ГЛАВА IV

Интегральное исчисление

§ 1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА НА ПРЯМОЙ

Пусть заданы пространство Банаха $\vec{F}$ над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел и функция $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$ на интервале $[a, b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Мы намереваемся определить интеграл

$$\int_{[a, b]} \vec{f}(x)\, dx \in \vec{F}. \qquad \text{(IV, 1; 1)}$$

Мы видим, почему необходимо предположение о том, что функция $\vec{f}$ должна принимать значения в некотором банаховом пространстве. Ведь, как известно, интеграл можно рассматривать как предел конечных сумм вида

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{f}(\xi_i), \qquad \text{(IV, 1; 2)}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — возрастающая последовательность $n+1$ точек интервала $[a, b]$, $c_0 = a$, $c_n = b$ и $\xi_i \in [c_i, c_{i+1}]$. Однако для того чтобы можно было рассматривать такую сумму, надо прежде всего иметь возможность определять каждый член $(c_{i+1} - c_i)\vec{f}(\xi_i)$ этой суммы, а для этого надо уметь строить произведение элемента $\vec{f}(\xi_i)$ из $\vec{F}$ на вещественный скаляр $c_{i+1} - c_i$. Затем надо иметь возможность рассматривать сумму таких элементов из $\vec{F}$, а, следовательно, $\vec{F}$ должно быть векторным пространством над полем вещественных чисел. Кроме того, интеграл — не сумма, а предел сумм. Поэтому надо иметь право рассматривать в пространстве $\vec{F}$ пределы, а значит, естественно, предполагать, что $\vec{F}$ является векторным нормированным пространством над полем вещественных чисел. Теоретически этого должно быть достаточно для определения интеграла. Однако если не предполагать полноту $\vec{F}$, то невозможно будет найти практически применимые критерии существования этого интеграла, ибо только в этом случае можно будет доказать существование предела, не зная его заранее.

Поэтому в дальнейшем, *если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\vec{F}$ — банахово пространство.* Естественно, можно также рассматривать банаховы пространства над полем комплексных чисел, поскольку их можно трактовать как банаховы пространства над полем вещественных чисел.

Функцию $\vec{f}$ мы будем считать всегда ограниченной. Другими словами, при x, пробегающем $[a, b]$, будем считать $\|\vec{f}(x)\|$ не превосходящей некоторого фиксированного числа. Впрочем, как это делалось на стр. 148, через $\|\vec{f}\|$ мы будем обозначать функцию $\geqslant 0$: $x \to \|\vec{f}(x)\|$, определенную на $[a, b]$, в то время как $\|\|f(x)\|\|$ будет представлять собой точную верхнюю грань этой функции [1]).

Кроме того, *мы будем рассматривать функции $\vec{f}$, определенные на всей числовой прямой, и интегрировать их на всей прямой*, считая всегда, что эти функции равны нулю вне некоторого ограниченного интервала.

Таким образом, мы будем писать выражения

$$\int_{\mathbf{R}} \vec{f}(x)\, dx, \text{ или просто } \int \vec{f}(x)\, dx, \text{ или } \int \vec{f}. \qquad \text{(IV, 1; 3)}$$

Тогда, по определению, символ (IV, 1; 1) является интегралом на всей прямой от функции $\vec{f}$, равной $\vec{f}$ в интервале $[a, b]$

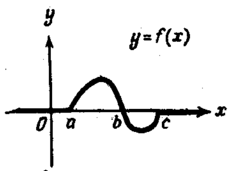

Рис. 12.

и $\vec{0}$ в дополнении к этому интервалу. Замыкание точек x топологического пространства X, в которых функция $\vec{f}$, определенная в пространстве X, со значениями в векторном пространстве $\vec{F}$ отлична от $\vec{0}$, называется *носителем* функции $\vec{f}$. По определению, *носитель всегда замкнут*. Носитель функции $\vec{f}$ является наименьшим замкнутым множеством X, на дополнении к которому функция $\vec{f}$ тождественно равна $\vec{0}$. Например, для вещественной функции, график которой изображен на рис. 12,

[1]) Если $\vec{F}$ — поле скаляров, то $\|\ \|$ заменится на $|\ |$ и тогда $\|\|\ \|\|$ можно будет заменить на $\|\ \|$.

множество точек, в которых $f(x) \neq 0$, представляет собой открытый интервал $]a, c[$ с удаленной точкой b. Однако носителем этой функции будет замкнутый интервал $[a, c]$.

Если f — вещественная функция, равная 0 во всех иррациональных точках $\mathbb{R}$ и 1 во всех рациональных точках, то множество точек, в которых она отлична от нуля, является множеством рациональных точек $\mathbb{Q}$, в то время как ее носителем будет вся вещественная прямая $\mathbb{R}$.

Если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две функции, определенные на X, со значениями в векторном пространстве $\vec{F}$, то носитель функции $\vec{f} + \vec{g}$ содержится, очевидно, в объединении носителей $\vec{f}$ и $\vec{g}$. В самом деле, точка x, в которой $\vec{f}(x) + \vec{g}(x) \neq \vec{0}$, принадлежит либо множеству точек A, в которых $\vec{f} \neq 0$, либо множеству точек B, в которых $\vec{g} \neq \vec{0}$. Обе эти возможности не исключают друг друга. Но тогда эта точка принадлежит объединению $A \cup B$ и, следовательно, носитель содержится в замыкании $\overline{A \cup B}$, которое содержится в объединении $\bar{A} \cup \bar{B}$ носителей. *Мы будем интегрировать на $\mathbb{R}$ функции f, определенные на $\mathbb{R}$ и имеющие на нем компактные носители.*

Ступенчатые функции

Функция f, определенная на вещественной прямой $\mathbb{R}$, со значениями в произвольном множестве F называется *ступенчатой*, если существует такая конечная возрастающая последовательность точек $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ из $\mathbb{R}$, что на каждом из открытых интервалов $]-\infty, c_0[$, $]c_0, c_1[$, $\ldots$, $]c_{n-1}, c_n[$, $]c_n + \infty[$ функция f постоянна. (Никаких дополнительных предположений относительно значений функции в самих точках c_i не требуется.) Такая последовательность точек $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется *разбиением* Δ прямой $\mathbb{R}$, допустимым для ступенчатой функции f. Естественно, существуют «наилучшие» разбиения, связанные с f, т. е. такие, при которых число точек c_i будет наименьшим. Для одной и той же ступенчатой функции f существует бесконечное число допустимых разбиений $\mathbb{R}$. Разбиение Δ' прямой $\mathbb{R}$ называется *измельчением* разбиения Δ, если последовательность c'_j содержит последовательность c_i. Всякое измельчение допустимого разбиения для функции f является допустимым разбиением для этой функции. Существует по крайней мере одно разбиение, являющееся измельчением двух заданных разбиений Δ' и Δ'' прямой $\mathbb{R}$. Оно может быть получено объединением точек разбиений, относящихся к Δ' и Δ'', и перенумерацией их в порядке возрастания. Если значения ступенчатой функции изменятся в конечном числе точек, то она останется ступенчатой функцией. Если множество $\vec{F}$ является векторным пространством, то произведение ступенчатой функции на скаляр и сумма двух ступенчатых функций будет ступенчатой функцией. Рассмотрим внимательнее последнее утверждение. Если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две ступенчатые функции, то им соответствуют некоторые разбиения Δ' и Δ'' прямой $\mathbb{R}$, а, значит, и измельчение Δ этих разбиений. Разбиение Δ является допустимым разбиением $\mathbb{R}$ для каждой из функций $\vec{f}$ и $\vec{g}$, а потому и для суммы $\vec{f}+\vec{g}$ этих функций.

