.

Матрица $\mathfrak{M}^{-1}$, обратная к матрице $\mathfrak{M}$, состоит из элементов $\dfrac{M_{ji}}{\det\mathfrak{M}}$, где M_{ji} — алгебраические дополнения матрицы $\mathfrak{M}$; M_{ji}

[1]) См. примечание на стр. 301.

являются полиномами относительно m_{ij}, а, следовательно, $\frac{M_{ji}}{\det \mathfrak{M}}$ является скалярной бесконечно дифференцируемой функцией на $\mathcal{U}$. Соответствие $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{-1}$ является отображением множества обратимых матриц $\mathcal{U}$ в $\mathbb{K}^{n^2}$, составляющие которого являются скалярными функциями класса C^∞, и, следовательно, оно само принадлежит классу C^∞. Поскольку оно совпадает со своим обратным отображением, мы имеем гомеоморфизм класса C^∞. Тем самым мы доказали нечто большее, чем утверждалось в теореме: по этому поводу см. замечание к приведенному ниже следствию.

Для того чтобы подсчитать производную отображения $u \to u^{-1}$, лучше всего воспользоваться концом второго доказательства. Заметим, что в *конечномерном случае*, если u имеет обратный справа элемент $u_п^{-1}$, то, переходя к матрицам, получим $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_п^{-1} = I$. Отсюда следует, что $(\det \mathfrak{M})(\det \mathfrak{M}_п^{-1}) = I$, а, значит, $\det \mathfrak{M} \neq 0$, и мы получаем, что элемент u обратим (и его обратным является элемент $u_п^{-1}$).

Следствие. *Пусть $x \to u(x)$ — дифференцируемое отображение открытого множества Ω аффинного пространства E в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ ($\vec{F}$ и $\vec{G}$ — пространства Банаха).*

Если для каждого $x \in \Omega$ отображение $u(x)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, то $x \to u^{-1}(x)$ является дифференцируемым отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ и его производная для $\vec{X} \in \vec{E}$ задается формулой

$$(u^{-1})'(x) \cdot \vec{X} = -u^{-1}(x) \circ (u'(x) \cdot \vec{X}) \circ u^{-1}(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F}). \qquad \text{(III, 8; 33)}$$

В частности, если $\mathfrak{M}$ является квадратной матрицей из n строк и n столбцов, зависящей от скалярного параметра t и дифференцируемой по t, и если она обратима для каждого t, то производная обратной матрицы $\mathfrak{M}^{-1}$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{d\mathfrak{M}^{-1}}{dt} = -\mathfrak{M}^{-1} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} \mathfrak{M}^{-1}. \qquad \text{(III, 8; 34)}$$

Для доказательства достаточно применить следствие к $E = \mathbb{K}$, $\vec{F} = \vec{G} = \mathbb{K}^n$. При $n = 1$ мы возвращаемся к производной обратной функции для заданной скалярной функции f, нигде не обращающейся в нуль:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}. \qquad \text{(III, 8; 35)}$$

Теперь можно применить полученные результаты к дифференцированию неявных функций.

Теорема 28 (теорема о неявной функции). *Пусть E, F, G — три аффинных нормированных пространства, f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $\Omega \subset E \times F$ в G.*

1°) *Пусть A и B — открытые множества в пространствах E и F соответственно, $A \times B \subset \Omega$, и пусть g — непрерывное отображение A в B, удовлетворяющее условию* (III, 8; 2). *Если для каждого x из A частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, то g является непрерывно дифференцируемым отображением A в B.*

2°) *Пусть (a, b) — некоторая точка Ω, $f(a, b) = c$. Если $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ и пространство F полно, то существуют открытые множества A и B в пространствах E и F, содержащие соответственно a и b, $A \times B \subset \Omega$, такие, что для каждого $x \in A$ уравнение* (III, 8; 1) *относительно y имеет, и притом единственное, решение в B и определяемая им функция $y = g(x)$ является непрерывно дифференцируемым отображением A в B, а ее производная задается формулой* (III, 8; 16).

Доказательство. 1°) Из теоремы 26 вытекает, что g дифференцируема в каждой точке A и что ее производная в точке $x \in A$ является элементом $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, задаваемым формулой

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)). \qquad \text{(III, 8; 37)}$$

Отображение $x \to g(x)$ предполагается непрерывным в A, а функции $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывными в Ω. Следовательно, $x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$ и $x \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ являются непрерывными отображениями A в пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$ и $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ соответственно. Так как $u \to u^{-1}$ является непрерывным отображением $\mathscr{U}$ в $\mathscr{U}^{-1}$ (теорема 27), то функция $x \to \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1}$ является непрерывным отображением A в $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$.

Поскольку сложная функция $(u, v) \to v \circ u$ является непрерывным отображением $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G}) \times \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ (теорема 54 гл. II), g' является непрерывным отображением множества A в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, а, значит, функция g непрерывно дифференцируема на множестве A.

