мая уравнением (III, 8; 56), преобразуется в поверхность $Z = Z(X, Y)$ так, что обе написанные функции принадлежат классу $C^2$. Следуя обычному методу, надо выразить $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ как функции новых частных производных $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$. Можно начать с производных первого порядка и затем перейти к вычислению производных второго порядка. Для производных первого порядка можно начать с соотношения $dZ = PdX + QdY$, заменяя $dX$, $dY$, $dZ$ их дифференциальными выражениями, найденными из (III, 8; 57), и получая таким путем соотношение между $dx$, $dy$, $dz$. Это соотношение, представленное в виде $dz = pdx + qdy$, позволит выразить $p$ и $q$ через $x$, $y$, $z$, $P$, $Q$. Дифференцируя полученное соотношение, затем находим $dp$ как функцию от $dx$, $dy$, $dz$, $dP$, $dQ$. Заменяя $dz$, $dP$, $dQ$ на $pdx + qdy$, $Rdx + Sdy$, $SdX + TdY$, затем $p$ и $q$ их значениями, найденными прежде, $dX$ и $dY$ — их значениями, полученными из (III, 8; 57) (где $dz$ должно быть заменено на $pdx + qdy$ с уже найденными $p$ и $q$), мы выражаем $dp$ как комбинацию $dx$ и $dy$, которая, будучи представленной в виде $dp = rdx + sdy$, дает $r$ и $s$ как функции от $x$, $y$, $z$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$.

Точно так же вычисляется $t$. Полученные результаты подставляются в (III, 8; 56).

Полученное уравнение относительно $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ содержит в действительности *величины* $x$, $y$, $z$, *а не* $X$, $Y$, $Z$. Поэтому, если эти переменные входят в уравнение, следует еще выразить $(x, y, z)$ через $(X, Y, Z)$, решая систему уравнений (III, 8; 57) [1].

## § 9. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В теореме 8А мы рассматривали множество $\mathscr{E}$ в произведении аффинных пространств $E \times F$, определенное уравнением $y = f(x)$. Оно называется *дифференцируемым многообразием*, если $f$ является дифференцируемой функцией. Это множество называется *$m$ раз дифференцируемым многообразием*, если функция $f$ дифференцируема $m$ раз; *непрерывно дифференцируемым многообразием* или *$m$ раз непрерывно дифференцируемым многообразием*, если $f$ непрерывно дифференцируема или $m$ раз непрерывно дифференцируема; *бесконечно дифференцируемым многообразием*, если $f$ бесконечно дифференцируема. Вместо того чтобы говорить, что многообразие $m$ раз непрерывно

[1]) Вместо (III, 8; 57) могут быть заданы старые координаты как функции новых или заданы три неразрешенных соотношения между старыми и новыми переменными. Имеется много возможных вариантов. Вместо того чтобы начать сразу применять стандартную замену, надо сначала подумать! В математическом анализе можно встретить, например, такую замену переменных, когда кривизна кривой $y = y(x)$, выраженная через $y'$ и $y''$ в декартовой системе координат, вычисляется как функция от $r$, $r'$, $r''$ для кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах.

дифференцируемо, говорят, что оно принадлежит классу $C^m$. Вместо того чтобы говорить, что многообразие бесконечно дифференцируемо, говорят, что оно принадлежит классу $C^\infty$. Чаще всего встречаются многообразия, принадлежащие классам $C^m$ и $C^\infty$. Если $m = 0$, то многообразие называется *топологическим.* Оно определяется уравнением $y = f(x)$, где функция $f$ непрерывна. Топологические многообразия играют очень важную роль, *но мы ограничимся изучением многообразий класса $C^m$ при $m \geqslant 1$.*

Очевидно, что такое определение многообразия не является самым общим. Так, например, в евклидовом аффинном пространстве размерности $N$ естественно рассматривать сферу как бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $N—1$. Однако если выбрать в нем систему координат, то невозможно описать полностью *всю сферу*, выражая одну из координат как бесконечно дифференцируемую функцию остальных[1]). Придется разделить сферу на достаточно малые области, так чтобы в каждой из этих областей можно было одну из координат выразить как бесконечно дифференцируемую функцию остальных. Это обстоятельство приводит к общему понятию многообразия класса $C^m$.

*Определение многообразия путем выражения некоторых координат как функции остальных.* Пусть $E$ — аффинное пространство размерности $N$ над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел и $V$ — некоторое подмножество $E$. Множество $V$ называется *многообразием размерности $n$, принадлежащим классу $C^m$*, если для каждой точки $a$ множества $V$ существуют: система координат $0, e_1, e_2, \ldots, e_N$ пространства $E$, открытое множество $\mathscr{B}$ в подпространстве, натянутом на $n$ первых координатных осей, система $N-n$ скалярных функций $G_k$, $k = 1, 2, \ldots, N-n$, класса $C^m$, определенных на $\mathscr{B}$, открытое множество $\mathscr{V}$ пространства $E$, содержащее $a$, проекция которого на подпространство, натянутое на $n$ первых осей, совпадает с $\mathscr{B}$, такие, что пересечение $V \cap \mathscr{V}$ является в точности множеством точек $x = (x_1, \ldots, x_N)$ из $E$, удовлетворяющих уравнениям

$$x_{n+k} = G_k(x_1, \ldots, x_N)^{2)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-n. \qquad \text{(III, 9; 1)}$$

---

[1]) Уравнение сферы с центром в начале координат радиуса $R$ в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $x_n = \pm\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}$. Из-за наличия знаков $\pm$ это не одна функция (и даже если выбрать знак $+$, то не получится функция, дифференцируемая при $x_n = 0$).

[2]) Согласно указанному свойству проекции множества $\mathscr{V}$, точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лежит в $\mathscr{B}$, где определены функции $G_k$.

Итак, в $\mathscr{V}$ последние $N-n$ координат $x_{n+1}, \ldots, x_N$ на многообразии $V$ выражаются как функции класса $C^m$ первых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые можно выбирать в $\mathscr{B}$ произвольно. (В том, что первые координаты играют особую роль, нет ничего удивительного, поскольку для рассматриваемой точки $a$ из $V$ мы *выбираем* систему координат в $E$. Если эту особую роль играют другие координаты, то изменением порядка векторов в системе координат можно добиться того, чтобы это были первые $n$ координат.)

Позже мы дадим (следствие теоремы 32) эквивалентное определение, в котором первые $n$ координат не играют никакой особой роли, поскольку раз и навсегда выбирается определенная система координат в $E$.

Можно еще сказать, что *разделение системы из $N$ координат на $n$ первых и $N-n$ остальных равносильно представлению $E$ в виде произведения $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$ и что, если обозначить через $g$ отображение открытого множества $\mathscr{B}$ из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^{N-n}$, определенное формулами* (III, 9; 1), *то $g$ принадлежит классу $C^m$, а множество $V \cap \mathscr{V}$ является в точности множеством точек $x=(y, z)$ из $E=\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$, удовлетворяющих уравнению $z=g(y)$*.

Таким образом, мы вернулись к частному случаю, рассмотренному в теореме 8А, но для того, чтобы это стало возможным, мы в окрестности точки $a$ специальным образом выбрали систему координат.

### Определение многообразия при помощи его параметрического представления

Пусть $V$ — множество $N$-мерного аффинного пространства $E$. *Истинным*[1]) *параметрическим представлением множества $V$ размерности $n$, принадлежащим классу $C^m$*, называется отображение $\Phi$: $u \to \Phi(u)$ открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{K}^n$ в $E$, обладающее следующими свойствами:

1°) $\Phi$ является гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на $V$;

2°) $\Phi$ является отображением множества $\mathcal{O}$ в пространство $E$, принадлежащим классу $C^m$;

3°) в каждой точке $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{O}$ производное отображение $\Phi'(\alpha) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n; \vec{E})$ имеет ранг $n$. Иначе говоря, образ векторного пространства $\mathbb{K}^n$ при этом отображении является векторным подпространством в $E$ размерности $n$, т. е. частные производные векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(\alpha)$, $j=1, 2, \ldots, n$, являются линейно независимыми векторами в $E$, т. е. хотя бы один из

[1]) В дальнейшем слово «истинное» часто опускается. — *Прим. ред.*

определителей ранга $n$ производной матрицы (матрицы, составленной из элементов $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}(\alpha)$) отличен от нуля.

Можно подумать, что многообразия размерности $n$ класса $C^m$ из $E$ будут единственными множествами, допускающими такое параметрическое представление. С другой стороны, совершенно очевидно, что многообразие, вообще говоря, может и не иметь такого параметрического представления. В самом деле, для параметрического представления необходимо, чтобы рассматриваемое многообразие было гомеоморфно некоторому открытому множеству из $\mathbb{K}^n$. Пример сферы, являющейся компактным множеством, показывает, что многообразие может не быть, вообще говоря, гомеоморфным открытому множеству из $\mathbb{K}^n$. Мы снова убеждаемся, что только достаточно малые области многообразия могут иметь такие параметрические представления.

Конечно, в задание $\Phi$ входит задание открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{K}^n$ и его образа $\Phi(\mathcal{O})$ в $V$, но их обычно указывают, когда пишут $\Phi : \mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$.

Теорема 32. *Для того чтобы множество $V$ некоторого аффинного пространства $E$ размерности $N$ было многообразием класса $C^m$ размерности $n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in V$ существовала такая открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки $a$ в $E$, чтобы пересечение $V \cap \mathscr{V}$ допускало параметрическое представление размерности $n$, принадлежащее классу $C^m$.*

Доказательство. 1°) Предположим, что $V$ является многообразием размерности $n$, принадлежащим классу $C^m$. Пусть $a$ — некоторая точка $V$. Определим открытые множества $\mathscr{B}$ и $\mathscr{V}$, как это было сделано в определении. Тогда для того, чтобы получить параметрическое представление искомого вида, достаточно положить $\mathcal{O} = \mathscr{B}$ и при помощи функций $G_k$ из (III, 9; 1) определить отображение $u \to x = \Phi(u)$ формулами

$$x_1 = u_1, \quad \ldots, \quad x_n = u_n, \quad x_{n+1} = G_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_N = \\ = G_{N-n}(u_1, \ldots, u_n). \qquad \text{(III, 9; 2)}$$

Здесь якобиан $\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}$ отличен от нуля [1].

2°) Предположим теперь, что $V$ есть некоторое множество пространства $E$, обладающее указанными свойствами. Дока-

[1]) То, что мы здесь проделали, напоминает «хитрый» прием первокурсника, который для исследования кривой $y = f(x)$ предпочитает записывать ее в виде $x = t$, $y = f(t)$.

жем, что тогда $V$ является многообразием размерности $m$, принадлежащим классу $C^m$.

Пусть $a$ — некоторая точка $V$ и $\Phi$ — истинное параметрическое представление, т. е. гомеоморфизм некоторого открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{K}^n$ на окрестность $a$ в $V$. Выберем *произвольно* систему координат в $E$. Тогда отображение $\Phi$ будет иметь в точке $\alpha = \Phi^{-1}(a)$ некоторую производную матрицу по отношению к системам координат в $\mathbb{K}^n$ и $E$. Эта производная матрица по предположению имеет ранг $n$, и по крайней мере один из ее определителей $n$-го порядка $\neq 0$. Изменяя при необходимости порядок векторов базиса $E$, мы можем предполагать, что этот определитель является якобианом $\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}$. Таким путем построенная система координат в $E$ отождествляет это пространство с пространством $\mathbb{K}^N$, а разделение на систему из $n$ первых координат и $N-n$ остальных отождествляет его с $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$. Поэтому каждую точку $x$ из $E$ мы будем представлять как пару $(y, z)$, $y \in \mathbb{K}^n$, $z \in \mathbb{K}^{N-n}$. Пусть $a = (b, c)$. Отображение $\Phi$ является отображением открытого множества $\mathcal{O}$ в произведение $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$ и, следовательно, разлагается на систему двух отображений $\mathrm{X}$ и $\Psi$ множества $\mathcal{O}$ соответственно в пространства $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^{N-n}$, а именно: $y = \mathrm{X}(u)$, $z = \Psi(u)$. Но тогда якобиан отображения $\mathrm{X}$ множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^n$ в точке $\alpha$ отличен от нуля. Следовательно, согласно теореме 29, существует открытое множество $\mathcal{A}$ в множестве $\mathcal{O}$, содержащее точку $\alpha$, и открытое множество $\mathcal{B}$ в пространстве $\mathbb{K}^n$, содержащее точку $b$, такие, что $\mathrm{X}$ является гомеоморфизмом $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, непрерывно дифференцируемым вместе со своим обратным гомеоморфизмом. Кроме того, отображение $\mathrm{X}$ принадлежит классу $C^m$, а следствие 2 теоремы 31 говорит о том, что его обратный гомеоморфизм также принадлежит классу $C^m$. Обозначим этот обратный гомеоморфизм $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ через $\mathrm{X}^{-1}$. Образ $\mathcal{A}$ при отображении $\Phi$ является открытым множеством в $V$, поскольку $\Phi$ есть гомеоморфизм множества $\mathcal{O}$ на его образ, являющийся открытым множеством в $V$. Следовательно, существует такая открытая окрестность $\mathcal{V}$ точки $a$ в $E$, что $\Phi(\mathcal{A}) = V \cap \mathcal{V}$. Поскольку $\Phi(\mathcal{A})$ проектируется в пространство $\mathbb{K}^n$ на множество $\mathcal{B}$, можно считать, что множество $\mathcal{V}$ также проектируется на $\mathcal{B}$ (в противном случае можно взять его пересечение с открытым множеством $\{x;\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}\}$ пространства $\mathbb{K}^N$). Для того чтобы точка $x = (y, z)$ принадлежала пересечению $V \cap \mathcal{V}$, необходимо и достаточно, чтобы она была образом некоторой точки из $\mathcal{A}$ при отображении $\Phi$, т. е. чтобы точка $y$ принадлежала $\mathcal{B}$, а точка $z$ была связана с точкой $y$ формулой $z = \Psi(\mathrm{X}^{-1}(y))$. Эта композиция $g = \Psi \circ \mathrm{X}^{-1}$ двух отображений класса $C^m$, по теореме 19, сама является отображением класса $C^m$. Итак, нам удалось найти окрестность $\mathscr{V}$ точки $a$ в пространстве $E$ и некоторую систему координат в $E$, такие, что пересечение $V \cap \mathscr{V}$ представляется с помощью уравнения $z = g(y)$, где $g$ — отображение $\mathscr{B}$ в $E$ класса $C^m$. Поскольку это верно для любой точки $a$ из $V$, то $V$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$.