Определим теперь *интеграл Римана ступенчатой функции с компактным носителем* и значениями в векторном пространстве $\vec{F}$ над полем $\mathbb{K}$ (не обязательно нормированном) по формуле

$$\int \vec{f} = \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{f}(\xi_i), \qquad \xi_i \in]c_i, c_{i+1}[, \qquad (\text{IV}, 1; 4)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — допустимое разбиение для данной ступенчатой функции[1]).

Следует проверить, что введенное определение корректно, т. е. что правая часть равенства (IV, 1; 4) не зависит от выбранного разбиения. Пусть Δ' и Δ'' — два допустимых разбиения для функции $\vec{f}$ и Δ — измельчение каждого из этих разбиений. Тогда непосредственно видно, что выражения (IV, 1; 4), относящиеся к Δ' и Δ'', оба дадут тот же результат, что и (IV, 1; 4) относительно Δ. В самом деле, если $]c'_i, c'_{i+1}[$ — интервал разбиения Δ', то в разбиении Δ он будет разбит на некоторое конечное число интервалов $]d_j, d_{j+1}[$, $]d_{j+1}, d_{j+2}[$, ..., $]d_{k-1}, d_k[$. В каждом из этих интервалов, как и в исходном интервале $]c'_i, c'_{i+1}[$, функция $\vec{f}$ является одной и той же постоянной $\vec{f}_i$, и, следовательно, имеет место равенство

$$\sum_{l=j,\, j+1,\, \ldots,\, k-1} (d_{l+1} - d_l)\vec{f}_l = (c'_{i+1} - c'_i)\vec{f}_i, \qquad (\text{IV}, 1; 5)$$

откуда следует тождественность сумм, соответствующих Δ' и Δ.

Если λ — произвольный скаляр и если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — ступенчатые функции с компактным носителем, то имеют место очевидные

---

[1]) Поскольку предполагалось, что функция $\vec{f}$ имеет компактный носитель, она необходимо равна нулю в $]-\infty, c_0[$ и в $]c_n, +\infty[$. Заметим, что значения функции $\vec{f}$ в точках c_i в рассуждениях не принимаются во внимание.

формулы

$$\int \lambda\vec{f}=\lambda\int\vec{f} \quad \text{и} \quad \int(\vec{f}+\vec{g})=\int\vec{f}+\int\vec{g}. \qquad \text{(IV, 1; 6)}$$

Это очевидно для умножения на скаляр. Что же касается суммы функций, то достаточно выбрать разбиение Δ, общее для $\vec{f}$ и $\vec{g}$ и, следовательно, для суммы $\vec{f}+\vec{g}$.

Таким образом, получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Множество ступенчатых функций с компактным носителем, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в векторном пространстве $\vec{F}$ над полем вещественных или комплексных чисел $\mathbb{K}$ само является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, а интеграл $\vec{f}\to\int\vec{f}$ является линейным отображением этого векторного пространства в $\vec{F}$. Если $\vec{F}=\mathbb{R}$ и $f\geqslant 0$, то $\int f\geqslant 0$. Если, кроме того, $\vec{F}$ является векторным нормированным пространством, то имеют место следующие неравенства:*

$$\left\|\int\vec{f}\right\|\leqslant\int\|\vec{f}\|=\int\|\vec{f}(x)\|\,dx, \quad \left\|\int_{[a,\,b]}\vec{f}\right\|\leqslant(b-a)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\|\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(IV, 1; 7)}$$

Если значение ступенчатой функции с компактным носителем изменить в конечном числе точек прямой $\mathbb{R}$, то она останется ступенчатой функцией с компактным носителем, а ее интеграл не изменится.

Конец теоремы был доказан перед ее формулировкой. Неравенства (IV, 1; 7) очевидны на разбиении Δ, допустимом для функции $\vec{f}$:

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)\vec{f}_i\right\|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)\|\vec{f}_i\|\leqslant(b-a)\sup_i\|\vec{f}_i\|$$

при $c_0=a$ и $c_n=b$.

Пусть теперь $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две ступенчатые функции с компактными носителями, отличающиеся лишь на конечном числе точек $\mathbb{R}$. Эти точки необходимо находятся среди точек c_i разбиения Δ, допустимого одновременно для функций $\vec{f}$ и $\vec{g}$, а в интеграл не входят значения функции в самих точках c_i разбиения Δ.

Для определения интеграла от *произвольной* функции придется воспользоваться предельным переходом.

Верхний интеграл Римана от ограниченной функции $f > 0$ с компактным носителем

Определение. Пусть $f \geqslant 0$ — вещественная ограниченная функция с компактным носителем, определенная на прямой $\mathbb{R}$. *Верхним интегралом Римана* $\int^* f$ *функции* f называется точная нижняя грань интегралов от ступенчатых функций с компактным носителем $f_1 \geqslant f$.

Таким образом, по определению

$$\int^* f = \inf_{\substack{f_1-\text{ступенчатая} \\ f_1 \geqslant f}} \left(\int f_1\right) \geqslant 0. \qquad \text{(IV, 1; 8)}$$

Легко понять причины предыдущих ограничений, в силу которых функция f предполагается ограниченной и имеющей компактный носитель. Если бы этих ограничений не было, то не существовало бы ступенчатой функции с компактным носителем, мажорирующей функцию f. Конечно, в том случае, когда функция f сама ступенчатая, в качестве f_1 можно взять ее саму и тогда $\int^* f = \int f$.

Теорема 2. *Если* $f \leqslant g$, *то* $\int^* f \leqslant \int^* g$. *Для положительных ограниченных функций* f *и* g *с компактными носителями и неотрицательного скаляра* λ *имеют место формулы*

$$\int^* \lambda f = \lambda \int^* f, \qquad \int^* (f+g) \leqslant \int^* f + \int^* g. \qquad \text{(IV, 1; 9)}$$

Говорят также, что верхний интеграл положительных функций обладает свойством выпуклости. Верхний интеграл функции не изменяется при изменении значений этой функции в конечном числе точек из $\mathbb{R}$.

Доказательство. Высказанные утверждения почти очевидны. Докажем, например, свойство выпуклости.

Пусть f_1 и g_1 — ступенчатые ограниченные функции с компактным носителем, мажорирующие функции f и g соответственно. Тогда $f+g \leqslant f_1 + g_1$, и мы имеем

$$\int^* (f+g) \leqslant \int (f_1+g_1) = \int f_1 + \int g_1. \qquad \text{(IV, 1; 10)}$$

Левая часть этого соотношения не превосходит точной нижней грани его правой части, равной $\int^* f + \int^* g$, откуда и следует (IV, 1; 9).

Пусть теперь f и g совпадают всюду, кроме конечного числа точек $\mathbb{R}$, и $f_1 \geqslant f$ — ступенчатая функция с компактным носителем. Всегда можно найти такую ступенчатую функцию $g_1 \geqslant g$

с компактным носителем, которая всюду совпадает с f_1, кроме конечного числа точек. При этом $\int^* g \leqslant \int g_1 = \int f_1$. Переходя справа к точной нижней грани, получим неравенство $\int^* g \leqslant \leqslant \int^* f$. Заменяя в предыдущих рассуждениях f на g и g на f, точно так же получим $\int^* f \leqslant \int^* g$, откуда и следует равенство $\int^* f = \int^* g$.