2°) Поскольку на этот раз пространства F и G полны (см. примечание на стр. 301: G полно, так как известен обратимый элемент $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ из $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$), то множество $\mathcal{U}$ обратимых элементов из $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$ открыто. Так как $(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ предполагается непрерывным отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$, то прообраз $\mathcal{U}$ при этом отображении является открытым подмножеством Ω_1 множества Ω, содержащим (a, b). Теорема 25 применима к сужению f на Ω_1 (поскольку F полно). Поэтому можно определить такие открытые множества A и B в E и F, содержащие соответственно a и b, $A \times B \subset \Omega_1$, что для каждого $x \in A$ найдется, и притом единственный, элемент $y \in B$, являющийся решением уравнения (III, 8; 1) и такой, что определяемая при этом функция $y = g(x)$ из A в B непрерывна. Поскольку тогда $(x, g(x)) \in \in A \times B \subset \Omega_1$ для каждого x из A, то мы находимся в условиях пункта 1°), а, следовательно, функция g непрерывно дифференцируема, и по теореме 26 получаем (III, 8; 16).

Следствие. *Если $\vec{F}$ и $\vec{G}$ — пространства Банаха, $\mathcal{U}$ — открытое множество обратимых элементов пространства $\mathscr{L}(\vec{F};\vec{G})$, то отображение $u \to u^{-1}$ множества $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}^{-1}$ непрерывно дифференцируемо вместе со своим обратным отображением.*

Для доказательства достаточно применить теорему 28, п. 1°) к уравнению $uv = I$ (см. теорему 27, второе доказательство). Можно также непосредственно доказать непрерывность производной в теореме 27.

Частный случай, когда $E = F = G = \mathbb{K}$ — скалярное поле

Напомним, что если через $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ обозначить *обычную* частную производную скалярной функции f двух скалярных переменных, то ее частным производным *отображением* Q будет умножение на q. Следовательно, оно обратимо тогда и только тогда, когда частная производная q отлична от нуля. Отсюда вытекает, что *если функция f имеет непрерывные обычные частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$* (тогда, согласно теореме 15, функция f дифференцируема) *и* $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, то мы находимся в условиях применимости теоремы 28 *существования, единственности и дифференцируемости неявной функции.* Именно при этих условиях дается обычно теорема о неявной функции в математическом анализе. Формула (III, 8; 16) принимает вид

$$g'(a)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}. \qquad \text{(III, 8; 38)}$$

Предположим теперь, что $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)=0$, но $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\neq 0$. Тогда в окрестности точки (a, b) можно выразить x как функцию y, $x=h(y)$. Поскольку $h'(b)=0$, кривая, определяемая уравнением $f(x, y)=c$, имеет в точке (a, b) вертикальную касательную, и невозможность выразить y как функцию x становится очевидной.

Предположим, наконец, что $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)=0$. Кривая имеет в (a, b) особую точку. Эта точка может быть изолированной особой точкой (например, если $K=\mathbb{R}$, $(a, b)=(0, 0)$, $f(x, y)=x^2+y^2$). Тогда кривой в окрестности (a, b) не существует. Однако, если кривая имеет, например, «двойную точку с различными касательными», то можно в окрестности (a, b) попытаться разделить кривую на две различные ветви и для каждой из них вычислить y как функцию от x или наоборот. Для простоты будем считать, что f принадлежит классу C^3 и $a=b=c=0$. Вместо переменных x и y введем переменные x и $m=y/x$. Данное уравнение примет вид $F(x, m)=f(x, mx)=0$. Посмотрим теперь, позволяет ли это уравнение найти m как функцию x. При $x=0$ функция F равна нулю при любом m и даже в том случае, когда $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ не обращаются одновременно в нуль в начале координат. Здесь, кроме того, производная $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}$ равна нулю при $x=0$ и любом m. Позже (теорема 119 гл. IV) мы убедимся, что отсюда вытекает принадлежность к классу C^1 функции $G(x, m)=\frac{F(x, m)}{x^2}$ (значение этой функции при $x=0$ определяется переходом к пределу).

