Неравенство Минковского можно также получить из неравенства Гёльдера. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{p-1}X_i+\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{p-1}Y_i. \quad \text{(III, 10; 53)}$$

Согласно неравенству Гёльдера, написанному относительно показателей p, p', $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ $\left(p'=\frac{p}{p-1}\right)$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^p\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^p\right)^{1/p}. \quad \text{(III, 10; 54)}$$

Поскольку $(p-1)p'=p$, достаточно обе части равенства умножить на $\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\right)^{-1/p'}$ и получить

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)^p\right)^{1-(1/p')}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^p\right)^{1/p}, \quad \text{(III, 10; 55)}$$

что совпадает с неравенством Минковского, так как $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$.

§ 11. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу механики:

Пусть в трехмерном пространстве заданы две точки A и B и некоторая кривая $\mathscr{C}$ класса C^1, соединяющая эти точки. По этой кривой без трения и под влиянием своего веса свободно скользит некоторая материальная точка.

Выходя из точки A с нулевой начальной скоростью, она попадает в точку B через время t. При заданных точках A и B это время является функцией рассматриваемой кривой. Спрашивается, как следует выбрать эту кривую, чтобы время t было минимальным? Кривая, обладающая таким свойством, называется *брахистохроной* («кривой наискорейшего спуска»). Будем пока считать очевидным, что кривая, реализующая этот минимум, располагается в вертикальной плоскости, проходящей через отрезок AB. Выберем в этой плоскости горизонтальную ось x и вертикальную ось z, направленную вниз. Пусть $z=a$, $x=\alpha$ и $z=b$, $x=\beta$ — координаты точек A и B. Классическая теория падения тел говорит, что в заданной точке кривой при отсутствии трения скорость v материальной точки задается формулой

$$v^2 = 2g(z-a). \qquad \text{(III, 11; 1)}$$

Отсюда получается дифференциал времени как функция дифференциала криволинейной абсциссы: $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(z-a)}}$, так что окончательно время, необходимое для перехода от A к B, задается интегралом

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2g(z-a)}}\,dz = \int_a^b \frac{\sqrt{1+f'^2(z)}}{\sqrt{2g(z-a)}}\,dz, \qquad \text{(III, 11; 2)}$$

в котором предполагается, что кривая определяется с помощью x как функции z: $x=f(z)$ [1]). Мы приходим к следующей математической задаче: найти такую вещественную функцию f вещественной переменной z, для которой интеграл (III, 11; 2) при заданных a, b, g, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ принимает возможно меньшее значение.

Можно поставить общую задачу следующим образом. Пусть $[a, b]$ — вещественный интервал, F — аффинное нормированное пространство над полем вещественных чисел, $\mathcal{U}$ — открытое множество из $F\times\vec{F}$. Пусть, с другой стороны, задана непрерывная *вещественная* функция L: $(x, (y, \vec{Y}))\to L(x, y, \vec{Y})$, определенная на $[a, b]\times\mathcal{U}$. Пусть, наконец, f: $x\to y=f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $[a, b]$ со значениями в F, такая, что для $x\in[a, b]$ все $(f(x), \overrightarrow{f'(x)})$ лежат в $\mathcal{U}$ [2]).

При этих условиях сложная функция $x\to L(x, f(x), \overrightarrow{f'(x)})$ является непрерывной функцией на $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{R}$. При этом можно вычислить интеграл

$$J(f) = \int_a^b L(x, f(x), \vec{f}'(x))\,dx, \qquad \text{(III, 11; 3)}$$

являющийся некоторым вещественным числом.

---

[1]) Возможность выразить x как функцию z спорна: см. рассуждения, приведенные на стр. 386.

[2]) Поскольку речь идет о функции на $\mathbb{R}$, $f'(x)$ является *производным вектором* в точке x, т. е. элементом $\vec{F}$, определенным с помощью формулы (III, 3; 1). Он равен $f'(x)\cdot 1$, если $f'(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}; \vec{F})$ является производным отображением. С другой стороны, $[a, b]$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}$; см. по этому поводу начало § 2, стр. 195.

Это вещественное число зависит от выбора функции f. Тем самым определяется некоторая функция J: $f \to J(f)$. Требуется при фиксированных a, b и L *среди всех функций* f, *принимающих фиксированные значения* α, β *на концах* a, b, найти ту, которая обеспечивает интегралу $J(f)$ максимум или минимум. Если F является m-мерным пространством, то введением системы координат его можно отождествить с $\mathbb{R}^m$, и тогда функция, определенная на $[a, b]$ со значениями в F, является системой вещественных функций f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, определенных на $[a, b]$, а производная функция является системой m производных функций f'_i. В этом случае L есть вещественная функция $2m+1$ независимых переменных x, y_i, Y_i, $i=1, 2, \ldots, m$, и среди всех систем непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и принимающих заданные значения в a и b функций f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, отыскиваются те, которые обеспечивают экстремум интегралу

$$J(f_1, \ldots, f_m) = \int_a^b L(x, f_1(x), \ldots, f_m(x), f'_1(x), \ldots, f'_m(x))\,dx. \tag{III, 11; 4}$$

Напомним, что пространство $E = (F^{[a, b]})_{cb;\,1}$ непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[a, b]$ со значениями в F, является аффинным нормированным пространством с присоединенным векторным нормированным пространством $(\vec{F}^{[a, b]})_{cb;\,1}$[1]. Расстояние между двумя элементами f и g аффинного пространства E задается формулой (III, 3; 41):

$$|||\overrightarrow{f-g}|||_1 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} (\|\overrightarrow{f(x)-g(x)}\|, \|\overrightarrow{f'(x)-g'(x)}\|). \tag{III, 11; 5}$$

Мы рассмотрим здесь сначала некоторое подмножество аффинного пространства E — множество Ω, образованное такими функциями f, что образ при отображении $(f, \vec{f'})$ интервала $[a, b]$ содержится в открытом множестве $\mathcal{U}$ из $F \times \vec{F}$.

Теорема 37. *Пусть*: $[a, b]$ — *отрезок в* $\mathbb{R}$, F — *аффинное нормированное пространство над полем вещественных чисел и* $\mathcal{U}$ — *открытое множество из* $F \times \vec{F}$. *Множество* Ω *функций* f, *определенных на* $[a, b]$ *со значениями в* F, *таких, что* $(f(x), \overrightarrow{f'(x)})$ *для всех* $x \in [a, b]$ *лежит в* $\mathcal{U}$, *является открытым множеством в пространстве* $E = (F^{[a, b]})_{cb;\,1}$ *непрерывно дифференцируемых функций, определенных на* $[a, b]$ *со значениями в* F.

[1]) Поскольку $[a, b]$ компактно, непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена и символ cb, означающий непрерывность и ограниченность, может быть заменен символом c, обозначающим непрерывность.

В самом деле, пусть f_0 — некоторая точка этого множества. Образ компактного интервала $[a, b]$ при отображении $(f_0, \vec{f_0'})$ является компактом K в $\mathcal{U}$ (теорема 28 гл. II). Согласно показанному на стр. 84, расстояние от K до $C\mathcal{U}$ является некоторым числом $\delta > 0$. Рассмотрим теперь в E открытый шар с центром f_0 радиуса δ, образованный всеми функциями f, удовлетворяющими неравенству $|||\overrightarrow{f - f_0}||| < \delta$. Мы видим, что для каждой такой функции f отображение $(f, \vec{f'})$ принимает все свои значения в $\mathcal{U}$. Иначе говоря, каждый такой шар принадлежит множеству Ω и множество Ω открыто в E.

Множество функций $f \in E$, удовлетворяющих заданным равенствам $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, является некоторым аффинным подпространством E_0 из E. Его присоединенное векторное подпространство является множеством $\vec{E}_0$ функций из $\vec{E}$, обращающихся в нуль в точках a и b. Множество Ω отсекает на E_0 некоторое открытое множество Ω_0 из E_0. Далее, J: $f \to J(f)$ является вещественной функцией, определенной на открытом множестве Ω_0 аффинного нормированного пространства E_0, и мы ищем максимум или минимум этой функции. Теорема 23 должна нам дать необходимое условие. Мы видим здесь, что теорема 23 и все теоремы дифференциального исчисления представляют интерес для случая *бесконечномерных нормированных пространств.* В самом деле, если даже F конечномерно, если даже это, например, вещественная прямая $\mathbb{R}$, входящее сюда пространство E бесконечномерно.

Для облегчения формулировок мы не будем повторять данные $[a, b] \subset \mathbb{R}$, F, $\mathcal{U}$, Ω, L, J, если в этом не будет особой необходимости.

Дифференцируемость J

Для изучения дифференцируемости функции J мы будем рассматривать общий случай аффинного пространства E и рассматривать производную $J'(f_0)$ на элементе f_0. Сужение J на E_0 имеет производной в $f_0 \in E_0$ сужение производной $J'(f_0)$ на $\vec{E}_0$. Обозначим через $\overrightarrow{\delta f}$ заданное приращение f. Это некоторый элемент из $\vec{E}$, т. е. функция $x \to \overrightarrow{\delta f}(x)$, определенная на $[a, b]$ со значениями в $\vec{F}$. Мы будем искать «главную часть» δJ приращения ΔJ функции J, когда f_0 заменяется на $f_0 + \overrightarrow{\delta f}$. Обозначение $\overrightarrow{df}$, которое в том случае, когда f является отображением $[a, b]$ в F, означает дифференциал этого отображения:

$\overrightarrow{df}=\overrightarrow{f'(x)}\,dx \in \vec{F}$, применять опасно. Поэтому мы применяем обозначение $\overrightarrow{\delta f}$ и по аналогии δJ.

Теорема 38. *Вещественная функция J, определенная на Ω формулой* (III, 11; 3), *непрерывно дифференцируема, и ее производная $\overleftarrow{J'(f_0)} \in \mathscr{L}(\vec{E};\ \mathbb{R}) = \overleftarrow{E}'$ в точке f_0 определяется формулой*

$$\overrightarrow{\delta f} \to \delta J = \overleftarrow{J'(f_0)} \cdot \overrightarrow{\delta f_0} =$$

$$= \int_a^b \left(L'(x,\ f_0(x),\ \overrightarrow{f_0'(x)}) \cdot (0,\ \overrightarrow{\delta f(x)},\ \overrightarrow{\delta f'(x)})\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'(x)}) \cdot \overrightarrow{\delta f(x)} + \overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'(x)}) \cdot \overrightarrow{\delta f'(x)}\right) dx, \tag{III, 11; 6}$$

где L' — полная производная, а $\overleftarrow{\partial_2 L}$ и $\overleftarrow{\partial_3 L}$ — частные производные функции L (определенной на открытом множестве в $[a,\ b] \times F \times \vec{F}$) по 2-й и 3-й переменным.

Заметим, что вместо $\overleftarrow{\partial_2 L}$ и $\overleftarrow{\partial_3 L}$ можно было бы писать $\overleftarrow{\partial L/\partial y}$ и $\overleftarrow{\partial L}/\overrightarrow{\partial Y}$, поскольку мы через y и $\vec{Y}$ обозначили переменные в пространствах F и $\vec{F}$.

Вместо $L(x,\ f(x),\ \overrightarrow{f'(x)})$ коротко пишут также $L(x,\ y,\ \vec{y}')$; поэтому вместо $\overleftarrow{\partial_2 L}$ и $\overleftarrow{\partial_3 L}$ можно также писать $\overleftarrow{\partial L/\partial y}$ и $\overleftarrow{\partial L}/\overrightarrow{\partial y'}$. Это производные функции $(x,\ y,\ \vec{y}') \to L(x,\ y,\ \vec{y}')$, когда $x \in [a,\ b]$, $y \in F$, $\vec{y}' \in \vec{F}$ рассматриваются как *независимые переменные*. После того как они вычислены, следует заменить y на $f_0(x)$ и $\vec{y}'$ на $\vec{f}_0'(x)$.

Так как $y \to L(x,\ y,\ \vec{Y})$ является отображением пространства F в $\mathbb{R}$, то $\overleftarrow{\partial_2 L}(x,\ y,\ \vec{Y})$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F},\ \mathbb{R}) = \overleftarrow{F}'$, сопряженного к $\vec{F}$, откуда следует выбор стрелки $\overleftarrow{\partial_2 L}$. То же самое имеет место и для $\overleftarrow{\partial_3 L}$. Далее, для каждого $x \in [a,\ b]$ имеем $\overleftarrow{\partial_2 L}(y,\ f_0(x),\ \overrightarrow{f_0'(x)}) \in \overleftarrow{F}'$ и $\overrightarrow{\delta f}(x) \in \vec{F}$, откуда следует, что $\overleftarrow{\partial_2 L}(x,\ f_0(x),\ \overrightarrow{f_0'(x)}) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x)$ в (III, 11; 6) является вещественным числом; (III, 11; 6) является интегралом от некоторой вещественной функции на $[a,\ b]$.

Доказательство. Вариация ΔJ интеграла, соответствующая вариации $\overrightarrow{\delta f}$ функции f, задается формулой

$$\Delta J = \int_a^b [L(x, f_0(x) + \overrightarrow{\delta f}(x), \overrightarrow{f_0'}(x) + \overrightarrow{\delta f'}(x)) - L(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x))]dx. \tag{III, 11; 7}$$

Формула конечных приращений (следствие 1 теоремы 13) для *фиксированного* x дает

$$L(x, f_0(x) + \overrightarrow{\delta f}(x), \overrightarrow{f_0'}(x) + \overrightarrow{\delta f'}(x)) - L(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) =$$
$$= L'(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \cdot (0, \overrightarrow{\delta f}(x), \overrightarrow{\delta f'}(x)) + R(x) =$$
$$= \overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x) + \overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \cdot \overrightarrow{\delta f'}(x) + R(x), \tag{III, 11; 8}$$

где $R(x)$ допускает оценку

$$|R(x)| \leqslant \sup_{\substack{\|\vec{\xi}\| \leqslant \|\overrightarrow{\delta f}(x)\| \\ \|\vec{\xi'}\| \leqslant \|\overrightarrow{\delta f'}(x)\|}} \| L'(x, f_0(x) + \vec{\xi}, \overrightarrow{f_0'}(x) + \vec{\xi'}) -$$
$$- L(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \| \cdot \| (0, \overrightarrow{\delta f}(x); \overrightarrow{\delta f'}(x)) \|^{1)}. \tag{III, 11; 9}$$

Воспользуемся теперь усиленной теоремой (теорема 31 гл. II) о равномерной непрерывности [2]. Функция L' предполагалась непрерывной на $[a, b] \times \mathcal{U}$. Множество точек $(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x))$, $x \in [a, b]$, содержится в компакте $[a, b] \times K$ множества $[a, b] \times \times \mathcal{U}$ (в обозначениях, принятых при доказательстве теоремы 37).