Замечания. 1°) Можно было бы точно так же определить нижний интеграл Римана $\int_* f$ как точную верхнюю грань интегралов ступенчатых функций, не превосходящих f. Однако этот нижний интеграл обладал бы тогда свойством вогнутости, а именно:

$$\int_* (f+g) \geqslant \int_* f + \int_* g, \tag{IV, 1; 11}$$

практически почти не применяемым.

2°) Можно было бы подумать, что имеет место равенство $\int^* (f+g) = \int^* f + \int^* g$. Однако это не так. В самом деле, рассмотрим функцию f, равную нулю в дополнении к $[0, 1]$ и во всех иррациональных точках отрезка $[0, 1]$ и равную 1 во всех рациональных точках этого отрезка. Пусть f_1 — ступенчатая функция $\geqslant f$. В каждом интервале $]c_i, c_{i+1}[$ любого допустимого разложения Δ для функции f_1 имеются рациональные точки. Следовательно, постоянные значения f_1 наверное $\geqslant 1$. Но тогда f_1 не меньше характеристической функции отрезка $[0, 1]$. Обратно, характеристическая функция является ступенчатой и мажорирует f. Поэтому $\int^* f = 1$. Если через g мы обозначим функцию, полученную аналогично функции f, но со взаимной заменой значений в рациональных и иррациональных точках, то мы также получим $\int^* g = 1$. Однако $f + g$ является характеристической функцией отрезка $[0, 1]$ и $\int^* (f+g) = \int (f+g) = = 1 < 1 + 1$.

Из этого примера видно, что если ввести нижние интегралы, указанные в замечании 1°), то мы получим: $\int_* f = \int_* g = 0$ и $\int_* (f+g) = \int (f+g) = 1 > 0 + 0$.

3°) Изменение функции на счетном множестве точек $\mathbb{R}$ может привести к изменению его верхнего интеграла. Так, например, функция f из замечания 2°) отлична от нуля в рациональных точках, а ее интеграл равен 1, а не 0.

4°) Условие выпуклости естественным образом обобщается на сумму конечного числа функций, *но не обобщается на сумму счетного числа их.* Другими словами, если $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность неотрицательных ограниченных функций с носителями в одном и том же отрезке $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ и если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ при каждом x сходится к пределу $f(x)$, где функция f ограничена (а ее носитель, очевидно, лежит в $[a, b]$), то неравенство $\int^* f \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int^* f_n$ *может не выполняться.*

Рассмотрим, например, множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Их можно расположить в последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Обозначим через f_n характеристическую функцию множества $\{a_n\}$. Тогда $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ является функцией, рассмотренной в замечании 2°), причем $\int^* f = 1 > \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int^* f_n = 0$.

В теории интеграла Лебега мы введем также понятие верхнего интеграла, который будет обладать свойством выпуклости и в случае счетных сумм $\int^* \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int^* f_n$, *и это будет существенным превосходством интеграла Лебега над интегралом Римана.*

Интегрируемые функции со значениями в пространстве Банаха

Определение. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на вещественной прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Говорят, что функция $\vec{f}$ *интегрируема по Риману,* если она ограничена, имеет компактный носитель и если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция $\vec{g}$ с компактным носителем и значениями в $\vec{F}$, что

$$\int^* \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(IV, 1; 12)}$$

Это эквивалентно существованию такой последовательности ступенчатых функций $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ с компактными носителями и значениями в $\vec{F}$, для которых верхние интегралы $\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$

сходятся к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Такая последовательность функций называется *аппроксимирующей последовательностью* функции $\vec{f}$ для интеграла Римана[1].

Если две функции отличаются только в конечном числе точек и если одна из них интегрируема, то другая также будет интегрируемой (и будет иметь ту же самую аппроксимирующую последовательность).

Замечания. 1°) Пусть $\vec{f}$ — ограниченная функция, определенная на $\mathbb{R}$, с компактным носителем и значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая *интегрируемая по Риману* функция $\vec{g}$, что $\int^* \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon$, то *сама функция* $\vec{f}$ *интегрируема.*

В самом деле, при заданном $\varepsilon > 0$ мы можем сначала выбрать такую интегрируемую функцию $\vec{g}$, что $\int^* \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon/2$. В силу интегрируемости $\vec{g}$ можно найти такую ступенчатую функцию $\vec{h}$ с компактным носителем, что $\int^* \|\vec{g} - \vec{h}\| \leqslant \varepsilon/2$. Тогда, в силу неравенства выпуклости (IV, 1; 9), $\int^* \|\vec{f} - \vec{h}\| \leqslant \varepsilon$, а это, по определению, означает, что $\vec{f}$ интегрируема.

Точно так же, если задана такая последовательность интегрируемых функций $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$, что $\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$ стремится к 0 (в частности, если функции $\vec{f}_n$ сохраняют свои носители на одном и том же компакте и равномерно сходятся к $\vec{f}$), то $\vec{f}$ интегрируема. В этом случае говорят, что последовательность $\vec{f}_n$ функций (не обязательно ступенчатых) является аппроксимирующей последовательностью в интегральном смысле для функции $\vec{f}$.

2°) Если $\vec{f}$ — интегрируемая функция, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует ступенчатая функция $\vec{g}$ с компактным носителем и ступенчатая функция h с компактным носителем и вещественными значениями $\geqslant 0$, такие, что $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant h$ и $\int h \leqslant \varepsilon$, и обратно.

---

[1]) Не следует думать, что такая последовательность $\vec{f}_n$ сходится просто к $\vec{f}$. На стр. 550 мы приведем пример, в котором $\vec{f}_n(x)$ не сходится к $\vec{f}(x)$ ни при каком значении x.

Обратное утверждение очевидно; поэтому мы докажем лишь прямое утверждение.

Прежде всего найдем ступенчатую функцию $\vec{g}$ с компактным носителем, такую, что $\int^* \|\vec{f}-\vec{g}\| \leqslant \varepsilon/2$. Тогда, по определению верхнего интеграла, найдется такая неотрицательная вещественная ступенчатая функция h с компактным носителем, что $\|\vec{f}-\vec{g}\| \leqslant h$ и $\int h \leqslant \varepsilon$.

3°) Если f — вещественная интегрируемая по Риману функция, определенная на $\mathbb{R}$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти две такие ступенчатые функции g_1 и g_2 с компактными носителями, что $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$ и $\int g_2 - g_1 \leqslant \varepsilon$, и обратно.

Обратное очевидно; поэтому докажем лишь прямое утверждение. Пусть f интегрируема. Определим, согласно замечанию 2°), вещественную ступенчатую функцию g и ступенчатую функцию $h \geqslant 0$ с компактными носителями так, чтобы $|f-g| \leqslant h$ и $\int h \leqslant \varepsilon/2$. Если теперь положить $g_1 = g - h$ и $g_2 = g + h$, то g_1 и g_2 будут удовлетворять указанным условиям.