Одновременно мы доказали, что если заранее выбрать определенную систему координат в $E$, то для каждой точки $a$ из $V$ достаточно соответствующим образом изменить порядок векторов базиса для того, чтобы получить систему координат, обладающую свойствами, указанными в определении многообразия. Это изменение, очевидно, зависит от выбора точки $a$.

Таким образом, можно сформулировать

Следствие 1. *Пусть $V$ — некоторое множество аффинного пространства $E$ размерности $N$. Для того чтобы $V$ было многообразием размерности $n$ класса $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы при произвольно выбранной системе координат в $E$ для каждой точки $a \in V$ выполнялись следующие условия: найдется такая перестановка $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ множества $1, 2, \ldots, N$, что существуют некоторое открытое множество $\mathscr{B}$ в подпространстве, порожденном началом координат и базисными векторами $\vec{e}_{\sigma_1}, \vec{e}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{e}_{\sigma_n}$, и открытое множество $\mathscr{V} \subset E$, содержащее $a$, проекция которого на предыдущее подпространство совпадает с $\mathscr{B}$; кроме того, существует система $N-n$ скалярных функций $G_k$, $k = 1, 2, \ldots, N-n$, класса $C^m$, заданных на $\mathscr{B}$ и таких, что пересечение $V \cap \mathscr{V}$ определяется уравнениями*

$$x_{\sigma_{n+k}} = G_k\left(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_n}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-n. \qquad \text{(III, 9; 3)}$$

Следствие 2. *Пусть $E$ и $F$ — два конечномерных аффинных пространства одной и той же размерности, $H$ — диффеоморфизм класса $C^m$ некоторого открытого множества $\mathscr{U}$ из $E$ на открытое множество $H(\mathscr{U})$ из $F$. Тогда если $V$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$ в множестве $\mathscr{U}$, то его образ $H(V)$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$ в $H(\mathscr{U})$.*

Это следствие говорит о том, что *многообразия класса $C^m$ сохраняются при $C^m$-диффеоморфизмах.*

Доказательство. Пусть $\Phi : \mathscr{O} \to \Phi(\mathscr{O})$ — параметрическое представление открытого множества $\Phi(\mathscr{O})$ из $V$. Тогда отображение $H \circ \Phi$ является гомеоморфизмом $\mathscr{O}$ на $H(\Phi(\mathscr{O}))$, т. е. отображением класса $C^m$ множества $\mathscr{O}$ в пространство $F$. Пусть $\alpha \in \mathscr{O}$. Так как ранг отображения $\Phi'(\alpha)$ равен $n$, а отображение $H'(\Phi(\alpha))$ является линейной биекцией, то ранг $(H\circ\Phi)'(\alpha)=H'(\Phi(\alpha))\circ\Phi'(\alpha)$ также равен $n$ (следствие 4 теоремы 11, примененное к отображению $H$). Значит, отображение $H\circ\Phi$ является параметрическим представлением размерности $n$ класса $C^m$. Можно выбрать семейство представлений, подобных $\Phi$, так, чтобы их образы покрывали $V$; тогда образы $H\circ\Phi$ покрывают $H(V)$, чем и заканчивается доказательство следствия.

Следствие $2_2$. *Для того чтобы множество $V$ аффинного пространства $E$ размерности $N$ было многообразием размерности $n$ класса $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a\in V$ существовал $C^m$-диффеоморфизм $\tilde{\Phi}$ открытого множества $\tilde{\mathcal{O}}\subset\mathbb{K}^N$ на такую окрестность $\mathcal{V}$ точки $a$ в $E$, что $V\cap\mathcal{V}$ является образом при отображении $\tilde{\Phi}$ пересечения $\tilde{\mathcal{O}}$ и векторного подпространства $\mathbb{K}^n$, порожденного первыми $n$ векторами базиса $\mathbb{K}^N$.*

Это следствие говорит о том, что с помощью $C^m$-диффеоморфизма можно локально свести многообразие класса $C^m$ размерности $n$ в $E$ к векторному подпространству размерности $n$ в пространстве $\mathbb{K}^N$.

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что множество $V$ обладает требуемым свойством. В каждой точке $\alpha$ из $\tilde{\Phi}^{-1}(V)$ производная $\tilde{\Phi}'(\alpha)$ является линейной биекцией $\mathbb{K}^N$ на $E$ (следствие 4 теоремы 11). Следовательно, она вместе со своим сужением на рассматриваемое подпространство $\mathbb{K}^n$ является инъекцией, и, значит, это сужение имеет ранг $n$. Сужение $\Phi$ отображения $\tilde{\Phi}$ на $\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}\cap\mathbb{K}^n$ является параметрическим представлением размерности $n$ класса $C^m$, и, поскольку каждая точка $V$ имеет некоторую окрестность, допускающую такое параметрическое представление, $V$ действительно является многообразием размерности $n$ класса $C^m$.

2°) Обратно, пусть $V$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$. Согласно определению, если $a\in V$, то существует система координат в $E$ и некоторая окрестность $\mathcal{V}$ точки $a$ в $E$, в которой $V$ может быть определено формулами (III, 9; 1) с $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathcal{B}^*$ открытое множество из $\mathbb{K}^N$, образованное точками, первые $n$ координат которых определяют точку из $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}^*=\{x;\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)\in\mathcal{B}\}$. Тогда формулы

$$\begin{aligned} &x_j=u_j,\ j=1,2,\ldots,n,\\ &x_{n+k}=u_{n+k}+G_k(u_1,u_2,\ldots,u_n),\ k=1,2,\ldots,N-n, \end{aligned} \tag{III, 9; $3_2$}$$

определят некоторое отображение $\tilde{\Phi}$ множества $\mathcal{B}^*$ в $\mathbb{K}^N$, совпадающее с $E$, причем $\tilde{\Phi}(\mathcal{B}^*)=\mathcal{B}^*$. Отображение $\tilde{\Phi}$ является биекцией с обратной биекцией $\tilde{\Phi}^{-1}$, определяемой равенствами

$$\begin{aligned} &u_j = x_j, \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ &u_{n+k} = x_{n+k} - G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ k = 1, 2, \ldots, N - n. \end{aligned} \qquad \text{(III, 9; 3}_3\text{)}$$

Так как $G_k$ принадлежат классу $C^m$, то оба отображения $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}^{-1}$ принадлежат классу $C^m$. Следовательно, $\tilde{\Phi}$ является гомеоморфизмом класса $C^m$ вместе со своим обратным гомеоморфизмом. Если через $\tilde{\mathcal{O}}$ обозначить прообраз $\tilde{\Phi}^{-1}(\mathcal{V})$, то $\tilde{\mathcal{O}}$ является открытым множеством в $\mathbb{K}^N$, а сужение $\Phi$ на $\tilde{\mathcal{O}}$ обладает теми же свойствами. Но тогда $V \cap \mathcal{V}$ определяется уравнениями (III, 9; 1) и, следовательно, является образом подпространства $u_{n+k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N - n$, при отображении $\tilde{\Phi}$, чем и заканчивается доказательство следствия.

Если $V$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$, то всякое параметрическое представление $\Phi$ класса $C^m$ открытого множества $V \cap \mathcal{V}$ этого многообразия называется также *локальной картой класса* $C^m$, или просто *картой*, если нет опасности путаницы. Множество $\Phi(\mathcal{O}) = V \cap \mathcal{V}$ называется *образом этой карты*, а $\Phi$ называется также *картой множества* $V \cap \mathcal{V}$. Если $\Phi(\mathcal{O})$ содержит точку $a \in V$, то говорят также, что *карта покрывает эту точку. Атласом многообразия* $V$ называется множество карт открытых множеств из $V$, образы которых покрывают $V$. *Универсальным атласом* $V$ называется множество всех карт (размерности $n$ класса $C^m$) открытых множеств из $V$[1]).

Слова «карта» и «атлас», очевидно, взяты из картографии. Земная поверхность приближенно представляет собой сферу, и ее можно рассматривать как некоторое многообразие $V$ размерности 2. Глобального параметрического представления этого компактного многообразия, заданного в некотором открытом множестве из $\mathbb{R}^2$, не существует. Однако существует покрытие $V$ системой открытых множеств, каждое из которых является образом некоторой карты. Поскольку $V$ компактно, существует, естественно, *конечный атлас* для $V$, т. е. атлас, содержащий конечное число карт[2]). Каждая «страница» атласа является прямоугольником, который мы будем рассматривать как *открытый* прямоугольник из $\mathbb{R}^2$. Около тех или иных точек этого прямоугольника отмечается название соответствующего места на Земле, т. е. некоторых точек множества $V$. На идеальной с математической точки зрения карте

[1]) *Универсальный атлас есть множество карт, имеющее мощность континуума.*

[2]) Географические атласы содержат конечное число карт. Универсальный атлас по причине, указанной в предыдущем примечании, был бы очень громоздким и обошелся бы слишком дорого.

*каждой* точке прямоугольника ставится в соответствие некоторая точка Земли, т. е. определяется отображение $\Phi$ открытого прямоугольника на некоторое открытое множество многообразия $V$. Из того факта, что карты являются открытыми множествами, немедленно вытекает, что некоторые точки $V$ покрываются несколькими картами атласа (мы требуем, чтобы каждый город мира был представлен внутренней точкой хотя бы одной из прямоугольных карт). Если бы каждая точка покрывалась не более чем один раз, то $V$ было бы объединением конечного числа $>1$ открытых непересекающихся множеств, т. е. было бы несвязным. Однако хотим мы этого или нет, Земля, как и всякая сфера, связна.

Примеры многообразий. 1°) Каждое линейное многообразие размерности $n$ является бесконечно дифференцируемым многообразием. Оно содержит атлас, состоящий из одной карты, получаемой при выборе системы координат в этом многообразии, — системы координат, которая определяет некоторую линейную биекцию $\Phi$ пространства $\mathbb{K}^n$ на это многообразие, обладающую всеми требуемыми свойствами. В частности, пространство $E$ само является многообразием.

2°) Мы неявно предполагали, что $n \geqslant 1$. Можно рассматривать как многообразие размерности 0 каждое *множество $V$ изолированных точек $E$*. Картой некоторой окрестности точки $a \in V$ является отображение $0 \to a$ множества $\mathbb{K}^0 = \{0\}$ в множество $\{a\}$.

Можно также рассматривать пустое множество $\emptyset$ как многообразие размерности $-1$, вовсе не имеющее карт.

Многообразие размерности 1 называется *кривой*, многообразие размерности 2 — *поверхностью*, а многообразие размерности $N-1$ называется *гиперповерхностью*. Однако эти слова использовались и используются в столь различных смыслах, что надо быть осторожными при их применении. Принято рассматривать лемнискату Бернулли как «кривую»; однако из-за своей особой точки она не является многообразием. Говоря «кривая класса $C^m$», следует уточнить, что речь идет о «многообразии размерности 1 класса $C^m$», и лемниската будет исключена.