Предположим, что разложение Тейлора функции f в начале координат имеет вид

$$f(x, y)=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\ \ldots\ . \qquad \text{(III, 8; 38}_2\text{)}$$

Тогда в точке $x=0$, $m=m_0$ имеем

$$G(0, m_0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x, m_0x)}{x^2}=\frac{1}{2}(r+2sm_0+tm_0^2). \qquad \text{(III, 8; 38}_3\text{)}$$

Если трехчлен $m\to r+2sm+tm^2$ имеет два различных корня $m=m_1$ и $m=m_2$ в $\mathbb{K}$, то $G(0, m_1)=0$, $G(0, m_2)=0$. Для уравнения $G(x, m)=0$ мы имеем два частных решения $(0, m_1)$ и $(0, m_2)$. Если $\frac{\partial G}{\partial m}(0, m_1)$ и $\frac{\partial G}{\partial m}(0, m_2)$ отличны от нуля, то теорема о неявной функции позволяет нам разрешить уравнение $G(x, m)=0$ в окрестности этих точек и получить две функции $m=\mu_1(x)$ и $m=\mu_2(x)$ класса C^1. Две ветви искомой кривой будут определены уравнениями класса C^1: $y=x\mu_1(x)$, $y=x\mu_2(x)$. Касательные в начале координат к этим ветвям имеют угловые коэффициенты m_1 и m_2.

Производные $\frac{\partial G}{\partial m}(0, m)$ в корнях m_1 и m_2 трехчлена $G(0, m)$ не могут быть равными нулю, так как по условию эти корни *различны*, а

$$\frac{\partial G}{\partial m}(0, m_0)=s+m_0 t. \qquad \text{(III, 8; 38}_4\text{)}$$

Итак, *теорема о неявной функции может применяться даже в тех случаях, когда ее условия непосредственно не удовлетворяются.*

Случай, когда E, F, G конечномерны

Пусть E, F, G — аффинные конечномерные пространства. Пусть в присоединенных векторных пространствах $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ выбраны базисы $(\vec{e}_k)_{k\in K}$, $(\vec{f}_j)_{j\in J}$, $(\vec{g}_i)_{i\in I}$, а в качестве начал координат взяты начала пространств E, F, G. Тогда отображение f из $\Omega\subset E\times F$ в G определяется формулами

$$z_i=F_i\left((x_k)_{k\in K}, (y_j)_{j\in J}\right), \quad i\in I. \qquad \text{(III, 8; 39)}$$

Непрерывность f выражается в том, что скалярные функции F_i являются непрерывными функциями своих аргументов x_k и y_j. Сказать, что f имеет непрерывную частную производную по второй переменной, означает сказать, что F_i имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным y_j (теорема 15). Обратимость частного производного отображения Q в точке (a, b, c), где $c=f(a, b)$, означает следующее. Прежде всего, G и F должны иметь одинаковую размерность, т. е. должно быть $I=J$. Тогда рассматриваемая обратимость будет иметь место *тогда и только тогда, когда якобиан*, состоящий из элементов $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b)$, являющийся определителем матрицы линейного отображения Q, *отличен от нуля.* Если эти условия выполнены, то в окрестности точки (a, b) можно (теорема 25) определить y как функцию $g(x)$, т. е. выразить y_j в виде

$$y_j=G_j\left((x_k)_{k\in K}\right), \quad j\in J=I. \qquad \text{(III, 8; 40)}$$

Если теперь функции F_i имеют частные производные не только по переменным y_j, но также и по переменным x_k, непрерывные в Ω, то можно утверждать, что отображение f принадлежит классу C^1. Тогда можно применить теорему 28 и формулу (III, 8; 16) и найти производную матрицу отображения g, т. е. матрицу, составленную из частных производных функций y_j по переменным x_k, в виде отношения двух матриц. Если $I=J=\{1, 2, \ldots, m\}$, $K=\{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \qquad \text{(III, 8; 41)}$$

Вместо того чтобы производить вычисления с матрицами, можно также найти частные производные $\frac{\partial G_j}{\partial x_k}$ для фиксированного k и $j \in J$, придавая x приращение $\overrightarrow{dx}$, определенное условиями $dx_{k'} = dx_k$, если $k' = k$, и 0, если $k' \neq k$, и вычисляя дифференциалы dy_j, $j \in J$, путем решения системы m линейных уравнений с m неизвестными и отличным от нуля определителем (ибо он является якобианом):

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j \in J} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} dy_j = 0, \qquad i \in I. \qquad \text{(III, 8; 42)}$$

Обратная функция как неявная функция

Найти обратную функцию $x=g(y)$ для некоторого гомеоморфизма $y=f(x)$ означает решить относительно x уравнение $f(x)=y$ для каждого заданного y. Эта задача является задачей отыскания неявной функции.