[1]) На $\mathbb{R} \times \vec{F} \times \vec{F}$ мы выбрали норму $\|(X, \vec{Y}, \vec{Z})\| = \sup(|X|, \|\vec{Y}\|, \|\vec{Z}\|)$.

[2]) Речь идет о следующей теореме: *Если f является непрерывным отображением метрического пространства E в метрическое пространство F и если K является компактом в E, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что из $d(x', x'') \leqslant \eta$, $x' \in K$, следует $d(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$.* Теорема 31 относится к $E = K$. Доказательство остается прежним. Если бы это было не так, то можно было бы найти две такие последовательности $x_n' \in K$, $x_n'' \in \in E$, что $d(x_n', x_n'') \leqslant 1/n$ и $d(f(x_n'), f(x_n'')) > \varepsilon$. Поскольку K является компактом, можно из x_n' извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $c \in K$. Тогда x_n'' тоже стремились бы к c в E. Так как f непрерывна в c, то $f(x_n')$ и $f(x_n'')$ стремятся к $f(c)$, а, значит, $d(f(x_n'), f(x_n''))$ стремится к 0, и мы получили противоречие.

Итак, при заданном $\varepsilon > 0$ существует число η, $0 < \eta < \delta$, такое, что из $x \in [a, b]$, $\|\vec{\xi}\| \leqslant \eta$, $\|\vec{\xi}'\| \leqslant \eta$ следует

$$\|L'(x, f_0(x) + \vec{\xi}, \vec{f}_0'(x) + \vec{\xi}') - L'(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))\| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{III, 11; 10}$$

Далее, из $|||\vec{\delta f}|||_1 \leqslant \eta$ следует, что

$$|R(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} |||\vec{\delta f}|||_1. \tag{III, 11; 11}$$

Таким образом, имеем:

$$\Delta J = \int_a^b (\overleftarrow{\partial_2 L} \cdot \vec{\delta f} + \overleftarrow{\partial_3 L} \cdot \vec{\delta f}')\, dx + \int_a^b R(x)\, dx, \tag{III, 11; 11$_2$}$$

где каждая из функций $x \to \overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))\, \vec{\delta f}(x)$, $x \to \overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))\, \vec{\delta f}'(x)$, а, следовательно, также и $x \to R(x)$ непрерывны. В самом деле, $\overleftarrow{\partial_2 L}$ является непрерывным отображением $[a, b] \times \mathcal{U}$ в $\overleftarrow{F}'$, поскольку L непрерывно дифференцируема. Функции f_0, $\vec{f}_0'$, $\vec{\delta f}$ непрерывны как функции из $[a, b]$ в F, $\vec{F}$, $\vec{F}$ соответственно. Следовательно, $x \to \overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))$ является непрерывной функцией из $[a, b]$ в $\overleftarrow{F}'$ и, поскольку $(\overleftarrow{u}, \vec{X}) \to \overleftarrow{u} \cdot \vec{X} = \langle \overleftarrow{u}, \vec{X} \rangle$ есть непрерывное отображение из $(\overleftarrow{F}' = \mathcal{L}(\vec{F}; \mathbb{R})) \times \vec{F}$ в $\mathbb{R}$, то $x \to \overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)) \cdot \vec{\delta f}(x)$ есть непрерывная функция из $[a, b]$ в $\mathbb{R}$.

Второй интеграл при $|||\vec{\delta f}|||_1 \leqslant \eta$ мажорируется величиной $\varepsilon |||\vec{\delta f}|||_1$. Следовательно, он является бесконечно малым по сравнению с $|||\vec{\delta f}|||_1$, когда $|||\vec{\delta f}|||_1$ стремится к 0.

Первый интеграл определяет некоторую линейную форму, непрерывную на $\vec{E}$. В самом деле,

$$\left| \int_a^b (\overleftarrow{\partial_2 L} \cdot \vec{\delta f} + \overleftarrow{\partial_3 L} \cdot \vec{\delta f}')\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(L'(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)) \cdot (0, \vec{\delta f}(x), \vec{\delta f}'(x)\right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) M |||\vec{\delta f}|||_1, \quad \text{где} \quad M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|L'(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))\|. \tag{III, 11; 11$_3$}$$

Тем самым мы доказали, что функция J дифференцируема в $f_0 \in \Omega$ и что ее производная задается формулой (III, 11; 6).

Покажем теперь, что функция J непрерывно дифференцируема на Ω. Рассмотрим элементы f_0 и f из Ω. Имеем:

$$\overleftarrow{J'(f)} \cdot \overrightarrow{\delta f} - \overleftarrow{J'(f_0)} \cdot \overrightarrow{\delta f} =$$

$$= \int_a^b \left(L'(x, f(x), \overrightarrow{f'}(x)) - L'(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \right) \cdot (0, \overrightarrow{\delta f}(x), \overrightarrow{\delta f'}(x))\, dx. \qquad \text{(III, 11; 11}_4\text{)}$$

Согласно (III,11; 10), из $|||\overrightarrow{f - f_0}|||_1 \leqslant \eta$ следует, что

$$|(\overleftarrow{J'(f)} - \overleftarrow{J'(f_0)}) \cdot \overrightarrow{\delta f}| \leqslant \varepsilon |||\overrightarrow{\delta f}|||_1 \qquad \text{(III, 11; 12)}$$

и

$$\|\overleftarrow{J'(f)} - \overleftarrow{J'(f_0)}\| = \sup_{|||\overrightarrow{\delta f}|||_1 \leqslant 1} |(\overleftarrow{J'(f)} - \overleftarrow{J'(f_0)}) \cdot \overrightarrow{\delta f}| \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(III, 11; 12}_2\text{)}$$

Итак, $\overleftarrow{J'(f)} - \overleftarrow{J'(f_0)}$ сходится к $\overleftarrow{0}$ в $\overleftarrow{E}'$, когда f стремится к f_0 в E, и, следовательно, J принадлежит классу C^1.

Пример. Небесполезно бегло рассмотреть простой случай $F = \mathbb{R}$ и $\mathcal{U} = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Будем предполагать, следовательно, что L является функцией класса C^1 трех вещественных переменных x, y, y', $x \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}$, $y' \in \mathbb{R}$. Рассматривается функция J, определенная на $(\mathbb{R}^{[a, b]})_{cb;\,1}$ формулой

$$J(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx. \qquad \text{(III, 11; 12}_3\text{)}$$

Функции f дается приращение δf, являющееся также некоторой функцией класса C^1 на $[a, b]$. Приращение ΔJ функционала J в этом случае записывается в виде

$$\Delta J = \int_a^b \left(L(x, f_0 + \delta f, f_0' + \delta f') - L(x, f_0, f_0') \right) dx. \qquad \text{(III, 11; 12}_4\text{)}$$

Его «главной частью» является дифференциал

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_0(x), f_0'(x))\, \delta f(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, f_0(x), f_0'(x))\, \delta f'(x) \right) dx. \qquad \text{(III, 11; 12}_5\text{)}$$

Обоснование этой формулы вытекает из оценки вида

$$|\delta J - \Delta J| \leqslant \varepsilon |||\delta f|||_1 \quad \text{для} \quad |||\delta f|||_1 \leqslant \eta \ \text{(стр. 375)}, \qquad \text{(III, 11; 12}_6\text{)}$$

получающейся применением к L формулы конечных приращений.

Преобразуем теперь (III, 11; 6), вводя для L и элемента $f_0 \in \Omega$, в котором мы вычисляем производную J, упрощающее предположение: L и f_0 взяты из класса C^2.

Теорема 39. *Если в условиях теоремы* 38 *функция* L *принадлежит классу* C^2 *на* $[a, b] \times \mathcal{U}$ *и если* $f_0 \in \Omega$ *принадлежит классу* C^2 *на* $[a, b]$, *то производная* $J'(f_0)$ *может быть записана в виде*

$$\delta J = \overleftarrow{J'(f_0)} \cdot \overrightarrow{\delta f} = \left[\overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x)\right]_{x=a}^{x=b} +$$
$$+ \int_a^b \left[\overleftarrow{\partial_2 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x)) - \frac{d}{dx}\left(\overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x))\right)\right] \cdot \overrightarrow{\delta f}(x)\, dx. \qquad \text{(III, 11; 13)}$$

Квадратная скобка $[\ ]_{x=a}^{x=b}$ означает разность значений для $x = b$ и $x = a$.

Доказательство. Достаточно в формуле (III, 11; 6) применить интегрирование по частям. В этой формуле d/dx является производной отображения $x \to \overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \overrightarrow{f_0'}(x))$ отрезка $[a, b]$ в $\overrightarrow{F'}$. Это, следовательно, не частная производная $\partial_1 L = \partial/\partial x$, а полная производная, которая учитывает, что f_0 и $\overleftarrow{f_0'}$ являются функциями x. Выполняемое здесь интегрирование по частям является более общим, чем то, которое обычно употребляется в математическом анализе. Оно производится по формуле

$$\int_a^b B(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{v}'(x))\, dx = [B(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{v}(x))]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b B(\overrightarrow{u}'(x), \overrightarrow{v}'(x))\, dx, \qquad \text{(III, 11; 14)}$$

где B — непрерывная билинейная форма. Эта формула непосредственно вытекает из того факта, что производной функции $x \to B(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{v}(x))$ является функция $x \to B(\overrightarrow{u}'(x), \overrightarrow{v}(x)) + B(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{v}'(x))$ (теорема 12). Здесь речь идет (относительно B) о непрерывном билинейном отображении $(\overleftarrow{u}, \overrightarrow{v}) \to \overleftarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ или $\langle\overleftarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ из $\overleftarrow{F'} \times \overrightarrow{F}$ в $\mathbb{R}$. Естественно, это интегрирование по частям можно выполнить только в том случае, когда рассматриваемые функции u и v непрерывно дифференцируемы. Поэтому мы предполагали, что f_0 принадлежит классу C^2. Поскольку L принадлежит классу C^2, $\partial_3 L$ принадлежит классу C^1. Так как

f_0, $\vec{f}_0'$ принадлежат классу C^1, то u: $x \to \overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))$, согласно следствию 5 теоремы 11, также принадлежит классу C^1.

Пример. Если $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то формула (III, 11; 12_5), полученная в соответствии с теоремой 39, дает частный случай формулы (III, 11; 13):

$$\delta J = \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, f_0(x), f_0'(x))\,\delta f(x)\right]_{x=a}^{x=b} +$$

$$+ \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_0(x), f_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x, f_0(x), f_0'(x))\right)\right]\delta f(x)\,dx.$$

Необходимые условия экстремума

Вернемся к первоначально поставленной проблеме экстремума. Необходимое условие того, что точка $f_0 \in \Omega_0$ (т.е. $f_0 \in \Omega$ при заданных $f_0(a) = \alpha$ и $f_0(b) = \beta$) доставляет экстремум функции J на открытом множестве Ω_0 из E_0, заключается в том, что $J'(f_0)$ должна равняться нулю *на* $\vec{E}_0$ (теорема 23).

Теорема 40. *Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок в $\mathbb{R}$, F — аффинное нормированное пространство, $\mathcal{U}$ — открытое множество из $F \times \vec{F}$, Ω — множество непрерывно дифференцируемых отображений f из $[a, b]$ в F, таких, что $(f(x), f'(x)) \in \mathcal{U}$ для всех $x \in [a, b]$, Ω_0 — подмножество Ω, образованное функциями f, удовлетворяющими заданным условиям $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, и L — функция класса C^2 на $[a, b] \times \mathcal{U}$.*

Для того чтобы функция $f_0 \in \Omega_0$ класса C^2 доставляла максимум или минимум на множестве Ω_0 интегралу J, определяемому формулой (III, 11; 3), *или, более общо, являлась для него стационарной точкой, необходимо, чтобы функция f_0 была решением дифференциального уравнения 2-го порядка*

$$\overleftarrow{\partial^2 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\overleftarrow{\partial_3 L}(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x))\right) = \overleftarrow{0}, \quad \text{(III, 11; 15)}$$

или

$$\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial \vec{y}'}\right) = \overleftarrow{0}. \quad \text{(III, 11; 16)}$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера, а его решение называется экстремалью интеграла J или функции L.

Доказательство. Если $\vec{\delta f} \in \vec{E}_0$, то $\vec{\delta f}(a) = \vec{\delta f}(b) = \vec{0}$. Поэтому в равенстве (III, 11; 13) скобка $[\ \ ]_{x=a}^{x=b}$ равна нулю.

Необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ теперь говорит о том, что *интеграл*, фигурирующий в правой части равенства (III, 11; 13), равен нулю, какова бы ни была функция $\vec{\delta f} \in \vec{E}_0$. Для того чтобы отсюда получить, что функция f_0 удовлетворяет дифференциальному уравнению (III, 11; 15), достаточно применить к функции Φ:

$$x \to \overleftarrow{\Phi}(x) = \overleftarrow{\partial_2 L}\left(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(\overleftarrow{\partial_3 L}\left(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)\right)\right) \tag{III, 11; 17}$$

лемму Хаара.

Лемма Хаара

Если $\overleftarrow{\Phi}$ является непрерывной функцией на интервале $[a, b]$ со значениями в сопряженном пространстве $\overleftarrow{F}'$ некоторого векторного нормированного пространства $\vec{F}$ и если для каждой непрерывно дифференцируемой функции $\vec{\eta}$, определенной на $[a, b]$ со значениями в $\vec{F}$, обращающейся в нуль на концах этого интервала, имеет место равенство

$$\int_a^b \langle \overleftarrow{\Phi(x)}, \overrightarrow{\eta(x)} \rangle \, dx = 0, \tag{III, 11; 18}$$

то функция $\overleftarrow{\Phi}$ тождественно равна нулю на $[a, b]$.

Предположим, что $\overleftarrow{\Phi}$ не является тождественным нулем, и покажем, что тогда мы придем к противоречию. Пусть x_0 — точка, в которой $\overleftarrow{\Phi}(x_0) \neq 0$. Всегда можно считать точку x_0 отличной от концов a и b, ибо если непрерывная функция $\overleftarrow{\Phi}$ будет тождественно равна нулю в открытом интервале $]a, b[$, то она будет тождественным нулем и в замкнутом интервале. Утверждение «непрерывная линейная форма $\overleftarrow{\Phi}(x_0)$ отлична от 0 на $\vec{F}'$» равносильно существованию такой точки $\vec{e} \in \vec{F}$, что значение этой линейной формы на $\vec{e}$ отлично от 0. При этом $\vec{e}$ можно выбрать так, чтобы значение рассматриваемой линейной формы на $\vec{e}$ было > 0 (в противном случае можно заменить $\vec{e}$ на $-\vec{e}$). В силу непрерывности $\overleftarrow{\Phi}$, существует настолько малое число α, что интервал $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ содержится в $[a, b]$ и непрерывная скалярная функция $x \to \langle \overleftarrow{\Phi}(x), \vec{e} \rangle$ на нем положительна

Пусть теперь φ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция, положительная в $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ и равная нулю вне этого интервала. Можно взять, например, функцию (рис. 9)

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\notin\,]x_0-\alpha,\ x_0+\alpha[,\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2\alpha}(x-x_0)\right) \text{ или } (\alpha^2-(x-x_0)^2)^2,\\ \qquad\qquad \text{если } x\in\,]x_0-\alpha,\ x_0+\alpha[.\end{cases} \qquad (\text{III}, 11; 19)$$

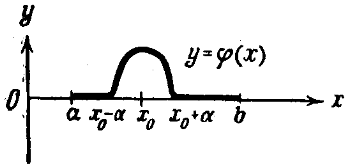

Рис. 9.