3°) *Многообразие $V$ размерности $N$ аффинного пространства $E$ размерности $N$ — это просто некоторое открытое множество из $E$.* (В самом деле, здесь $N-n=0$. Если обратиться к определению, можно убедиться, что уравнение (III, 9; 1) отсутствует, а $V \cap \mathscr{V} = \mathscr{V} = \mathscr{B}$ является открытым множеством в $E$, содержащим $a$. Определение выражает просто тот факт, что каждая точка $a \in V$ имеет окрестность $\mathscr{V}$ в $E$, принадлежащую $V$, т. е. что $V$ открыто.) *Каждое такое открытое множество является многообразием класса $C^\infty$ и имеет атлас из одной карты, определяемой тождественным отображением $V \subset E$ в $V$, где $E$ отождествляется с $\mathbb{K}^N$ с помощью некоторой системы координат.*

*Каждая часть многообразия $V$ из $E$, являющаяся открытым множеством в $V$, будет многообразием того же класса и той же размерности.*

*Обратно, если $W$ и $V$ — некоторые многообразия из $E$ одной и той же размерности $n$ и $W \subset V$, то $W$ является просто некоторым открытым подмножеством из $V$.* В самом деле, пусть $a \in W$. Согласно следствию $2_2$ теоремы 32, существует $C^m$-диффеоморфизм $\tilde{\Phi}$ некоторого открытого множества $\tilde{\mathcal{O}} \subset \subset \mathbb{K}^N$ на открытое множество из $E$, содержащее точку $a$, такой, что множество $\tilde{\Phi}^{-1}(V)$ является пересечением $\tilde{\mathcal{O}}$ с некоторым векторным подпространством $\mathbb{K}^n$ пространства $\mathbb{K}^N$. Следствие 2 показывает в свою очередь, что $\tilde{\Phi}^{-1}(W)$ является также многообразием из $\mathbb{K}^N$ размерности $n$, заведомо содержащемся в $\mathbb{K}^n$. Из того что мы видели в начале пункта 3°), следует, что $\tilde{\Phi}^{-1}(W)$ является открытым множеством в пространстве $\mathbb{K}^n$ и, значит, $\tilde{\Phi}^{-1}(W)$ является окрестностью точки $\tilde{\Phi}^{-1}(a)$ в множестве $\tilde{\Phi}^{-1}(V)$, а, следовательно, $W$ является окрестностью $a$ в $V$. Так как это утверждение справедливо для любой точки $a$ из $W$, то $W$ является открытым множеством в $V$.

4°) Покажем, что в аффинном евклидовом $N$-мерном пространстве над $\mathbb{R}$ сфера является $(N-1)$-мерным бесконечно дифференцируемым многообразием. Для простоты выберем некоторую систему координат и в качестве сферы $S$ возьмем единичную сферу с центром в начале. Обозначим через $\mathscr{V}_{j,+}$ открытое множество из $E$, определенное неравенством $x_j > 0$, а через $\mathscr{B}_j$ — открытое множество из $\mathbb{K}^{N-1}$, определенное неравенством $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{j-1}^2 + x_{j+1}^2 + \ldots + x_N^2 < 1$. Тогда в $\mathscr{V}_{j,+}$ сфера $S$ будет определяться уравнением

$$\begin{aligned} &(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N) \in \mathscr{B}_j, \\ &x_j = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2 - \ldots - x_N^2}. \end{aligned} \tag{III, 9; 4}$$

Точно так же можно рассуждать для открытого множества $\mathscr{V}_{j,-}$, определенного неравенством $x_j < 0$. Так как все рассуждения можно провести для $j = 1, 2, \ldots, N$, то исходное утверждение доказано полностью. Кроме того, мы видим, что сфера $S$ покрывается атласом, состоящим из $2N$ карт класса $C^\infty$ размерности $N-1$.

Рассмотрим классическое параметрическое представление двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
x &= \sin\theta\cos\varphi,\\
y &= \sin\theta\sin\varphi, \qquad\qquad (\mathrm{III}, 9; 5)\\
z &= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Здесь в качестве $\mathcal{O}$ можно взять, например, открытое множество $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$ пространства $\mathbb{R}^2$. Отображение (III, 9; 5) дает карту открытого множества сферы, определяемого неравенствами $y \neq 0$ или $y = 0$, $x < 0$ (дополнение к замкнутому полумеридиану $\varphi = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Обычно предыдущим представлением пользуются для *всей* сферы, допуская значения $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, но тогда это представление не будет истинным параметрическим представлением. Другими словами, одна эта карта, как мы уже видели, не может составлять атлас всей сферы. С помощью стереографической проекции легко показать, что существует атлас сферы, состоящий только из *двух карт*. В самом деле, рассмотрим обратное отображение к стереографической проекции, т. е. отображение $\mathbb{R}^{N-1}$ на сферу, определяемое формулами

$$
x_i = \frac{2u_i}{\sum\limits_{j=1}^{N-1} u_j^2 + 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad x_N = \varepsilon\frac{\sum\limits_{j=1}^{N-1} u_j^2 - 1}{\sum\limits_{j=1}^{N-1} u_j^2 + 1}. \qquad (\mathrm{III}, 9; 10)
$$

При $\varepsilon = +1$ (соответственно $-1$) эти формулы определяют карту класса $C^\infty$, образом которой служит открытое множество сферы, дополнительное к северному полюсу (соответственно к южному полюсу) (т. е. к точке $0, 0, \ldots, \varepsilon$[1])). Мы имеем, таким образом, атлас сферы, состоящий из двух карт.

Из доказательства теоремы 32 вытекает, что отображение $\Theta: (y, z) \to \mathrm{X}^{-1}(y)$ является отображением $\mathscr{V}$ в $\mathscr{A}$, сужение которого на многообразие $V \cap \mathscr{V}$ является также сужением обратного гомеоморфизма $\Phi^{-1}$ к $\Phi$. Таким образом, получаем такую теорему:

Теорема 33. *Если $\Phi$: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ является параметрическим представлением размерности $n$ класса $C^m$ открытого множества многообразия $V$ из $E$ и если $\Phi(\alpha) = a$, то существуют открытое множество $\mathscr{A}$ в $\mathcal{O}$, содержащее $\alpha$, открытое множество $\mathscr{V}$ в $E$, содержащее $a$, такие, что $V \cap \mathscr{V} = \Phi(\mathscr{A})$, и, наконец, существует отображение $\Theta$ множества $\mathscr{V}$ в $\mathscr{A}$ класса $C^m$,*

---

[1]) В качестве упражнения можно проверить выполнение всех необходимых свойств карты.

*сужение которого на $V \cap \mathscr{V}$ совпадает с сужением обратного гомеоморфизма $\Phi^{-1}$. В частности, в $\mathscr{A}$ имеем: $\Theta \circ \Phi = I$.*

Однако равенство $\Phi \circ \Theta = I$ не выполняется, поскольку если исходить из точки $\mathscr{V}$, не принадлежащей $V$, то ее образ при отображении $\Theta$ лежит в $\mathscr{A}$ и потому образ при отображении $\Phi$ находится в $V$, а, значит, отличен от исходной точки. Напротив, можно сказать, что отображение $\Phi \circ \Theta$, будучи отображением $(y, \mathbf{z}) \to (y, g(y))$ множества $\mathscr{V}$ на $V \cap \mathscr{V}$, является своего рода «проекцией $\mathscr{V}$ на $V \cap \mathscr{V}$».

Следствие 1. *Пусть $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — два параметрических представления класса $C^m$ одного и того же открытого множества $V \cap \mathscr{V}$ многообразия $V$ из $E$. Пусть $\mathscr{O}_1$ и $\mathscr{O}_2$ — открытые области определения функций $\Phi_1$ и $\Phi_2$, такие, что $\Phi_1(\mathscr{O}_1) = \Phi_2(\mathscr{O}_2)$. Если через $\Phi_2^{-1}$ обозначить обратный гомеоморфизм к $\Phi_2$, являющийся отображением $V \cap \mathscr{V}$ в $\mathscr{O}_2$, то отображение $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ множества $\mathscr{O}_1$ в $\mathscr{O}_2$ является гомеоморфизмом класса $C^m$, так же как и его обратный гомеоморфизм $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1 \in \mathscr{O}_1$ и $\Phi_1(\alpha_1) = a$. Рассмотрим отображения $\Theta_1$ и $\Theta_2$, определенные, согласно теореме, на двух окрестностях $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ точки $a$ в $E$. Пусть $\mathscr{V}_0 = \mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$. Обозначим через $\mathscr{A}_1'$ и $\mathscr{A}_2'$ прообразы $\mathscr{V}_0$ при отображениях $\Phi_1$ и $\Phi_2$. Тогда на множестве $\mathscr{A}_1'$ отображение $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ совпадает с отображением $\Theta_2 \circ \Phi_1$, поскольку $\Phi_1(u)$ для $u \in \mathscr{A}_1'$ лежит в $V \cap \mathscr{V}_0$, и на $V \cap \mathscr{V}_0 \subset V \cap \mathscr{V}_2$ отображение $\Phi_2^{-1}$ совпадает с $\Theta_2$. Следовательно, согласно теореме 19, эта композиция отображений класса $C^m$ сама принадлежит классу $C^m$[1]). Таким образом, каждая точка $\alpha_1$ множества $\mathscr{O}_1$ имеет некоторую открытую окрестность, на которой $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ принадлежит классу $C^m$, а, следовательно, это отображение принадлежит классу $C^m$ на $\mathscr{O}_1$.

Следствие 2. *Если $V$ является многообразием размерности $n$, то оно не может быть многообразием размерности $n' \neq n$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что для некоторой точки $a \in V$ имеется карта размерности $n$ некоторой открытой окрестности точки $a$ и карта размерности $n'$ дру-

[1]) Проводить то же самое рассуждение непосредственно для $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ нельзя, ибо $\Phi_2^{-1}$ является отображением некоторого открытого множества из $V$, а не открытого множества аффинного пространства в $\mathbb{K}^n$, и, следовательно, утверждение, что $\Phi_2^{-1}$ принадлежит классу $C^m$, не имеет смысла. Позднее на стр. 336 мы узнаем, какой смысл можно ему придать.

гой открытой окрестности этой точки. Тогда для пересечения этих окрестностей будут существовать две различные карты размерностей $n$ и $n'$. В рассуждениях, проведенных в предыдущем следствии с параметрическими представлениями, не предполагалось, что размерности $n$ и $n'$ должны быть равными. Однако $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ должно быть $C^m$-диффеоморфизмом множества $\mathcal{O}_1$ на $\mathcal{O}_2$; поэтому из следствия 4 теоремы 11 вытекает, что размерности карт должны быть равными.

*В противоположность этому многообразие класса $C^m$ тем более принадлежит классу $C^k$ для любого $k \leqslant m$.*

### Определение многообразия с помощью неявных уравнений

Теорема $33_2$. *Для того чтобы множество $V$ аффинного пространства $E$ размерности $N$ было многообразием размерности $n$ класса $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in V$ в $E$ существовала окрестность $\mathcal{V}$ этой точки и система $N-n$ скалярных функций $F_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-n$, определенных на $\mathcal{V}$, класса $C^m$ и обладающих следующими свойствами:*

1°) *производные $\overleftarrow{F_k'(a)}$*[1]) *образуют $N-n$ линейно независимых форм над $\vec{E}$;*

2°) *пересечение $V \cap \mathcal{V}$ в точности определяется уравнениями $F_k(x) = 0$.*

Говорят, что *такая система уравнений является нормальной системой $N-n$ уравнений множества $V$ в окрестности точки $a$.*

Заметим, что если положить $n = N$, то уравнений не будет, а $V$ будет некоторым открытым множеством из $E$. Если же положить $n = 0$, то получится $N$ уравнений, и в некоторой окрестности точки $a$ других решений, кроме самой точки $a$, не будет. В этом случае $a$ является изолированной точкой множества $V$, а $V$ будет множеством изолированных точек $E$, или многообразием размерности 0.

Доказательство. 1°) Предположим, что $V$ является многообразием. По определению это многообразие задается уравнениями $F_k(x) = 0$, где $F_k$ определяются равенствами

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_{n+k} - G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad \text{(III, 9; 11)}$$

Поскольку в точке $a$ (или в любой точке из $\mathcal{V}$) $dF_k$ содержат $dx_{n+k}$ с коэффициентом 1 и не содержат ни одного из $dx_{n+j}$ для $j = 1, 2, \ldots, N-n$, то $dF_k$ линейно независимы.

[1]) $F_k'(a) \in \mathcal{L}(\vec{E}; \mathbb{K}) = \overleftarrow{E}'$.