Интеграл от интегрируемой функции

Теорема 3. *Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая по Риману функция со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, и пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — аппроксимирующая функцию $\vec{f}$ последовательность ступенчатых функций. Тогда величины $\int \vec{f}_n \in \vec{F}$ сходятся к некоторому пределу в $\vec{F}$ и этот предел не зависит от рассматриваемой аппроксимирующей последовательности.*

Доказательство. Из неравенства

$$\left\| \int \vec{f}_m - \int \vec{f}_n \right\| \leqslant \int \|\vec{f}_m - \vec{f}_n\| \leqslant \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_m\| + \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| \qquad \text{(IV, 1; 13)}$$

следует, что при m и n, стремящихся к бесконечности, $\left\| \int \vec{f}_m - \int \vec{f}_n \right\|$ стремится к $\vec{0}$. Это означает, что последовательность $\int \vec{f}_n$ является последовательностью Коши в $\vec{F}$. Поскольку $\vec{F}$ полно [1]), эта последовательность имеет предел $\vec{L}$. Остается убедиться, что этот предел не зависит от выбора

[1]) Именно здесь существен тот факт, что $\vec{F}$ полно.

аппроксимирующей последовательности. Если мы рассмотрим теперь две такие аппроксимирующие последовательности $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ и $\vec{g}_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots$, то из них можно образовать последовательность $\vec{f}_0, \vec{g}_0, \vec{f}_1, \vec{g}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_2, \ldots$, которая также является аппроксимирующей для $\vec{f}$. Это значит, что последовательность величин $\int \vec{f}_0, \int \vec{g}_0, \int \vec{f}_1, \int \vec{g}_1, \int \vec{f}_2, \int \vec{g}_2, \ldots$ должна иметь предел; другими словами, последовательности $\int \vec{f}_n$ и $\int \vec{g}_n$ действительно имеют один и тот же предел.

Определение. Значение предела, указанного в теореме 3, называется *интегралом Римана интегрируемой функции* $\vec{f}$ и обозначается через $\int \vec{f}(x)\,dx$ или просто через $\int \vec{f} \in \vec{F}$.

Если две интегрируемые функции $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ *отличаются лишь в конечном числе точек* $\mathbb{R}$, *то они имеют один и тот же интеграл, поскольку они имеют одни и те же аппроксимирующие последовательности.*

Говорят, что $\vec{f}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ из $\mathbb{R}$, если функция $\vec{\tilde{f}}$, равная $\vec{f}$ на $[a, b]$ и $\vec{0}$ вне его, интегрируема, и в этом случае полагают

$$\int_{[a,b]} \vec{f} = \int \vec{\tilde{f}}. \qquad \text{(IV, 1; 13}_2\text{)}$$

Замечание. Если $\vec{f}$ является ступенчатой функцией, то данное сейчас определение $\int \vec{f}$ соответствует первоначальному определению (IV, 1; 4). В самом деле, в качестве аппроксимирующей последовательности для функции $\vec{f}$ надо взять последовательность $\vec{f}, \vec{f}, \vec{f}, \ldots, \vec{f}, \ldots$, и мы придем к исходному интегралу.

Теорема 4. *Если* λ — *скаляр, а* $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ — *две интегрируемые функции со значениями в* $\vec{F}$, *то* $\lambda\vec{f}$ *и* $\vec{f} + \vec{g}$ *интегрируемы и имеют место формулы*

$$\int \lambda\vec{f} = \lambda \int \vec{f}, \quad \int (\vec{f} + \vec{g}) = \int \vec{f} + \int \vec{g}. \qquad \text{(IV, 1; 14)}$$

Иначе говоря, *множество интегрируемых по Риману функций* (необходимо ограниченных с компактным носителем) *является векторным пространством над полем* $\mathbb{K}$, *а интеграл является линейным отображением этого векторного пространства в* $\vec{F}$.

Доказательство. Утверждение, относящееся к умножению на скаляр, очевидно; поэтому достаточно рассмотреть случай суммы. Пусть $\vec{f}_n$ и $\vec{g}_n$ — две аппроксимирующие последовательности для функций $\vec{f}$ и $\vec{g}$. Тогда имеет место неравенство

$$\int^* \|(\vec{f}+\vec{g})-(\vec{f}_n+\vec{g}_n)\| \leqslant \int^* \|\vec{f}-\vec{f}_n\| + \int^* \|\vec{g}-\vec{g}_n\|, \quad \text{(IV, 1; 15)}$$

из которого следует, что последовательность $\vec{f}_n+\vec{g}_n$ является аппроксимирующей для функции $\vec{f}+\vec{g}$, а, следовательно, функция $\vec{f}+\vec{g}$ интегрируема. Это неравенство означает, что $\int(\vec{f}+\vec{g})$ является пределом величин $\int(\vec{f}_n+\vec{g}_n)=\int\vec{f}_n+\int\vec{g}_n$, т. е. равняется $\int\vec{f}+\int\vec{g}$.

Следствие. *Пусть a, b, c, $a \leqslant b \leqslant c$, — три точки прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на $[a, c]$ со значениями в $\vec{F}$. Для того чтобы она была интегрируемой на $[a, c]$, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируемой на $[a, b]$ и на $[b, c]$, и в этом случае*

$$\int_{[a, c]} \vec{f} = \int_{[a, b]} \vec{f} + \int_{[b, c]} \vec{f}. \quad \text{(IV. 1; 16)}$$

Доказательство. Пусть $\vec{\tilde{f}}$ — функция, определенная на $\mathbb{R}$, равная $\vec{f}$ на $[a, c]$ и $\vec{0}$ вне этого отрезка. Пусть $\varphi_{[a, b]}$, $\varphi_{[b, c]}$ и $\varphi_{[a, c]}$ — характеристические функции интервалов $[a, b]$, $[b, c]$ и $[a, c]$. Если функция $\vec{f}$ интегрируема на $[a, b]$ и $[b, c]$, то интегрируемыми будут функции $\vec{f}\cdot\varphi_{[a, b]}$ и $\vec{f}\cdot\varphi_{[b, c]}$, а значит, и $\vec{f}\cdot\varphi_{]b, c]}$. Но тогда интегрируема сумма $\vec{f}\cdot(\varphi_{[a, b]}+\varphi_{]b, c]})=\vec{\tilde{f}}$, а, значит, интегрируема на $[a, c]$ функция $\vec{f}$ и из (IV, 1, 14) следует (IV, 1; 16).

Обратно, если $\vec{f}$ интегрируема на $[a, c]$ и если $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью функции $\vec{f}$ для интеграла на $[a, c]$, то интеграл $\int^*_{[a, c]}\|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ стремится к нулю. Вместе с ним стремятся к нулю интегралы $\int^*_{[a, b]}\|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ и $\int^*_{[b, c]}\|\vec{f}-\vec{f}_n\|$. Это означает, что $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью функции $\vec{f}$ для интегралов, распространенных на $[a, b]$ и $[b, c]$, а $\vec{f}$ интегрируема на этих интервалах.

