Если вместо $V$ взять замкнутый отрезок $[a, b]$ из $\mathbb{R}$, то отображение $\Phi$ класса $C^m$ отрезка $[a, b]$ в $E$ называется *кривой класса $C^m$ из $E$* с началом $\Phi(a)$ и концом $\Phi(b)$. Если $\Phi(a) = \Phi(b)$, то говорят, что это *замкнутая* кривая (хотя это никак не связано с топологическим понятием замкнутого множества).

Два параметрических многообразия $\Phi_1$: $V_1 \to E$, $\Phi_2$: $V_2 \to E$ называют *$C^m$-эквивалентными*, если существует $C^m$-диффеоморфизм $H$ многообразия $V_1$ на $V_2$, такой, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ H$ (тогда $\Phi_2 = \Phi_1 \circ H^{-1}$).

Такие многообразия имеют одни и те же образы. Это соответствует тому, что называется в математике *изменением параметрического представления* кривой или поверхности. Рассмотренные выше различные параметрические представления лемнискаты не являются эквивалентными параметрическими многообразиями.

## § 10. УСЛОВНЫЕ МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

Пусть $\Omega$ — открытое множество аффинного нормированного пространства $E$ над полем $\mathbb{R}$, и пусть $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ суть $m+1$ непрерывно дифференцируемых вещественных функций на $\Omega$. Займемся изучением экстремумов, т. е. максимумов или минимумов, функций $f$ на подмножестве $A \subset \Omega$, определенном уравнениями

$$g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ \ldots, \ g_m(x) = 0. \qquad \text{(III, 10; 1)}$$

Мы будем искать, следовательно, максимумы или минимумы функции $f$ не на $\Omega$, а только на некотором замкнутом, а не открытом подмножестве множества $\Omega$. В этом случае говорят об *условном максимуме* или *условном минимуме*.

Теорема 34. *Пусть $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — вещественные непрерывно дифференцируемые функции, определенные на открытом множестве $\Omega$ аффинного нормированного пространства $E$. Пусть $a$ — некоторая точка $\Omega$, удовлетворяющая уравнениям $g_1(a) = g_2(a) = \ldots = g_m(a) = 0$. Если линейные дифференциальные формы $g_1'(a), g_2'(a), \ldots, g_m'(a) \in \vec{E}'$ независимы, то необходимым условием того, что точка $a$ является точкой условного максимума или минимума функции $f$ на подмножестве $A$ множества $\Omega$, определенном уравнениями $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, является наличие таких $m$ вещественных постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, при которых имеет место соотношение*

$$f'(a) = \lambda_1 g_1'(a) + \lambda_2 g_2'(a) + \ldots + \lambda_m g_m'(a). \qquad \text{(III, 10; 2)}$$

*Величины $\lambda_i$ называются множителями Лагранжа, соответствующими экстремальной точке $a$.*

Перед доказательством этой теоремы укажем ее геометрический смысл. В открытом множестве $\Omega$ уравнения $g_i(x)=0$ определяют в окрестности точки $a$ некоторое дифференцируемое многообразие. Уравнения $g_i'(a)\overrightarrow{(x-a)}=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, являются уравнениями касательного линейного многообразия. Соотношения (III, 10; 2) выражают тот факт, что гиперплоскость $f'(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)}$, касательная к гиперповерхности $f(x)=f(a)$ в точке $a$, содержит это линейное многообразие.

Доказательство. Проведем сначала доказательство для конечномерного пространства $E$. В этом случае можно выбрать некоторую систему координат $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и выразить точку $x\in E$ в этой системе через ее координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предположение, что в точке $a$ дифференциалы $dg_i$ являются независимыми линейными формами, означает, что существует $m$ координат, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$, таких, что якобиан $\frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(a)\neq 0$. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $n\geqslant m$. Тогда в окрестности этой точки $a$, согласно теореме 28, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно выразить как функции от $g_1, g_2, \ldots, g_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$. Найденные значения можно подставить в $f$ и получить новую непрерывно дифференцируемую функцию $F(g_1, g_2, \ldots, g_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Запишем теперь, что функция $F$ имеет экстремум в точке $a$ при условии, что $x_{m+1}, \ldots, x_n$ изменяются, в то время как $g_1, g_2, \ldots, g_m$ остаются нулями. Необходимым условием этого является равенство нулю частных производных функций $F$ по $x_{m+1}, \ldots, x_n$ в точке $a$. Это означает, что дифференциал $dF$ в точке $a$ имеет вид

$$dF=\lambda_1\,dg_1+\lambda_2\,dg_2+\ldots+\lambda_m\,dg_m, \qquad \text{(III, 10; 3)}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — вещественные постоянные. Поскольку дифференциал $df$, выраженный через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, получается заменой в дифференциале $dF$, записанном относительно переменных $dg_1, dg_2, \ldots, dg_m, dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, дифференциалов $dg_i$ их выражениями через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, этот дифференциал $df$ удовлетворяет соотношению

$$df=\lambda_1\,dg_1+\lambda_2\,dg_2+\ldots+\lambda_m\,dg_m, \qquad \text{(III, 10; 4)}$$

что приводит к (III, 10; 2), и теорема доказана.