2°) Предположим теперь, что $V$ является множеством, обладающим указанными в теореме свойствами. Утверждение о том, что система линейных форм $\overleftarrow{F'_k(a)}$ независима, означает, что если в $E$ выбрать какую-либо систему координат, то по крайней мере один из миноров порядка $N-n$ матрицы, составленной из частных производных функций $F_k$, отличен от нуля. Предположим для определенности, что отличен от нуля якобиан $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{N-n})}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_N)}(a)$ (к этому случаю можно всегда перейти, изменив при необходимости порядок нумерации векторов базиса $E$). Положим, как и ранее, $y=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $z=(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_N)$, так чтобы точку $x \in E$ можно было отождествить с парой $(y, z)$ пространства $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$. Теперь можно считать, что множество функций $F_k$ определяет функцию $\vec{f}$ на $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$ со значениями в $\mathbb{K}^{N-n}$, такую, что $\vec{f}(a) = \vec{f}(b, c) = \vec{0}$.

Предположение относительно якобиана означает, что частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(b, c) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{N-n}; \mathbb{K}^{N-n})$ этой функции обратима. Из теоремы о неявной функции (теорема 29) следует, что существуют окрестность $\mathscr{B}$ точки $b$ в $\mathbb{K}^n$ и окрестность $\mathscr{C}$ точки $c$ в $\mathbb{K}^{N-n}$, такие, что $\mathscr{B} \times \mathscr{C} \subset \mathscr{V}$, а уравнение $\vec{f}(y, z) = \vec{0}$ имеет, и притом единственное, решение в $\mathscr{C}$ для точек $y$, заданных в окрестности $\mathscr{B}$. Кроме того, определяемая таким способом неявная функция $z=g(y)$ является непрерывным отображением $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$. Из теоремы 31 следует, что если $\vec{f}$ принадлежит классу $C^m$, то $g$ также будет принадлежать классу $C^m$. Мы видим, что пересечение $V$ с $\mathscr{B} \times \mathscr{C}$ определяется в точности уравнением $z=g(y)$ и что, поскольку это утверждение справедливо для любой точки $a \in V$, множество $V$ является многообразием размерности $n$ класса $C^m$.

Приведем другое доказательство утверждения 2°). Обозначим через $\Psi$ отображение множества $\mathscr{V}$ в пространство $\mathbb{K}^N$, определенное соотношением $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \to (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, где

$$\begin{gathered} u_1 = x_1, \qquad u_2 = x_2, \ \ldots, \qquad u_n = x_n, \\ u_{n+k} = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ k = 1, 2, \ldots, N-n, \end{gathered} \tag{III, 9; 11$_2$}$$

и будем исходить, как и в первом доказательстве, из случая $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{N-n})}{D(x_{n+1}, \ldots, x_N)}(a) \neq 0$. Поскольку этот якобиан является якобианом отображения $\Psi$ в точке $a$ и отличен от нуля, существует такое открытое множество $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}$, содержащее $a$, что сужение $\Psi$ на $\mathscr{V}_1$ является гомеоморфизмом класса $C^m$, точно так же как и его обратный гомеоморфизм $\Phi$ множества $\mathscr{V}_1$ на некоторое открытое множество $\mathscr{A}_1$, содержащее $\Psi(a) = \alpha$ (теоремы 29 и 31). Но тогда $\Phi$ является $C^m$-диффеоморфизмом множества $\mathscr{A}_1$ на $\mathscr{V}_1$, а $V \cap \mathscr{V}_1$ есть образ векторного подпространства $\mathbb{K}^n$ пространства $\mathbb{K}^N$ при отображении $\Phi: u_{n+k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N - n$. Из следствия $2_2$ теоремы 32 теперь вытекает, что $V$ — многообразие размерности $n$ класса $C^m$.

Следствие 1. *Для того чтобы множество $V$ пространства $E$ было гиперповерхностью (т. е. многообразием размерности $N - 1$) пространства $E$ класса $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in V$ существовали окрестность $\mathscr{V}$ точки $a$ в $E$ и скалярная функция $F$, определенная в $\mathscr{V}$, класса $C^m$, производная которой $\overleftarrow{F'(a)} \neq \overleftarrow{0}$*[1]*, такие, что множество $V \cap \mathscr{V}$ в точности определяется уравнением $F(x) = 0$.*

Теперь становится очевидным, что сфера евклидова пространства является многообразием, поскольку сфера с центром в точке $a$ радиуса $R$ определяется в $E$ уравнением $(\overrightarrow{x-a} \mid \overrightarrow{x-a}) = R^2$.

Этот пример показывает, что в то время как, вообще говоря, многообразие нельзя полностью задать с помощью разрешенных уравнений или же с помощью параметрического представления, возможность определить его целиком с помощью неявных уравнений указанного в теореме вида значительно более вероятна.

Естественно, условие, что $\overleftarrow{F'_k(a)}$ независимы или, в случае одного уравнения, что производная $\overleftarrow{F'(a)}$ отлична от нуля, абсолютно необходимо. Например, конус второго порядка, определенный в пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, не является многообразием. Он не удовлетворяет ни одному из определений из-за особой точки в начале координат.

## Вещественные и комплексные многообразия

До сих пор в качестве поля $\mathbb{K}$ можно было брать поле вещественных или поле комплексных чисел. В соответствии с первым или вторым случаем говорят, что $V$ является *вещественным* многообразием или *комплексным* многообразием.

[1]) Напомним, что $\overleftarrow{F'(a)} \neq \overleftarrow{0}$ в некоторой системе координат означает, что $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, не обращаются в нуль одновременно.

Любое аффинное пространство над полем комплексных чисел является также аффинным пространством удвоенной размерности над полем вещественных чисел. Точно так же $\mathbb{C}^n$, рассматриваемое как векторное пространство над полем вещественных чисел, может быть отождествлено с $\mathbb{R}^{2n}$. Так как каждое отображение, дифференцируемое по отношению к полю комплексных чисел, тем более дифференцируемо по отношению к полю вещественных чисел, то каждое многообразие $V$ размерности $n$ класса $C^m$ по отношению к полю комплексных чисел можно рассматривать как многообразие размерности $2n$ того же класса $C^m$ по отношению к полю вещественных чисел. Если нет специальных указаний, *будем считать размерностью многообразия его размерность по отношению к полю вещественных чисел.*

**Абстрактные многообразия** [1])

Для определения многообразия нет необходимости вести рассмотрение только в аффинном пространстве. Например, множество страниц географического атласа дает полное описание поверхности Земли, и при этом *нет необходимости представлять себе Землю как двумерное многообразие, погруженное в аффинное пространство трех измерений.* Можно ввести понятие абстрактного многообразия.

Определение. *Абстрактным многообразием $V$ размерности $n$ класса $C^m$* (не обязательно лежащим в некотором аффинном пространстве) называется топологическое пространство $V$, снабженное некоторым атласом или системой карт, обладающих следующими свойствами:

1°) *Каждая карта является гомеоморфизмом $\Phi$ некоторого открытого множества $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{K}^n$ на открытое множество $\Phi(\mathcal{O})$ пространства $V$.* (Говорить, что этот гомеоморфизм принадлежит классу $C^m$, не приходится, поскольку речь идет об отображении открытого множества аффинного пространства в топологическое пространство, не лежащее в аффинном пространстве.)

2°) Пусть $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — две произвольные карты атласа множества $V$. Если образы $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение $\Omega$, то прообразы $\Omega_1$ и $\Omega_2$ множества $\Omega$ при отображениях $\Phi_1$ и $\Phi_2$ являются открытыми множествами в $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Сужения $\Phi_1$ и $\Phi_2$ на $\Omega_1$ и $\Omega_2$ имеют один и тот же образ. Они должны обладать следующим свойством, аналогичным утверждению следствия 1 теоремы 33: *отображение* $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ *откры-*

[1]) Здесь мы приводим лишь беглый набросок теории. Абстрактные многообразия подробно изучаются в других курсах.

*того множества* $\Omega_1 \subset \mathbb{K}^n$ *на открытое множество* $\Omega_2 \subset \mathbb{K}^n$ *принадлежит классу* $C^m$. Эта фраза имеет определенный смысл, ибо речь идет об отображении открытого множества аффинного пространства в аффинное пространство. Именно этим условием определяется принадлежность многообразия $V$ классу $C^m$.

3°) *Множество образов карт должно составлять покрытие пространства* $V$[1]).

Изучение абстрактных многообразий играет большую роль в математике и во многих разделах физики. Рассмотрим, например, механическую систему, имеющую конечное число степеней свободы, например гироскоп с одной закрепленной точкой оси вращения. Положение этой системы «может быть определено с помощью конечного числа вещественных параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$». В действительности эта система параметров весьма произвольна, и очень редко удается все без исключения положения механической системы эффективно выразить через значения конечного числа параметров. Так, например, если положение гироскопа определяется углами Эйлера $\psi$, $\theta$, $\varphi$, то множество всех положений гироскопа не имеет параметрического представления.

В действительности *множество положений механической системы может быть определено как абстрактное многообразие, которое в случае гироскопа является трехмерным многообразием* $V$ *класса* $C^\infty$. Но это многообразие является абстрактным и, естественно, не погружено в аффинное пространство. Когда говорят, что 3 угла Эйлера выбираются для определения положения гироскопа, то это означает, что рассматривается частная карта, представляющая только некоторое открытое множество многообразия, являющегося множеством положений гироскопа[2]).

Тем не менее теория абстрактных многообразий приводит в некоторых вопросах к значительно большим усложнениям, чем теория многообразий, погруженных в аффинные пространства. Если это не будет приводить ни к каким усложнениям, мы будем рассматривать абстрактные многообразия. Каждый

---

[1]) Разрешается, вообще говоря, дополнить первоначально заданный атлас. Для этого добавляются все карты, не нарушающие принадлежность классу $C^m$, т. е. все гомеоморфизмы $\Phi$ открытых множеств $\mathcal{O}$ из $\mathbb{K}^n$ на открытые множества из $V$, обладающие следующим свойством: для каждой карты $\Phi_i$ заданного атласа, такой, что $\Phi(\mathcal{O}) \cap \Phi_i(\mathcal{O}_i) = \Omega \neq \emptyset$, отображение $\Phi^{-1} \circ \Phi_i$ является $C^m$-диффеоморфизмом $\Phi_i^{-1}(\Omega)$ на $\Phi^{-1}(\Omega)$.

[2]) Для получения параметрического представления надо ограничиться, например, открытым множеством $0 < \psi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, которое не исчерпывает множества всех положений гироскопа. Впрочем, многообразие здесь компактно и для полного представления достаточно конечного числа ($>1$) карт.

раз, когда это может привести к упрощению, мы будем предполагать, что многообразия лежат в аффинных пространствах.

Определение. Пусть $V$ и $W$ — многообразия класса $C^m$ размерностей $p$ и $q$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$, и пусть $H$ — непрерывное отображение $V$ в $W$. Говорят, что *$H$ принадлежит классу $C^k$, если, каковы бы ни были точка $a \in V$*, $H(a) = b$, карта $\Phi$ окрестности $\mathscr{V}$ точки $a$ в $V$ и карта $\Psi$ окрестности $\mathscr{W}$ точки $b$ в $W$, сложное отображение $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi$, определенное на открытом множестве $\Phi^{-1}(\mathscr{V}) \cap \Phi^{-1}(H^{-1}(\mathscr{W}))$ пространства $\mathbb{K}^p$, со значениями в $\mathbb{K}^q$ принадлежит классу $C^k$ в обычном смысле. Очевидно, если многообразие принадлежит классу $C^m$, то определить отображение класса $C^{m'}$ для $m' > m$ невозможно. Очевидно также, что любое отображение класса $C^k$ принадлежит классу $C^{k'}$ для $k' \leqslant k$. Всегда можно ограничиться случаем $k = m$, поскольку если $V$ и $W$ принадлежат классу $C^m$, $m \geqslant k$, то они тем более принадлежат классу $C^k$.

*Если $U$, $V$, $W$ — три многообразия класса $C^m$, $H$ — отображение класса $C^m$ множества $U$ в $V$, $K$ — отображение класса $C^m$ множества $V$ в $W$, то $K \circ H$ является отображением $U$ в $W$ класса $C^m$.* В самом деле, если $\Phi$ (соответственно $\Psi$) является картой некоторой окрестности $\mathscr{U}$ точки $a$ (соответственно $\mathscr{W}$ точки $c = (K \circ H)(a)$) в множестве $U$ (соответственно $W$) и если через $\mathrm{X}$ мы обозначим карту некоторой окрестности $\mathscr{V}$ точки $b = H(a)$ в $V$, то на множестве $\Phi^{-1}(\mathscr{U}) \cap \Phi^{-1}(H^{-1}(\mathscr{V})) \cap \cap \Phi^{-1}(H^{-1}(K^{-1}(\mathscr{W})))$

$$\Psi^{-1} \circ K \circ H \circ \Phi = (\Psi^{-1} \circ K \circ \mathrm{X}) \circ (\mathrm{X}^{-1} \circ H \circ \Phi); \quad \text{(III, 9; 12)}$$

каждое из двух отображений правой части принадлежит, по предположению, классу $C^m$, а, значит, согласно теореме 19, их композиция также принадлежит классу $C^m$. Гомеоморфизм $V$ на $W$, принадлежащий классу $C^m$ вместе со своим обратным гомеоморфизмом, называется *$C^m$-диффеоморфизмом*. Если такой диффеоморфизм существует, то, согласно следствию теоремы 11, $V$ и $W$ имеют одинаковую размерность.