Теорема 5. *Если функция $\vec{f}$, определенная на $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{F}$ интегрируема, то функция $\|\vec{f}\|$: $x \to \|\vec{f}(x)\|$ является вещественной интегрируемой неотрицательной функцией и имеет место неравенство*

$$\left\| \int \vec{f} \right\| \leqslant \int \|\vec{f}\|. \qquad \text{(IV, 1; 17)}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\vec{f}$, составленной из ступенчатых функций. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \|\vec{f}\| - \|\vec{f}_n\| \right| \leqslant \|\vec{f} - \vec{f}_n\|, \qquad \text{(IV, 1; 18)}$$

из которого следует, что $\int^* \left| \|\vec{f}\| - \|\vec{f}_n\| \right|$ сходится к нулю, и, следовательно, последовательность ступенчатых функций $\|\vec{f}_n\|$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\|\vec{f}\|$. Эта функция, таким образом, интегрируема и $\int \|\vec{f}_n\|$ стремится к $\int \|\vec{f}\|$. При этом для любого n имеет место неравенство $\left\| \int \vec{f}_n \right\| \leqslant \int \|\vec{f}_n\|$. При n, стремящемся к бесконечности, $\int \vec{f}_n$ стремится к $\int \vec{f}$ по определению, а, значит, в силу непрерывности нормы (теорема 9 гл. II) $\left\| \int \vec{f}_n \right\|$ стремится к $\left\| \int \vec{f} \right\|$, а $\int \|\vec{f}_n\|$ стремится к $\int \|\vec{f}\|$, откуда и следует неравенство (IV, 1; 17).

Следствие 1. *Интеграл вещественной интегрируемой неотрицательной функции f неотрицателен.*

В самом деле, так как $|f| = f$, то, применяя (IV, 1; 17), получаем $\int f \geqslant \left| \int f \right| \geqslant 0$.

Следствие 2. *Если f и g — такие вещественные интегрируемые функции, что $f \leqslant g$, то $\int f \leqslant \int g$.*

Действительно, достаточно к положительной функции $g - f$ применить следствие 1 и учесть, что $\int (g - f) = \int g - \int f$ (теорема 4).

Следствие 3. *Для интегрируемой на $[a, b]$ функции $\vec{f}$ имеет место неравенство*

$$\left\| \int_{[a,b]} \vec{f} \right\| \leqslant (b - a) \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(IV, 1; 19)}$$

В самом деле, прежде всего имеет место неравенство (IV, 1; 17) относительно интеграла $\int\limits_{[a,b]}$: $\left\| \int\limits_{[a,b]} \vec{f} \right\| \leqslant \int\limits_{[a,b]} \|\vec{f}\|$. Так как функция $\|\vec{f}\|$ на $[a, b]$ не превосходит постоянной $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \|\vec{f}(x)\|$, то, согласно следствию 2, имеет место неравенство $\int\limits_{[a,b]} \|\vec{f}\| \leqslant$ $\leqslant \int\limits_{[a,b]} M = M(b-a)$.

Следствие 3_2. *Если f интегрируема на $[a, b]$, вещественна и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_{[a,b]} f \leqslant M(b-a). \qquad \text{(IV, 1; 20)}$$

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2.

Следствие 4. *Интеграл вещественной неотрицательной интегрируемой функции f совпадает с ее верхним интегралом.*

Действительно, пусть f_n — аппроксимирующая функцию f последовательность, состоящая из вещественных ступенчатых функций с компактными носителями. Можно считать, что $f_n \geqslant 0$. В противном случае f_n можно заменить функциями $|f_n|$, образующими аппроксимирующую последовательность. Тогда

$$f \leqslant f_n + |f - f_n|,$$

откуда (согласно теореме 2)

$$\int^* f \leqslant \int f_n + \int^* |f - f_n| \qquad \text{(IV, 1; 20}_2\text{)}$$

и точно так же

$$f_n \leqslant f + |f_n - f|, \qquad \text{(IV, 1; 20}_3\text{)}$$

а потому

$$\int f_n \leqslant \int^* f + \int^* |f - f_n|,$$

откуда

$$\left| \int^* f - \int f_n \right| \leqslant \int^* |f - f_n|. \qquad \text{(IV, 1; 20}_4\text{)}$$

Правая часть стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, а $\int f_n$ стремится к $\int f$, откуда и вытекает требуемый результат.

Следствие 5. *Пусть $\vec{f}_n$ является последовательностью интегрируемых функций, $\vec{f}$ — ограниченная функция с компактным носителем, а $\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$ при n, стремящемся к бесконечности,* *стремится к нулю (это будет иметь место, в частности, если $\vec{f}_n$ равномерно сходятся к функции $\vec{f}$ и сохраняют свой носитель на фиксированном компакте). Тогда функция $\vec{f}$ интегрируема, а $\int \vec{f}_n$ сходятся к $\int \vec{f}$.*

Мы уже видели ранее (замечание 1°) на стр. 424), что функция $\vec{f}$ интегрируема, а из неравенства

$$\left\| \int \vec{f} - \int \vec{f}_n \right\| \leqslant \int \| \vec{f} - \vec{f}_n \| = \int^* \| \vec{f} - \vec{f}_n \| \qquad \text{(IV, 1; 21)}$$

следует, что $\int \vec{f}_n$ сходится к $\int \vec{f}$.

Теорема 6 (о перестановочности интеграла и линейного непрерывного отображения). *Пусть L — линейное непрерывное отображение банахова пространства $\vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$. Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая по Риману функция, определенная на прямой $\mathbb{R}$, со значениями в пространстве $\vec{F}$. Тогда функция $L \circ \vec{f}$, определенная на $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{G}$ интегрируема по Риману и имеет место соотношение*

$$\int L \circ \vec{f} = L\left(\int \vec{f}\right) \in \vec{G}. \qquad \text{(IV, 1; 22)}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала ступенчатую функцию $\vec{g}$ с компактным носителем, определенную в $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{F}$. Функция $L \circ \vec{g}$ является ступенчатой функцией с компактным носителем, и имеет место соотношение

$$\int L \circ \vec{g} = \sum_{i=0}^{n} (c_{i+1} - c_i) L \circ \vec{g}_i = L\left(\sum_{i=0}^{n} (c_{i+1} - c_i) \vec{g}_i\right) = L\left(\int \vec{g}\right). \qquad \text{(IV, 1; 23)}$$

Пусть теперь $\vec{f}$ — произвольная интегрируемая по Риману функция. Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ — аппроксимирующая $\vec{f}$ последовательность ступенчатых функций с компактными носителями. Покажем, что функции $L \circ \vec{f}_n$ составляют аппроксимирующую последовательность для функции $L \circ \vec{f}$. В самом деле, так как

$$\| (L \circ \vec{f} - L \circ \vec{f}_n) \| \leqslant \| L \| \, \| \vec{f} - \vec{f}_n \|,$$

то

$$\int^* \| (L \circ \vec{f}) - (L \circ \vec{f}_n) \| \leqslant \| L \| \int^* \| \vec{f} - \vec{f}_n \|. \qquad \text{(IV, 1; 24)}$$

Отсюда видно, что левая часть последнего соотношения стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, что и доказывает интегрируемость функции $L \circ \vec{f}$.

Соотношение (IV, 1; 23) имеет место для $\vec{g} = \vec{f}_n$. Так как $L \circ \vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $L \circ \vec{f}$, то при n, стремящемся к бесконечности, левая часть этого соотношения стремится к $\int L \circ \vec{f}$.

С другой стороны, $\int \vec{f}_n$ в правой части равенства стремится к $\int \vec{f}$ и, в силу непрерывности отображения L, эта правая часть стремится к $L\left(\int \vec{f}\right)$, что и доказывает соотношение (IV, 1; 23) для случая $\vec{g} = \vec{f}$.