Предположим теперь, что пространство $E$ бесконечномерно. Поскольку $g_i'(a)$ по предположению независимы, они могут принимать произвольные заданные значения. Для каждого $i$ можно найти такой вектор $\vec{X}_i\in\vec{E}$, что $g_j'(a)\cdot\vec{X}_i=\delta_{ij}=0$ для $j\neq i$ и

1 для $j=i$. Построенные так векторы $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$, очевидно, независимы, ибо если положить $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{X}_i = \vec{0}$, то мы получим $g'_j(a) \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{X}_i = \lambda_j = 0$. Положим теперь $\lambda_i = f'(a) \cdot \vec{X}_i$. Линейная форма $f'(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g'_i(a)$ равна нулю на векторах $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots$ $\ldots, \vec{X}_m$, а, следовательно, на порождаемом ими векторном пространстве. Пусть $\vec{X}$ — произвольный вектор пространства $\vec{E}$. Обозначим через $\vec{E}_0$ подпространство пространства $\vec{E}$, порожденное векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m, \vec{X}$. На аффинном пространстве $E_0$, проходящем через $a$ параллельно $\vec{E}_0$, функция $f$ должна иметь экстремум в точке $a$ на множестве $A_0 = A \cap E_0$, определенном уравнениями $g_i(x) = 0$. Однако пространство $E_0$ имеет конечную размерность $m$ или $m+1$. Следовательно, существуют такие постоянные $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, что производная $f'(a) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i g'_i(a)$ равна нулю на $\vec{E}_0$. Если записать, что она обращается в нуль на $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$, то мы получим, что $\mu_i = \lambda_i$. Отсюда следует, что $f'(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g'_i(a)$ равна нулю на произвольном векторе $\vec{X}$ пространства $\vec{E}$, а, значит, обращается в нуль на всем $\vec{E}$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Из доказательства вытекает, что *множители Лагранжа $\lambda_i$ определяются единственным образом, что, впрочем, ясно было и заранее, поскольку $g'_i(a)$ предполагались независимыми.*

Замечание. *Пусть $g$ — некоторая функция класса $C^1$, определенная на $\Omega \subset E$, со значениями в $m$-мерном аффинном пространстве $G$, такая, что ее производная $g'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$ имеет ранг $m$. Для того чтобы $f$ имела в точке $a$ экстремум на подмножестве $A$ множества $\Omega$, определенном уравнением $g(x) = g(a)$, необходимо, чтобы существовал такой элемент $\lambda$ из $\overleftarrow{G}' = \mathscr{L}(\vec{G}; \mathbb{R})$, при котором имеет место равенство*

$$f'(a) = \lambda \circ g'(a) \in \overleftarrow{E}' = \mathscr{L}(\vec{E}; \mathbb{R}). \qquad \text{(III, 10; 4}_2\text{)}$$

В самом деле, выберем в $G$ некоторую систему координат с началом в точке $g(a)$. Таким путем $G$ отождествляется с $\mathbb{R}^m$. Теперь составляющие функции $g$ — это $m$ скалярных функций

$g_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и множество $A$ определяется уравнениями $g_i(x) = 0$. То, что $g'(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$ имеет ранг $m$, означает, что $g'_i(a) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \mathbb{R})$ независимы. Мы находимся в условиях применимости теоремы. Существование таких множителей Лагранжа $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при которых имеет место соотношение (III, 10; 2), эквивалентно существованию такого элемента $\lambda \in \overleftarrow{G}'$, при котором имеет место соотношение (III, 10; $4_2$). Однако результат, записанный в виде (III, 10; $4_2$), вовсе не зависит от выбора системы координат в $G$. Заметим, что в (III, 10; $4_2$) производная $g'(a)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{G})$, а $\lambda$ есть некоторый элемент пространства $\mathscr{L}(\vec{G}; \mathbb{R})$, и, следовательно, $\lambda \circ g'(a)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \mathbb{R})$.

### Практический способ вычисления условного максимума или минимума

Предположим для определенности, что $E$ имеет размерность $n$, что в нем выбрана некоторая система координат и что каждая точка $x \in E$ задана своими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будем искать точку $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ условного экстремума функции $f$ при условии $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Прежде всего должно удовлетворяться уравнение (III, 10; 2), эквивалентное системе $n$ уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(III, 10; 5)}$$

Если сюда добавить систему $m$ уравнений (III, 10; 1) (где $x$ должно быть заменено на $a$), то получится система $m + n$ уравнений относительно $m + n$ неизвестных, а именно, относительно координат $a_j$ точки $a$ и множителей Лагранжа $\lambda_i$. Нет необходимости полностью решать эту систему. Можно при желании исключить множители Лагранжа $\lambda_i$ и свести данную систему к системе из $n$ уравнений относительно $n$ неизвестных $a_j$.

З а м е ч а н и е. Хотя практически предыдущие уравнения записывают, не проверяя, что в рассматриваемой точке $a$ производные функций $g_i$ *независимы*, это является существенным условием применимости теоремы.

Предположим, например, что $f$ — некоторая вещественная непрерывно дифференцируемая функция $n$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $g$ есть функция $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2$.

Что же можно сказать о точке $a$, в которой функция $f$ достигает своего максимального или минимального значения на подмножестве $A$, определяемом уравнением $g(x)=0$ в $\mathbb{R}^n$? Это уравнение эквивалентно системе уравнений $x_1=x_2=\ldots$ $\ldots=x_{n-1}=0$, и, следовательно, рассматриваемое подмножество $A$ является осью $x_n$. Для того чтобы функция $f$ имела в точке $a$ оси $x_n$ условный максимум или минимум, необходимо лишь, чтобы ее частная производная $\partial f/\partial x_n$ равнялась нулю в точке $a$ без каких-либо условий, относящихся к другим частным производным. Если же, напротив, учесть существование множителя Лагранжа $\lambda$, при котором $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, $i=1, 2, \ldots, n$, то мы получим, что все частные производные функции $f$ в точке $a$ равны нулю! Но в этом случае теорема 34 неприменима, так как в точке $a$ оси $x_n$ дифференциал функции $g$ равен нулю.