Теорема 29. *Пусть E и F — аффинные полные нормированные пространства и f — непрерывно дифференцируемое отображение некоторого открытого множества $\Omega \subset E$ в F.*

1°) *Если a — точка множества Ω и $f'(a)$ — обратимый элемент пространства $\mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$, то образ каждой окрестности точки a при отображении f является окрестностью точки $b=f(a)$ и образ каждого открытого шара с центром в точке a при этом отображении содержит некоторый открытый шар с центром в точке b. Существуют такие открытые множества A и B в* *пространствах E и F, содержащие соответственно a и b, что f является гомеоморфизмом A на B, непрерывно дифференцируемым вместе со своим обратным гомеоморфизмом.*

Кроме того, имеем:

$$(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}. \qquad \text{(III, 8; 43)}$$

2°) *Если для каждого $x \in \Omega$ производная $f'(x)$ является обратимым элементом из $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, то образ каждого открытого множества из Ω при отображении f является открытым множеством и, в частности, $f(\Omega)$ является открытым множеством в F. Если, кроме того, отображение f инъективно, то оно является гомеоморфизмом множества Ω на $f(\Omega)$, непрерывно дифференцируемым вместе со своим обратным гомеоморфизмом.*

Доказательство. Мы видели, что обратное отображение $g = f^{-1}$ является неявной функцией $x = g(y)$, определяемой уравнением $\vec{f}_1(x, y) = \overrightarrow{f(x) - y} = \vec{0}$, где $\vec{f}_1$ — отображение $\Omega \times F$ в $\vec{F}$. Применим предыдущие теоремы с неизбежным изменением обозначений: *мы будем искать x как функцию y, а не наоборот.* Поэтому необходимые предположения будут относиться к частной производной относительно x: $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Здесь E полно, а $\vec{f}_1$ непрерывно дифференцируемо на $\Omega \times F$, поскольку его частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = f'(x)$ и $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -I$ непрерывны (теорема 15).

Докажем утверждение 1°). Условия, необходимые для применения теоремы 28, 2°), выполнены в (a, b). Следовательно, можно найти такие открытые множества A_0 и B, $a \in A_0 \subset E$, $b \in B \subset F$, что уравнение $f(x) = y$ для $y \in B$ имеет в A_0 единственное решение x и таким образом определенная функция $x = g(y)$ есть непрерывно дифференцируемая функция из B в A_0. Однако эти открытые множества A_0 и B не отвечают непосредственно требуемым условиям. Образ $f(A_0)$ «покрывает B один и только один раз», но он слишком велик: $f(A_0) \supset B$. Нам надо взять $A = A_0 \cap f^{-1}(B)$. Тогда f будет отображать A в B. Впрочем, для $y \in B$ точка $g(y)$ множества A_0 заведомо лежит в прообразе $f^{-1}(B)$ (поскольку $f(g(y)) = y \in B$), а, следовательно, в A. Таким образом, g отображает B в A. Итак, f и g — два взаимно обратных отображения A в B и B в A, где B открыто по построению и A открыто как пересечение двух открытых множеств. Отображение f непрерывно дифференцируемо по определению, а g по теореме о неявной функции. Следовательно, мы имеем два непрерывно дифференцируемых взаимно обратных гомеоморфизма. Пусть теперь $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность точки a в Ω. Тогда $\mathscr{V} \cap A$ является окрестностью точки a в A, и так как f — гомеоморфизм A на B, то множество $f(\mathscr{V} \cap A)$ является окрестностью точки b в B, а, значит, и в F, поскольку B — открытое множество в F. Множество $f(\mathscr{V})$ тем более является окрестностью точки b в пространстве F. Множество $\mathscr{V}$ может быть, в частности, некоторым открытым шаром с центром в точке a. Множество $f(\mathscr{V})$, как окрестность точки b, содержит некоторый открытый шар с центром в точке b. Таким образом, утверждение 1°) доказано. Производная функции g в точке b вычисляется по правилу (III, 8; 23): надо решить относительно $\overrightarrow{dx}$ уравнение

$$f'(a)\,\overrightarrow{dx} - \overrightarrow{dy} = \vec{0}, \tag{III, 8 44}$$

что дает

$$\overrightarrow{dx} = (f'(a))^{-1}\,\overrightarrow{dy}, \tag{III, 8; 45}$$

откуда и вытекает (III, 8; 43).

Докажем теперь утверждение 2°). Пусть $\mathscr{O}$ — открытое множество из Ω. Множество $\mathscr{O}$ является окрестностью для каждой своей точки x. Так как $f'(x)$ обратима, то, согласно 1°), $f(\mathscr{O})$ является окрестностью точки $f(x)$, а, следовательно, множество $f(\mathscr{O})$ открыто. В частности, открыто множество $f(\Omega)$. Если, кроме того, отображение f инъективно, то оно является биективным и непрерывным отображением множества Ω на множество $f(\Omega)$, и образ каждого открытого множества открыт. Согласно теореме 11 гл. II, отображение f является гомеоморфизмом. Если a — произвольная точка Ω, то в открытом множестве B, определенном в 1°), функция f^{-1} совпадает с функцией g, и, следовательно, непрерывно дифференцируема в B, а, значит, во всем множестве $f(\Omega)$.

Замечание. Теорема 29, 1°) приводит к той же формуле, что и следствие 4 теоремы 11. Но две эти формулировки до некоторой степени обратны одна другой, поскольку, с одной стороны, для обратимости $f'(a)$ нужны два дифференцируемых взаимно обратных гомеоморфизма, а, с другой стороны, для нахождения двух взаимно обратных дифференцируемых гомеоморфизмов нужна обратимость $f'(a)$. Очевидно также, что условие 29, 2°) носит более тонкий характер.