Теорема $33_3$. *Пусть $V$ и $W$ — многообразия класса $C^m$ и $H$ — непрерывное отображение $V$ в $W$. Для того чтобы $H$ принадлежало классу $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in V$ существовали хотя бы одна карта $\Phi_a$ некоторой окрестности точки $a$ в $V$ и хотя бы одна карта $\Psi_b$ некоторой окрестности точки $b = H(a)$ в $W$, такие, что отображение $\Psi_b^{-1} \circ H \circ \Phi_a$ принадлежит классу $C^m$.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Надо доказать лишь его достаточность. Для этого мы должны показать, что если $\Phi$ и $\Psi$ — *произвольные* карты окрестностей точек $a$ и $b$ в $V$ и $W$, то $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi$ принадлежит классу $C^m$. В окрестности точки $\alpha = \Phi^{-1}(a)$ имеем

$$\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi = (\Psi^{-1} \circ \Psi_a) \circ (\Psi_a^{-1} \circ H \circ \Phi_a) \circ (\Phi_a^{-1} \circ \Phi). \quad \text{(III, 9; 13)}$$

Средний член правой части предполагается принадлежащим классу $C^m$. Крайние члены, согласно аксиоме 2°) на стр. 334 о картах многообразия, также принадлежат классу $C^m$. Это и доказывает теорему, которая имеет многочисленные следствия. Приведем наиболее важные из них:

Следствие 1. *Если $V$ и $W$ являются открытыми множествами аффинных пространств $E$ и $F$, то отображение $H$ множества $V$ в $W$ принадлежит классу $C^m$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $C^m$ в смысле, определенном на стр.* 266.

В самом деле, возьмем для $V$ и $W$ тождественные карты. Тогда $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi$ сведется к $H$.

Следствие 2. *Пусть $V$ — многообразие класса $C^m$ аффинного пространства $E$. Тогда каноническая инъекция $H$ многообразия $V$ в $W = E$ также принадлежит классу $C^m$.*

Для доказательства достаточно взять произвольную карту $\Phi$ для $V$ и тождественную карту для $W = E$. Тогда $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi = \Phi$, где $\Phi$ — отображение класса $C^m$.

Следствие 3. *Пусть $V$ лежит в аффинном пространстве $E$. Тогда любое отображение $H$ множества $V$ в $W$, являющееся сужением на $V$ некоторого отображения $\tilde{H}$ класса $C^m$ открытого множества $\Omega \subset E$ в $W$, является отображением $V$ в $W$ класса $C^m$.*

В самом деле, в этом случае $H$ является композицией $\tilde{H} \circ J$, где $J$ — каноническая инъекция $V$ в $E$, которая, согласно следствию 2, принадлежит классу $C^m$.

Следствие 4. *Пусть $V$ — многообразие размерности $n$ класса $C^m$, а $\Phi$ — карта некоторого открытого множества $\mathscr{V}$ многообразия $V$. Тогда $\Phi$ является $C^m$-диффеоморфизмом множества $\Phi^{-1}(\mathscr{V})$ на $\mathscr{V}$.*

В самом деле, возьмем для множества $\Phi^{-1}(\mathscr{V}) \subset \mathbb{K}^m$ тождественную карту, а для множества $\mathscr{V}$ карту $\Phi$. Для $H = \Phi$ или $\Phi^{-1}$ отображение вида $\Psi_1^{-1} \circ H \circ \Phi_1$ является тождественным отображением множества $\Phi^{-1}(\mathscr{V})$, принадлежащим тем самым классу $C^m$. Следствие 1 теоремы 33 очевидным образом вытекает теперь из следствия 4, однако мы уже неоднократно использовали его для получения предыдущих результатов.

Следствие 5. *Предположим, что многообразие $W$ размерности $q$ погружено в аффинное пространство $F$. Для того чтобы отображение $H$ многообразия $V$ в $W$ было класса $C^m$, необходимо и достаточно, чтобы для любой карты $\Phi$ для $V$ отображение $H \circ \Phi$ принадлежало классу $C^m$ или чтобы для любой точки $a \in V$ существовала карта $\Phi_a$ некоторой окрестности точки $a$ в $V$, такая, что отображение $H \circ \Phi_a$ принадлежит классу $C^m$.*

В самом деле, пусть $\Psi$ — карта некоторой окрестности точки $b = H(a) \in W$. Уменьшая при необходимости эту окрестность, можно сделать так, чтобы отображение $\Psi^{-1}$ продолжалось в отображение $\Theta$ класса $C^m$ некоторой окрестности точки $b \in F$ в $\mathbb{K}^q$. Теперь мы должны показать, что для каждой карты $\Phi$ (или для некоторой частной карты) $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi$ принадлежит классу $C^m$ тогда и только тогда, когда $H \circ \Phi$ принадлежит классу $C^m$. Так как $H \circ \Phi = \Psi \circ (\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi)$ и $\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi = \Theta \circ (H \circ \Phi)$, где отображения $\Psi$ и $\Theta$, определенные на открытых множествах аффинных пространств, принадлежат классу $C^m$, то результат вытекает из теоремы 19.

Это следствие можно сформулировать следующим образом: *если $W \subset F$, то отображение $H$ множества $V$ в $W$ принадлежит классу $C^m$ тогда и только тогда, когда это отображение, рассматриваемое как отображение $V$ в $F$, принадлежит классу $C^m$.*

## Векторное пространство, касательное в точке к многообразию аффинного пространства $E$ размерности $N$

Теорема $33_4$. *Пусть $V$ — многообразие размерности $n$ класса $C^1$ в аффинном пространстве $E$. В каждой точке $a \in V$ векторная (соответственно аффинная) контингенция в смысле теоремы 8А является векторным подпространством в $\vec{E}$ (соответственно аффинным подпространством в $E$) размерности $n$. Это подпространство называется векторным (соответственно аффинным) пространством, касательным в точке $a$ к многообразию $V$, и обозначается через $\vec{T}(a; V)$ (соответственно $T(a; V)$).*

Если $n = N$, то векторным (соответственно аффинным) касательным пространством является само пространство $\vec{E}$ (соответственно $E$). Если $n = 0$, то им будет $\{\vec{0}\}$ (соответственно $\{a\}$).

Доказательство. Для доказательства достаточно обратиться к определению многообразия. Выбирая соответствующую систему координат в $E$, это пространство можно отождествить с пространством $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{N-n}$ и определить многообразие в окрестности точки $a$ уравнением $z = g(y)$. Мы приходим теперь к теореме 8A и, учитывая формулу (III, 3; $19_2$), видим, что векторное подпространство, касательное в точке $a = (b, c)$, определяется в выбранной системе координат уравнением

$$\vec{Z} = g'(b)\vec{Y} \tag{III, 9; 14}$$

или что линейное многообразие, касательное в точке $a$, определяется (в той же системе координат) уравнением

$$\overrightarrow{z - c} = g'(b)\,\overrightarrow{(y - b)}. \tag{III, 9; 15}$$

Следствие 1. *Пусть $V$ — многообразие класса $C^1$ размерности $n$ аффинного пространства $E$. Пусть $\Phi$ — некоторая карта, т. е. отображение открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^n$ на открытое множество из $V$. Пусть $\alpha$ — некоторая точка из $\mathcal{O}$ и $a = \Phi(\alpha)$. Производное отображение $\Phi'(\alpha)$ является линейной биекцией $\mathbb{K}^n$ на векторное пространство, касательное в точке $a$ к многообразию $V$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\Phi$ — отображение класса $C^1$ множества $\mathcal{O}$ в $V$, которое может и не быть истинным параметрическим представлением ($\Phi'(\alpha)$ не обязательно имеет ранг $n$). Пусть $\vec{X}$ — некоторый вектор из $\mathbb{K}^n$. Рассмотрим последовательность точек $x_n = \Phi(\alpha + t_n\vec{X})$, где $t_n$ образуют последовательность положительных вещественных чисел, стремящуюся к нулю при $n$, стремящемся к бесконечности. Точки $x_n$ принадлежат $V$ и стремятся к $a$. С другой стороны, векторы $\frac{1}{t_n}\overrightarrow{(x_n - a)}$, которые можно также записать в виде $\dfrac{\overrightarrow{\Phi(\alpha + t_n\vec{X}) - \Phi(\alpha)}}{t_n}$, сходятся к производной отображения $\Phi$ в точке $\alpha$ по вектору $\vec{X}$, т. е. к $\Phi'(\alpha)\vec{X}$. Этот вектор принадлежит векторному пространству, касательному к $V$ в точке $a$. Отсюда вытекает, что образ $\mathbb{K}^n$ при отображении $\Phi'(\alpha)$ содержится в касательном векторном пространстве. Если теперь мы учтем, что по предположению $\Phi'(\alpha)$ имеет ранг $n$, то получим, что этот образ является векторным подпространством размерности $n$ и, следовательно, совпадает со всем касательным пространством в точке $a$, а отображение $\Phi'(\alpha)$ есть линейная биекция пространства $\mathbb{K}^n$ на это касательное векторное пространство.

Отсюда вытекает, что векторы $\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial u_j}(\alpha)$ образуют базис векторного пространства, касательного к $V$ в точке $a$, и что линейное многообразие, касательное к $V$ в точке $a$, задается параметрическим уравнением

$$x = a + \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial u_j}(\alpha), \qquad t_j \in \mathbb{K}\text{[1]}. \qquad \text{(III, 9; 16)}$$

Следствие $1_2$. *Пусть $V$ и $W$ — два многообразия класса $C^1$ в двух аффинных пространствах $E$ и $F$. Пусть $H$ — такое отображение $E$ в $F$ класса $C^1$, что $H(V) \subset W$. Тогда для каждого $a \in V$ при $b = H(a) \in W$ образ касательного векторного пространства $\vec{T}(a; V)$ при отображении $H'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ содержится в касательном векторном пространстве $\vec{T}(b; W)$: $H'(a)\vec{T}(a; V) \subset \subset \vec{T}(b; W)$.*

Доказательство. Пусть $\Phi$ — карта $(\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^n) \to \Phi(\mathcal{O})$ некоторой окрестности $\Phi(\mathcal{O})$ точки $a$ в $V$ и $\Phi(\alpha) = a$. Тогда $H \circ \Phi$ является отображением класса $C^1$ множества $\mathcal{O}$ в $W \subset F$. В начале доказательства предыдущего следствия мы видели, что $(H \circ \Phi)'(\alpha)\mathbb{K}^n \subset \vec{T}(b; W)$. Согласно теореме о сложной функции, $(H \circ \Phi)'(\alpha) = H'(a) \circ \Phi'(\alpha)$, а по следствию 1, $\Phi'(\alpha)\mathbb{K}^n = \vec{T}(a; V)$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Если $\mathcal{O}$ — такое открытое множество пространства $\mathbb{K}^n$, содержащее $\alpha$, что сужение $\Phi$ на $\mathcal{O}$ допускает обратное слева отображение $\Theta$, удовлетворяющее условиям теоремы 33, то линейная биекция $\Phi'(\alpha)$ пространства $\mathbb{K}^n$ на $\vec{T}(a; V)$ имеет в качестве обратной биекции сужение на $\vec{T}(a; V)$ производного отображения $\Theta'(a)$.*

Доказательство. По теореме 11 о сложной функции из тождества $\Theta \circ \Phi = I$ получается тождество $\Theta'(a) \circ \Phi'(\alpha) = I$, из которого следует, что сужение $\Theta'(a)$ на образ $\mathbb{K}^n$ при отображении $\Phi'(\alpha)$, т. е. на $\vec{T}(a; V)$, является обратной биекцией для $\Phi'(\alpha)$.

---

[1]) В весьма частном случае, когда $V$ — поверхность пространства $\mathbb{R}^3$, заданная параметрическим представлением $(u, v) \to M(u, v)$, касательная плоскость в некоторой точке порождается частными производными $\overrightarrow{\partial M}/\partial u$, $\overrightarrow{\partial M}/\partial v$ в этой точке.

Следствие 3. *Пусть* $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$ — *отображения открытых множеств* $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ *пространства* $\mathbb{K}^n$ *в* $V$, *определяющие карты с одним и тем же образом в многообразии* $V$, *погруженном в* $E$. *Пусть* $\vec{X}$ — *вектор, касательный к* $V$ *в точке* $a$, $a = \Phi_1(\alpha_1) = \Phi_2(\alpha_2)$. *Если* $\vec{\xi}_1$ *и* $\vec{\xi}_2$ — *два таких вектора пространства* $\mathbb{K}^n$, *для которых вектор* $\vec{X}$ *является образом при отображениях* $\Phi_1'(\alpha_1)$ *и* $\Phi_2'(\alpha_2)$, *то* $\vec{\xi}_2$ *является образом* $\vec{\xi}_1$ *относительно производной отображения* $\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1$ *класса* $C^1$ *в точке* $\alpha_1$.