Теорема 7. *Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две интегрируемые по Риману функции со значениями в банаховых пространствах $\vec{F}$ и $\vec{G}$. Пусть B — билинейное непрерывное отображение пространства $\vec{F} \times \vec{G}$ в банахово пространство $\vec{H}$. Тогда функция $B(\vec{f}, \vec{g})$: $x \to B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))$ интегрируема по Риману и имеет место неравенство*

$$\left\| \int B(\vec{f}, \vec{g}) \right\| \leqslant \| B \| \, ||| \vec{f} ||| \int \| \vec{g} \|. \qquad \text{(IV, 1; 24}_2\text{)}$$

Доказательство. Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ и $\vec{g}_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots$ — последовательности ступенчатых функций с компактными носителями, аппроксимирующие функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$. Заметим, прежде всего, что *всегда можно предполагать выполненным неравенство* $||| \vec{g}_n ||| \leqslant 3 ||| \vec{g} |||$. (В самом деле, предположим, что в одном из интервалов разбиения функция $\vec{g}_n$ равна некоторому (постоянному) вектору из $\vec{G}$ с нормой $> 3 ||| \vec{g} |||$. Тогда во всем этом интервале разность $\| \vec{g} - \vec{g}_n \|$ не меньше постоянной $2 ||| \vec{g} |||$. Заменим в каждом интервале такого вида постоянный вектор $\vec{g}_n$ на пропорциональный ему постоянный вектор $\vec{g}'_n$ с нормой, равной $||| \vec{g} |||$. Так как $\| \vec{g} - \vec{g}'_n \| \leqslant \| \vec{g} \| + \| \vec{g}'_n \| \leqslant 2 ||| \vec{g} |||$, а $2 ||| \vec{g} ||| \leqslant \leqslant \| \vec{g} - \vec{g}_n \|$, то $\| \vec{g} - \vec{g}'_n \| \leqslant \| \vec{g} - \vec{g}_n \|$. Функции $\vec{g}'_n$, заменяющие функции $\vec{g}_n$, удовлетворяют неравенству $\int^* \| \vec{g} - \vec{g}'_n \| \leqslant \int^* \| \vec{g} - \vec{g}_n \|$, а, следовательно, последовательность $\vec{g}'_n$ также является аппроксимирующей для функции $\vec{g}$. На этот раз все аппроксимирующие функции ограничены числом $3|||\vec{g}|||$.) При этих условиях функция $B(\vec{f}_n, \vec{g}_n)$ является ступенчатой функцией с компактным носителем и имеет место неравенство

$$\|B(\vec{f}_n, \vec{g}_n)-B(\vec{f}, \vec{g})\| \leqslant \|B(\vec{f}_n-\vec{f}, \vec{g}_n)\|+\|B(\vec{f}, \vec{g}_n-\vec{g})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B\|\,\|\vec{f}_n-\vec{f}\|\,3|||\vec{g}|||+\|B\|\,|||\vec{f}|||\,\|\vec{g}_n-\vec{g}\|, \tag{IV, 1; 25}$$

а, значит,

$$\int^{*}\|B(\vec{f}_n, \vec{g}_n)-B(\vec{f}, \vec{g})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B\|\left(3|||\vec{g}|||\int^{*}\|\vec{f}_n-\vec{f}\|+|||\vec{f}|||\int^{*}\|\vec{g}_n-\vec{g}\|\right). \tag{IV, 1; 26}$$

Отсюда следует, что функции $B(\vec{f}_n, \vec{g}_n)$ образуют аппроксимирующую последовательность для функции $B(\vec{f}, \vec{g})$, а, значит, эта функция интегрируема по Риману. Поскольку

$$\|B(\vec{f}, \vec{g})\| \leqslant \|B\|\;|||\vec{f}|||\;\|\vec{g}\|, \tag{IV, 1; 27}$$

то после интегрирования получаем неравенство (IV, 1; 24).

Следствие 1. *Если f и g — интегрируемые по Риману комплексные функции, то функция-произведение fg интегрируема по Риману и имеет место неравенство*

$$\left|\int fg\right| \leqslant \|f\| \int |g|. \tag{IV, 1; 28}$$

Следствие 2. *Если f и g — вещественные интегрируемые по Риману функции, то функция fg интегрируема по Риману, а в том случае, когда для всех x функция $g \geqslant 0$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, имеет место неравенство*

$$m\int g \leqslant \int fg \leqslant M\int g. \tag{IV, 1; 29}$$

В самом деле, так как fg интегрируема по Риману и для всех x выполняются неравенства

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x), \tag{IV, 1; 30}$$

то, интегрируя эти неравенства, получаем (IV, 1; 29)[1]).

Замечание. Если f является непрерывной функцией, то любая промежуточная величина между минимумом и макси-

[1]) *Конечно, эти неравенства не имеют места, если для функции $g(x)$ не выполняется условие $g(x) \geqslant 0$.* Пусть, например, $f(x)=g(x)=x$, а интегрирование ведется на $[-1, +1]$. Здесь $M=1$. Однако неравенство

мумом функции f может быть записана в виде $f(\xi)$, где $\xi \in \mathbb{R}$ (теорема о промежуточных значениях, являющаяся следствием теоремы 33 гл. II). Значит, в этом случае при $g \geqslant 0$, а также при $g \leqslant 0$ имеет место соотношение

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int g(x)\, dx, \qquad \text{(IV, 1; 31)}$$

называемое *теоремой о среднем.*

Примеры интегрируемых по Риману функций

Основные примеры вытекают из следствия 5 теоремы 5.

Теорема 8. *Для того чтобы функция, определенная на замкнутом интервале* $[a, b]$ *прямой* $\mathbb{R}$, *со значениями в полном* [1]) *метрическом пространстве* F *была бы правильной, необходимо и достаточно, чтобы она была пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций, определенных на* $[a, b]$, *со значениями в* F.

Доказательство. 1°) Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — последовательность ступенчатых функций, определенных на $[a, b]$, равномерно сходящаяся к функции f. Пусть c — точка $[a, b]$.

Так как f_n являются ступенчатыми функциями, то при x, стремящемся к c строго сверху, каждая из этих функций имеет предел. Поскольку пространство F предполагалось полным, то из теоремы 66 гл. II следует, что функция f обладает тем же самым свойством. Аналогичное рассуждение показывает, что функция f имеет предел при x, стремящемся к c строго снизу. Отсюда видно, что любая точка c является или точкой разрыва первого рода или точкой непрерывности рассматриваемой функции f, т. е. что функция f правильная.

2°) Обратно, пусть f — правильная функция со значениями в метрическом пространстве F. Здесь нет необходимости предполагать его полным. Покажем, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти такую ступенчатую функцию, определенную на $[a, b]$, со значениями в F, что $d(f, g) \leqslant \varepsilon$. Полагая затем последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$, мы сможем образовать нужную нам последовательность ступенчатых функций.

Пусть x — произвольная точка $[a, b]$. Если точка x отлична от точки a, то, учитывая, что $f(y)$ имеет предел при y, стремящемся

$2/3 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx \leqslant 1 \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$ не справедливо. Опыт показывает, что, несмотря на предостережения, эта ошибка очень живуча.