Возьмем в качестве $\vec{\eta}$ функцию $\vec{\eta}(x)=\vec{e}\varphi(x)$. Она, очевидно, непрерывно дифференцируема в $[a, b]$ и обращается в нуль на обоих концах. Функция $x\to\langle\overleftarrow{\Phi}(x), \vec{\eta}(x)\rangle$ непрерывна, >0 в интервале $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ и равна нулю вне этого интервала. Ее интеграл, очевидно, >0.

Мы пришли к противоречию: $\overleftarrow{\Phi}$ должна быть тождественно равной нулю, чем и заканчивается доказательство леммы.

Пример. Для того чтобы функция f_0 доставляла экстремум интегралу J среди всех функций $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$, принадлежащих классу C^1 (см. пример, приведенный после теоремы 38) и удовлетворяющих заданным граничным условиям $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$, необходимо и достаточно, чтобы, если f_0 принадлежит классу C^2, для любой функции $\delta f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ класса C^1, удовлетворяющей условиям $\delta f(a)=\delta f(b)=0$, имело место равенство

$$\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_0(x), f_0'(x))-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x, f_0(x), f_0'(x))\right)\right]\delta f(x)\,dx=0.$$

$$(\text{III}, 11; 19\text{a})$$

Лемма Хаара утверждает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция f_0 удовлетворяла равенствам $f_0(a)=\alpha$, $f_0(b)=\beta$ и являлась решением дифференциального уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0. \qquad (\text{III}, 11; 19\text{b})$$

Следствие. *Пусть f_0 — некоторая функция, определенная на $[a, b]$ и доставляющая при условиях теоремы 40 стационарное значение функционалу J. Тогда при $a_1\geqslant a$, $b_1\leqslant b$ функция*

f_0 доставляет также стационарное значение интегралу

$$J_1(f) = \int\limits_{a_1}^{b_1} L(x, f(x), \vec{f}'(x))\,dx \qquad \text{(III, 11; 19}_2\text{)}$$

на множестве всех функций f класса C^1, определенных на $[a_1, b_1]$ со значениями в F, таких, что пара $(f, \vec{f}')$ отображает $[a_1, b_1]$ в $\mathcal{U}$ и удовлетворяет условиям $f(a_1) = \alpha_1 = f_0(a_1)$, $f(b_1) = \beta_1 = f_0(b_1)$.

В самом деле, уравнение Эйлера не использует концы интервала.

Этот результат не очевиден даже для случая абсолютного максимума или минимума. Предположим, например, что f_0 является точкой минимума для J. Тогда для заданной на $[a_1, b_1]$ функции f с описанными выше свойствами обозначим через $\tilde{f}$ функцию, равную f в $[a_1, b_1]$ и f_0 в $[a, a_1[$ и $]b_1, b]$. Эта функция непрерывна, поскольку $f(a_1) = f_0(a_1)$, $f(b_1) = f_0(b_1)$. Если она принадлежит классу C^1, то, в силу свойства минимальности, $J(\tilde{f}) \geqslant J(f_0)$, а, следовательно, вычитая из двух интегралов их общую часть $\int\limits_a^{a_1} + \int\limits_{b_1}^{b}$, получим $J_1(f) \geqslant J_1(f_0)$ и f_0 по-прежнему будет доставлять минимум функционалу J_1. *Однако $\tilde{f}$ в точках a_1 и b_1 имеет не обязательно равные правые и левые производные, а, значит, $\tilde{f}$ не принадлежит классу C^1 и проведенное рассуждение не применимо.* Для того чтобы сделать его пригодным, необходимо воспользоваться приближением $\tilde{f}$ с помощью функций класса C^1 и выполнить предельный переход, который мы здесь не уточняем, но который показывает, независимо от уравнения Эйлера, что f_0 остается точкой минимума для J_1.

Замечания. 1°) Заранее мы не можем быть уверенными в том, что функция f_0, для которой интеграл достигает своего максимума или минимума, действительно существует. В самом деле, Ω_0 — открытое некомпактное множество (см. замечание 1°) к теореме 23).

2°) Если даже можно доказать, что элемент f_0 рассматриваемого открытого множества Ω_0, на котором интеграл достигает своего максимального или минимального значения, существует, то это еще не означает, что этот элемент *дважды* непрерывно дифференцируем, а вторая производная может не быть связана с рассматриваемой задачей. В то время как на функцию L, входящую в условие задачи, можно наложить ограничения, относительно функции f_0 это сделать нельзя, поскольку она является *неизвестной*. Несколько более сложное доказательство, чем проведенное нами выше, позволяет обойти эту трудность и показать в большинстве случаев, что *функция класса C^1, доставляющая функционалу J стационарное значение, заведомо принадлежит классу C^2.*

3°) Практически обычно пишут дифференциальное уравнение (III, 11; 16) и ищут решение этого уравнения, удовлетворяющее *краевым условиям* $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Относительно f получается дифференциальное уравнение второго порядка. Вместо того чтобы писать, как обычно, что функция f и ее производная f' принимают в некоторой заданной точке заданные начальные значения, пишут два условия другого рода, а именно что функция f принимает в двух заданных точках заданные значения. *Ничто не доказывает в общем случае ни существования решения, обладающего этими свойствами, ни его единственности.*

Возвратимся к формуле (III, 11; 4). Здесь $\overrightarrow{\delta f}$ является системой m приращений $(\delta f_1, \delta f_2, \ldots, \delta f_m)$. Частная производная $\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \vec{Y})$, как вектор из $\overleftarrow{F'}=\mathbb{R}^m$, является системой m производных $\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, $i=1, \ldots, m$. В свою очередь $\frac{\partial L}{\partial \vec{y}'}(x, y, \vec{Y})$ есть система m производных $\frac{\partial L}{\partial y_i'}$ или $\frac{\partial L}{\partial Y_i}(x, y_1, \ldots, y_m, Y_1, \ldots, Y_m)$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Наконец, скалярное произведение $\langle \overleftarrow{\alpha}, \vec{X}\rangle$ или $\overleftarrow{\alpha}\cdot\vec{X}$ для $\overleftarrow{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\vec{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ равно $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_mX_m$. Уравнение Эйлера, относящееся к функции $f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, эквивалентно системе m составляющих уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \qquad \text{(III, 11; 20)}$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{\partial^2 L}{\partial y_i'\,\partial x}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial y_i'\,\partial y_j}y_j'-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial y_i'\,\partial y_j'}y_j''=0. \qquad \text{(III, 11; 21)}$$

Решение этой системы зависит от $2m$ произвольных постоянных. Они должны удовлетворять $2m$ условиям $f_i(a)=\alpha_i$, $f_i(b)=\beta_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Полезно переписать выражение для δJ при $\overrightarrow{\delta f}\in\vec{E}_0$ в виде

$$\delta J=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)\right)\delta f_i\right)dx. \qquad \text{(III, 11; 21}_2\text{)}$$

4°) Мы записали условия для вариации первого порядка, не налагая никаких условий на вариации высших порядков (формула Тейлора). Поэтому остается неизвестным, идет ли речь о максимуме, минимуме или седле (см. замечание 2°) к теореме 23).

Простые случаи интегрируемости уравнений Эйлера

1°) Предположим, что L не зависит от y. Тогда $\overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial y}} \equiv 0$. Уравнение сводится непосредственно к дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$\overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial y'}}(x, y') = \text{постоянная } \overleftarrow{c} \in \overleftarrow{F}' \qquad (\text{III}, 11; 21_3)$$

$\left(\text{если } F = \mathbb{R}, \text{ то } \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y') = c - \text{вещественная постоянная}\right)$.

2°) Предположим, что L не зависит от x. Уравнения Эйлера в частном случае (III, 11; 21) запишутся в виде

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \, \partial y'_i} y'_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial y'_i \, \partial y'_j} y''_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (\text{III}, 11; 21_4)$$

Умножая i-е уравнение на y'_i и суммируя, получаем:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y_i} y'_i - \sum_{i,\, j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \, \partial y'_i} y'_i y'_j - \sum_{i,\, j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial y'_i \, \partial y'_j} y'_i y''_j = 0, \qquad (\text{III}, 11; 21_5)$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(L - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y'_j} y'_j\right) = 0. \qquad (\text{III}, 11; 21_6)$$

Отсюда находим первый интеграл

$$L - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y'_j} y'_j = c, \quad \text{или} \quad L - \overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial y'}} \overrightarrow{y}' = c, \qquad (\text{III}, 11; 21_7)$$

который, как мы увидим ниже, имеет интересную интерпретацию в задачах механики (формула (III, 11; 96)).

В частности, если $m = 1$, то мы приходим к уравнению первого порядка

$$L - \frac{\partial L}{\partial y'} y' = c, \qquad (\text{III}, 11; 22)$$

в котором из-за умножения на y' введено постороннее решение $y = \text{const}$.

Пример. *Брахистохрона.* Вернемся к примеру, рассмотренному в начале этого параграфа. Требуется найти минимум интеграла (III, 11; 2). В нем z — независимая переменная, $x = f(z)$ — вещественная функция вещественной переменной z, а x' — ее производная. Уравнение Эйлера здесь запишется в соответствующих обозначениях в виде (формула (III, 11; 21_3)):

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}} = \text{const} = \frac{\pm 1}{\sqrt{4gc}}, \quad \text{(III, 11; 23)}$$

где $c > 0$ — некоторая произвольная постоянная. Мы отбросим случай постоянной, равной 0, которую невозможно записать в виде $\frac{\pm 1}{\sqrt{4gc}}$. Такая постоянная дает $x = \text{const} = \alpha$. Это соответствует случаю, когда B лежит на одной вертикали с A и, конечно, решение дается вертикальным отрезком AB.

Рассматриваемое уравнение можно записать в виде

$$x'^2 = \frac{z-a}{2c}(1+x'^2), \text{ или } x'^2\left(1-\frac{z-a}{2c}\right) = \frac{z-a}{2c}. \quad \text{(III, 11; 24)}$$

Если сделать замену переменной (законную в силу неравенства $0 \leqslant \frac{z-a}{c} \leqslant 2$)

$$z = a + c(1-\cos u), \quad \text{(III, 11; 25)}$$

то мы получим новое уравнение

$$\frac{dx}{dz} = \pm\sqrt{\frac{z-a}{2c-(z-a)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}},$$

$$\frac{dx}{du} = \pm c \sin u \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \pm 2c\sin^2\frac{u}{2} = \pm c(1-\cos u), \quad \text{(III, 11; 26)}$$

для которого без труда найдем решение

$$z = a + c(1-\cos u), \qquad x = \pm c(u - \sin u) + \text{const}. \quad \text{(III, 11; 27)}$$

Постоянная c и дополнительная постоянная в (III, 11; 27) должны быть выбраны так, чтобы кривая прошла через A и B. Возьмем для простоты точку A в начале координат. Тогда для $u = 2k\pi$ имеем $z = a = 0$. В силу периодичности (замена u на $u - 2k\pi$) можно считать, что это условие выполняется при $u = 0$; при этом мы получим $x = 0$, если const из (III, 11; 27) возьмем равной нулю. В соотношениях (III, 11; 27) можно взять знак $+$, ибо знак $-$ может быть скомпенсирован заменой u на $-u$.

Итак, мы видим, что *брахистохроной является циклоида* Γ, *имеющая в исходной точке* A *точку возврата с вертикальной касательной*. Постоянная c должна быть определена так, чтобы кривая проходила через точку B. Поскольку c изменяется, мы имеем семейство циклоид Γ_c, гомотетичных кривой Γ_1, соответствующей $c = 1$. Постоянная c геометрически может быть определена следующим образом: прямая AB пересекает Γ_1 в конечном числе точек $C_1, C_2, \ldots$ (кроме случая, когда AB горизонтальна и имеется бесчисленное множество решений). Если C_i — одна из них, то гомотетия кривой Γ_1 с центром гомотетии A и коэффициентом AB/AC_i проходит через B и является решением поставленной задачи (рис. 10).

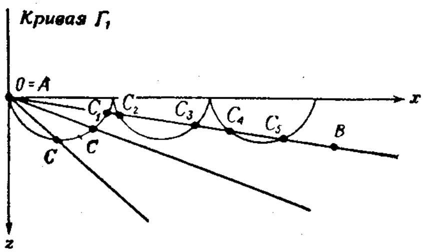

Рис. 10.

В этом примере сосредоточены почти все трудности вариационного исчисления.

1°) Когда мы ставили задачу в самом начале параграфа, мы предположили, что кривая находится в вертикальной плоскости, проходящей через A и B. Это ограничение может быть легко устранено. Выберем произвольно три координаты в $\mathbb{R}^3$, считая ось z направленной вертикально вниз. Будем искать брахистохрону как дугу параметрической кривой класса C^2, представленной тремя функциями $x(w)$, $y(w)$, $z(w)$. Будем предполагать, что точки A и B соответствуют фиксированным значениям $w = w_1$ и $w = w_2$. Тогда время, необходимое для движения от точки A к B, выразится в виде

$$t = \int_{w_1}^{w_2} \frac{ds}{\sqrt{2g(z-a)}} = \int_{w_1}^{w_2} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{2g(z-a)}}\, dw, \quad \text{(III, 11; 28)}$$

где функции x, y, z принимают заданные значения (координаты точек A и B) при $w = w_1$, $w = w_2$.

Поскольку имеется 3 неизвестные функции, то мы имеем 3 уравнения Эйлера. Двумя первыми, в силу (III, 11; 21_3), являются

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}}=\text{const},$$
$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}}=\text{const}. \qquad \text{(III, 11; 29)}$$

Отсюда получается соотношение с постоянными коэффициентами $\lambda x'+\mu y'=0$, а затем $\lambda x+\mu y+\nu=0$. Таким образом, кривая заведомо находится в вертикальной плоскости, проходящей, конечно, через A и B, и выбор двух новых координат в этой плоскости вполне законен.