В самом деле, достаточно заметить, что

$$\vec{\xi}_2 = \left((\Phi_2'(\alpha_2))^{-1}\circ\Phi_1'(\alpha_1)\right)\vec{\xi}_1. \qquad \text{(III, 9; 17)}$$

Точнее, согласно предыдущему следствию, обратное отображение к $\Phi_2'(\alpha_2)$ является также сужением отображения $\Theta_2'(a)$ на векторное подпространство в точке $a$. Поэтому можно записать зависимость между $\vec{\xi}_2$ и $\vec{\xi}_1$ в виде

$$\vec{\xi}_2 = \left(\Theta_2'(a)\circ\Phi_1'(\alpha_1)\right)\vec{\xi}_1. \qquad \text{(III, 9; 18)}$$

На этот раз $\Phi_1$ и $\Theta_2$ являются отображениями открытого множества некоторого аффинного пространства в аффинное пространство. Поэтому можно применить теорему о сложной функции (теорему 11) и заменить предыдущее равенство равенством

$$\vec{\xi}_2 = (\Theta_2\circ\Phi_1)'(\alpha_1)\,\vec{\xi}_1. \qquad \text{(III, 9; 19)}$$

Наконец, из свойств отображения $\Theta_2$ следует, что $\Theta_2\circ\Phi_1$ совпадает с $\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1$ и, следовательно, можно написать

$$\vec{\xi}_2 = (\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1)'(\alpha_1)\,\vec{\xi}_1, \qquad \text{(III, 9; 20)}$$

чем и заканчивается доказательство следствия.

Следствие 4. *Пусть* $V$ — *многообразие класса* $C^1$ *размерности* $n$ *аффинного пространства* $E$. *Пусть* $a$ — *некоторая точка* $V$, *и пусть* $F_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N-n$, — *нормальная система уравнений многообразия* $V$ *в некоторой окрестности точки* $a$ *в* $E$. *Тогда векторное подпространство, касательное к* $V$ *в точке* $a$, *определяется в* $\vec{E}$ *уравнениями*

$$F_k'(a)\,\vec{X} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-n, \qquad \text{(III, 9; 21)}$$

*а линейное многообразие, касательное к* $V$ *в точке* $a$, *определяется в* $E$ *уравнениями*

$$F_k'(a)\,\overrightarrow{(x-a)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-n. \qquad \text{(III, 9; 22)}$$

Доказательство. Пусть $x_n$ — последовательность точек многообразия $V$, стремящаяся к $a$, и $\lambda_n$ — такая последовательность положительных вещественных чисел, что последовательность векторов $\lambda_n \overrightarrow{(x_n - a)}$ стремится к вектору $\vec{X}$ из $\vec{E}$ при $n$, стремящемся к бесконечности. Поскольку тогда $F_k(x_n) = 0$ и $F_k(a) = 0$, из определения производной (формула (III, 3; 13)) следует, что

$$F'_k(a)\overrightarrow{(x_n - a)} + \alpha_n \|\overrightarrow{x_n - a}\| = 0, \tag{III, 9; 23}$$

где $\|\vec{\alpha}_n\|$ стремится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности. Отсюда, умножая на $\lambda_n$, получаем:

$$F'_k(a)\lambda_n\overrightarrow{(x_n - a)} + \vec{\alpha}_n\lambda_n \|\overrightarrow{x_n - a}\| = 0. \tag{III, 9; 24}$$

Поскольку $\lambda_n\overrightarrow{(x_n - a)}$ сходится к $\vec{X}$, а $F'_k(a)$ является непрерывной линейной формой, то каждый вектор $\vec{X}$, касательный в точке $a$ к многообразию $V$, удовлетворяет $N - n$ линейным уравнениям (III, 9; 21). Поскольку эти $N - n$ линейных уравнений предполагаются независимыми, они определяют некоторое $n$-мерное векторное подпространство пространства $\vec{E}$. Это подпространство является векторным пространством, касательным к $V$ в точке $a$. Отсюда непосредственно вытекает утверждение, относящееся к касательному линейному многообразию.

Следствие 5. *Пусть $E$ — аффинное евклидово пространство размерности $N$ над полем вещественных чисел и $V$ — гиперповерхность, определяемая уравнением $F(x) = 0$, где $F$ — вещественная функция класса $C^1$, градиент которой в точке $a$ отличен от 0. Этот градиент нормален к $V$ в точке $a$, а вектор* $\dfrac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(a)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(a)\|}$ *является единичным вектором нормали к $V$ в точке $a$*[1].

[1] Если в $E$ выбрать ортонормальный базис, то

$$\frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(a)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(a)\|} = \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)\right)^2}}, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}(a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)\right)^2}}, \ldots, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_N}(a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)\right)^2}}\right].$$

Следствие 6. *Пусть $V$ — многообразие размерности $n$ класса $C^1$ аффинного пространства $E$. Пусть $\Phi$ — карта, отображающая открытое множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^n$ на открытое множество многообразия $V$. В этом случае отображение $(u, \vec{U}) \to (\Phi(u), \Phi'(u)\vec{U})$, ставящее в соответствие каждой паре $(u, \vec{U})$, где $u$ — точка, а $\vec{U}$ — вектор из $\mathbb{K}^n$, пару, составленную из образа $\Phi(u)$, являющегося точкой $V$, и вектора $\Phi'(u)\vec{U}$, касательного к многообразию $V$ в этой точке, является гомеоморфизмом $\mathcal{O} \times \mathbb{K}^n$ на свой образ.*

Доказательство. Рассматриваемое отображение непрерывно (теорема 10) и биективно. Для доказательства того, что это отображение является гомеоморфизмом, достаточно выяснить, что его обратное отображение непрерывно. Впрочем, поскольку непрерывность является локальным свойством, достаточно ограничиться сужением обратного отображения на множество пар $(x, \vec{X})$, для которых $x$ пробегает некоторую окрестность точки $a$ в $V$. Пользуясь теперь теоремой 33 и выбирая эту окрестность так, как указывается в этой теореме, можно убедиться (следствие 2), что обратное отображение является сужением отображения $(x, \vec{X}) \to (\Theta(x), \Theta'(x)\vec{X})$ из $\mathscr{V} \times \vec{E}$ в $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$. Это отображение непрерывно также и в силу теоремы 10.

## Векторное пространство, касательное к абстрактному многообразию в точке[1])

Пусть $V$ — абстрактное многообразие размерности $n$ класса $C^1$ и $a \in V$. Как определить касательный вектор к $V$ в точке $a$? Пусть $\Phi$: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — карта некоторого открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ из $V$, содержащего точку $a$, и пусть $\alpha \in \mathbb{K}^n$ — такая точка, что $\Phi(\alpha) = a$. Интуитивно кажется ясным, что если $\vec{\xi}$ — произвольный вектор $\mathbb{K}^n$, то можно с помощью отображения $\Phi$ поставить ему в соответствие вектор $\vec{X}$, касательный к многообразию $V$ в точке $a$. Пусть $\Phi_1$: $\mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2$: $\mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2)$ — две карты открытых множеств многообразия $V$, содержащих точку $a$. Пусть $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ — два вектора из $\mathbb{K}^n$. При каком условии им будет соответствовать при отображениях $\Phi_1$ и $\Phi_2$ один и тот же вектор $\vec{X}$, касательный к $V$ в точке $a$? Пусть $\Omega$ — пересечение $\Phi_1(\mathcal{O}_1) \cap \Phi_2(\mathcal{O}_2)$, и пусть $\Omega_1 = \Phi_1^{-1}(\Omega)$ и $\Omega_2 = \Phi_2^{-1}(\Omega)$. Тогда $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ будет $C^m$-диффеоморфизмом $\Omega_1$ на $\Omega_2$. В точке

[1]) См. примечание на стр. 334.

$\alpha_1 \in \Omega_1$ он имеет производное отображение $(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'(\alpha_1)$. Мы *условимся*, что векторы $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ представляют при отображениях $\Phi_1$ и $\Phi_2$ один и тот же вектор $\vec{X}$, касательный к многообразию $V$ в точке $a$, если имеет место соотношение

$$\vec{\xi}_2 = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'(\alpha_1)\, \vec{\xi}_1. \qquad (\text{III}, 9; 24_2)$$

Такое определение оправдывается следствием 3 теоремы $33_4$.

Мы приходим к следующему определению: *касательным вектором к многообразию $V$ в точке $a$* называется такое семейство $(\vec{\xi}_i)_{i \in I}$ векторов из $\mathbb{K}^n$ (где $I$ — множество индексов всевозможных карт $\Phi_i$ многообразия $V$, для которых $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$ содержит $a$), что выполняются соотношения $(\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i)'(\alpha_i)\, \vec{\xi}_i = \vec{\xi}_j$, $i, j \in I$. Однозначно определяется сумма двух касательных векторов $(\vec{\xi}_i)_{i \in I}$, $(\vec{\eta}_i)_{i \in I}$ по формуле $(\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i)_{i \in I}$. Точно так же определяется произведение касательного вектора $(\vec{\xi}_i)_{i \in I}$ на $\lambda \in \mathbb{K}$: $(\lambda \vec{\xi}_i)_{i \in I}$. Векторы, касательные к многообразию $V$ в точке $a$, образуют векторное пространство, имеющее размерность $n$, т. е. размерность самого многообразия $V$. Через $\vec{T}(a; V)$ обозначается векторное пространство, касательное к многообразию $V$ в точке $a$. Следует заметить, что если $a$ и $b$ — две различные точки $V$, то между касательными векторными пространствами $\vec{T}(a; V)$ и $\vec{T}(b; V)$ *нет никакой простой связи*. Эти векторные пространства не являются подпространствами одного и того же заранее заданного векторного пространства, как в случае многообразия в аффинном пространстве.

Пусть $V$ и $W$ — два многообразия класса $C^1$ размерностей соответственно $p$ и $q$. Пусть $H$ — отображение $V$ в $W$ класса $C^1$ и $b = H(a)$. Примем обозначения, введенные в определении на стр. 336: $\Phi$ является картой некоторой окрестности точки $a$ в $V$, $\Phi(\alpha) = a$, а $\Psi$ является картой окрестности $b$ в $W$. Пусть $\vec{\xi}$ — некоторый вектор пространства $\mathbb{K}^p$, определяющий с помощью отображения $\Phi$ вектор $\vec{X}$, касательный к $V$ в точке $a$. Его образ при производном отображении $(\Psi^{-1} \circ H \circ \Phi)'(\alpha)$ является некоторым вектором $\vec{\eta}$ из $\mathbb{K}^q$, определяющим с помощью отображения $\Psi$ вектор $\vec{Y}$, касательный к $W$ в точке $b$. Легко доказать, что $\vec{Y}$ зависит только от $\vec{X}$ и $a$ и не зависит от выбранных карт $\Phi$ и $\Psi$. Можно сказать, что задание $H$ определяет линейное отображение $\vec{T}(a; V)$ в $\vec{T}(b; W)$. Это отображение называют производным отображением отображения $H$ в точке $a$ и обозначают через $H'(a)$. Это производное отображение является обобщением рассмотренных выше производных отображений для отображений класса $C^1$ аффинных пространств. В самом деле, если $V$ и $W$ — некоторые открытые множества пространств $\mathbb{K}^p$ и $\mathbb{K}^q$, то в качестве $\Phi$ и $\Psi$ можно взять тождественные отображения. Векторное пространство, касательное к $V$ в точке $a$, тогда совпадает с $\mathbb{K}^p$, а векторное пространство, касательное к $W$ в точке $a$, совпадает с $\mathbb{K}^q$; при этом $\vec{X} = \vec{\xi}$ и $\vec{Y} = \vec{\eta}$. Определенное выше производное отображение является отображением $H'(a)$ из $\mathbb{K}^p$ в $\mathbb{K}^q$. Без труда проверяется, что так определенное обобщенное производное отображение удовлетворяет теореме о сложной функции (теорема 11). Впрочем, это определение отображения $H'(a) \in \mathscr{L}(\vec{T}(a; V); \vec{T}(b; W))$ является естественным результатом следствия $1_2$ теоремы $33_4$.

С другой стороны, если $V$ есть многообразие, содержащееся в аффинном пространстве $E$, то в качестве отображения $H$ можно взять инъекцию $V$ в $E$. Производное отображение $H'(a)$ определяет тогда линейное отображение $\vec{T}(a; V)$ в $\vec{T}(a; E) = \vec{E}$. Можно проверить, что это линейное отображение является инъекцией. Оно дает возможность отождествить $\vec{T}(a; V)$ с его образом, т. е. с некоторым векторным подпространством из $\vec{E}$, и это подпространство есть найденное нами ранее векторное подпространство, касательное к многообразию $V$ в точке $a$, лежащему в аффинном пространстве $E$.