Заметим, кроме того, что, как и для безусловных максимумов и минимумов, этот метод не позволяет утверждать, что данная функция имеет максимум или минимум в точке $a$, поскольку нами использованы лишь члены первого порядка в разложении Тейлора функции $f$ в точке $a$. Заметим также, что этот метод совсем не затрагивает условные экстремумы функции, которые могут соответствовать граничным точкам множества $F$, если оно не является открытой частью $E$.

Этим методом можно воспользоваться для того, чтобы определить оси некоторой поверхности 2-го порядка в евклидовом $n$-мерном аффинном пространстве, отыскивая точки этой поверхности, в которых расстояние от центра экстремально. Точно так же можно искать оси сечения такой поверхности плоскостью. В общем случае ищется точка $x$ гиперповерхности, заданной уравнением

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (g \text{ непрерывна}) \qquad \text{(III, 10; 6)}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$, евклидово расстояние от которой до заданной точки $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ минимально. Поскольку поверхность является замкнутым множеством (как прообраз нуля при непрерывном отображении $g$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$), то, согласно изложенному на стр. 83, существует хотя бы одна точка этой поверхности, расстояние от которой до точки $b$ минимально. Мы должны искать точку $x$, реализующую минимум величины

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-b_i)^2, \qquad \text{(III, 10; 7)}$$

среди всех точек, удовлетворяющих уравнению поверхности. Если $x$ удовлетворяет этому условию и если в этой точке дифференциал $dg$ не равен нулю, т. е. $n$ частных производных

$\partial g/\partial x_i$ не обращаются одновременно в нуль, то существует такой множитель Лагранжа $\lambda$, при котором имеют место равенства

$$x_i - b_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(III, 10; 8)}$$

Исключая отсюда $\lambda$, можно будет определить искомую точку $x$, выписывая $n$ уравнений с $n$ неизвестными:

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x)}{x_1 - b_1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x)}{x_2 - b_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x)}{x_n - b_n}, \qquad g(x) = 0. \qquad \text{(III, 10; 9)}$$

Эти уравнения выражают тот факт, что искомая точка, если она не особая, является основанием нормали к гиперповерхности, проведенной из точки $b$. Это согласуется с геометрической интерпретацией, данной после формулировки теоремы 34: в искомой точке $x$ гиперповерхность касательна к сфере с центром $b$, проходящей через эту точку. При таком решении задачи необходимо иметь в виду следующее:

1°) Точка поверхности, являющаяся основанием нормали, проведенной через точку $b$, не обязательно определяет минимум расстояния. Она может определять относительный минимум, относительный максимум или седло.

2°) Может случиться, что основания нормалей не дают эффективно абсолютный минимум расстояния и что такой минимум реализуется в особой точке поверхности, т. е. в точке, где все $n$ частных производных $\partial g/\partial x_i$ одновременно равны нулю и где, следовательно, техника множителей Лагранжа не пригодна. Впрочем, заметим, что если для получения (III, 10; 9) исключается параметр $\lambda$, то тем самым вводятся эти новые решения. Если поверхность не имеет особых точек, то, как мы видели, минимум обязательно существует. Отсюда следует, что через каждую точку $b$ можно провести к этой поверхности *по крайней мере одну нормаль*. Если, сверх того, поверхность компактна, то расстояние от точки поверхности до точки $b$, будучи непрерывной функцией на компакте, имеет максимум, и в этом случае, считая, что на поверхности нет особых точек, можно из точки $b$ провести еще по крайней мере одну нормаль, основание которой даст максимум расстояния от точек поверхности до точки $b$.

## Применение теории условных максимумов. Неравенства Гёльдера и Минковского

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — $n$ заданных и фиксированных положительных чисел. Пусть задано, кроме того, некоторое $p > 0$. Для каждой точки $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из $\mathbb{C}^n$ положим

$$\|\vec{X}\|_p = (c_1 |X_1|^p + c_2 |X_2|^p + \ldots + c_n |X_n|^p)^{1/p} \qquad \text{(III, 10; 10)}$$

и назовем эту величину *нормой* $\vec{X}$ *порядка* $p$ *относительно коэффициентов* $c_i > 0$. Очевидно, это число $\geqslant 0$. С другой стороны, тривиально проверяется, что $\|\lambda\vec{X}\| = |\lambda|\,\|\vec{X}\|$. Наконец, равенство $\|\vec{X}\| = 0$ эквивалентно равенству $\vec{X} = \vec{0}$. Для того чтобы обосновать название нормы, остается доказать неравенство выпуклости.

Позже мы увидим, что это неравенство выполняется только для $p \geqslant 1$. Только в этом случае будет оправдано название нормы. Тем не менее мы будем продолжать говорить о *норме порядка* $p$ и обозначать ее тем же самым образом, даже если $p < 1$.

Конечно, отображение $(\vec{X}, p) \to \|\vec{X}\|_p$ является непрерывным отображением $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+^*$ в $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}_+^*$ есть множество вещественных чисел $>0$. Посмотрим, что происходит с этой нормой, когда $p$ стремится к $+\infty$. Пусть $M = \sup(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|)$, и предположим для определенности, что $i$ является тем индексом, при котором $|X_i| = M$. Тогда имеют место неравенства

$$\|\vec{X}\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{1/p} M \quad \text{и} \quad \|\vec{X}\|_p \geqslant c_i^{1/p} M. \qquad \text{(III, 10; 11)}$$

Правые части этих неравенств при $p$, стремящемся к $+\infty$, стремятся к $M$. Отсюда следует, что для фиксированного $\vec{X}$ при $p$, стремящемся к бесконечности, $\|\vec{X}\|_p$ стремится к $M$.