Впрочем, ничего не зная о вариационном исчислении, в этом результате можно было убедиться непосредственно. Возьмем произвольную кривую Γ, но систему координат выберем так, чтобы плоскость xz была вертикальной плоскостью, проходящей через A и B. Ортогональная проекция Γ_0 кривой на эту плоскость определится функциями $x(w)$, 0, $z(w)$. Она пройдет также через A и B. Время падения t_0 вдоль этой проекции задается тем же самым интегралом (III, 11; 28), что и t, если заменить y' на 0: это время строго меньше t, если $y'(w)$ не равно тождественно нулю, т. е. если кривая Γ не лежит в плоскости $y=0$. Таким образом, *минимум t может быть реализован только на кривой, лежащей в вертикальной плоскости, проходящей через A и B.*

2°) С самого начала мы допустили, что брахистохрона может быть представлена при помощи функции x переменной z. Это предположение ничем не оправдано, как это видно из окончательного результата. В самом деле, получив уравнение Эйлера, мы *преобразовали* его, совершив соответствующую замену переменной (III, 11; 25). Решениями преобразованного уравнения оказались циклоиды, *в которых x не обязательно выражается как функция от z!* Если повторить построение, проведенное н стр. 385, то AB может пересечь Γ_1 в единственной точке C, расположенной на первой поднимающейся дуге циклоиды. При этом имеется *единственное решение*, соответствующее точкам A и B, *и для этого решения x не выражается как функция от z*. Как же исправить это положение? Мы можем действовать, как в п. 1°), отыскивая Γ в вертикальной плоскости, проходящей через A и B, как *параметрическую кривую, принадлежащую классу C^2.*

Получается два уравнения Эйлера относительно x и z:

$$X=-\frac{d}{dw}\left(\frac{x}{\sqrt{x'^2+z'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}}\right)=0,$$

или

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+z'^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}}=\text{const},$$
$$Z=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x'^2+z'^2}}{\sqrt{2g}\,(z-a)^{3/2}}-\frac{d}{dw}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+z'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(z-a)}}\right)=0. \qquad \text{(III, 11; 30)}$$

При заданных A и B существует бесконечное множество решений этих уравнений, ибо *уравнения* (III, 11; 30) *не являются независимыми.* В самом деле, мы находимся в условиях п. 2°) на стр. 383 и существует комбинация $x'X+z'Z$ левых частей уравнений (III, 11; 30), приводящая к уравнению (III, 11; 21$_6$):

$$\frac{d}{dw}\left(L-x'\frac{\partial L}{\partial x'}-z'\frac{\partial L}{\partial z'}\right)=0.$$

Поскольку функция L однородна и первой степени относительно x', z', то тождество Эйлера $x'\frac{\partial L}{\partial x'}+z'\frac{\partial L}{\partial z'}\equiv L$ показывает, что эта комбинация тождественно равна нулю. Впрочем, это и не удивительно: главное — это сама кривая Г, а не ее параметризация. Все параметризации, эквивалентные одной и той же кривой Г, дадут одно и то же время падения, и если одна из кривых экстремальна, то такими же будут и остальные. Это неудобство можно устранить следующим образом. Считать, что w представляет криволинейную абсциссу s для всех кривых невозможно, поскольку концы A и B всех этих кривых должны соответствовать одним и тем же значениям w_1 и w_2 переменной w, а кривые могут иметь разную длину. Однако удобно считать, что *параметр w является криволинейной абсциссой s искомой экстремальной кривой* Г. Тогда, не имея возможности заменить в (III, 11; 28) $\sqrt{x'^2+z'^2}$ на 1, это можно сделать в (III, 11; 30). Получится два упрощенных уравнения. Каждое решение первого уравнения обращает также в нуль комбинацию $x'X+z'Z$, а значит, и $z'Z$ и, следовательно, удовлетворяет также и второму уравнению, за исключением того случая, когда $z=\text{const}$ ($z=\text{const}$, $x'=1$ является решением первого, а не второго уравнения). Итак, исключая постороннее решение $z=\text{const}$, получаем, что (III, 11; 30) эквивалентно уравнению

$$\frac{dx/ds}{\sqrt{2g(z-a)}}=\text{const}, \qquad \text{(III, 11; 31)}$$

что совпадает с (III, 11; 23) и снова дает, после соответствующей замены переменной, циклоиды. Таким образом, *несмотря на ложное допущение в самом начале, окончательный результат оказывается верным. Замена переменных* (III, 11; 25) *восстанавливает положение.*

Считая x функцией от z, мы только отбрасываем кривые $z = \text{const}$, которые не являются решениями задачи.

3°) Вспомним замечание 1°) к теореме 40. Мы говорили, что существование максимума или минимума может быть не обеспечено. В самом деле, рассмотрим задачу минимизации интеграла (III, 11; 2) функцией $x = f(z)$ класса C^1. Единственные *возможные решения* — это найденные циклоиды. Если в условиях, указанных в п. 2°) на стр. 386, через A и B не проходит ни одна циклоида, позволяющая выразить x как функцию z, то искомый минимум не существует. Интеграл (III, 11; 2) на изученном множестве $\Omega_0 \subset E_0$ будет иметь точную нижнюю грань >0, но не минимум.

4°) В замечании 3°), стр. 382, мы говорили, что краевые условия $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ не обеспечивают единственности решения уравнения Эйлера. Возможно, что решений нет вовсе (в этом мы только что убедились) или этих решений имеется конечное или бесконечное (стр. 387) множество.

5°) Для брахистохроны не выполняются условия, при которых можно применить теорему 40, поскольку рассматриваемая функция $L = \sqrt{1 + x'^2}/\sqrt{2g(z-a)}$ имеет особенность в точке $z = a$, являющейся одной из границ интегрирования! К несчастью, с подобными фактами часто приходится сталкиваться в математике. Доказываются прекрасные общие теоремы, которые почти не применимы к встречающимся частным случаям.

6°) Выше мы говорили, что если кривая удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера, то она является экстремальной для интеграла с совершенно произвольными пределами. Это кажется противоречащим найденным результатам, а именно тому, что кривая заведомо имеет вертикальную касательную в начальной точке (это, впрочем, видно непосредственно из дифференциального уравнения: для $z = a$ имеем $x' = 0$). Объясняется это просто: кривая действительно является экстремалью для интеграла

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{2g(z-a)}}\, dz, \qquad \text{(III, 11; 33)}$$

каким бы ни были начало a_1 и конец b_1, но всегда с одной и той же подинтегральной функцией, т. е. с одной и той же постоянной a в выражении $\sqrt{2g(z-a)}$.

Не обязательно рассматривать поставленную механическую задачу только при условии, что начальная скорость равна нулю. Та же циклоида с концами в A_1 и B_1, где A_1 уже не является точкой возрата с вертикальной касательной, минимизирует интеграл (III, 11; 28), определяющий время падения точки вдоль кривой, когда начальная скорость в точке A_1 равна $\sqrt{2g(a_1 - a)}$ $a_1 > a$. Эта величина соответствует скорости 0 в точке A. Эти замечания не должны обескуражить читателя. Они показывают только, что, *рассматривая уравнения Эйлера, можно решить лишь небольшую часть поставленной проблемы о максимуме или минимуме*. Чтобы справиться со всеми трудностями в полной общности, необходимо привлечь очень мощные методы, использующие теорию пространств Гильберта, теорему 30_2 гл. II, алгебраическую топологию, теорию дифференциальных уравнений и т. д.

Уравнение геодезических на поверхности

Пусть V_n — многообразие размерности n над полем вещественных чисел в аффинном *евклидовом* пространстве E_N конечной размерности N. Пусть $\mathscr{C}$ — параметрическая кривая на V класса C^1. Говорят, что она является *геодезической между точками A и B*, если длина дуги AB кривой $\mathscr{C}$ минимальна или по крайней мере стационарна среди всех кривых класса C^1, соединяющих A и B на многообразии V[1]. Согласно следствию из теоремы 40, такая кривая остается геодезической между любыми двумя точками A_1, B_1 дуги AB и поэтому окончательно геодезической можно назвать кривую, сохраняющую это свойство для любых двух своих точек. Она является экстремальной относительно длины, т. е. является решением некоторого уравнения Эйлера.

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — карта многообразия V. Здесь $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $u \to M(u)$ отображение, определяющее эту карту. Будем предполагать, что V — многообразие класса C^3, а, следовательно, M также принадлежит классу C^3. Несколько позже мы покажем, что элемент дуги на V можно записать в таком виде:

$$ds = \|\overrightarrow{dM}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_i} du_i \right\| =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_i} du_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j} du_j \right)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u)\, du_i\, du_j}, \tag{III, 11; 34}$$

где

$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_i}(u) \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j}(u) \right) \tag{III, 11, 35}$$

[1]) Максимум длин кривых, соединяющих две точки, не существует: точная верхняя грань этих длин равна $+\infty$.

является вещественной функцией класса C^2, определенной на множестве $\mathcal{O}$. Параметрическая кривая класса C^1 на V представляется функциями $w \to u_i(w)$. Так как *функция* $L = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(u)\, u_i' \cdot u_j'}$ принадлежит классу C^2, то применима теорема 40, а уравнениями Эйлера будут являться уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(u)\, u_i' u_j'}\right) - \frac{d}{dw}\left(\frac{\partial}{\partial u_k'}\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(u)\, u_i' u_j'}\right) = 0. \tag{III, 11; 36}$$

В частном случае поверхности в евклидовом пространстве трех измерений после замены u_1 и u_2 на u и v получаем:

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

где

$$E = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right\|^2, \quad F = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \,\middle|\, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right), \quad G = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right\|^2. \tag{III, 11; 37}$$

Если искать кривую V, представляя v как функцию u, то *уравнение Эйлера* запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E(u, v) + 2F(u, v)\, v' + G(u, v)\, v'^2} - \\ - \frac{d}{du}\left(\frac{F(u, v) + G(u, v)\, v'}{\sqrt{E(u, v) + 2F(u, v)\, v' + G(u, v)\, v'^2}}\right) = 0. \tag{III, 11; 38}$$

Это — дифференциальное уравнение 2-го порядка с решением, зависящим от двух произвольных постоянных. Если ищется дуга геодезической кривой, соединяющей две точки A и B, то для определения этих двух постоянных имеются два уравнения.

Может случиться, что через две точки A и B не проходит никакой геодезической кривой. Так, например, если в $\mathbb{R}^2$ многообразие V представляет собой открытое множество $x^2 + y^2 > 1$, то через точки $A = (2,0$ и $B = (-2,0)$ не проходит ни одной геодезической в этом многообразии. (Если заменить V его замыканием $\overline{V}$, представляющим собой множество точек $x^2 + y^2 \geqslant 1$, то найдется параметрическая дуга класса C^1, соединяющая A и B в $\overline{V}$ и реализующая минимум длины, и даже имеются две дуги, симметричные относительно AB и дающие ту же минимальную длину. Каждая из этих дуг составлена из отрезка касательной AC, проведенной из точки A к окружности $x^2 + y^2 = 1$, дуги CD этой окружности и отрезка касательной DB, проведенной из точки B. Однако эти кривые лежат в $\overline{V}$, а не в V, а $\overline{V}$ не является многообразием. По этой причине теорема 40 не применима, так как мы имеем дело не с открытым множеством E_0, а с замкнутым. Дуга CD окружности уравнению Эйлера не удовлетворяет, ибо его решениями в данном случае являются прямые на плоскости $\mathbb{R}^2$.) Можно показать, что если многообразие V *компактно* или, более общо, *полно* по евклидовой метрике, то *любые две его точки могут быть всегда соединены хотя бы одной геодезической, обеспечивающей абсолютный минимум длины.* Вообще говоря, имеется бесконечное множество геодезических, соединяющих A и B, и можно показать, что те из них, которые не дают абсолютного минимума длины, дают по крайней мере *относительный минимум.*

Рассмотрим, например, цилиндр вращения в $\mathbb{R}^3$, определяемый уравнением

$$x^2+y^2=a^2. \qquad \text{(III, 11; 39)}$$

Его можно «развернуть» на плоскость, т. е. можно найти параметрическое представление цилиндра, сохраняющее длины. Это — отображение H плоскости $\mathbb{R}^2$ на цилиндр: $(u, v) \to (x, y, z)$, где

$$x=a\cos\frac{u}{a},$$

$$y=a\sin\frac{u}{a},$$

$$z=v. \qquad \text{(III, 11; 40)}$$

Отображение H сохраняет длины в том смысле, что $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2=du^2+dv^2$. Поэтому длина дуги кривой класса C^1 на плоскости $\mathbb{R}^2$ равна длине ее образа при отображении H, а геодезические цилиндры — это образы геодезических в $\mathbb{R}^2$ при отображении H, т. е. прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Однако H не является биекцией. Если A — некоторая точка цилиндра, то ее прообразом является множество точек $A_n = A_0+2\pi an\vec{i}$, где $\vec{i}$ — единичный вектор оси $0x$ в $\mathbb{R}^2$. Если A и B — две точки цилиндра, то каждый отрезок прямой A_pB_q, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}$, будет иметь образом геодезическую дугу, соединяющую точки A и B. Поскольку A_pB_q и $A_{p+k}B_{q+k}$ имеют один и тот же образ, можно будет ограничиться выбором отрезков прямой A_0B_n, $n\in\mathbb{Z}$. Это также дает бесконечное множество геодезических дуг класса C^1, соединяющих A и B. Только одна из них (за исключением двух симметричных) дает минимум длины. Все другие дают относительный минимум. В частности, если $B=A$, определяется бесконечное множество геодезических с началом и концом в A. Одна из них длины 0 дает минимум длины. Та же, которая является образом прямой A_0A_n, имеет длину, равную $2\pi a|n|$. Она определяет относительный минимум и даже абсолютный минимум длин кривых класса C^1, соединяющих A с самой собой, причем алгебраическое число оборотов этих кривых вокруг оси $0z$ равно n (это термин из *алгебраической топологии*).

В качестве примера рассмотрим решение уравнения Эйлера для задачи о геодезических.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ определена поверхность, образованная вращением вокруг оси $0z$ кривой, заданной уравнением $Z = F(r)$ в полуполярных координатах. Элемент дуги на этой поверхности определяется формулой

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + F'^2(r)\,dr^2}. \qquad \text{(III, 11; 41)}$$

Если при этих условиях ищут геодезическую, выбирая φ как функцию r, то длина дуги кривой AB записывается в виде

$$\int_{r(A)}^{r(B)} \sqrt{1 + F'^2(r) + r^2\varphi'^2}\,dr. \qquad \text{(III, 11; 42)}$$

Дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{1 + F'^2(r) + r^2\varphi'^2}} = \text{const} = k, \qquad \text{(III, 11; 43)}$$

а его решение находится в квадратурах:

$$\varphi = \int \frac{k\sqrt{1 + F'^2(r)}}{r\sqrt{r^2 - k^2}}\,dr + \varphi_0. \qquad \text{(III, 11; 44)}$$

Уравнение (III, 11; 43) можно записать также в виде

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = k, \quad \text{или} \quad r\left(\frac{r\,d\varphi}{ds}\right) = k, \quad \text{или} \quad r\cos\Phi = k, \qquad \text{(III, 11; 45)}$$

где Φ — угол между касательной к параллели (ориентированной в сторону возрастающих значений φ) и касательной к геодезической (ориентированной в направлении возрастания длины дуги). Этим формулам можно придать следующий геометрический смысл. Пусть точка описывает геодезическую кривую с единичной скоростью. Тогда производная по времени момента ее скорости по отношению к оси $0z$ равна моменту ее ускорения. Поскольку скорость равна 1, то ускорение направлено по главной нормали к кривой, т. е., как это мы увидим позже в силу геометрического свойства геодезических, по нормали к поверхности. Это значит, что вектор ускорения пересекает ось $0z$ и, следовательно, его момент относительно оси $0z$ равен нулю. Значит, момент скорости относительно оси $0z$ постоянен, что и выражается формулой (III, 11; 43).