[1]) Для того чтобы выполнялось необходимое условие, не нужно предполагать пространство полным.

к x по значениям $<x$, можно найти такой интервал $]x-\alpha, x]$, $\alpha>0$, для любых двух точек которого ξ и η, отличных от x, имеет место неравенство $d(f(\xi), f(\eta)) \leqslant \varepsilon$.

Точно так же, если точка x отлична от точки b, можно найти интервал $[x, x+\beta[$, обладающий таким же свойством. Объединяя полученные результаты, получаем, что на отрезке $[a, b]$ всегда можно найти такой открытый в $[a, b]$[1]) интервал, содержащий x, в котором для двух точек ξ и η, отличных от x и расположенных по одну сторону от x, имеет место неравенство $d(f(\xi), f(\eta)) \leqslant \varepsilon$.

Поскольку отрезок $[a, b]$ компактен, то по свойству Гейне—Бореля — Лебега его можно покрыть конечным числом таких открытых множеств. Обозначим через $c_0=a_1, c_1, c_2, \ldots, c_n=b$ множество точек, образованное из всех начал и концов этих открытых интервалов, и включим в него точки x, для которых были построены эти покрытия. Теперь мы можем следующим образом определить ступенчатую функцию g: в каждой точке c_i она равна значению f в этой точке, а на каждом из интервалов $]c_i, c_{i+1}[$ она равна постоянной $f(\xi_i)$, где ξ_i — произвольная точка этого интервала. Тогда, учитывая способ выбора интервалов, для любой точки x получаем неравенство $d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 1. *Любая непрерывная функция, определенная на замкнутом интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в метрическом пространстве F является пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.*

Заметим, что доказательство для случая непрерывной функции значительно проще, чем для случая произвольной правильной функции. Достаточно заметить, что f равномерно непрерывна на компакте $[a, b]$ (теорема 31 гл. II). Тогда для любого заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta>0$, что из $d(x', x'') \leqslant \eta$ будет следовать неравенство $d(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$.

Если теперь ввести на отрезке $[a, b]$ такое разбиение $c_0=a, c_1, c_2, \ldots, c_n=b$, при котором $c_{i+1}-c_i$ были бы $\leqslant \eta$, и если выбрать функцию g равной $f(\xi_i)$ в $[c_i, c_{i+1}[$, где $\xi_i \in [c_i, c_{i+1}]$ и $g(b)=f(b)$, то мы получим $d(f, g) \leqslant \varepsilon$.

Следствие 2. *Всякая правильная функция, определенная на прямой $\mathbb{R}$, с компактным носителем и значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ интегрируема по Риману. В частности, инте-*

[1]) Для $x \neq a$ и $x \neq b$ это будет множество $]x-\alpha, x+\beta[$. При $x=a$ получим множество $[a, a+\beta[$, а для $x=b$ — множество $]b-\alpha, b]$. Во всех случаях это открытые множества топологического пространства $[a, b]$. В то же время это и интервалы. Поэтому мы их предполагаем открытыми в $[a, b]$ интервалами. Конечно, они не обязательно открыты в смысле определения, данного на стр. 26.

грируема по Риману любая непрерывная функция с компактным носителем.

Следствие 3. *Любая вещественная функция, определенная на интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ и монотонная на этом интервале, интегрируема.*

Это справедливо, ибо монотонная функция правильна.

Конечно, имеются неправильные интегрируемые функции. Например, функция, равная $\sin 1/x$ на интервале $]0, 1]$ и 0 вне его, интегрируема по Риману, хотя ее разрыв в начале координат не является разрывом первого рода.

Теорема 9. *Ограниченная функция с компактным носителем и значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, непрерывная всюду, кроме конечного числа точек, интегрируема по Риману*[1]).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться замечанием 1°) на стр. 424 и показать, что для любого $\varepsilon \geqslant 0$ найдется такая интегрируемая функция $\vec{g}$, что $\int^* \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon$.

Пусть M — максимум $\|\vec{f}\|$, а N — число точек разрыва функции $\vec{f}$. Рассмотрим функцию $\vec{g}$, равную $\vec{f}$ вне объединения интервалов $[c_i - \eta,\ c_i + \eta]$, где c_i — точки разрыва $\vec{f}$, $\eta = \varepsilon/(2NM)$, и равную нулю в этих интервалах. Тогда $\vec{g}$ будет всюду непрерывной функцией, кроме конечного числа точек, в которых она имеет лишь разрывы 1-го рода, а, следовательно, согласно следствию 2 из теоремы 8, она интегрируема. Функция $\|\vec{f} - \vec{g}\|$ не превосходит ступенчатой функции, равной постоянной M в каждом из N интервалов $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ и равной 0 вне их, так что имеет место неравенство $\int^* \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant M \cdot 2N\eta = \varepsilon$.

Вычисление интеграла функции с помощью сумм Коши — Римана

Пусть $\vec{f}$ — определенная на интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ и интегрируемая по Риману функция. Предлагается следующий способ вычисления ее интеграла.

---

[1]) Не следует думать, что функцию, обладающую этим свойством, можно сделать непрерывной, изменяя ее значения в конечном числе точек R! Это видно из предыдущего примера.

С помощью точек $c_0 = a$, c_1, c_2, ..., $c_n = b$ производится разбиение Δ интервала $[a, b]$ на частичные интервалы. Для каждого i через $\vec{\theta}_i$ обозначается произвольный вектор пространства $\vec{F}$, принадлежащий замыканию множества значений $\vec{f}$ в замкнутом интервале $[c_i, c_{i+1}]$. Затем строится сумма Коши — Римана $\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{\theta}_i$. В какой же мере эта сумма является приближением к интегралу?

Покажем, что если взять произвольную последовательность разбиений Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., такую, чтобы длина наибольшего из интервалов разбиения Δ_n стремилась к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то предыдущая сумма (где $\vec{\theta}_i$ произвольны в каждом интервале разбиения Δ_n) будет стремиться к $\int \vec{f}$ при n, стремящемся к бесконечности.

Теорема 10. *Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на ограниченном интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ и интегрируемая по Риману. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно найти число $\eta > 0$, обладающее следующим свойством: для любого разбиения Δ интервала $[a, b]$, определенного такой возрастающей последовательностью точек $c_0 = a$, c_1, c_2, ..., $c_n = b$, что наибольший из интервалов $[c_i, c_{i+1}]$ имеет длину $\leqslant \eta$, при любом выборе вектора $\vec{\theta}_i$ в замыкании множества значений функции $\vec{f}$ на интервале $[c_i, c_{i+1}]$ имеет место неравенство*

$$\left\| \int_{[a, b]} \vec{f} - \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{\theta}_i \right\| \leqslant \varepsilon. \qquad (\mathrm{IV}, 1; 32)$$

Доказательство. Прежде всего, согласно замечанию 2°) на стр. 424, можно найти такую ступенчатую функцию $\vec{g}$, определенную на $[a, b]$ со значениями в $\vec{F}$, и такую ступенчатую функцию h с вещественными неотрицательными значениями, для которых $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant h$ и $\int h \leqslant \varepsilon/4$. Обозначим через $d_0 = a$, d_1, d_2, ..., $d_N = b$ точки разбиения, являющегося общим для обеих ступенчатых функций $\vec{g}$ и h. Покажем теперь, что $\eta = \varepsilon/(8MN)$, где $M = |||\vec{f}|||$, обладает необходимым свойством. В самом деле, пусть Δ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками c_i, $i = 1, 2, \ldots n$, такое, что наибольшая из длин отрезков $[c_i, c_{i+1}]$ не превосходит η. Выберем $\vec{\theta}_i$, как было сказано выше, и обозначим через $\vec{\theta}$ ступенчатую функцию, имеющую c_i точками разбиения, которая равна $\vec{\theta}_i$ в каждом из интервалов $[c_i, c_{i+1}[$ и равна $\vec{f}(b)$ для $x = b$. Сумма Римана $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{\theta}_i$ в этом случае будет равна $\int\limits_{[a,\,b]} \vec{\theta}$. Найдем теперь оценку функции $\|\vec{f}(x) - \vec{\theta}(x)\|$ на каждом из интервалов $[c_i, c_{i+1}[$.