Поэтому обычно полагают

$$\|\vec{X}\|_\infty = \sup(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|). \qquad \text{(III, 10; 12)}$$

Заметим теперь, что рассмотренные на стр. 43 три нормы над $\mathbb{C}^n$ являются нормами $\|\vec{X}\|_\infty$, $\|\vec{X}\|_1$, $\|\vec{X}\|_2$. Посмотрим, что происходит с $\|\vec{X}\|_p$ при $p$, стремящемся к 0. В общем случае характер поведения нормы не представляет интереса. Это интересно лишь в частном случае, когда сумма $\sum_{i=1}^{n} c_i$ равна 1. В этом случае норма называется *средним порядка* $p$ *чисел* $|X_1|$, $|X_2|, \ldots, |X_n|$ *по отношению к коэффициентам* $c_i$.

Здесь речь идет о взвешенном среднем.

Обычное *среднее арифметическое* соответствует $c_i = 1/n$ и $p = 1$. Для $c_i = 1/n$ и произвольного $p$ средним порядка $p$ является число, $p$-я степень которого есть среднее арифметическое $p$-х степеней $|X_i|$.

Положим $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$ и будем искать предел $\|\vec{X}\|_p$ при $p$, стремящемся к 0. Предположим сначала, что ни одно из чисел $X_i$ не равно нулю. В этом случае можно написать разложение

$$|X_i|^p = e^{p \ln |X_i|} = 1 + p \ln |X_i| + \ldots, \qquad \text{(III, 10; 13)}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} c_i |X_i|^p = \sum_{i=1}^{n} c_i + p \sum_{i=1}^{n} c_i \ln |X_i| + \ldots =$$

$$= 1 + p \sum_{i=1}^{n} c_i \ln |X_i| + \ldots; \qquad \text{(III, 10; 14)}$$

учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$, получаем разложение

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} c_i |X_i|^p\right) = p \sum_{i=1}^{n} c_i \ln |X_i| + \ldots. \qquad \text{(III, 10; 15)}$$

Отсюда видно, что при $p$, стремящемся к 0, $\ln \|\vec{X}\|_p = \frac{1}{p} \ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i |X_i|^p\right)$ стремится к $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \ln |X_i|$, и, следовательно, $\|\vec{X}\|_p$ стремится к

$$\prod_{i=1}^{n} |X_i|^{c_i}. \qquad \text{(III, 10; 16)}$$

Эта величина является *взвешенным средним геометрическим* чисел $|X_i|$ с весами $c_i$.

Если все $c_i$ равны $1/n$, то мы получаем обычное среднее геометрическое $\sqrt[n]{|X_1 X_2 \ldots X_n|}$. Легко проверить, что результат остается верным, если некоторые $X_i$ равны нулю. Предел $\|\vec{X}\|_p$ будет тогда равен нулю.

Мы приходим к тому, чтобы при $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$ положить

$$\|\vec{X}\|_0 = \prod_{i=1}^{n} |X_i|^{c_i}. \qquad \text{(III, 10; 17)}$$

Теорема 35 (неравенство Минковского). *Для* $p \geqslant 1$ [1]) *имеет место неравенство выпуклости*:

$$\|\vec{X}+\vec{Y}\|_p \leqslant \|\vec{X}\|_p + \|\vec{Y}\|_p, \qquad \text{(III, 10; 18)}$$

*причем для* $1 < p < \infty$ *имеет место строгое неравенство, за исключением случая, когда векторы* $\vec{X}$ *и* $\vec{Y}$ *пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности* $\geqslant 0$.

Доказательство. Неравенство очевидно для $p=1$ и $p=+\infty$. Остается, следовательно, изучить случай конечного $p>1$ и при этом, естественно, провести доказательство для случая, когда оба вектора $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ отличны от нуля. При этом можно ограничиться случаем, когда $X_i$, $Y_i$ вещественны и $\geqslant 0$. Однако множество точек $\mathbb{R}^n$, координаты которых $\geqslant 0$, не является открытым множеством в векторном нормированном пространстве и, следовательно, теоремы об экстремумах не применимы. Поэтому мы докажем неравенство для всего векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $\|\vec{X}\|_p=\alpha$, $\|\vec{Y}\|_p=\beta$ и $\|\vec{X}+\vec{Y}\|_p=\gamma$. Рассмотрим множество $A$ точек $(\vec{X}, \vec{Y})$ из $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, для которых $\alpha$ и $\beta$ принимают заданные отличные от нуля значения $\alpha_0$ и $\beta_0$. Это, очевидно, некоторая *компактная часть* пространства $\mathbb{R}^{2n}$. В самом деле, это множество $A$ замкнуто как прообраз точки $(\alpha_0, \beta_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ при непрерывном отображении $(\vec{X}, \vec{Y}) \to (\|\vec{X}\|_p, \|\vec{Y}\|_p)$ пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Оно ограничено, ибо задание $\alpha_0$ и $\beta_0$ определяет мажоранту для всех координат векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Согласно теореме 23 гл. II, это множество компактно. Поскольку $\gamma$ является непрерывной функцией точки $(\vec{X}, \vec{Y})$ из $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, она принимает на компакте $A$ максимум или минимум. Обозначим через $(\vec{X}, \vec{Y})$ точку, в которой этот минимум или максимум достигается. Это будет точка условного экстремума. В самом деле, в этой точке непрерывная на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ функция $\gamma^p$ достигает своего максимума или

[1]) Для $p<1$ результат не имеет места. Возьмем, например, $p=1/2$, $n=2$, $c_1=c_2=1$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2>0$. Тогда (III, 10; 8) означает, что

$$(\sqrt{X_1+Y_1}+\sqrt{X_2+Y_2})^2 \leqslant (\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^2+(\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2})^2,$$

$$\text{или}\quad \sqrt{(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)} \leqslant \sqrt{X_1X_2}+\sqrt{Y_1Y_2},$$

$$\text{или}\quad (X_1+Y_1)(X_2+Y_2) \leqslant X_1X_2+Y_1Y_2+2\sqrt{X_1X_2Y_1Y_2},$$

$$\text{или}\quad X_1Y_2+X_2Y_1 \leqslant 2\sqrt{X_1X_2Y_1Y_2},$$

в то время как в силу неравенства $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ должно иметь место неравенство вида $\geqslant$.