Мы не настаиваем на том, чтобы читатель сразу усвоил это довольно сложное понятие векторного пространства, касательного к абстрактному многообразию. Оно приведено здесь лишь для иллюстрации того, что построения, проведенные нами ранее в случае аффинных пространств, допускают обобщение на произвольные дифференцируемые многообразия.

### Теорема о постоянном ранге

Теорема $33_5$. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество пространства $\mathbb{K}^n$, и пусть $\Phi$: $u \to u = \Phi(u)$ — такое отображение класса $C^m$ множества $\mathcal{O}$ в аффинное пространство $E$, что в каждой точке $\alpha \in \mathcal{O}$ производное отображение $\Phi'(\alpha)$ имеет один и тот же ранг $l \leqslant n$. Тогда для каждой точки $\alpha \in \mathcal{O}$ существует открытое множество $\mathscr{A}$, содержащееся в $\mathcal{O}$ и содержащее $\alpha$, образ которого при отображении $\Phi$ является многообразием $V \subset E$ размерности $l$, принадлежащим классу $C^m$.*

Доказательство. Выберем в $E$ некоторую систему координат. Сказать, что ранг $\Phi'(\alpha)$ равен $l$, означает прежде всего, что по крайней мере один из определителей с $l$ строками и $l$ столбцами производной матрицы отображения $\Phi$ в точке $\alpha$ отличен от нуля. Изменяя при необходимости порядок векторов базиса $E$, мы можем предположить, что этот определитель является якобианом $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_l)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_l)}(\alpha)$.

Так как $\Phi$ принадлежит классу $C^1$ якобиан $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_l)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_l)}$ является непрерывной скалярной функцией на $\mathcal{O}$ и существует окрестность $\mathcal{A}_0$ точки $a$, в которой этот определитель не обращается в нуль. Поскольку в $\mathcal{O}$ и, следовательно, в $\mathcal{A}_0$ ранг производного отображения всюду равен $l$, в $\mathcal{A}_0$ каждый минор производной матрицы, содержащий предыдущий определитель, равен нулю. Разложим $\mathbb{K}^n$ в произведение $\mathbb{K}^l \times \mathbb{K}^{n-l}$. Точку $u \in \mathbb{K}^n$ мы будем обозначать через $(v, w)$, где $v = (u_1, \ldots, u_l)$ и $w = (u_{l+1}, \ldots, u_n)$. Пусть $\alpha = (\beta, \gamma)$. Тем же самым способом разложим $E$ в его системе координат в произведение $\mathbb{K}^l \times \mathbb{K}^{N-l}$ и положим $x = (y, z)$, где $y = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ и $z = (x_{l+1}, \ldots, x_N)$. Пусть $a = \Phi(\alpha) = (b, c)$, и пусть $y = X(v, w)$, $z = \Psi(v, w)$ определяют $x = \Phi(u)$ при этом разложении. Согласно предположению, сделанному относительно якобиана, из теоремы о неявной функции (теоремы 28 и 31) [1]) следует, что существуют открытые множества $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ в пространствах $\mathbb{K}^l$ и $\mathbb{K}^{n-l}$, содержащие соответственно $\beta$ и $\gamma$, $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}_0$, и открытое множество $\mathcal{B}$ в пространстве $\mathbb{K}^l$, содержащее точку $b$, такие, что для произвольно заданных точек $w$ и $y$ в $\mathcal{A}''$ и $\mathcal{B}$ существует единственный элемент $v \in \mathcal{A}'$, для которого $X(v, w) = y$. Кроме того, таким образом определенная функция $v = \Lambda(y, w)$, действующая из $\mathcal{B} \times \mathcal{A}''$ в $\mathcal{A}'$, принадлежит классу $C^m$. Поскольку, в силу непрерывности $\Lambda$, всегда можно, не изменяя $\mathcal{A}'$, заменить $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}''$ меньшими окрестностями, мы можем взять в качестве $\mathcal{A}''$ некоторый шар с центром в точке $\gamma$. Обозначим через $\mathcal{A}_1$ произведение $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}''$, а через $W$ — его образ при отображении $\Phi$. Если $x = (y, z)$ принадлежит $W$ и если, кроме того, $y$ принадлежит $\mathcal{B}$, то $v = \Lambda(y, w)$ и, следовательно, $z = \Psi(\Lambda(y, w), w) = g(y, w)$. Покажем, что *в действительности $g$ не зависит от $w$*. Для этого вычислим дифференциал $dg$ в некоторой точке $(y, w)$.

Для выполнения этих вычислений надо начинать с дифференцирования отображения $X$ по формуле

$$\overrightarrow{dy} = \frac{\partial X}{\partial v}(v, w)\,\overrightarrow{dv} + \frac{\partial X}{\partial w}(v, w)\,\overrightarrow{dw}. \qquad (III, 9; 25)$$

[1]) Здесь решается уравнение $X(v, w) = y$ относительно $v$ при заданных $w$ и $y$.

Тот факт, что якобиан $\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_l)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_l)} \neq 0$, означает, что частная производная $\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}(v, w) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^l; \mathbb{K}^l)$ обратима. Предыдущее уравнение можно разрешить относительно $\overrightarrow{dv}$:

$$\overrightarrow{dv} = \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}(v, w)\right)^{-1} \overrightarrow{dy} - \left(\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}(v, w)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial w}(v, w)\right) \overrightarrow{dw} =$$
$$= \frac{\partial \Lambda}{\partial y}(y, w)\,\overrightarrow{dy} + \frac{\partial \Lambda}{\partial w}(y, w)\,\overrightarrow{dw}. \qquad \text{(III, 9; 26)}$$

Подставляя найденный результат в дифференциал $\Psi$:

$$\overrightarrow{dz} = \frac{\partial \Psi}{\partial v}(v, w) \cdot \overrightarrow{dv} + \frac{\partial \Psi}{\partial w}(v, w) \cdot \overrightarrow{dw}, \qquad \text{(III, 9; 27)}$$

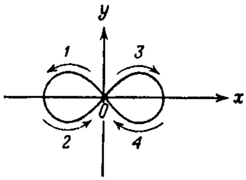
получаем искомый дифференциал. Тот факт, что все миноры ранга $> l$ производной матрицы отображения $\Phi$ равны нулю в $\mathscr{A}' \times \mathscr{A}''$, означает, что $dx_{l+k}$, $k = 1, 2, \ldots, N - l$, зависят только от $dx_1, dx_2, \ldots, dx_l$ и не зависят от $du_{l+1}, \ldots, du_n$. Другими словами, в развернутом выражении

$$\overrightarrow{dz} = \frac{\partial \Psi}{\partial v} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{dy} - \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial w} \cdot \overrightarrow{dw}\right] + \frac{\partial \Psi}{\partial w} \cdot \overrightarrow{dw} \qquad \text{(III, 9; 28)}$$

величина $\overrightarrow{dz}$ *в действительности зависит только от* $\overrightarrow{dy}$ *и не зависит от* $\overrightarrow{dw}$. Иначе говоря, функция $g$, определенная на $\mathscr{B} \times \mathscr{A}''$, со значениями в $\mathscr{A}'$ имеет тождественно равную нулю частную производную $\partial g/\partial w$. Поскольку в качестве $\mathscr{A}''$ мы выбрали шар, т. е. связное множество, для фиксированного $y$ можно к функции $w \to g(y, w)$, определенной на $\mathscr{A}''$, применить теорему 22 и убедиться в том, что при фиксированном $y$ величина $g(y, w)$ постоянна, т. е. что $g$ не зависит от $w$. Это — некоторая функция только переменной $y$, определенная на $\mathscr{B}$. Отсюда вытекает, что множество точек $(y, z)$, принадлежащих $W$, для которых $y$ лежит в $\mathscr{B}$, является многообразием $V$ размерности $l$ класса $C^m$, определенным уравнением $z = g(y)$. Это множество $V$ точек $E$ является образом при отображении $\Phi$ пересечения $\mathscr{A}_1$ и множества $\mathrm{X}^{-1}(\mathscr{B})$ точек $u$, таких, что $\mathrm{X}(u) \in \mathscr{B}$, т. е. образом пересечения двух открытых множеств и, следовательно, образом некоторого открытого множества $\mathscr{A}$ из $\mathscr{A}_1$, содержащего $\alpha$. В силу сказанного, образ $\Phi(\mathscr{A})$ является многообразием $V$ размерности $l$ класса $C^m$, и теорема доказана.

Z Замечания. 1°) *Если даже отображение $\Phi$ является биекцией и $l = n$, будет ошибкой считать, что образ при отображении $\Phi$ всего открытого множества $\mathcal{O}$ окажется многообразием в $E$.*

Рассмотрим, например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ лемнискату Бернулли. Выберем на этой лемнискате направление обхода 1, 2, 3, 4, указанное на рис. 6 стрелками. Всегда можно найти такую биекцию $\Phi$: $u \to \Phi(u)$ класса $C^\infty$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в плоскость $\mathbb{R}^2$, чтобы $\Phi(\mathbb{R})$ была в точности этой лемнискатой, $\Phi(0)$ — двойной точкой лемнискаты и чтобы при $u$, стремящемся к $-\infty$ (соответственно $+\infty$), $\Phi(u)$ стремилась к двойной точке по ветви 1 (соответственно 4):




$$x = \frac{u(1+u^2)}{1+u^4}, \quad y = \frac{u(1-u^2)}{1+u^4}. \qquad \text{(III, 9; 29)}$$

Рис. 6.

Производная $\Phi'(\alpha)$ имеет ранг, равный 1, в каждой точке $\alpha \in \mathbb{R}$. Другими словами, $x'(u)$ и $y'(u)$ одновременно в нуль не обращаются. Кроме того, $\Phi$ является биекцией[1]. Тем не менее $\Phi$ не является, очевидно, гомеоморфизмом, ибо можно найти последовательность точек лемнискаты, сходящуюся к двойной точке, для которой последовательность $u$, вместо того чтобы сходиться к 0, сходится к $+\infty$ или $-\infty$. Впрочем, это видно и из того, что лемниската является компактным множеством, в то время как $\mathbb{R}$ этим свойством не обладает. Итак, образ $\Phi(\mathbb{R})$ не является многообразием, так как он имеет особую точку в начале координат. Однако для точки $\alpha = 0$ можно найти такую окрестность, например интервал $]-A, A[$, где $A$ — произвольное положительное число, что образ этой окрестности при отображении $\Phi$ является многообразием.

2°) Предположим, что $n \geqslant N$ и $l = N$. Предположение о том, что $\Phi'(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathcal{O}$ имеет ранг, равный $l = N$, означает просто, что $\Phi'(\alpha)$ является сюръекцией $\mathbb{K}^n$ на $\vec{E}$. Но тогда $\Phi(\mathscr{A})$, как многообразие размерности $N$ аффинного пространства размерности $N$, есть открытое множество в $\vec{E}$. Поэтому если $\Omega$ — некоторое открытое множество из $\mathcal{O}$, то $\Phi(\Omega)$ будет окрестностью каждой из своих точек, т. е. открытым множеством, и мы снова убеждаемся, что $\Phi$ — открытое отображение (теорема 30). Отсюда вытекает также первая часть теоремы 30. Если известно лишь, что $\Phi'(\alpha_0)$ имеет ранг, равный $N$, в некоторой точке $\alpha_0$, то имеется по крайней мере один минор ранга $N$ производной матрицы (в некоторой системе координат пространства $E$), отличный от нуля в точке $\alpha_0$. В силу его

[1] Двойная точка получается лишь при $u = 0$.

непрерывности, он отличен от нуля во всех точках $\alpha$ некоторого открытого множества $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, содержащего $\alpha_0$. Но $\Phi$ является открытым отображением множества $\mathcal{O}_1$ в $E$, и, следовательно, образ любой окрестности точки $\alpha_0$ является окрестностью точки $a_0 = \Phi(\alpha_0)$ в $E$.

3°) В случае $l < n$ отображение $\Phi$, естественно, не инъективно и *каждая из точек многообразия* $V = \Phi(\mathcal{A})$ *является образом бесконечного множества точек из* $\mathcal{A}$. В самом деле, если $x_0 = (y_0, z_0)$ — некоторая точка $V$, то можно произвольно выбрать точку $w$ в $\mathcal{A}''$, затем вычислить $v = \Lambda(y_0, w)$, и тогда рассматриваемая точка $x_0$ будет образом точки $u = (v, w) = (\Lambda(y_0, w), w)$. Если рассматривать сужение отображения $\Phi$ на $\mathcal{A}$, то прообразом $x_0$ будет множество точек $(v, w)$ из $\mathcal{A}$, для которых $w \in \mathcal{A}''$ и $v = \Lambda(y_0, w)$. Это множество является многообразием класса $C^m$ размерности $n - l$ в пространстве $\mathbb{K}^n$, определенным предыдущим явным соотношением. Напротив, если $l = n$, то $\Phi$ — инъекция (для достаточно малого $\mathcal{A}$).