Относительный экстремум

Теорема 41. *Пусть в обозначениях теоремы 40* M_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — *функции, обладающие теми же свойствами, что и функция* L, *а* k_i — *заданные вещественные числа. Пусть* K_i — *функции, заданные на* Ω_0 *соотношениями*:

$$f \to K_i(f) = \int_a^b M_i(x, f(x), \vec{f}'(x))\,dx. \qquad \text{(III, 11; 46)}$$

Предположим, что в точке $f_0 \in \Omega_0$ *производные* $K_i'(f_0)$ *независимы, а* $K_i(f_0) = k_i$. *Для того чтобы функция* f_0 *обеспечивала максимум или минимум функции* J *на* Ω_0 *в множестве таких функций* f *из* Ω_0, *что* $K_i(f) = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие вещественные числа* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *при которых справедливы уравнения Эйлера*

$$\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\frac{\overleftarrow{\partial M_i}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overleftarrow{\partial M_i}}{\partial y'}\right)\right). \qquad \text{(III, 11; 47)}$$

Для доказательства достаточно применить теорию множителей Лагранжа (теорема 34).

Если F является n-мерным, то мы получаем систему n дифференциальных уравнений 2-го порядка, решения которых при известных λ_i зависят от $2n$ произвольных постоянных. Однако λ_i не известны. Поэтому общее решение этой системы зависит от $2n + m$ произвольных постоянных, которые нужно выбрать так, чтобы удовлетворить $2n$ краевым условиям и m условиям $K_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пример. Среди всех кривых класса C^1, соединяющих точки A и B и имеющих *заданную длину* l, найти такую кривую, которая вместе с отрезком AB ограничивает максимальную площадь. Будем искать эту кривую, выражая y как функцию x и выбирая $\overrightarrow{AB}$ в качестве оси x. Тогда длина выразится интегралом

$$l = \int_{x(A)}^{x(B)} \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \qquad \text{(III, 11; 48)}$$

а площадь [1]) будет вычисляться с помощью интеграла

$$S = \int_{x(A)}^{x(B)} y\,dx. \qquad \text{(III, 11; 49)}$$

[1]) Так называемая «алгебраическая площадь». Для получения обычной площади можно ограничиться случаем $y \geqslant 0$.

Согласно сказанному выше, должен существовать такой множитель Лагранжа λ, при котором справедливо уравнение Эйлера

$$-\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=1, \quad \text{или} \quad -\frac{\lambda y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=1. \qquad (\text{III}, 11; 50)$$

Мы показали, что кривизна кривой должна быть постоянной, т. е. кривая является дугой окружности. Ее центр и радиус не известны, а следовательно, она зависит от трех произвольных постоянных. Если считать, что дуга искомой окружности проходит через точки A и B, находится над осью x ($y \geqslant 0$) и имеет заданную длину l, то окружность определится однозначно. Если окажется, что $l>\frac{\pi}{2}|AB|$, то искомая дуга окружности будет больше полуокружности и она не может быть явно представлена уравнением, выражающим y как функцию x. См. по этому поводу изложенное на стр. 386. Можно, естественно, предположить, что A и B совпадают, и тогда мы придем к следующему утверждению:

Среди всех замкнутых кривых заданной длины l класса C^1 максимальную площадь ограничивает окружность.

Радиус этой окружности равен, очевидно, $l/2\pi$, и, следовательно, ее площадь определяется формулой $S=l^2/4\pi$, что позволяет утверждать следующее:

Любая замкнутая кривая длины l класса C^1 ограничивает площадь, удовлетворяющую неравенству

$$S\leqslant\frac{l^2}{4\pi}, \qquad (\text{III}, 11; 51)$$

при этом всегда имеет место строгое неравенство, за исключением того случая, когда кривая является окружностью.

Обратно, если некоторая замкнутая кривая класса C^1 ограничивает площадь S, то ее длина удовлетворяет неравенству

$$l\geqslant 2\sqrt{\pi S}, \qquad (\text{III}, 11; 52)$$

причем всегда имеет место строгое неравенство, за исключением того случая, когда кривая является окружностью.

Повторяем еще раз, что мы не дали строгого решения задачи. Так, например, неравенства (III, 11; 51) и (III, 11; 52) полностью не обоснованы.

Замена переменных

Пусть F_1 — аффинное нормированное пространство, h — отображение $[a, b]\times F_1$ в F, принадлежащее классу C^1. Если теперь f_1 — функция класса C^1, определенная на $[a, b]$ со значениями в F_1, то сложная функция f

$$x \to f(x) = h(x, f_1(x)) \qquad \text{(III, 11; 53)}$$

является функцией класса C^1, определенной на $[a, b]$ со значениями в F. Таким образом, h определяет отображение $f_1 \to f$ пространства $E_1 = \left(F_1^{[a, b]}\right)_{cb;\,1}$ в пространство $E = \left(F^{[a, b]}\right)_{cb;\,1}$. Мы сейчас убедимся в том, что если h принадлежит классу C^2, то это отображение дифференцируемо.

Теорема 42. *Отображение $f_1 \to f$ пространства $E_1 = \left(F_1^{[a, b]}\right)_{cb;\,1}$ в пространство $E = \left(F^{[a, b]}\right)_{cb;\,1}$, определенное формулой* (III, 11; 53), *в которой h — отображение $[a, b] \times F_1$ в F класса C^2, дифференцируемо, а его производная в точке f_1 пространства $\left(F_1^{[a, b]}\right)_{cb;\,1}$ определяется по формуле:*

$$\delta f_1 \to \delta f, \qquad \text{(III, 11; 54)}$$

где

$$\overrightarrow{\delta f}(x) = \partial_2 h(x, f_1(x)) \cdot \overrightarrow{\delta f_1}(x).$$

Доказательство. Следует доказать два утверждения.

1°) Формула (III, 11; 54) для фиксированного f_1 определяет некоторое линейное непрерывное отображение $\overrightarrow{\delta f_1} \to \overrightarrow{\delta f}$ пространства $\vec{E}_1$ в пространство $\vec{E}$. Поскольку h взято из класса C^2, то $\partial_2 h$ принадлежит классу C^1, и из следствия 5 теоремы 11, с одной стороны, и теоремы 12, с другой, сразу же вытекает, что если $\overrightarrow{\delta f_1}$ лежит в $\vec{E}_1$, то $\overrightarrow{\delta f}$ принадлежит $\vec{E}$. Отображение $\overrightarrow{\delta f_1} \to \overrightarrow{\delta f}$ очевидным образом линейно, а его непрерывность следует из оценок

$$|||\overrightarrow{\delta f}|||_0 \leqslant \Big(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|\partial_2 h(x, f_1(x))\|\Big)\, |||\overrightarrow{\delta f_1}|||_0,$$

$$|||\overrightarrow{\delta f}'|||_0 \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|\partial_1\partial_2 h(x, f_1(x)) + \partial_2^2 h(x, f_1(x)) \cdot \vec{f}_1'(x)\|\, |||\overrightarrow{\delta f_1}|||_0 +$$
$$+ \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|\partial_2 h(x, f_1(x))\|\, |||\overrightarrow{\delta f}_1'|||_0, \qquad \text{(III, 11; 55)}$$

дающих неравенство

$$|||\overrightarrow{\delta f}|||_1 \leqslant \mathrm{const}\, |||\overrightarrow{\delta f_1}|||_1. \qquad \text{(III, 11; 56)}$$

2°) Для приращения $\overrightarrow{\delta f_1}$ функции f_1 приращение $\overrightarrow{\Delta f}$ функции f определяется формулой:

$$\overrightarrow{\Delta f}(x) = h(x, f_1(x) + \delta f_1(x)) - h(x, f_1(x)). \qquad \text{(III, 11; 57)}$$

Естественно аппроксимировать его приращением $\vec{\delta f}$, определяемым формулой (III, 11; 54). Считая приращение $\vec{\delta f}$ определенным формулой (III, 11; 54), можно рассмотреть $\vec{\Delta f} - \vec{\delta f}$, а также $\vec{\Delta f'} - \vec{\delta f'}$. Для каждого из этих двух выражений можно применить формулу конечных приращений для фиксированного x, как это делалось при доказательстве теоремы 38, и одновременно применить усиленную теорему о равномерной непрерывности (см. примечание[1]) на стр. 374). Можно показать также, что при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\eta > 0$, что из $\||\vec{\delta f_1}\||_1 \leqslant \eta$ следует $\||\vec{\Delta f} - \vec{\delta f}\||_1 \leqslant \varepsilon \||\vec{\delta f}\||_1$. Это говорит о том, что $\||\vec{\Delta f} - \vec{\delta f}\||_1$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с нормой $\||\vec{\delta f_1}\||_1$, когда последняя стремится к нулю, а это означает, что $\vec{\delta f}$ является искомым дифференциалом.

Доказанная теорема обобщается следующим образом:

Если h принадлежит классу C^{m+k} на $[a, b] \times F_1$, то отображение $f_1 \to f$ пространства $\left(F_1^{[a, b]}\right)_{cb;\, m}$ в пространство $\left(F^{[a, b]}\right)_{cb;\, m}$ принадлежит классу C^k.

Приложение к задаче о геодезических

Пусть V_n — многообразие размерности n *евклидова* аффинного пространства E_N размерности N. Рассмотрим параметрические кривые класса C^1, соединяющие точки A и B и расположенные или не расположенные на V. Будем предполагать, что такая кривая определяется отображением $w \to M(w)$ фиксированного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в E_N. Если через x_i обозначить координаты точки M в некотором ортонормированном базисе E_N, то x_i будут функциями w, а длина дуги AB кривой $\mathscr{C}$ будет определяться интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{\Sigma x_i'^2}\, dw. \qquad \text{(III, 11; 58)}$$

Определим некоторую кривую $\mathscr{C}_0$ функцией $M(w)$, а соседнюю кривую $\mathscr{C}$ функцией $M(w) + \vec{\delta M}(w)$. Дифференциал δl длины в условиях теоремы 39 определяется выражением

$$\delta l = \sum_{i=1}^{N} \int_a^b -\frac{d}{dw}\left(\frac{x_i'}{\sqrt{\sum_i x_i'^2}}\right) \delta x_i(w)\, dw. \qquad \text{(III, 11; 59)}$$

Здесь величины $x'_i\Big/\sqrt{\sum_i x_i'^2}$ являются направляющими косинусами полукасательной к $\mathscr{C}_0$ в направлении возрастания дуг (или возрастания w). Пусть $\vec{t}(w)$ — единичный вектор этой полукасательной. Формула (III, 11; 59) может быть записана в виде

$$\delta l = -\int_a^b \left(\frac{d\vec{t}}{dw}\,\Big|\,\overrightarrow{\delta M}\,(w)\right) dw. \qquad \text{(III, 11; 60)}$$

Согласно формуле Френе, на $\mathscr{C}_0$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}. \qquad \text{(III, 11; 61)}$$

Эта формула, доказываемая в соответствующих разделах дифференциальной геометрии в аффинном евклидовом трехмерном пространстве, пригодна и для произвольного числа измерений N: из равенства $(\vec{t}\,|\,\vec{t}) = 1$ дифференцированием получаем $\left(\frac{d\vec{t}}{ds}\,\Big|\,\vec{t}\right) = 0$, а, следовательно, $d\vec{t}/ds$ является вектором нормали к кривой, а, значит, его можно обозначить через $\vec{n}/R$. Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор направления, называемого главной нормалью, а $R > 0$, по определению, — радиус кривизны. Этот радиус можно рассматривать как коэффициент растяжения при сферическом отображении; плоскость $(\vec{t}, \vec{n})$ (двумерная) обычно называется соприкасающейся.

Итак,

$$\delta l = -\int_a^b \left(\frac{\vec{n}}{R}\,\Big|\,\overrightarrow{\delta M}\right) \frac{ds}{dw}\, dw = -\int_{s(a)}^{s(b)} \left(\frac{\vec{n}}{R}\,\Big|\,\overrightarrow{\delta M}\right) ds. \qquad \text{(III, 11; 62)}$$

Здесь кривая $\mathscr{C}$ расположена на многообразии V, а, следовательно, $\overrightarrow{\delta M}$ не является произвольной вариацией функции $w \to M(w)$. Рассмотрим настолько малую дугу геодезической кривой, чтобы она находилась в образе карты $\mathcal{O} \xrightarrow{\Phi} \Phi(\mathcal{O})$ многообразия V (в обозначениях, принятых на стр. 389). Кривая на $\mathcal{O}$ будет определена отображением $w \to u(w)$ отрезка $[a, b]$ в $\mathcal{O}$, а образ кривой в V будет определяться сложной функцией $w \to M(u(w))$. Теорема 42 утверждает, что если V принадлежит классу C^2, то дифференциал $\overrightarrow{\delta M}$, соответствующий вариации $\overrightarrow{\delta u}$ кривой, проведенной в $\mathcal{O}$, задается равенством

$$\overrightarrow{\delta M}\,(w) = M'(u(w)) \cdot \overrightarrow{\delta u}\,(w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j}\,(u(w))\,\delta u_j\,(w). \qquad \text{(III, 11; 63)}$$

Но тогда теорема о сложной функции (теорема 11) утверждает, что дифференциал δl по отношению к приращениям δu_j получается из дифференциала (III, 11; 62) заменой в нем $\overrightarrow{\delta M}$ на дифференциал (III, 11; 63) по отношению к $\overrightarrow{\delta u_j}$. Поэтому искомый дифференциал запишется в виде

$$\delta l = -\int\limits_{s(a)}^{s(b)} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\vec{n}}{R} \,\Big|\, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j} \right) \delta u_j \, ds, \tag{III, 11; 64}$$

где на этот раз δu_j являются произвольными скалярными функциями $w \to \delta u_j(w)$, определенными на $[a, b]$ класса C^1 и принимающими нулевые значения в точках a и b. Другими словами, $\overrightarrow{\delta u} = (\delta u_1, \delta u_2, \ldots, \delta u_n)$ является произвольной функцией, определенной на $[a, b]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^1, обращающейся в нуль в точках a и b.