минимума среди точек, связанных двумя соотношениями: $\alpha^p(\vec{X}, \vec{Y}) = \alpha^p(\vec{X}) = \alpha_0^p$ и $\beta^p(\vec{X}, \vec{Y}) = \beta^p(\vec{Y}) = \beta_0^p$.

*Все три функции $\alpha^p$, $\beta^p$, $\gamma^p$ непрерывно дифференцируемы.*

Рассмотрим, например, функцию $\alpha^p$. Она имеет частную производную по $X_i$ в открытом множестве $X_i \neq 0$, равную

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\alpha^p) = pc_i\varepsilon_i |X_i|^{p-1}, \quad \varepsilon_i = \operatorname{sign} X_i. \qquad \text{(III, 10; 19)}$$

При $X_i$, стремящемся к 0, эта производная имеет равный нулю предел. Согласно теореме 14, примененной к функции $\alpha^p$, если изменяется только $X_i$, существует также частная производная на гиперплоскости $X_i = 0$ и эта производная равна нулю [1]). Следовательно, производная $\alpha^p$ по $X_i$ всюду существует. Производная функция определена соотношением (III, 10; 19). Эта функция непрерывна во всем $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, и, следовательно, $\alpha^p$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка, согласно теореме 15, непрерывно дифференцируема. То же самое имеет место для функций $\beta^p$ и $\gamma^p$, производные которых имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial Y_i}(\beta^p) = pc_i\eta_i |Y_i|^{p-1}, \quad \eta_i = \operatorname{sign} Y_i, \qquad \text{(III, 10; 20)}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\gamma^p) = \frac{\partial}{\partial Y_i}(\gamma^p) = pc_i\zeta_i |X_i + Y_i|^{p-1}, \quad \zeta_i = \operatorname{sign}(X_i + Y_i). \qquad \text{(III, 10; 21)}$$

(Очевидно, предыдущие результаты не были правильными для $p \leqslant 1$.) Теперь в той точке $(\vec{X}, \vec{Y})$, где реализуется либо максимум, либо минимум, существуют два множителя Лагранжа $\lambda$ и $\mu$, такие, что [2])

$$d(\gamma^p) = \lambda d(\alpha^p) + \mu d(\beta^p), \qquad \text{(III, 10; 22)}$$

или

$$\left.\begin{aligned} pc_i\zeta_i |X_i + Y_i|^{p-1} &= \lambda pc_i\varepsilon_i |X_i|^{p-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ pc_i\zeta_i |X_i + Y_i|^{p-1} &= \mu pc_i\eta_i |Y_i|^{p-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 10; 23)}$$

Если для некоторого индекса $i$ координата $X_i$ равна нулю, то первое уравнение из (III, 10; 23) для этого индекса превращается в равенство $X_i + Y_i = 0$, откуда в свою очередь $Y_i = 0$.

---

[1]) Непосредственная проверка показывает, что в тех точках, где $X_i = 0$, производная $\partial/\partial X_i$ равна нулю!

[2]) При условии, что дифференциалы $d(\alpha^p)$ и $d(\beta^p)$ независимы. Однако один из них зависит только от $dX_i$, а другой только от $dY_i$. Они могут быть зависимыми только тогда, когда один из них равен нулю, т. е. когда $\vec{X} = \vec{0}$ или $\vec{Y} = \vec{0}$, что мы исключили, положив $\alpha_0 \neq 0$ и $\beta_0 \neq 0$.

Точно так же, если $Y_i=0$, то второе уравнение даст $X_i=0$. Следовательно, в той точке, в которой имеет место максимум или минимум, если одна из координат $X_i$, $Y_i$ обратилась в нуль, то и другая также обратится в нуль.

Если ни одна из координат не равна нулю, уравнения (III, 10; 23) для индекса $i$ эквивалентны уравнениям

$$\zeta_i\left|1+\frac{Y_i}{X_i}\right|^{p-1}=\varepsilon_i\lambda, \qquad \zeta_i\left|1+\frac{X_i}{Y_i}\right|^{p-1}=\eta_i\mu. \qquad \text{(III, 10; 24)}$$

Во всяком случае множество этих уравнений, после исключения $\lambda$ и $\mu$, можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{Y_1}{X_1}=\frac{Y_2}{X_2}=\ldots=\frac{Y_n}{X_n}. \qquad \text{(III, 10; 25)}$$

Некоторые из отношений могут оказаться неопределенными, вида 0/0 (но не все, поскольку $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ не нули). Пусть $s$ — общее значение этих отношений. Тогда $\beta_0=|s|\alpha_0$ и, следовательно,

$$\gamma=\left(\sum_{i=1}^{n}c_i|1+s|^p|X_i|^p\right)^{1/p}=|1+s|\alpha_0. \qquad \text{(III, 10; 26)}$$

Отсюда с необходимостью вытекает, что максимум $\gamma$ равен $\alpha_0+\beta_0$ и достигается при $s>0$ и что его минимум равен $|\alpha_0-\beta_0|$ и достигается при $s<0$. Теперь получаем, что всегда имеет место неравенство $\gamma\leqslant\alpha+\beta$, являющееся неравенством выпуклости (III, 10; 18). Кроме тех точек, в которых реализуется максимум, везде имеет место строгое неравенство $\gamma<\alpha+\beta$. В точках максимума имеет место (III, 10; 25) с общим значением отношений $s>0$. Иначе говоря, векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны с коэффициентом пропорциональности $\geqslant 0$ [1]). Конечно, это доказывает вторую часть теоремы лишь в том случае, когда векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ имеют вещественные координаты. Однако точно так же в общем случае комплексных координат получается последовательность неравенств

$$\|\vec{X}+\vec{Y}\|_p\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(|X_i|+|Y_i|)^p\right)^{1/p}\leqslant\|\vec{X}\|_p+\|\vec{Y}\|_p. \qquad \text{(III, 10; 27)}$$

Первое из них является строгим неравенством, кроме случая, когда все отношения $X_i/Y_i$ вещественны и $\geqslant 0$, чем и доказывается теорема в общем случае.