Если E и F конечномерны и если в них выбрана система координат, то обратимость $f'(a)$ означает, что E и F имеют одну и ту же размерность и что якобиан функции f в точке a в выбранной системе координат отличен от нуля.

Теорема 29 приводит к следующему определению:

Определение. Пусть Ω и F — два топологических пространства и f — непрерывное отображение Ω в F. Говорят, что f является *открытым отображением*, если образ каждого открытого множества из Ω при отображении f является открытым множеством в F. Говорят, что f является *локальным гомеоморфизмом* пространства Ω в пространство F, если для любой точки $a \in \Omega$ существует открытое множество A в Ω, содержащее a, и открытое множество B в F, содержащее b, такие, что f является гомеоморфизмом A на B.

Теперь легко проверяются следующие утверждения:

A) *Для того чтобы отображение f было открытым, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in \Omega$ образ любой окрестности точки a при отображении f был окрестностью точки $f(a)$, или чтобы для каждой точки a образ любого открытого шара с центром в a при отображении f содержал некоторый открытый шар с центром в точке $f(a)$.* (Достаточность была установлена при доказательстве теоремы 29, 2°), а необходимость очевидна.)

B) *Всякий локальный гомеоморфизм является открытым отображением.* Этот факт мы установили при доказательстве теоремы 29, 1°): когда f — локальный гомеоморфизм, для любой точки $x \in \Omega$ и любой окрестности $\mathscr{V}$ точки x множество $f(\mathscr{V})$ является окрестностью точки $f(x)$, а, следовательно, согласно A), отображение f открыто.

C) *Если f — непрерывно дифференцируемое отображение некоторого открытого множества Ω полного аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F и если для каждого $x \in \Omega$ производная $f'(x)$ обратима, то f является локальным гомеоморфизмом Ω в F.* Это устанавливает теорема 29. В частности, *f является открытым отображением, а $f(\Omega)$ является открытым множеством в F.*

D) *Открытое инъективное отображение f является гомеоморфизмом Ω на образ $f(\Omega)$.* Этот факт установлен нами при доказательстве теоремы 29, 2°).

Следующая схема подводит итог полученным результатам. Предполагается, что f является непрерывным отображением топологического пространства Ω в топологическое пространство F.

E, F — полные аффинные нормированные пространства, Ω — открытое множество из E, f непрерывно дифференцируемо, $f'(x)$ обратимо для каждого $x \in \Omega$	$\Rightarrow$	f является локальным гомеоморфизмом	$\Rightarrow$	f открыто
				$\Updownarrow$
				образ каждой окрестности точки x при отображении f является окрестностью точки $f(x)$

Необходимо иметь в виду, что здесь нельзя заходить слишком далеко и что, в частности, обратные утверждения к указанным выше следствиям не верны.

Рассмотрим C). *Если f является непрерывно дифференцируемым локальным гомеоморфизмом Ω в F, то его производная $f'(x)$ не обязательно обратима для каждого $x \in \Omega$.* Например, $x \to x^3$ является дифференцируемым гомеоморфизмом $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, но его производная равна нулю в начале координат а, следовательно, его обратный гомеоморфизм $y \to \sqrt[3]{y}$ не дифференцируем в начале координат.

Рассмотрим B). *Открытое отображение не обязательно является локальным гомеоморфизмом.* Например, всякая проекция произведения топологических пространств на пространства-сомножители открыта, как это следует из определения окрестностей, но, вообще говоря, не является локальным гомеоморфизмом (проекция $(x, y) \to x$ пространства $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}$ не является локальным гомеоморфизмом!).

Наконец, в D) условие «отображение f инъективно» необходимо точно так же, как в теореме 29, 2°). Например, отображение $z \to z^2$ пространства $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, суженное на открытое множество Ω, дополнительное к началу координат, удовлетворяет условию «$f'(z) = 2z \neq 0$ обратимо для каждого $z \in \Omega$». Значит, оно является локальным гомеоморфизмом и открытым отображением, но не является гомеоморфизмом, поскольку оно не инъективно.