Теорема 40 (или лемма Хаара) теперь показывает, что геодезическая класса C^2 на V характеризуется уравнениями Эйлера

$$\left(\vec{n} \,\Big|\, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j} \right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{III, 11; 65}$$

выражающими тот факт, что главная нормаль к геодезической кривой в каждой из своих точек является нормалью к многообразию или что соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к многообразию.

Для произвольной кривой $\mathscr{C}_0$ на V дифференциал часто оставляют с небольшими видоизменениями в виде (III, 11; 62). Обозначим через γ угол между главной нормалью к $\mathscr{C}_0$ и нормалью к поверхности, отсчитываемый от 0 до π. Если теперь через $\vec{n}_\gamma$ обозначить единичный вектор ортогональной проекции главной нормали на касательную гиперплоскость, то проекция вектора $\vec{n}$ будет равна $\vec{n}_\gamma \sin\gamma$. Поскольку $\overrightarrow{\delta M}$ в каждой точке кривой $\mathscr{C}_0$ является вектором касательной гиперплоскости $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u_j} \delta u_j$, то его скалярное произведение на $\vec{n}$ равно скалярному произведению на $\vec{n}_\gamma \sin\gamma$. Отсюда

$$\delta l = -\int\limits_{s(a)}^{s(b)} \left(\frac{\vec{n}_\gamma}{R_\gamma} \,\Big|\, \overrightarrow{\delta M} \right) ds, \tag{III, 11; 66}$$

где $R_\gamma = R/\sin\gamma$ является радиусом геодезической кривизны кривой $\mathscr{C}_0$. Это — радиус кривизны ортогональной проекции кривой на касательную гиперплоскость. *Геодезические линии — это кривые с бесконечным радиусом геодезической кривизны, или кривые с нулевой геодезической кривизной*: $1/R_\gamma = 0$.

Поставим теперь такую задачу: на поверхности V_2 аффинного евклидова трехмерного пространства найти кривую $\mathscr{C}_0$ заданной длины l, соединяющую две заданные точки A, B и вместе с заданной кривой Γ_0, проходящей через эти точки, ограничивающую участок поверхности наибольшей площади.

Пусть кривая $\mathscr{C}$ представляется функцией параметра w, принимающего в точках A и B заданные значения. Тогда можно определить дифференциал δl при переходе от кривой $\mathscr{C}_0$ к соседней кривой $\mathscr{C}$, соответствующей приращению $\delta\vec{M}(w)$. Дифференциал δS рассматриваемой площади является главной линейной частью «алгебраической» площади, заключенной между $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}$. Произведем интуитивную оценку δS. Пусть M_0 и P_0 — две соседние точки кривой $\mathscr{C}_0$, соответствующие параметрам w_0 и $w_0 + dw$, с дугой M_0P_0 длины ds. В результате перемещения кривой они перейдут в точки M и P: $M = M_0 + \delta\vec{M}(w_0)$, $P = P_0 + \delta\vec{M}(w_0 + dw)$.

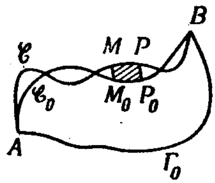

Рис. 11.

Если считать M_0P_0PM «параллелограммом», то его площадь будет равна произведению ds проекции $\delta\vec{M}$ на нормаль в точке M_0 к $\mathscr{C}_0$, лежащую в плоскости, касательной к рассматриваемой поверхности. Единичный вектор этой нормали, с точностью до знака, совпадает с вектором, обозначенным нами через $\vec{n}_\gamma$.

Площадь параллелограмма равна, следовательно, $\pm(\vec{n}_\gamma | \delta\vec{M})\,ds$, а вариация искомой площади δS есть

$$\delta S = \int_{s(a)}^{s(b)} \pm(\vec{n}_\gamma | \delta\vec{M})\,ds, \qquad \text{(III, 11; 67)}$$

где знак $+$ или $-$ в каждой точке $\mathscr{C}_0$ выбирается в зависимости от того, повернута ли кривая выпуклостью к Γ_0 или нет (нормаль $\vec{n}_\gamma$ направлена всегда в сторону вогнутости).

Согласно теории множителей Лагранжа (теорема 41), должна существовать такая вещественная постоянная λ, что $\delta S - \lambda\delta l$ равна нулю на $\mathscr{C}_0$, где

$$\int_{s(a)}^{s(b)} \left(\pm 1 - \frac{\lambda}{R_\gamma}\right)(\vec{n}_\gamma | \delta\vec{M})\,ds = 0. \qquad \text{(III, 11; 68)}$$

Естественно, $\overrightarrow{\delta M}$ не является произвольным приращением. Если (u, v) — параметры, определяющие карту поверхности, то согласно формуле (III, 11; 63)

$$\overrightarrow{\delta M} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \delta v, \qquad \text{(III, 11; 69)}$$

где δu и δv — произвольные приращения, равные нулю в A и B. Уравнениями Эйлера (см. лемму Хаара) будут

$$\left(\pm 1 - \frac{\lambda}{R_\gamma}\right)\left(\vec{n}_\gamma \,\Big|\, \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}\right) = 0, \qquad \left(\pm 1 - \frac{\lambda}{R_\gamma}\right)\left(\vec{n}_\gamma \,\Big|\, \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}\right) = 0. \qquad \text{(III, 11; 70)}$$

Поскольку вектор $\vec{n}_\gamma$ не может быть одновременно ортогональным к двум независимым векторам $\partial\overrightarrow{M}/\partial u$ и $\partial\overrightarrow{M}/\partial v$, эти уравнения эквивалентны уравнению

$$\pm 1 - \frac{\lambda}{R_\gamma} = 0. \qquad \text{(III, 11; 71)}$$

Так как $R_\gamma \geqslant 0$, а λ постоянно, то сохраняется один из знаков $+$ или $-$. Таким образом, $\mathscr{C}_0$ является кривой постоянной геодезической кривизны, что обобщает результаты, полученные на стр. 394, и следующие за ними. Замкнутая кривая заданной длины, охватывающая максимальную площадь, имеет постоянную геодезическую кривизну.

Переменные концы. Условия трансверсальности

Предположим, что вместо того чтобы искать кривую класса C^1, соединяющую точки A и B многообразия V некоторого аффинного евклидова пространства E и имеющую наименьшую длину (отыскание геодезической), мы бы начали искать кривую минимальной длины, соединяющую заданные точки подмногообразий $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ многообразия V. Эта задача является более общей, чем предыдущие, поскольку концы a и b интервала интегрирования и значения α и β функции f в этих точках в этом случае не заданы, а должны лишь удовлетворять некоторым соотношениям. Функция J теперь является функцией не только f, но также и точек a и b, относительно которых мы будем предполагать, что они описывают некоторый заданный компактный отрезок $\mathbb{R}_1$ множества $\mathbb{R}$.

Теорема 43. *Пусть $\mathbb{R}_1$ — некоторый компактный отрезок из $\mathbb{R}$, F — аффинное нормированное пространство над полем вещественных чисел, $\mathscr{U}$ — открытое множество из $F \times \vec{F}$, L — вещественная функция на $\mathbb{R}_1 \times \mathscr{U}$ класса C^2. Если Ω является* *открытым множеством из* $E=(F^{\mathbb{R}_1})_{cb;\,1}$, *образованным такими функциями* f, *при которых* $(f, \vec{f'})$ *отображает* $\mathbb{R}_1$ *в* $\mathcal{U}$, *то функция* J, *определенная на* $\Omega\times\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_1$ *по формуле* (III, 11; 3), *непрерывно дифференцируема и ее производная в* f_0, a_0, b_0, *где* f_0 *принадлежит классу* C^2, *определяется соотношением*

$$(\vec{\delta f}, \delta a, \delta b)\,[1] \to \delta J = \int_a^b \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}\right)\right)\cdot\vec{\delta f}\,dx +$$

$$+\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}(b, f_0(b), \vec{f'_0}(b))\cdot\vec{\delta f}(b) + L(b, f_0(b), \vec{f'_0}(b))\,\delta b\right) -$$

$$-\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}(a, f_0(a), \vec{f'_0}(a))\cdot\vec{\delta f}(a) + L(a, f_0(a), \vec{f'_0}(a))\,\delta a\right). \qquad \text{(III, 11; 72)}$$

Доказательство. Функция J в точке f имеет частную производную $\partial J/\partial f$, определяемую формулой (III, 11; 6). Значит,

$$\frac{\overleftarrow{\partial J}}{\partial y}(f_0, a_0, b_0)\cdot\vec{\delta f} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y}(x, f_0(x), \vec{f'_0}(x))\cdot\vec{\delta f}(x) + \frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}(x, f_0(x), \vec{f'_0}(x))\cdot\vec{\delta f'}(x)\right)dx. \qquad \text{(III, 11; 73)}$$

Частные производные J по a и b известны: это частные производные определенного интеграла по границам интервала интегрирования:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a}(f_0, a_0, b_0) &= -L(a, f_0(a), \vec{f'_0}(a)),\\ \frac{\partial J}{\partial b}(f_0, a_0, b_0) &= L(b, f_0(b), \vec{f'_0}(b)^{2}).\end{aligned} \qquad \text{(III, 11; 74)}$$

Для того чтобы получить отсюда, что J непрерывно дифференцируема на $\Omega\times\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_1$, достаточно применить теорему 15. Частная непрерывность $\partial J/\partial f$ по f для фиксированных a и b была доказана в теореме 38. Дополняя соответствующим образом доказательство, легко убедиться (мы будем это считать доказанным), что $\partial J/\partial f$ непрерывна по f, a, b.

---

[1] δa и δb являются вещественными числами и можно было бы их обозначить через da и db. Но поскольку по причинам, указанным на стр. 372, вариацию f мы обозначили через $\vec{\delta f}$ и, по аналогии, дифференциал J через δJ, мы будем также обозначать через δa и δb приращения для a и b.

[2] Здесь a, b, $J(f, a, b)$ — вещественные числа. Поэтому $\partial J/\partial a$ и $\partial J/\partial b$ — обычные производные вещественной функции вещественной переменной.

Другие типы непрерывности очевидны. Если f, a, b стремятся в E, $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_1$ соответственно к f_0, a_0, b_0, то

$$\overrightarrow{f(b)-f_0(b_0)}=\overrightarrow{f(b)-f_0(b)}+\overrightarrow{f_0(b)-f_0(b_0)} \quad \text{(III, 11; 75)}$$

стремится к $\vec{0}$ в $\vec{F}$ в силу равномерной сходимости f к f_0 в первом члене правой части (вытекающей из сходимости f к f_0 в пространстве E) и непрерывности f_0 в точке b_0 во втором члене. Точно так же, в силу равномерной сходимости $\vec{f}'$ к $\vec{f}'_0$ и непрерывности $\vec{f}'_0$ в b_0, разность $\vec{f}'(b)-\vec{f}'_0(b_0)$ стремится к $\vec{0}$. Поскольку L непрерывна в точке $(b_0, f_0(b_0), \vec{f}'_0(b_0))$ пространства $\mathbb{R}_1\times F\times\vec{F}$, то разность $L(b, f(b), \vec{f}'(b))-L(b_0, f_0(b_0), \vec{f}'_0(b_0))$ стремится к 0, чем и доказывается непрерывность $\partial J/\partial b$ в точке $(f_0, a_0, b_0)\in\Omega\times\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_1$. Непрерывность $\partial J/\partial a$ доказывается аналогично.

Полный дифференциал δJ в (f_0, a_0, b_0) вычисляется теперь по формуле

$$\delta J=\int_{a_0}^{b_0}\left(\overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial y}}\cdot\vec{\delta f}+\overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial y'}}\cdot\vec{\delta f'}\right)dx+$$
$$+L(b_0, f_0(b_0), \vec{f}'_0(b_0))\,\delta b-L(a_0, f_0(a_0), \vec{f}'_0(a_0))\,\delta a. \quad \text{(III, 11; 76)}$$

Если теперь в интеграле правой части полученного равенства выполнить интегрирование по частям, как это делалось в (III, 11; 13), то, поскольку $\vec{\delta f}$ не обязательно обращается в нуль в точках a_0 и b_0, мы получим формулу (III, 11; 72).

Изменим это выражение, введя вместо $\vec{\delta f}(a_0), \vec{\delta f}(b_0)$ дифференциалы $\vec{\delta\alpha}$, $\vec{\delta\beta}$ значений f в точках a и b.

Теорема 44. *Пусть $\mathbb{R}_1$ — некоторый интервал $\mathbb{R}$, F — аффинное нормированное пространство, ξ — отображение $E=(F^{\mathbb{R}_1})_{cb;\,1}\times\mathbb{R}_1$ в F, определенное равенством*

$$\xi(f, x)=f(x)\in F, \quad \text{(III, 11; 77)}$$

где $f(x)$ — значение f в x [1]*. Это отображение непрерывно дифференцируемо, и его производная определяется по формуле*

$$\xi'(f_0, x_0)\cdot(\vec{\delta f}, \vec{\delta x_0})=\delta(f(x))=\vec{\delta f}(x_0)+\vec{f}'(x_0)\cdot\delta x_0\in\vec{F}. \quad \text{(III, 11; 78)}$$

[1] Функция ξ подобна билинейному каноническому отображению $(u, \vec{X})\to u\cdot\vec{X}$ пространства $\mathscr{L}(\vec{E}\times\vec{F})\times\vec{E}$ в $\vec{F}$.