---

[1]) Мы пишем $\geqslant 0$ вместо $>0$ для того, чтобы вернуться к отложенному ранее очевидному случаю, когда по крайней мере из двух векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен нулю.

Теорема 36 (неравенство Гёльдера). *Если при произвольных числах $p$ и $q$ и таком числе $r$, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, обозначить через $\vec{X}\vec{Y}$ точку с координатами $X_1Y_1$, $X_2Y_2$, ..., $X_nY_n$, то*

$$\|\vec{X}\vec{Y}\|_r \leqslant \|\vec{X}\|_p \|\vec{Y}\|_q. \qquad \text{(III, 10; 28)}$$

*Кроме того, если $0<p<+\infty$, $0<q<+\infty$, то всегда имеет место строгое неравенство, за исключением случая, когда*

$$\frac{|Y_1|^q}{|X_1|^p}=\frac{|Y_2|^q}{|X_2|^p}=\ldots=\frac{|Y_n|^q}{|X_n|^p}. \qquad \text{(III, 10; 29)}$$

Докажем прежде всего теорему для случая, когда все три числа $p$, $q$, $r$ больше 1 и конечны. Как и в теореме 35, мы воспользуемся методом множителей Лагранжа. Положим

$$\alpha=\|\vec{X}\|_p, \quad \beta=\|\vec{Y}\|_q, \quad \gamma=\|\vec{X}\vec{Y}\|_r.$$

Если мы рассмотрим точку, в которой достигается либо максимум, либо минимум функции $\gamma$, когда $\alpha$ и $\beta$ принимают заданные значения $\alpha_0$ и $\beta_0\neq 0$, то существуют два таких множителя $\lambda$ и $\mu$, что $d(\gamma^r)=\lambda\, d(\alpha^p)+\mu\, d(\beta^q)$, или

$$\left.\begin{aligned} &rc_i\varepsilon_i|X_i|^{r-1}|Y_i|^r=\lambda pc_i\varepsilon_i|X_i|^{p-1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n,\\ &rc_i\eta_i|X_i|^r\,|Y_i|^{r-1}=\mu qc_i\eta_i|Y_i|^{q-1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 10; 30)}$$

Отыскание минимума производится без труда. В самом деле, если для каждого $i$ хотя бы одна из координат $X_i$, $Y_i$ равна нулю, но таким образом, что одновременно $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$ (например, если $X_1=\frac{\alpha_0}{c_1^{1/p}}$ и $X_2=X_3=\ldots=X_n=0$ и далее $Y_1=0$, $Y_2=\frac{\beta_0}{c_2^{1/q}}$, $Y_3=\ldots=Y_n=0$), то $\vec{X}\vec{Y}$ равняется нулю и минимум $\gamma$ также равен нулю. Мы не будем касаться этого случая и будем искать только максимум.

Если для некоторого индекса $i$ координата $X_i$ равна нулю, то второе уравнение для этого индекса дает $Y_i=0$ или $\mu=0$. Однако если $\mu=0$, то при любом $i$ хотя бы одна из двух координат $X_i$, $Y_i$ равна нулю, и мы приходим к случаю минимума, уже исключенному из рассмотрения. Таким образом, $\mu\neq 0$ и, следовательно, из $X_i=0$ следует $Y_i=0$. Точно так же из $Y_i=0$ следует $X_i=0$. Если $X_i$ и $Y_i$ обе $\neq 0$, то уравнения (III, 10; 30) дают соотношения

$$p\lambda|X_i|^p=q\mu|Y_i|^q, \quad i=1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(III, 10; 31)}$$

а, следовательно, (III, 10; 29).

Некоторые из этих соотношений, но не все, могут представиться в неопределенной форме 0/0.

Положим $|Y_i|^q = s|X_i|^p$. Тогда $\beta_0^q = s\alpha_0^p$. Отсюда получаем

$$\gamma^r = s^{r/q} \sum_{i=1}^{n} c_i |X_i|^{r+\frac{pr}{q}} = s^{r/q} \sum_{i=1}^{n} c_i |X_i|^p = s^{r/q}\alpha_0^p, \qquad \text{(III, 10; 32)}$$

что дает $\gamma^r = \alpha_0^r\beta_0^r$, или $\gamma = \alpha_0\beta_0$. Отсюда вытекает, что для каждой точки $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\gamma \leqslant \alpha_0\beta_0$, что совпадает с неравенством (III, 10; 28).

Кроме того, везде имеет место строгое неравенство $\gamma < \alpha_0\beta_0$, за исключением отдельных точек, где реализуется максимум, и в этих точках имеют место равенства пропорциональности (III, 10; 29).