Вернемся к теореме 29. Предполагая $f'(a)$ обратимой, мы доказали свойство гомеоморфности. Отсюда как следствие вытекает менее сильное свойство открытости отображения. Это последнее свойство связано с менее сильным свойством, чем обратимость $f'(a)$, а именно с сюръективностью:

Теорема 30. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества Ω нормированного аффинного пространства E в конечномерное аффинное пространство F.*

1°) *Если a — точка Ω и если $f'(a)$ — сюръективное отображение $\vec{E}$ на $\vec{F}$, то образ любой окрестности точки a при отображении f является окрестностью точки $f(a)$, а образ каждого открытого шара с центром в точке a содержит некоторый открытый шар с центром в $f(a)$.*

2°) *Если $f'(x)$ для любого $x \in \Omega$ является сюръективным отображением $\vec{E}$ на $\vec{F}$, то образ каждого открытого множества из Ω при отображении f является открытым множеством в F. В частности, $f(\Omega)$ является открытым множеством. (Другими словами, f является открытым отображением.)*

Предположение о том, что F конечномерно, очевидно, слишком ограничительно. От него можно избавиться, предполагая E и F полными.

Доказательство. Докажем утверждение 1°). Пусть $(\vec{f}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — некоторый базис в пространстве $\vec{F}$. Поскольку отображение $f'(a)$ сюръективно, существуют векторы $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$, имеющие образами векторы $\vec{f}_i$. Векторы $\vec{X}_i$ линейно независимы, поскольку линейно независимы их образы при отображении $f'(a)$; поэтому сужение $f'(a)$ на m-мерное векторное подпространство $\vec{E}_0$, порожденное векторами $\vec{X}_i$, является сюръективным отображением $\vec{E}_0$ на $\vec{F}$. Но так как $\vec{E}_0$ и $\vec{F}$ имеют одинаковую размерность, то $f'(a)$ *является биективным отображением* $\vec{E}_0$ *на* $\vec{F}$; другими словами, рассматриваемое как линейное отображение $\vec{E}_0$ в $\vec{F}$, оно обратимо. Пространство $\vec{E}_0$, в силу конечномерности, полно (теорема 41 гл. II). Сужение отображения f на аффинное подпространство E_0, проходящее через a параллельно $\vec{E}_0$, имеет в точке a обратимую производную, а само E_0 полно. Применяя к нему теорему 29, получаем утверждение 1°). Мы видим, что если $\mathscr{V}$ является окрестностью точки a, то не только образ $f(\mathscr{V})$ является окрестностью $f(a)$, но даже $f(\mathscr{V} \cap E_0)$ есть окрестность точки $f(a)$.

Переход к 2°) производится точно так же, как при доказательстве теоремы 29, т. е. с использованием критерия А) для открытых отображений. Естественно, здесь не возникает вопроса о том, является ли f локальным гомеоморфизмом, так как $f'(x)$ не предполагалось инъективным.

Вычисление производных высшего порядка неявной функции

Теорема 31. *Если при условиях теоремы 28 функция f непрерывно дифференцируема m раз в Ω, то неявная функция g непрерывно дифференцируема m раз в A.*

Доказательство. Поскольку эта теорема уже доказана для $m=1$ (теорема 28), рассуждения будем проводить по индукции: предположим, что она доказана для производных порядка $m-1$, и докажем ее для производных порядка $m \geqslant 2$. Заметим сначала, что уравнение $uv=I$, рассматриваемое во втором доказательстве теоремы 27, входит сюда в виде уже изученного случая, ибо функция $(u, v) \to uv$ билинейна и непрерывна, а, следовательно, бесконечно дифференцируема. Отображение $u \to u^{-1}$, в силу индуктивного предположения, принадлежит классу C^{m-1} на $\mathscr{U}$. Рассмотрим теперь формулу

(III, 8; 37). Функция g непрерывна, поскольку, в силу индуктивного предположения, она принадлежит классу C^{m-1}. Функция $\partial f/\partial x$ принадлежит классу C^{m-1}, так как f принадлежит C^m. Поэтому, согласно теореме 19, отображение $x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$ принадлежит классу C^{m-1}. То же самое имеет место для отображения $x \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$. Поскольку, как мы только что видели, функция $u \to u^{-1}$ также принадлежит классу C^{m-1}, из теоремы 19 следует, что функция $x \to \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1}$ принадлежит классу C^{m-1}. Наконец, $(u, v) \to v \circ u$ является билинейным непрерывным отображением $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G}) \times \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$ (теорема 54). Из теоремы 18 следует, что g' принадлежит C^{m-1}, а, значит, g принадлежит классу C^m.

Следствие 1. *Если $\vec{F}$ и $\vec{G}$ — пространства Банаха, а $\mathscr{U}$ (соответственно $\mathscr{U}^{-1}$) — открытое множество обратимых элементов из $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ (соответственно из $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$), то $u \to u^{-1}$ является гомеоморфизмом $\mathscr{U}$ на $\mathscr{U}^{-1}$, бесконечно дифференцируемым вместе со своим обратным гомеоморфизмом.*

Это дополняет теорему 27. По существу мы уже доказали это следствие по индукции во время доказательства теоремы 30.

Определение. Если биекция вместе со своей обратной биекцией принадлежит классу C^m, но она называется *C^m-диффеоморфизмом.* Так, например, отображение $u \to u^{-1}$ является C^∞-диффеоморфизмом $\mathscr{U}$ на $\mathscr{U}^{-1}$.