4°) Из последней теоремы снова вытекает теорема 32. В самом деле, если для каждой точки $a \in V$ существует параметрическое представление $\Phi$: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$, $\Phi(\alpha) = a$, всюду имеющее ранг $l = n$, то из теоремы $33_5$ следует существование такой открытой окрестности $\mathcal{A}$ точки $\alpha$ в $\mathcal{O}$, что $\Phi(\mathcal{A}) = W$ является многообразием. Но $\Phi$, кроме того, *является гомеоморфизмом* $\mathcal{O}$ на открытое множество в $V$. Поэтому $\Phi(\mathcal{A})$ является открытым множеством в $V$, и значит, существует такая открытая окрестность $\mathcal{V}_1$ точки $a$ в $E$, что $W = V \cap \mathcal{V}_1$. Но если для каждой точки $a \in V$ найдется такая открытая окрестность $\mathcal{V}_1$ в $E$, что $V \cap \mathcal{V}_1$ — многообразие, то по определению $V$ само является многообразием.

5°) Если ранг отображения $\Phi$ не постоянен, то *не существует никакой теоремы*, позволяющей утверждать, что образ окрестности точки $\alpha$ при отображении $\Phi$ имеет простую структуру. Рассмотрим, например, отображение $\Phi$ плоскости $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$, определяемое формулами $(r, \varphi) \to (x, y, z)$, где

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= r. \end{aligned} \qquad \text{(III, 9; 30)}$$

Так как в точке $\alpha = (0, \varphi_0)$ производная $\partial\Phi/\partial\varphi$ равна нулю, то ранг производного отображения равен 1. Однако в близких точках этот ранг равен 1 или 2. Образом $\mathbb{R}^2$ при отображении $\Phi$ является конус в $\mathbb{R}^3$, определяемый уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, для которого отображение $\Phi$ не определяет параметрического представления. Образ каждой окрестности рассматриваемой точки $\alpha$ при отображении $\Phi$ является окрестностью вершины конуса, которая не является многообразием из-за наличия особой точки в вершине.

Сформулируем по этому поводу следующее свойство:

*Если $\Phi$ является отображением класса $C^1$ открытого множества $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{K}^n$ в $E$, то ранг $l(\alpha)$ производного отображения $\Phi'(\alpha)$ является полунепрерывной снизу функцией $\alpha$.*

В самом деле, покажем, что если $\alpha_0 \in \mathcal{O}$, то существует такое открытое множество $\mathcal{A}_0$ из $\mathcal{O}$, содержащее $\alpha_0$, что $l(\alpha) \geqslant l(\alpha_0)$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Действительно, выберем в $E$ некоторую систему координат. Согласно определению ранга, существует по крайней мере один минор порядка $l(\alpha_0)$ производной матрицы отображения $\Phi$ в точке $\alpha_0$, отличный от нуля. Однако, поскольку $\Phi$ принадлежит классу $C^1$, этот минор является непрерывной функцией $\alpha$, а, следовательно, существует окрестность $\mathcal{A}_0$ точки $\alpha_0$, во всех точках которой этот минор $\neq 0$. Значит, в каждой точке $\alpha \in \mathcal{A}_0$ ранг $\Phi'(\alpha) \geqslant l(\alpha_0)$.

## Зависимые и независимые функции

Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ суть $N$ скалярных функций класса $C^1$ от $n$ переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Они определяют отображение $\Phi$: $u \to x = \Phi(u)$ класса $C^1$ открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^N$.

Посмотрим, в каких случаях эти функции являются зависимыми или независимыми в окрестности точки $\alpha \in \mathcal{O}$. Пусть $a = \Phi(\alpha)$.

1-*й случай. Независимость.* Предположим, что ранг отображения $\Phi'(\alpha)$ равен $N$ — числу функций. Другими словами, один из миноров ранга $N$ производной матрицы, состоящей из элементов $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}(\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, n$, отличен от нуля. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $n \geqslant N$, т. е. чтобы число переменных было не меньше числа функций. Тогда теорема 30 (или $33_5$) говорит нам о том, что образ всякой окрестности $\alpha$ при отображении $\Phi$ является окрестностью точки $a$. Функции $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \ldots, \Phi_N(u)$ могут принимать произвольные значения, лишь бы только эти значения были достаточно близкими к $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Следовательно, если между функциями $\Phi_i$ имеется соотношение вида

$$R(\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \Phi_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)) \equiv 0, \tag{III, 9; 31}$$

где $R$ — некоторая функция $N$ переменных, то $R$ должна быть тождественным нулем в окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т. е. по существу никакого соотношения нет.

В этом случае естественно говорить, что $N$ *функций* $\Phi_i$ *независимы в окрестности точки* $\alpha$.

*2-й случай. Зависимость.* Предположим теперь, что $\Phi'(\alpha)$ для каждой точки $\alpha$ имеет один и тот же ранг $l < N$. Тогда из теоремы $33_5$ следует, что существует окрестность точки $\alpha$, образ которой при отображении $\Phi$ является многообразием $V$ размерности $l$ класса $C^1$ пространства $\mathbb{K}^N$. Изменяя при необходимости порядок заданных функций $\Phi_i$, можно прийти к случаю, когда это многообразие задается уравнениями вида

$$x_{l+k} = G_k(x_1, x_2, \ldots, x_l), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-l. \quad \text{(III, 9; 32)}$$

Тогда в окрестности $\alpha$ функции $\Phi_i$ удовлетворяют $N-l$ нетривиальным соотношениям

$$\begin{gathered} \Phi_{l+k}(u_1, \ldots, u_n) \equiv \\ \equiv G_k(\Phi_1(u_1, \ldots, u_n), \Phi_2(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \Phi_l(u_1, \ldots, u_n)), \\ k = 1, 2, \ldots, N-l. \quad \text{(III, 9; 33)} \end{gathered}$$

На этот раз это настоящие соотношения, поскольку при заданных значениях $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ они определяют функции $\Phi_{l+k}$. Последние $N-l$ соотношений *независимы*, так как функции $x \to x_{l+k} - G_k(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ независимы *в смысле* 1-*го случая*.

В самом деле, их дифференциалы $dx_{l+k} - dG_k$ таковы, что $dx_{l+k}$ входит с ненулевым коэффициентом лишь в $k$-й из них. Следовательно, для фиксированного $x$ не существует линейного соотношения между ними с постоянными коэффициентами. Ранг системы этих $N-l$ дифференциалов равен $N-l$ для любого $x$, близкого к точке $a$. Естественно говорить в этом случае, что *функции* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ *зависимы и удовлетворяют* $N-l$ *независимым соотношениям.*

Существуют, конечно, и другие, не рассматриваемые нами случаи, когда ранг производной не постоянен в окрестности точки $\alpha$. В этих случаях результаты будут гораздо более сложные, чем те, которые мы получили выше. Поэтому утверждение такого рода: $N$ функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ от $n$ переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ с непрерывными частными производными первого порядка независимы тогда и только тогда, когда производная матрица функций $\Phi_i$ имеет ранг $N$, и зависимы тогда и только тогда, когда производная матрица имеет ранг $<N$, — *не является точным и в конечном счете неверно.*

Рассмотрим, например, представление (III, 9; 30) конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Три функции $F$, $G$, $H$ двух вещественных переменных $r$, $\varphi$ удовлетворяют соотношению $F^2 + G^2 - H^2 = 0$. Но в окрестности точки $(0, \varphi_0)$, представляющей начало координат $x = y = z = 0$, из этого соотношения невозможно выразить одну из этих трех функций как непрерывно дифференцируемую функцию двух других, как это делалось во 2-м случае.

Можно столкнуться со значительно более сложными фигурами, чем конус, для которых невозможно придать никакого «утилитарного» смысла понятию зависимости или независимости. Поэтому *разумно ограничиться только рассмотренными выше случаями.*

## Особые, или параметрические, многообразия

Вводимое здесь новое понятие является обобщением понятия пути, введенного в гл. II на стр. 90.

*Особым*, или *параметрическим*, *многообразием* размерности $n$ класса $C^m$ в аффинном пространстве $E$ размерности $N$ называется отображение $\Phi$ класса $C^m$ некоторого многообразия $V$ размерности $n$ класса $C^m$ (абстрактного или погруженного в аффинное пространство) в пространство $E$. Образ $\Phi(V)=W$ называется *образом параметрического многообразия.* Не следует путать его с самим параметрическим многообразием, которое является отображением $\Phi$ многообразия $V$ в $W$. Например, если $\Phi$ постоянно: $\Phi(V)=\{a\}$, $a\in E$, то образом является точка, но параметрическое многообразие — это постоянное отображение $\Phi$. Лемниската Бернулли в $\mathbb{R}^2$ не является многообразием, но она есть образ некоторого параметрического многообразия при $V=\mathbb{R}$ (см. формулу (III, 9; 29)); в этом примере отображение $\Phi$ инъективно. Она является также образом параметрического многообразия, для которого $V$ — окружность, причем можно построить параметрическое многообразие так, что, когда $V$ пробегается в некотором заданном направлении, лемниската будет пробегаться в направлении 1, 2, 3, 4, указан-

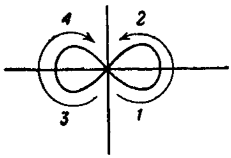



Рис. 7.

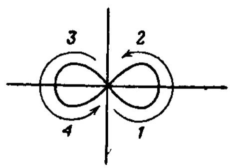



Рис. 8.

ном на рис. 7, а можно так, что она будет пробегаться в направлении 1, 2, 3, 4 на рис. 8. Наконец, она является образом параметрического многообразия, для которого $V$ представляет собой систему двух отдельных окружностей, которые при отображении $\Phi$ переходят в две петли лемнискаты. Все это — различные параметрические многообразия.

Если вместо $V$ взять замкнутый отрезок $[a, b]$ из $\mathbb{R}$, то отображение $\Phi$ класса $C^m$ отрезка $[a, b]$ в $E$ называется *кривой класса $C^m$ из $E$* с началом $\Phi(a)$ и концом $\Phi(b)$. Если $\Phi(a) = \Phi(b)$, то говорят, что это *замкнутая* кривая (хотя это никак не связано с топологическим понятием замкнутого множества).

Два параметрических многообразия $\Phi_1$: $V_1 \to E$, $\Phi_2$: $V_2 \to E$ называют *$C^m$-эквивалентными*, если существует $C^m$-диффеоморфизм $H$ многообразия $V_1$ на $V_2$, такой, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ H$ (тогда $\Phi_2 = \Phi_1 \circ H^{-1}$).

Такие многообразия имеют одни и те же образы. Это соответствует тому, что называется в математике *изменением параметрического представления* кривой или поверхности. Рассмотренные выше различные параметрические представления лемнискаты не являются эквивалентными параметрическими многообразиями.

## § 10. УСЛОВНЫЕ МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

Пусть $\Omega$ — открытое множество аффинного нормированного пространства $E$ над полем $\mathbb{R}$, и пусть $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ суть $m+1$ непрерывно дифференцируемых вещественных функций на $\Omega$. Займемся изучением экстремумов, т. е. максимумов или минимумов, функций $f$ на подмножестве $A \subset \Omega$, определенном уравнениями

$$g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ \ldots, \ g_m(x) = 0. \qquad (\text{III}, 10; 1)$$

Мы будем искать, следовательно, максимумы или минимумы функции $f$ не на $\Omega$, а только на некотором замкнутом, а не открытом подмножестве множества $\Omega$. В этом случае говорят об *условном максимуме* или *условном минимуме*.

Теорема 34. *Пусть $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — вещественные непрерывно дифференцируемые функции, определенные на открытом множестве $\Omega$ аффинного нормированного пространства $E$. Пусть $a$ — некоторая точка $\Omega$, удовлетворяющая уравнениям $g_1(a) = g_2(a) = \ldots = g_m(a) = 0$. Если линейные дифференциальные формы $g_1'(a), g_2'(a), \ldots, g_m'(a) \in \vec{E}'$ независимы, то необходимым условием того, что точка $a$ является точкой условного максимума или минимума функции $f$ на подмножестве $A$ множества $\Omega$, определенном уравнениями $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, является наличие таких $m$ вещественных постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, при которых имеет место соотношение*

$$f'(a) = \lambda_1 g_1'(a) + \lambda_2 g_2'(a) + \ldots + \lambda_m g_m'(a). \qquad (\text{III}, 10; 2)$$

*Величины $\lambda_i$ называются множителями Лагранжа, соответствующими экстремальной точке $a$.*

12 Зак. 1339