Теорема была доказана лишь для конечных $p$, $q$, $r$, больших 1. Однако если мы будем считать теорему доказанной для индексов $p$, $q$ и числа $r$, определенного равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, и если мы положим $|X_i| = |\xi_i|^k$, $|Y_i| = |\eta_i|^k$, $0 < k < +\infty$, то будет иметь место неравенство

$$\|\vec{\xi}\vec{\eta}\|_{kr}^k \leqslant \|\vec{\xi}\|_{kp}^k \|\vec{\eta}\|_{kq}^k, \qquad \text{(III, 10; 33)}$$

откуда следует, если возвести обе части равенства в степень $1/k$, что теорема доказана для показателей $kp$, $kq$, $kr$, таких, что $\frac{1}{kp} + \frac{1}{kq} = \frac{1}{kr}$.

Отсюда вытекает, что доказательство теоремы для произвольных конечных показателей $>0$ можно свести к уже изученному случаю показателей вида $p/k$, $q/k$, выбирая $k$ таким образом, чтобы числа $p/k$, $q/k$, $r/k$ были $>1$. Это, однако, не дает возможности доказать теорему, если показатели $p$, $q$, $r$ равны $+\infty$ или 0 при $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Если, например, $p = +\infty$, то $q = r$ и неравенство (III, 10; 28) запишется в виде

$$\|\vec{X}\vec{Y}\|_q \leqslant \|\vec{X}\|_\infty \|\vec{Y}\|_q. \qquad \text{(III, 10; 34)}$$

Это неравенство тривиально, даже если $q$ также равно $+\infty$.

Во всяком случае оставшиеся неравенства могут быть доказаны предельным переходом.

Следствие 1. *Два показателя $p$, $p' \geqslant 1$ называются сопряженными, если имеет место соотношение*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{или} \quad p' = \frac{p}{p-1}. \qquad \text{(III, 10; 35)}$$

*В этом частном случае неравенство Гёльдера имеет вид*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i Y_i\right| \leqslant \|\vec{X}\|_p \|\vec{Y}\|_{p'}. \qquad \text{(III, 10; 36)}$$

*Кроме того, для $p \neq 1$ и $\neq \infty$ имеет место строгое неравенство, за исключением случая, когда выполняется соотношение пропорциональности*

$$\frac{|Y_1|^{p'}}{|X_1|^p} = \frac{|Y_2|^{p'}}{|X_2|^p} = \ldots = \frac{|Y_n|^{p'}}{|X_n|^p}, \qquad \text{(III, 10; 37)}$$

*где все произведения $X_iY_i$ имеют один и тот же аргумент*[1]).

Для доказательства достаточно применить общее неравенство, в котором $r=1$. Из него тогда получится соотношение $\|\vec{X}\vec{Y}\|_1 \leqslant \|\vec{X}\|_p \|\vec{Y}\|_{p'}$ и, следовательно, тем более соотношение (III, 10; 36). Однако

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i Y_i\right| < \|\vec{X}\vec{Y}\|_1, \qquad \text{(III, 10; 38)}$$

кроме случая, когда все комплексные числа $X_iY_i$ имеют один и тот же аргумент. Очевидно, что, кроме случая, указанного в условии, неравенство (III, 10; 36) будет строгим.

Следствие $1_2$ (неравенство Коши — Шварца). *Имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \overline{Y}_i\right| \leqslant \|\vec{X}\|_2 \|\vec{Y}\|_2 \qquad \text{(III, 10; 39)}$$

*со знаком строгого неравенства $<$, кроме того случая, когда векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны.*

Достаточно применить следствие 1 к сопряженным показателям $p=p'=2$. Аргумент $X_i\overline{Y}_i$ совпадает с аргументом $X_i/Y_i$, а все числа $Y_i/X_i$ имеют общий модуль и общий аргумент тогда и только тогда, когда векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ пропорциональны. Мы давали ранее другое доказательство (формула (III, 1; 11)). Для получения (III, 10; 39) достаточно применить формулу (III, 1; 11) к положительно определенной полуторалинейной эрмитовой форме

$$B(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \overline{Y}_i. \qquad \text{(III, 10; 40)}$$

---

[1]) Если все $X_i$ отличны от нуля, то соотношение (III, 10; 37) означает, что существует такая постоянная $k$, что $|Y_i| = k|X_i|^{p-1}$.

Следствие 2. *Если сумма весов* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i$ *равна 1, то для фиксированного* $\vec{X}$ *среднее порядка* $p$. $\|\vec{X}\|_p$ *является непрерывной возрастающей функцией* $p$. *Эта функция строго возрастает, кроме случая, когда* $|X_1|=|X_2|=\ldots=|X_n|$, *в котором она постоянна.*

В самом деле, достаточно применить неравенство Гёльдера к случаю, когда $Y_1=Y_2=\ldots=Y_n=1$. Если учесть, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i=1$, то $\|\vec{Y}\|_q=1$. Это дает при любом $q \geqslant 0$ и, следовательно, при любом $r \leqslant p$ неравенство

$$\|\vec{X}\|_r \leqslant \|\vec{X}\|_p. \tag{III, 10; 41}$$

Более того, здесь будет всегда иметь место строгое неравенство, кроме случая, когда

$$\frac{1}{|X_1|^p}=\frac{1}{|X_2|^p}=\ldots=\frac{1}{|X_n|^p}, \tag{III, 10; 42}$$

т. е. когда все $|X_i|$ равны. При этом среднее очевидным образом будет постоянной, равной общему значению этих чисел.

Следствие $2_2$. *Среднее геометрическое конечного числа неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического и всегда строго меньше его, за исключением случая, когда все эти числа равны между собой.*

Для доказательства достаточно применить (III, 10; 41) при $r=0$ и $p=1$.