Доказательство. Для фиксированного x отображение $f \to f(x) \in F$ является аффинным непрерывным отображением E в F, а его линейным присоединенным отображением является $\vec{f} \to \vec{f}(x)$. Следовательно (теорема 8_2), ξ имеет частную производную по f, которая определяется формулой

$$\frac{\partial \xi}{\partial f}(f, x) \cdot \vec{\delta f} = \vec{\delta f}(x) \in \vec{F}. \qquad \text{(III, 11; 79)}$$

Эта частная производная непрерывно зависит от f и x. В самом деле, из формулы конечных приращений (теорема 13)

$$\| \vec{\delta f}(x) - \vec{\delta f}(x_0) \| \leqslant ||| \vec{\delta f}' |||_0 | x - x_0 | \leqslant ||| \vec{\delta f} |||_1 | x - x_0 | \qquad \text{(III, 11; 80)}$$

следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial \xi}{\partial f}(f, x) - \frac{\partial \xi}{\partial f}(f_0, x_0) \right\| = \sup_{||| \vec{\delta f} |||_1 \leqslant 1} \left\| \left(\frac{\partial \xi}{\partial f}(f, x) - \frac{\partial \xi}{\partial f}(f_0, x_0) \right) \cdot \vec{\delta f} \right\| =$$

$$= \sup_{||| \vec{\delta f} |||_1 \leqslant 1} \| \vec{\delta f}(x) - \vec{\delta f}(x_0) \| \leqslant | x - x_0 |, \qquad \text{(III, 11; 81)}$$

доказывающее требуемую непрерывность. Для фиксированного f отображение ξ: $x \to f(x)$ является самой функцией f. Она дифференцируема, поскольку f принадлежит классу C^1. Значит, отображение ξ имеет частную производную по x, определяемую формулой

$$\frac{\vec{\partial \xi}}{\partial x}(f, x) = \vec{f}'(x) \in \vec{F}\,^{1)}. \qquad \text{(III, 11; 82)}$$

Производная функция $\vec{\partial \xi}/\partial x$ непрерывно зависит от f и x, поскольку при f, стремящемся к f_0 в $\left(F^{\mathbf{R}_1}\right)_{cb;\,1}$, и x, стремящемся к x_0, $f'(x)$ стремится к $f'_0(x_0)$ (это рассуждение уже было проведено на стр. 402 с b, b_0 вместо x, x_0). Таким образом, ξ имеет непрерывные частные производные, и требуемый результат вытекает из теоремы 15.

Согласно (III, 11; 78), формулу (III, 11; 72) можно изменить, заменяя в ней $\vec{\delta f}(b)$ на $\vec{\delta \beta} - \vec{f}'_0(b_0)\,\delta b$ и $\vec{\delta f}(a)$ на $\vec{\delta \alpha} - \vec{f}'_0(a_0)\,\delta a$. Тогда мы получим такой результат:

---

[1]) Поскольку x пробегает поле вещественных чисел, то производный вектор можно взять в виде $\dfrac{\vec{\partial \xi}}{\partial x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot 1$. См. замечание 2°) после теоремы 8.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 43 значения f в точках a и b обозначить через α и β, то производная J в точке (f_0, a_0, b_0) определится формулой*

$$\delta J = \int_{a_0}^{b_0} \left[\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y}\left(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}\left(x, f_0(x), \vec{f}_0'(x)\right)\right)\right] \cdot \overrightarrow{\delta f}(x)\,dx +$$
$$+ \left[\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}\left(b_0, f_0(b_0), \vec{f}_0'(b_0)\right) \cdot \left(\overrightarrow{\delta\beta} - \vec{f}_0'(b_0)\delta b\right) + L\left(b_0, f_0(b_0), \vec{f}_0'(b_0)\right)\delta b\right] -$$
$$- \left[\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial y'}\left(a_0, f_0(a_0), \vec{f}_0'(a_0)\right) \cdot \left(\overrightarrow{\delta\alpha} - \vec{f}_0'(a_0)\delta a\right) + L\left(a_0, f_0(a_0), \vec{f}_0'(a_0)\right)\delta a\right]. \qquad \text{(III, 11; 84)}$$

Следствие 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 43. Пусть a, b, α, β — заданные функции параметра t, пробегающего некоторое открытое множество аффинного нормированного пространства T, со значениями в $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_1$, F, F соответственно. Для того чтобы интеграл $J(f, a(t), b(t))$ среди всех значений $t \in T$ и всех $f \in \Omega$, таких, что $f(a(t)) = \alpha(t)$, $f(b(t)) = \beta(t)$, достигал своего максимального или минимального значения при f_0, t_0, где $f_0(a(t_0)) = \alpha(t_0)$ и $f_0(b(t_0)) = \beta(t_0)$, необходимо, чтобы функция была решением уравнения Эйлера* (III, 11; 16), *а точка t_0, кроме того, удовлетворяла так называемым условиям трансверсальности, т. е. обращала в нуль обе квадратные скобки выражения* (III, 11; 84), *в которых δa, δb, $\overrightarrow{\delta\alpha}$, $\overrightarrow{\delta\beta}$ являются дифференциалами функции a, b, α, β, соответствующими произвольному приращению δt параметра t в точке t_0.*

Доказательство. Проведем беглое нестрогое рассуждение. Прежде всего, среди всех функций $f \in \Omega$, удовлетворяющих условиям $f(a(t_0)) = \alpha(t_0)$ и $f(b(t_0)) = \beta(t_0)$, функция f_0 обеспечивает максимум или минимум значения функции $J(f, a(t_0), b(t_0))$, соответствующего фиксированным пределам $a(t_0)$ и $b(t_0)$. Следовательно, по теореме 14, она должна удовлетворять уравнению Эйлера (III, 11; 16). При этом дифференциал δJ в (III, 11; 84) не содержит интеграла и сводится к выражению, заключенному в квадратные скобки. Надо, кроме того, заметить, что в силу соотношений $f(a(t)) = \alpha(t)$, $f(b(t)) = \beta(t)$, переменные f и t не являются независимыми. Однако *мы можем рассматривать t как независимую переменную.* Для фиксированного t функция f подчиняется некоторым соотношениям и потому остается в некотором аффинном подпространстве E_t пространства E (которое меняется вместе с t). Поскольку t является независимой переменной, а дифференциал δJ в (III, 11; 84) зависит только от приращения $\overrightarrow{\delta t}$ (через величины

$\delta a = \overleftarrow{a'}(t_0) \cdot \overrightarrow{\delta t}$, δb, $\overrightarrow{\delta\alpha}$, $\overrightarrow{\delta\beta}$) и не зависит от $\overrightarrow{\delta f}$ (поскольку f_0 удовлетворяет уравнению Эйлера), то необходимое условие экстремума сводится к тому, что $\delta J = 0$ при любом $\overrightarrow{\delta t}$, откуда и вытекает утверждение следствия.

Применение к геодезическим кривым

Пусть $(w, t) \to M(w, t)$ — отображение класса C^2 множества $[0, 1] \times T$ в многообразие V класса C^3 *евклидова* аффинного пространства E_N конечной размерности N. Здесь $[0, 1]$ — отрезок прямой $\mathbb{R}$, T — открытое множество аффинного нормированного пространства (практически $T = \mathbb{R}$ и $t \in T$ — время). Для каждого $t \in T$ частное отображение $w \to M(w, t)$ определяет параметрическую кривую $\mathscr{C}_t$ класса C^2 на V с концами $A_t = M(0, t)$ и $B_t = M(1, t)$.

Выясним, как изменяется длина l_t кривой в зависимости от t. Дифференциал δl, соответствующий приращению $\overrightarrow{\delta t}$ в точке t_0, задается формулой (III, 11; 84). Интеграл же сводится к (III, 11; 66). С другой стороны, здесь $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 1$, а, следовательно, $\delta a = \delta b = 0$, $\alpha(t) = A_t$ и $\beta(t) = B_t$. Положим $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_{t_0}$, $A_0 = A_{t_0}$, $B_0 = B_{t_0}$. Известно, что если в E_N выбрать некоторый ортонормированный базис, то компонентами $\overleftarrow{\partial L/\partial y^r}$ в этом базисе будут $x_i'(w) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i'^2(w)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, т. е. направляющие косинусы $\cos \Phi_i(w)$ полукасательной $\vec{t}$ (в направлении возрастающих w) к кривой $\mathscr{C}_0$ [1]) в точке w. Если через α_i, β_i мы обозначим координаты точек A и B, то первое выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле (III, 11; 84), будет равно

$$\sum_{i=1}^{N} (\cos \Phi_i)_{w=1} \cdot \delta\beta_i = (\vec{t}(B_0) \mid \overrightarrow{\delta B}). \qquad \text{(III, 11; 85)}$$

Аналогичный результат имеет место в точке A. Поэтому окончательно получаем:

$$\delta l = l'(t_0) \cdot \overrightarrow{\delta t} = -\int_{s(A)}^{s(B)} \left(\frac{\vec{n}_\gamma}{R_\gamma} \,\middle|\, \overrightarrow{\delta M}\right) ds + (\vec{t}(B_0) \mid \overrightarrow{\delta B}) - (\vec{t}(A_0) \mid \overrightarrow{\delta A}).$$
$$\text{(III, 11; 86)}$$

---

[1]) Не следует путать параметр t с единичным вектором $\vec{t}$ касательной к $\mathscr{C}_0$.

В этой формуле $\overrightarrow{\delta M}$ равен $\frac{\partial M}{\partial t}(w, t_0)\cdot\overrightarrow{\delta t}$, в то время как $\overrightarrow{\delta A}$, $\overrightarrow{\delta B}$ соответствуют частным значениям $w = 0$, $w = 1$.

В частности, если кривая является *геодезической кривой* из V, зависящей от параметра t, или, проще, если для $t = t_0$ кривая $\mathscr{C}_0$ является геодезической кривой из V, то имеет место соотношение

$$\delta l = (\vec{t}(B_0)\,|\,(\overrightarrow{\delta B})) - (\vec{t}(A_0)\,|\,(\overrightarrow{\delta A})). \qquad \text{(III, 11; 87)}$$

Нами получен замечательный результат:

Вариация длины геодезической удовлетворяет той же самой формуле, что и вариация длины отрезка прямой в евклидовом пространстве.

Пусть, например, на V отыскивается кривая минимальной длины, соединяющая точку A из $\mathscr{A}$ и точку B из $\mathscr{B}$, где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — заданные подмногообразия V (см. стр. 400). Многообразия $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ можно представить параметрически, по крайней мере локально, с помощью двух параметров ξ, η, пробегающих открытые множества аффинных пространств Ξ и H. Тогда T будет представлять собой множество $\Xi \times H$, а t — пару (ξ, η). Согласно следствию 2, кривая, прежде всего, должна быть геодезической, а ее концы A и B должны быть выбраны на $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ так, чтобы (III, 11; 87) обращалось в нуль при любом $\overrightarrow{\delta t}$, т. е. при любых $\overrightarrow{\delta\xi}$, $\overrightarrow{\delta\eta}$. Это означает, что *геодезическая кривая должна быть нормалью к $\mathscr{A}$ в точке A и нормалью к $\mathscr{B}$ в точке B.*

Канонические уравнения Гамильтона

Рассмотрим такие задачи вариационного исчисления, в которых F является пространством $\mathbb{R}^m$, так что функция f эквивалентна системе m функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ переменной x. Вводя вспомогательные функции $z_i = y'_i$, можно уравнения Эйлера записать в виде $2m$ дифференциальных уравнений *первого порядка*. Рассматривая L как заданную функцию $2m + 1$ переменных x, y_i, z_i, получаем:

$$\begin{aligned} &y'_i = z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \qquad \text{(III, 11; 88)}$$

Произведем теперь следующую замену неизвестных функций: вместо функций y_i и z_i введем новые неизвестные функции q_i и p_i, где $q_i = y_i$, а p_i заданы как функции от x, y_i и

z_i формулой

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial z_i}. \qquad \text{(III, 11; 89)}$$

Будем считать, что здесь речь идет о настоящей замене функций, т. е. формула (III, 11; 89) позволяет выразить каждую из переменных z_i как функцию x, y_j и p_j. С другой стороны, вместо заданной функции L переменных x, y_i и z_i введем функцию H по формуле

$$H(x, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^{m} p_i z_i - L. \qquad \text{(III, 11; 90)}$$

Функцию H переменных x, q_i и p_i называют *функцией Гамильтона*[1]. Ее дифференциал выражается следующим образом (частные производные L берутся по x, y_i, z_i):

$$dH = \sum_{i=1}^{m} (p_i\,dz_i + z_i\,dp_i) - \frac{\partial L}{\partial x}\,dx - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y_i}\,dy_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial z_i}\,dz_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} z_i\,dp_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y_i}\,dq_i - \frac{\partial L}{\partial x}\,dx. \qquad \text{(III, 11; 91)}$$

Эта формула верна как в старой системе переменных (x, y_i, z_i), так и в новой (x, q_i, p_i). Это показывает, что частные производные H по x, q_i, p_i определяются равенствами:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}{}^{2)}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = z_i. \qquad \text{(III, 11; 92)}$$

При этих условиях дифференциальные уравнения Эйлера (III, 11; 88) выражаются для функций q_i и p_i переменной x в следующей простой форме:

$$q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \qquad \text{(III, 11; 93)}$$

Итак, имеет место

Теорема 45. *Если в условиях теоремы* 40 F *является пространством* $\mathbb{R}^m$, *произведена замена переменных и функций* $(x, y_i, z_i) \to (x, q_i, p_i)$ *по формулам* (III, 11; 89) *и введена функция Гамильтона* H *по формуле* (III, 11; 90), *то, предполагая, что* H *является функцией* x, q_i, p_i, *уравнения Эйлера для функций*

---

[1]) В то время как функция L, выраженная через x, y_i, z_i, называется функцией Лагранжа.

[2]) Заметим, что $\partial L/\partial x$ является частной производной в системе переменных (x, y_i, z_i), в то время как $\partial H/\partial x$ является частной производной в системе переменных (x, q_i, p_i).

q_i *и* p_i *переменной* x *можно записать в виде* (III, 11; 93). *Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона относительно функции* H.

Замечание. Мы положили $F = \mathbb{R}^m$ только ради простоты. Предположим, что F конечномерно. Всегда можно вместо функций y и $z = y'$, определенных на $[a, b]$, со значениями в F и $\vec{F}$ соответственно взять новые неизвестные функции $q = y$ и $p = \overleftarrow{\partial L/\partial z}$, определенные на $[a, b]$, со значениями соответственно в F и $\overleftarrow{F'}$. Функция Гамильтона H является вещественной функцией на $[a, b] \times F \times \overleftarrow{F'}$ и определяется равенством

$$H(x, q, \overleftarrow{p}) = \langle \overleftarrow{p}, \vec{z} \rangle - L(x, y, \vec{z}), \qquad \text{(III, 11; 94)}$$

где $\langle \overleftarrow{p}, \vec{z} \rangle \in \mathbb{R}$ — скалярное произведение $\overleftarrow{p} \in \overleftarrow{F'}$ на $\vec{z} \in \vec{F}$. При этом предполагается, что y и $\vec{z}$ заменены их значениями как функции q и $\overleftarrow{p}$.