1°) Предположим прежде всего, что интервал $[c_i, c_{i+1}[$ содержится в одном из интервалов $]d_j, d_{j+1}[$. В этом интервале имеет место неравенство

$$\|\vec{f}(x) - \vec{\theta}(x)\| = \|\vec{f}(x) - \vec{\theta}_i\| \leqslant \|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| + \|\vec{g}(x) - \vec{\theta}_i\|. \tag{IV, 1; 33}$$

Первая норма здесь не превосходит $h(x)$. Что же касается второй нормы, то по определению $\vec{\theta}_i$ она не превосходит

$$\sup_{c_i \leqslant \xi \leqslant c_{i+1}} \|\vec{g}(x) - \vec{f}(\xi)\|. \tag{IV, 1; 34}$$

Однако поскольку на интервале $]d_j, d_{j+1}[$ функция $\vec{g}$ постоянна, то в этой формуле можно заменить $\vec{g}(x)$ на $\vec{g}(\xi)$. Следовательно, $\|\vec{g}(x) - \vec{\theta}_i\|$ не превосходит величины $\sup\limits_{c_i \leqslant \xi \leqslant c_{i+1}} h(\xi)$, которая в силу постоянства h на интервале $]d_j, d_{j+1}[$ равна $h(x)$. Окончательно в рассматриваемом интервале имеет место оценка:

$$\|\vec{f}(x) - \vec{\theta}(x)\| \leqslant 2h(x). \tag{IV, 1; 35}$$

Сумма интегралов от функции $\|\vec{f} - \vec{\theta}\|$ по всем интервалам не превосходит $2\int h \leqslant \varepsilon/2$.

2°) Предположим теперь, что интервал $[c_i, c_{i+1}[$ содержит одну из точек разбиения d_j. Поскольку $\vec{\theta}_i$ является точкой прикосновения множества значений $\vec{f}$, то можно утверждать, что $\|\vec{f}(x) - \vec{\theta}(x)\|$ не превосходит в этом интервале постоянной $2M$. Поскольку таких интервалов имеется не более $2N$, а длина каждого из них не больше η, то сумма интегралов от функции $\|\vec{f} - \vec{\theta}\|$ по всем этим интервалам не превосходит $4MN\eta = \varepsilon/2$.

Окончательно получаем неравенство

$$\int\limits_{[a,\,b]} \|\vec{f}(x) - \vec{\theta}(x)\|\,dx \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(IV, 1; 36)}$$

и теорема доказана.

Следствие. *Пусть f — интегрируемая по Риману вещественная функция, определенная на ограниченном интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует число $\eta > 0$, обладающее следующим свойством: если для каждого такого разбиения Δ отрезка $[a, b]$ возрастающей последовательностью точек $c_0 = a, c_1, c_2, \ldots, c_n = b$, при котором наибольшее из чисел $c_{i+1} - c_i$ не превосходит η, положить $M_i = \sup\limits_{c_i \leqslant x \leqslant c_{i+1}} f(x)$ и $m_i = \inf\limits_{c_i \leqslant x \leqslant c_{i+1}} f(x)$, то будут иметь место неравенства*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\,m_i \leqslant \int\limits_{[a,\,b]} f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\,M_i \qquad \text{(IV, 1; 37)}$$

и

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)(M_i - m_i) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(IV, 1; 38)}$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы, поскольку на $[c_i, c_{i+1}]$ имеют место неравенства $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$, где M_i и m_i являются точками прикосновения множества значений функции f.

Замечание. Следствие уточняет замечание 3°) на стр. 425. В качестве функций g_1 и g_2 можно взять функции, принимающие в интервалах $[c_i, c_{i+1}[$ соответственно значения m_i и M_i и значение $f(b)$ в точке b.

Среднее значение функции на интервале

Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, интегрируемая по Риману на $[a, b]$. *Средним значением* $\vec{f}$ *на интервале* $[a, b]$ называется величина

$$\mathfrak{M}(\vec{f};\ [a,\,b]) = \frac{1}{b-a} \int\limits_{[a,\,b]} \vec{f}(x)\,dx \in \vec{F}\,^{1)}. \qquad \text{(IV, 1; 39)}$$

---

1) Если $a = b$, то договариваются считать средним значением величину $\vec{f}(a)$.

Из неравенств (IV, 1; 19) и (IV, 1; 20) вытекает, что это среднее не превосходит $|||\vec{f}|||$ и что в вещественном случае оно заключено между точной нижней и точной верхней гранями функции f. Это среднее значение может быть вычислено с помощью предела по следующей формуле:

$$\mathfrak{M}(\vec{f}; [a, b]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right). \quad \text{(IV, 1; 40)}$$

В самом деле, рассмотрим разбиение интервала $[a, b]$ на n интервалов длины $(b-a)/n$ и вычислим сумму Коши — Римана:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{f}(c_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \vec{f}\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right). \quad \text{(IV, 1; 41)}$$

Из теоремы 10 вытекает, что, поскольку $\vec{f}$ интегрируема по Риману, эта сумма необходимо сходится к $\int_{[a, b]} \vec{f}$.

Соотношение (IV, 1; 40) получается из (IV, 1; 41) после умножения его на выражение $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b-a}$, стремящееся к $\frac{1}{b-a}$ при n, стремящемся к бесконечности, и добавления слагаемого $\frac{1}{n+1}\vec{f}(b)$, стремящегося к $\vec{0}$.

Если f является вещественной непрерывной функцией, то из теоремы о промежуточных значениях (следствие теоремы 33 гл. II) следует, что $\mathfrak{M}(f; [a, b])$ равна $f(c)$, где c — некоторая точка отрезка $[a, b]$.

§ 2. МЕРЫ РАДОНА НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Меры Радона на компактном пространстве

Пусть X — компактное топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{C}(X)$ пространство непрерывных на X функций со скалярными значениями, обозначенное нами ранее через $(\mathbb{K}^X)_c$[1].

Согласно теореме о максимуме (теорема 29 гл. II), непрерывная скалярная функция, определенная на компакте X, ограничена. Как отмечалось ранее, функция $\varphi \to |||\varphi||| = \sup_{x\in X} |\varphi(x)|$

[1]) Это изменение обозначений может показаться странным. Но в дальнейшем нам придется рассматривать случай, когда X не является компактным, и мы тогда введем пространство $\mathscr{C}(X)$, не совпадающее с $(\mathbb{K}^X)_c$. Почти всегда в качестве $\mathbb{K}$ будет браться поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.