Следствие 1_2. *Если $\vec{u}$ является m раз дифференцируемым отображением (соответственно принадлежит классу C^m) открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$ и если $\vec{u}(x)$ для каждого $x \in \Omega$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$, то $x \to u^{-1}(x)$ является m раз дифференцируемым (соответственно принадлежащим классу C^m) отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$.*

Это вытекает из следствия 1 и теоремы 19, примененной к композиции отображений $x \to u(x)$ и $u \to u^{-1}$.

Отметим важный частный случай: *функция $1/f$, обратная к скалярной функции f ($\vec{F} = \vec{G} = \mathbb{K} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{G})$), m раз дифференцируемой или принадлежащей классу C^m на $\Omega \subset E$ и всюду $\neq 0$, также m раз дифференцируема или принадлежит классу C^m.*

Если $t \to \mathfrak{M}(t)$ является дважды дифференцируемой функцией, определенной на $\mathbb{K}$, со значениями в пространстве квадратных матриц и если $\mathfrak{M}(t)$ обратима для каждого t, то вторая производная $\frac{d^2}{dt^2}(\mathfrak{M}^{-1})$ получается непосредственным дифференцированием (III, 8; 34):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathfrak{M}^{-1}) = 2\mathfrak{M}^{-1}\frac{d\mathfrak{M}}{dt}\mathfrak{M}^{-1}\frac{d\mathfrak{M}}{dt}\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{M}^{-1}\frac{d^2\mathfrak{M}}{dt^2}\mathfrak{M}^{-1}.$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 29, 1°) *отображение f принадлежит классу C^m, то обратная биекция f^{-1} отображения f является отображением B в A класса C^m: f является C^m-диффеоморфизмом A на B.*

Вычисление в самом общем случае производной функции g порядка m, исходя из частных производных функции f порядков $\leqslant m$, приводит к чрезвычайно сложным алгебраическим выражениям.

Мы ограничимся рассмотрением частного примера. Пусть f — функция трех вещественных переменных. Будем считать, что уравнение

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{(III, 8; 46)}$$

определяет z как функцию переменных x и y в окрестности точки, в которой частная производная $\partial f/\partial z$ отлична от нуля. Вычислим в этой точке частные производные p, q, r, s, t функции z, исходя из частных производных функции f. В (III, 8; 16) мы уже получили формулы

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \qquad \text{(III, 8; 47)}$$

Остается теперь с помощью теоремы о сложной функции продифференцировать предыдущие выражения по x и y и получить следующие выражения:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{dy}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}. \qquad \text{(III, 8; 48)}$$

Можно поступить иначе. Соотношение, дающее p, записывается в исходном виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0. \qquad (III, 8; 49)$$

Затем полученное равенство дифференцируется по x и y с одновременной заменой dz, dp, dq на $p\,dx+q\,dy$, $r\,dx+s\,dy$, $s\,dx+t\,dy$. Таким путем получается соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(p\,dx+q\,dy)+\frac{\partial f}{\partial z}(r\,dx+s\,dy)+$$

$$+p\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx+p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy+p\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p\,dx+q\,dy)=0. \qquad (III, 8; 50)$$

Приравнивая затем нулю коэффициенты при dx и dy, получаем некоторые равенства, из которых находятся частные производные r и s. Аналогичные вычисления проводятся исходя из соотношения $\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0$ для нахождения s и t.

Существует другой метод, использующий разложение Тейлора (см. теоремы 21_2 и 21_3).

Запишем разложение Тейлора функции f в окрестности точки x, y, z до 2-го порядка:

$$0=f(x+X,\, y+Y,\, z+Z)-f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}X^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}Y^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}Z^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}YZ+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}ZX+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}XY\right]+\dots \qquad (III, 8; 51)$$

Если в этой формуле Z заменить его разложением Тейлора в точке X, Y, т. е. положить

$$Z=pX+qY+\frac{1}{2}(rX^2+2sXY+tY^2)+\dots, \qquad (III, 8; 52)$$

то получится тождественный нуль. Приравнивая нулю коэффициенты при X, Y, X^2, XY, Y^2, получим 5 уравнений, дающих p, q, r, s, t. Прежде всего, приравнивая нулю коэффициенты при X и Y, получаем соотношения для определения p и q. Приравнивая затем нулю коэффициенты при X^2, XY, Y^2, находим

$$\frac{\partial f}{\partial z}r+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}p^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}p=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}s+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}pq+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}p+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}q+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0, \qquad (III, 8; 53)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}t+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}q^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}q=0,$$

откуда и получаются выражения (III, 8; 48).