Для неизвестных функций q и $\overleftarrow{p}$ переменной x уравнения Гамильтона будут иметь вид:

$$\frac{\overrightarrow{dq}}{dx} = \frac{\overrightarrow{\partial H}}{\partial \overleftarrow{p}}, \quad \frac{\overleftarrow{dp}}{dx} = -\frac{\overleftarrow{\partial H}}{\partial \vec{q}}. \qquad \text{(III, 11; 95)}$$

При фиксированном $\overleftarrow{p}$, H является вещественной функцией $\vec{q} \in \vec{F}$, а, следовательно, $-\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}(x, q, \overleftarrow{p}) \in \mathscr{L}(\vec{F}; \mathbb{R}) = (\overleftarrow{F'})'$; при этом требуется, чтобы выражение было равным $\overleftarrow{dp}/dx$. Точно так же $\frac{\partial H}{\partial \overleftarrow{p}}(x, q, \overleftarrow{p}) \in \mathscr{L}(\overleftarrow{F'}, \mathbb{R}) = (\overleftarrow{F'})'$. Так как пространство $(\overleftarrow{F'})'$, сопряженное к $\overleftarrow{F'}$, совпадает с $\vec{F}$, то $\frac{\partial H}{\partial \overleftarrow{p}}(x, q, \overleftarrow{p}) \in \vec{F}$ и требуется, чтобы последнее выражение было равным $\overrightarrow{dq}/dx$. Функция $\overleftarrow{p}$ называется «сопряженным моментом» функции q. Это название объясняется тем, что q принимает значения в F, а $\overleftarrow{p}$ — в $\overleftarrow{F'}$.

Предположим, в частности, что L явно не зависит от x. Тогда H не будет явно зависеть от x, и предыдущие уравнения означают, что величина

$$\frac{dH}{dx} = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i' + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i' \qquad \text{(III, 11; 96)}$$

тождественно равна нулю. Другими словами, H является первым интегралом для экстремальных кривых. Вдоль любой экстремальной кривой функция H постоянна. На это мы указывали в (III, 1; 21_7).

Применения к механике

Уравнения Гамильтона имеют исключительно важные приложения как в механике, так и в теоретической физике.

Рассмотрим для простоты механическую задачу о движении системы материальных точек с наложенными на нее определенными идеальными связями, находящейся под действием поля потенциальных сил, не зависящих от времени. В этой задаче положение системы может быть, например, описано с помощью конечного числа параметров $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Для этой системы точек можно подсчитать потенциальную энергию U, являющуюся известной функцией параметров. С другой стороны, всегда возможно вычислить кинетическую энергию $T = \sum \frac{mv^2}{2}$, являющуюся квадратичной формой относительно первых производных $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ $(q'_i = dq_i/dt)$, коэффициенты которой сами зависят от $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Решение этой задачи дает «траектории», каждая из которых определяется некоторыми функциями t: $t \to q_i(t)$. Траектории рассматриваемой задачи являются решением некоторой экстремальной задачи. Для двух определенных моментов t_1 и t_2 вдоль действительной траектории или произвольных «фиктивных» траекторий можно рассмотреть интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, q'_i)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (T(q_i, q'_i) - U(q_i))\,dt\,^{1)}. \qquad \text{(III, 11; 97)}$$

Нетрудно доказать, что *среди всех траекторий, проходящих в заданные начальный и конечный моменты* t_1 *и* t_2 *через одни и те же точки* $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$, *реальной траекторией является та, при которой интеграл* (III, 11; 97) *достигает своего стационарного значения.*

Другими словами, каждая траектория является некоторой экстремалью, а уравнение, определяющее траектории рассматриваемой механической задачи, является системой уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \text{(III, 11; 98)}$$

---

[1]) $L(q_i, q'_i)$ здесь означает $L(q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m)$.

или

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

В этом случае они называются *уравнениями Лагранжа*, а функция $L = T - U$ — *функцией Лагранжа*. Переход к переменным Гамильтона определяется формулами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial q_i'}. \qquad \text{(III, 11; 99)}$$

Функция Гамильтона H принимает вид

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{m} q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - L. \qquad \text{(III, 11; 100)}$$

Однако если учесть тот факт, что T является квадратичной формой относительно q_i', то тождество Эйлера относительно однородных функций приведет к формуле

$$\sum_{i=1}^{m} q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} = 2T. \qquad \text{(III, 11; 101)}$$

Если теперь выразить H в виде

$$H = 2T - (T - U) = T + U, \qquad \text{(III, 11; 102)}$$

то мы увидим, что H является *энергией системы* (сумма потенциальной и кинетической энергий), выраженной как функция q_i и p_i. Если H выразить как функцию q_i и p_i, то уравнения Гамильтона механической задачи будут являться системой уравнений (III, 11; 93).

Функция Гамильтона H не зависит от времени и, следовательно, является первым интегралом системы. Иначе говоря, *вдоль траектории системы энергия H, сумма кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной* — это один из основных законов классической механики.

Вариационное исчисление для кратных интегралов

Изучим следующую задачу. Рассмотрим компактную кривую $\mathscr{C}$ класса C^1 в аффинном евклидовом трехмерном пространстве над полем вещественных чисел и среди всех поверхностей $\mathscr{S}$ класса C^1, ограниченных этой кривой[1]), будем искать поверхность

---

[1]) Мы здесь не будем пытаться уточнять смысл выражения «поверхность $\mathscr{S}$, ограниченная кривой $\mathscr{C}$». Оно определено в гл. VI. Скажем только, что $\mathscr{S}$ и $\mathscr{C}$ являются многообразиями (в смысле § 9) размерностей 2 и 1, что у них нет общих точек и что $\overline{\mathscr{S}} = \mathscr{S} \cup \mathscr{C}$.

наименьшей площади (задача на минимальную площадь). Если координаты точек пространства обозначить через (x, y, z) и считать, что искомая поверхность выражается в виде функции z от x и y, то площадь рассматриваемой поверхности выразится в виде двойного интеграла:

$$S = \iint_{\Sigma} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \text{(III, 11; 103)}$$

распространенного на область Σ плоскости xy, ограниченную кривой Γ, где Σ — проекция на плоскость xy поверхности $\mathcal{S}$, а Γ — проекция кривой $\mathcal{C}$. Мы пришли к задаче об отыскании функции $z = f(x, y)$ класса C^1, принимающей заданные значения вдоль контура Γ плоскости $\mathbb{R}^2$ (для того чтобы поверхность $\mathcal{S}$ проходила через кривую $\mathcal{C}$) и такой, что выписанный выше интеграл принимает минимальное значение.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ открытую область $\mathcal{O}$, ограниченную компактной гиперповерхностью Γ класса C^1. Пусть F — аффинное нормированное пространство и $\mathcal{U}$ — открытое множество из $F \times \vec{F}^n$. Пусть теперь L — вещественная функция, определенная на $\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{U}$ класса C^2[1]. Мы будем обозначать ее через

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n).$$

Если f является отображением класса C^1 области $\overline{\mathcal{O}}$ в F, то оно имеет частные производные $\vec{p}_i = \overrightarrow{\partial f/\partial x_i}$, являющиеся функциями, определенными на $\overline{\mathcal{O}}$, со значениями в $\vec{F}$. Если образ области $\overline{\mathcal{O}}$ при отображении $(f, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n)$ принадлежит открытому множеству $\mathcal{U}$ в $F \times \vec{F}^n$, то можно рассмотреть кратный интеграл

$$J(f) = \iint_{\mathcal{O}} \ldots \int L(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n), \vec{p}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, \vec{p}_n(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \iint_{\mathcal{O}} \ldots \int L(x_i, f, \vec{p}_i)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad \text{(III, 11; 104)}$$

[1] $\overline{\mathcal{O}}$ является некоторым компактом, а не открытым множеством $\mathbb{R}^n$. В начале § 2, стр. 195, определялась производная функции на компактном в $\mathbb{R}$ интервале $[a, b]$. Точно так же это можно сделать для функции, заданной на компакте $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^n$. В дальнейшем в теореме 28 гл. VI мы определим смысл выражения «открытое множество $\mathcal{O}$, ограниченное компактной гиперповерхностью Γ класса C^1».

и поставить следующую задачу: *среди всевозможных функций f, принимающих вдоль контура Γ заданные значения, найти ту, при которой интеграл J принимает наименьшее или наибольшее значение.*

Для решения этой задачи достаточно провести рассуждения, весьма близкие к тем, которые проводились в случае простого интеграла. При этом получается следующий результат:

Теорема 46. *Функция J: $f \to Jf$ принадлежит классу C^1, а ее дифференциал задается формулой*

$$\delta J = \iint\limits_{\sigma} \ldots \int \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial z} \cdot \overrightarrow{\delta f} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i} \cdot \overrightarrow{\delta p_i} \right) dx_1 \ldots dx_n, \tag{III, 11; 105}$$

$$\delta p_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta f.$$

Если L и f_0 принадлежат классу C^2 и рассматривается подмножество функций f, принимающих заданные значения на контуре Γ, то этот дифференциал запишется в виде

$$\delta J = \iint\limits_{\sigma} \ldots \int \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i} \right) \right) \overrightarrow{\delta f}\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{III, 11; 106}$$

где $\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\right)$ означает частную производную по x_i сложной функции

$$(x_1, \ldots, x_n) \to$$
$$\to \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\right)\left(x_1, \ldots, x_n, f_0(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Для того чтобы среди всех функций f класса C^1, принимающих на контуре заданные значения, функция f_0 класса C^2 минимизировала или максимизировала интеграл J, необходимо, чтобы f_0 удовлетворяла дифференциальным уравнениям Эйлера в частных производных 2-го порядка:

$$\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i} \right) = 0. \tag{III, 11; 107}$$

Доказательство. Единственное место в доказательстве, не являющееся полностью аналогичным тому, что было сделано для простых интегралов, — это переход от формулы (III, 11; 105) к формуле (III, 11; 106).

Запишем (III, 11; 105) в виде

$$\delta J=\iint\limits_{\mathscr{O}}\cdots\int\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial z}\cdot\overrightarrow{\delta f}+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\cdot\overrightarrow{\delta f}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\right)\cdot\overrightarrow{\delta f}\right)dx_1\ldots dx_n. \qquad (\text{III}, 11; 107_2)$$

Эта формула совпадает с (III, 11; 106), если только

$$\iint\limits_{\mathscr{O}}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\cdot\overrightarrow{\delta f}\right)dx_1\ldots dx_n=0. \qquad (\text{III}, 11; 107_3)$$

Если воспользоваться формулой Остроградского (VI, 7; 53), которая будет доказана позже, то интеграл по объему (III, 11; 107_3) можно заменить интегралом по поверхности

$$\int\limits_{\Gamma}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overleftarrow{\partial L}}{\partial p_i}\cdot\overrightarrow{\delta f}\cos\alpha_i\right)dS. \qquad (\text{III}, 11; 107_4)$$

Поскольку рассматривается подмножество функций $\vec{f}$, принимающих заданные значения на Γ, то $\overrightarrow{\delta f}$ равен нулю на Γ, а, следовательно, последний интеграл действительно равен нулю.

Переход от формулы (III, 11; 106) к уравнению Эйлера (III, 11; 107) требует применения леммы Хаара для случая многих переменных, доказательство которой не является существенно более сложным, чем то, которое нами было проделано для функции одной переменной.

Вернемся, например, к задаче об отыскании минимальных поверхностей. Минимальная поверхность, в которой z выражено в виде функции от x и y в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0, \qquad (\text{III}, 11; 108)$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{r(1+p^2+q^2)-p(pr+qs)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}+\frac{t(1+p^2+q^2)-q(ps+qt)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}=0 \qquad (\text{III}, 11; 109)$$

или

$$(r+t)(1+p^2+q^2)-(rp^2+2spq+tq^2)=0. \qquad (\text{III}, 11; 110)$$

Если ввести понятие средней кривизны, то можно увидеть, что предыдущее уравнение эквивалентно равенству $R_1+R_2=0$: *минимальная поверхность является поверхностью нулевой* *средней кривизны, т. е. поверхностью, в каждой точке которой главные радиусы кривизны имеют противоположные значения.* Конечно, при строгом решении этой задачи вариационного исчисления мы встретимся с теми же трудностями, с которыми нам приходилось сталкиваться до сих пор, *но они значительно более сложные, поскольку речь идет о задаче с кратными интегралами.* Мы знаем, что для поверхностей $\mathscr{S}$, ограниченных контуром $\mathscr{C}$, существует точная нижняя грань их площади >0, но не знаем, достигается ли она, и тем более не знаем (в случае когда этот минимум существует), достигается ли он поверхностью, для которой переменная z может быть представлена в виде функции x и y класса C^2. В этом заключаются основные трудности экстремальных проблем, связанных с кратными интегралами. Предположим даже, что выполнимость перечисленных выше условий проверена и что функция z удовлетворяет уравнениям в частных производных (III, 11; 110). Тогда остается найти еще то решение уравнения в частных производных, для которого поверхность $\mathscr{S}$ проходит через заданный контур $\mathscr{C}$, т. е. является такой поверхностью, для которой z принимает заданные значения вдоль проекции Γ контура $\mathscr{C}$ на плоскость xy. Задача отыскания минимальной поверхности, ограниченной заданной кривой, называется *задачей Плато.* Она была решена Дугласом. Ее решение слишком сложно, и потому мы не будем на нем останавливаться.

Рассмотрим другую задачу. Задано открытое множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, ограниченное гиперповерхностью Γ класса C^1. Требуется найти вещественную функцию f на $\overline{\mathcal{O}}$ класса C^1, *принимающую заданные значения на контуре* Γ и минимизирующую значение кратного интеграла (называемого интегралом Дирихле):

$$\iint_{\mathcal{O}} \cdots \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx_1 \ldots dx_n = \iint_{\mathcal{O}} \cdots \int \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right) dx_1 \ldots dx_n. \tag{III, 11; 111}$$

Здесь f должна быть (если она принадлежит классу C^2) решением уравнения Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0, \tag{III, 11; 112}$$

т. е. решением уравнения Лапласа

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0. \tag{III, 11; 113}$$

Говорят также, что f должна быть *гармонической функцией*. Таким образом, мы приходим к необходимости решения *задачи Дирихле*: в классе C^2 функций, определенных на $\overline{O}$, найти гармоническую функцию, принимающую заданные значения на контуре Г. Существует много физических проблем, приводящих к необходимости решения задачи Дирихле. В этих проблемах интеграл (III, 11; 111) представляет собой некоторую энергию, и задача заключается в отыскании функции, реализующей некоторое равновесное состояние, которое дает минимум энергии. Риман в XIX веке решал задачу Дирихле этим методом, предварительно доказав существование минимума интеграла. К несчастью, решение Римана содержало ошибки. С одной стороны, как это мы указывали в п. 1°) на стр. 381, нет никакой гарантии, что минимум существует, а дополнительные замечания Римана, на которых строилось доказательство существования, были основаны на неверной теореме компактности[1]. С другой стороны, как мы видели в п. 2°) на стр. 381, ничто не доказывает, что этот минимум, если он существует, реализуется функцией f класса C^2. В решении этих задач имеется много существенных трудностей, как мы это уже не раз отмечали. В дальнейшем при изучении гармонических функций будет показано, как можно устранить затруднения, возникающие в методе Римана, и как методами этого типа эффективно решается задача Дирихле.

[1]) Метод Римана основывался на том предположении, что единичный шар в бесконечномерном банаховом пространстве компактен, как и в случае конечномерного пространства. Однако мы видели, что это не верно (теорема 45_2 гл. II).