*Доказательство неравенств Гёльдера и Минковского с помощью теории выпуклых функций.* Функция $x \to x^s$, $s \geqslant 1$, выпукла для $x>0$. В самом деле, она непрерывна, а ее вторая производная для $x>0$ существует и равна $s(s-1)x^{s-2}>0$ (теорема $7_2$). Следовательно, для $z_1, z_2, \ldots, z_n \geqslant 0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ имеем:

$$\left(\frac{\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_n z_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\right)^s \leqslant \frac{\alpha_1 z_1^s+\ldots+\alpha_n z_n^s}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}, \tag{III, 10; 43}$$

или, умножая на $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)^s$ и возводя в степень $1/s$:

$$(\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_n z_n) \leqslant (\alpha_1 z_1^s+\ldots+\alpha_n z_n^s)^{1/s}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)^{1-1/s}. \tag{III, 10; 44}$$

Положим теперь для $X_i$, $Y_i \geqslant 0$, $c_i \geqslant 0$, $p$, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$

$$\alpha_i=c_i Y_i^q, \quad z_i=X_i^r Y_i^{r-q}, \quad s=\frac{p}{r}. \tag{III, 10; 45}$$

Тогда

$$\frac{1}{s}=\frac{r}{p},\quad 1-\frac{1}{s}=\frac{r}{q}\quad \left(\text{ибо } \frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1\right),$$

$$\alpha_i z_i = c_i (X_i Y_i)^r, \tag{III, 10; 46}$$

$$\alpha_i z_i^s = c_i X_i^{rs} Y_i^{q+s(r-q)} = c_i X_i^p Y_i^{p+q-\frac{pq}{r}} = c_i X_i^p.$$

Возводя теперь (III, 10; 44) в степень $1/r$, получаем неравенство Гёльдера

$$(c_1 (X_1 Y_1)^r + \ldots + c_n (X_n Y_n)^r)^{1/r} \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_1 X_1^p + \ldots + c_n X_n^p\right)^{1/p} \left(c_1 Y_1^q + \ldots + c_n Y_n^q\right)^{1/q}. \tag{III, 10; 47}$$

Функция $x \to (1-x^{1/p})^p$, $p \geqslant 1$, выпукла на $[0, 1]$, ибо ее вторая производная на $]0, 1[$ равна

$$(1-x^{1/p})^{p-2}\left(1-\frac{1}{p}\right)x^{1/p-2} \geqslant 0.$$

Следовательно, для $0 \leqslant z_1, z_2, \ldots, z_n \leqslant 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ имеем

$$\left(1-\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}\right)^{1/p}\right)^p \leqslant \frac{\alpha_1\left(1-z_1^{1/p}\right)^p + \ldots + \alpha_n\left(1-z_n^{1/p}\right)^p}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}. \tag{III, 10; 48}$$

Возводя в степень $1/p$, а затем умножая на $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^{1/p}$, получаем

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^{1/p} \leqslant (\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)^{1/p} +$$
$$+ \left(\alpha_1 \left(1-z_1^{1/p}\right)^p + \ldots + \alpha_n \left(1-z_n^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}. \tag{III, 10; 49}$$

Для $c_i$, $X_i$, $Y_i \geqslant 0$ положим

$$\alpha_i = c_i (X_i + Y_i)^p, \qquad \alpha_i \geqslant 0,$$
$$z_i = \left(\frac{X_i}{X_i+Y_i}\right)^p, \qquad 0 \leqslant z_i \leqslant 1. \tag{III, 10; 50}$$

Отсюда

$$\alpha_i z_i = c_i X_i^p,$$
$$\alpha_i \left(1-z_i^{1/p}\right)^p = c_i Y_i^p. \tag{III, 10; 51}$$

Теперь (III, 10; 49) принимает вид неравенства Минковского:

$$(c_1 (X_1 + Y_1)^p + \ldots + c_n (X_n + Y_n)^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_1 X_1^p + \ldots + c_n X_n^p\right)^{1/p} \left(c_1 Y_1^p + \ldots + c_n Y_n^p\right)^{1/p}. \tag{III, 10; 52}$$

Неравенство Минковского можно также получить из неравенства Гёльдера. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{p-1}X_i+\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{p-1}Y_i. \qquad \text{(III, 10; 53)}$$

Согласно неравенству Гёльдера, написанному относительно показателей $p$, $p'$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ $\left(p'=\frac{p}{p-1}\right)$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^p\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^p\right)^{1/p}. \qquad \text{(III, 10; 54)}$$

Поскольку $(p-1)p'=p$, достаточно обе части равенства умножить на $\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\right)^{-1/p'}$ и получить

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\right)^{1-(1/p')}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^p\right)^{1/p}, \qquad \text{(III, 10; 55)}$$

что совпадает с неравенством Минковского, так как $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$.

## § 11. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу механики:

Пусть в трехмерном пространстве заданы две точки $A$ и $B$ и некоторая кривая $\mathscr{C}$ класса $C^1$, соединяющая эти точки. По этой кривой без трения и под влиянием своего веса свободно скользит некоторая материальная точка.

Выходя из точки $A$ с нулевой начальной скоростью, она попадает в точку $B$ через время $t$. При заданных точках $A$ и $B$ это время является функцией рассматриваемой кривой. Спрашивается, как следует выбрать эту кривую, чтобы время $t$ было минимальным? Кривая, обладающая таким свойством, называется *брахистохроной* («кривой наискорейшего спуска»). Будем пока считать очевидным, что кривая, реализующая этот минимум, располагается в вертикальной плоскости, проходящей через отрезок $AB$. Выберем в этой плоскости горизонтальную ось $x$ и вертикальную ось $z$, направленную вниз. Пусть $z=a$, $x=\alpha$ и $z=b$, $x=\beta$ — координаты точек $A$ и $B$. Классическая теория падения тел говорит, что в заданной точке кривой при