В этом методе, использующем разложение Тейлора, можно провести другой вариант преобразований: вычислить первые производные p и q, перейти к вычислению вторых, приравнивая нулю соотношение (III, 8; 51) и выражая в нем Z как функцию других величин, т. е. X, Y, X^2, XY, Y^2, XZ, YZ, Z^2. При этом получится формула

$$\frac{\partial f}{\partial z} Z = -\frac{\partial f}{\partial x} X - \frac{\partial f}{\partial y} Y - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} Z^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} YZ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} ZX + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} XY\right] + \ldots, \qquad (\text{III}, 8; 54)$$

в которой переменная Z выражена через XZ, YZ и Z^2. Однако для того чтобы иметь приближение второго порядка, можно удовлетвориться заменой в этом выражении Z на $pX + qY$, где p и q были вычислены ранее. Таким путем получим выражение

$$\frac{\partial f}{\partial z} Z = -\frac{\partial f}{\partial x} X - \frac{\partial f}{\partial y} Y -$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} X(pX + qY) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} Y(pX + qY) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(pX + qY)^2\right] + \ldots . \qquad (\text{III}, 8; 55)$$

Вычисляя коэффициенты при X^2, $2XY$, Y^2 в разложении Z, снова получим $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}t$.

Техника замены переменных и замены функций

С заменой переменных мы встречались ранее до теоремы о неявной функции, но теперь эта теорема позволяет производить значительно более важные замены.

Предположим, что задано уравнение в частных производных второго порядка относительно скалярной функции z двух скалярных переменных x и y:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \qquad (\text{III}, 8; 56)$$

Необходимо выполнить в нем одновременно замену переменных и замену функции по формулам

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z)\ ^{1)}. \qquad (\text{III}, 8; 57)$$

Мы хотим узнать, как преобразуется рассматриваемое уравнение в частных производных при такой замене переменных. Она законна лишь в том случае, когда (III, 8; 57) определяет C^2-диффеоморфизм некоторого открытого множества из $\mathbb{K}^3$ на открытое множество в $\mathbb{K}^3$ и поверхность $z = z(x, y)$, определяе-

[1]) X, Y, Z имеют, очевидно, не тот смысл, какой им придавался ранее.

мая уравнением (III, 8; 56), преобразуется в поверхность $Z = Z(X, Y)$ так, что обе написанные функции принадлежат классу C^2. Следуя обычному методу, надо выразить p, q, r, s, t как функции новых частных производных P, Q, R, S, T. Можно начать с производных первого порядка и затем перейти к вычислению производных второго порядка. Для производных первого порядка можно начать с соотношения $dZ = PdX + QdY$, заменяя dX, dY, dZ их дифференциальными выражениями, найденными из (III, 8; 57), и получая таким путем соотношение между dx, dy, dz. Это соотношение, представленное в виде $dz = pdx + qdy$, позволит выразить p и q через x, y, z, P, Q. Дифференцируя полученное соотношение, затем находим dp как функцию от dx, dy, dz, dP, dQ. Заменяя dz, dP, dQ на $pdx + qdy$, $Rdx + Sdy$, $SdX + TdY$, затем p и q их значениями, найденными прежде, dX и dY — их значениями, полученными из (III, 8; 57) (где dz должно быть заменено на $pdx + qdy$ с уже найденными p и q), мы выражаем dp как комбинацию dx и dy, которая, будучи представленной в виде $dp = rdx + sdy$, дает r и s как функции от x, y, z, P, Q, R, S, T.

Точно так же вычисляется t. Полученные результаты подставляются в (III, 8; 56).

Полученное уравнение относительно P, Q, R, S, T содержит в действительности *величины* x, y, z, *а не* X, Y, Z. Поэтому, если эти переменные входят в уравнение, следует еще выразить (x, y, z) через (X, Y, Z), решая систему уравнений (III, 8; 57) [1].

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В теореме 8А мы рассматривали множество $\mathscr{E}$ в произведении аффинных пространств $E \times F$, определенное уравнением $y = f(x)$. Оно называется *дифференцируемым многообразием*, если f является дифференцируемой функцией. Это множество называется *m раз дифференцируемым многообразием*, если функция f дифференцируема m раз; *непрерывно дифференцируемым многообразием* или *m раз непрерывно дифференцируемым многообразием*, если f непрерывно дифференцируема или m раз непрерывно дифференцируема; *бесконечно дифференцируемым многообразием*, если f бесконечно дифференцируема. Вместо того чтобы говорить, что многообразие m раз непрерывно

[1] Вместо (III, 8; 57) могут быть заданы старые координаты как функции новых или заданы три неразрешенных соотношения между старыми и новыми переменными. Имеется много возможных вариантов. Вместо того чтобы начать сразу применять стандартную замену, надо сначала подумать! В математическом анализе можно встретить, например, такую замену переменных, когда кривизна кривой $y = y(x)$, выраженная через y' и y'' в декартовой системе координат, вычисляется как функция от r, r', r'' для кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах.