Из неравенств (IV, 1; 19) и (IV, 1; 20) вытекает, что это среднее не превосходит $|||\vec{f}|||$ и что в вещественном случае оно заключено между точной нижней и точной верхней гранями функции f. Это среднее значение может быть вычислено с помощью предела по следующей формуле:

$$\mathfrak{M}(\vec{f}; [a, b]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right). \quad (\text{IV}, 1; 40)$$

В самом деле, рассмотрим разбиение интервала $[a, b]$ на n интервалов длины $(b-a)/n$ и вычислим сумму Коши — Римана:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i)\vec{f}(c_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \vec{f}\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right). \quad (\text{IV}, 1; 41)$$

Из теоремы 10 вытекает, что, поскольку $\vec{f}$ интегрируема по Риману, эта сумма необходимо сходится к $\int\limits_{[a,b]} \vec{f}$.

Соотношение (IV, 1; 40) получается из (IV, 1; 41) после умножения его на выражение $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b-a}$, стремящееся к $\frac{1}{b-a}$ при n, стремящемся к бесконечности, и добавления слагаемого $\frac{1}{n+1}\vec{f}(b)$, стремящегося к $\vec{0}$.

Если f является вещественной непрерывной функцией, то из теоремы о промежуточных значениях (следствие теоремы 33 гл. II) следует, что $\mathfrak{M}(f; [a, b])$ равна $f(c)$, где c — некоторая точка отрезка $[a, b]$.

§ 2. МЕРЫ РАДОНА НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Меры Радона на компактном пространстве

Пусть X — компактное топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{C}(X)$ пространство непрерывных на X функций со скалярными значениями, обозначенное нами ранее через $(\mathbb{K}^X)_c$[1].

Согласно теореме о максимуме (теорема 29 гл. II), непрерывная скалярная функция, определенная на компакте X, ограничена. Как отмечалось ранее, функция $\varphi \to |||\varphi||| = \sup\limits_{x\in X} |\varphi(x)|$

[1]) Это изменение обозначений может показаться странным. Но в дальнейшем нам придется рассматривать случай, когда X не является компактным, и мы тогда введем пространство $\mathscr{C}(X)$, не совпадающее с $(\mathbb{K}^X)_c$. Почти всегда в качестве $\mathbb{K}$ будет браться поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

является нормой в $\mathscr{C}(X)$. Сходимость в смысле этой нормы является равномерной сходимостью функций φ. В следствии теоремы 64 гл. II говорится о том, что $\mathscr{C}(X)$ является банаховым пространством.

Пространство, сопряженное к этому пространству, в соответствии с общими обозначениями записывается в виде $\mathscr{C}'(X)$. Элементы этого сопряженного пространства называются *мерами Радона в пространстве* X. Таким образом, если μ есть мера Радона, то она определяет некоторое отображение, которое каждому элементу φ из $\mathscr{C}(X)$, т. е. каждой непрерывной скалярной функции φ на X ставит в соответствие число $\mu(\varphi)$.

Определенное таким образом отображение линейно в том смысле, что

$$\mu(\varphi_1+\varphi_2)=\mu(\varphi_1)+\mu(\varphi_2),\quad \mu(k\varphi)=k\mu(\varphi)\quad \text{для}\quad k\in\mathbb{K}. \tag{IV, 2; 1}$$

Кроме того, оно непрерывно. Этот факт может выражаться различными способами: либо он означает, что для каждой последовательности скалярных непрерывных функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, равномерно сходящейся на X к 0, числовая последовательность $\mu(\varphi_n)$ сходится к нулю, либо он означает, что мера μ обладает такой нормой $\|\mu\|$, при которой справедливы соотношения

$$|\mu(\varphi)|\leqslant\|\mu\|\,\|\|\varphi\|\|\quad \text{и}\quad \|\mu\|=\sup_{\|\|\varphi\|\|\leqslant 1}|\mu(\varphi)|. \tag{IV, 2; 2}$$

С другой стороны, пространство $\mathscr{C}'(X)$, будучи сопряженным к банахову пространству, само является банаховым пространством (теорема 50 гл. II). Его векторная структура определяется следующим образом.

Если μ и ν — две меры, то мера $\mu+\nu$ определяется по формуле

$$(\mu+\nu)(\varphi)=\mu(\varphi)+\nu(\varphi). \tag{IV, 2; 3}$$

Если k — скаляр, то мера $k\mu$ определяется равенством

$$(k\mu)(\varphi)=k\mu(\varphi). \tag{IV, 2; 4}$$

Норма меры μ определяется по формуле (IV, 2; 2).

Согласно общим обозначениям, выражение $\mu(\varphi)$ может быть также записано в виде $\mu\cdot\varphi$ или $\langle\mu,\varphi\rangle$.

Примеры мер Радона

1-*й пример. Мерой Дирака в точке* $a\in X$ называется мера, определенная формулой

$$\delta_{(a)}(\varphi)=\varphi(a). \tag{IV, 2; 5}$$

Говорят, что *эта мера определена единичной массой в точке a множества X*. Если X является векторным конечномерным пространством, то *мерой Дирака* (без уточнения точки a) называют меру, относящуюся к нулю пространства X.

Пусть теперь заданы счетная последовательность точек $a_0, a_1, a_2, \ldots$ пространства X и счетная последовательность комплексных чисел $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Тогда через $\sum\limits_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)}$ обозначается мера μ, определяемая формулой

$$\left(\sum_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)}\right) \cdot \varphi = \sum_{\nu} c_\nu \varphi(a_\nu). \qquad \text{(IV, 2; 6)}$$

Это выражение, наверное, будет иметь смысл, если сходится ряд $\sum\limits_{\nu} |c_\nu|$, что *мы будем всегда предполагать выполненным*. Эту меру называют *атомической* и говорят, что она определена счетным множеством масс c_ν, расположенных в точках a_ν пространства X.

Докажем, что *в том случае, когда все a_ν различны, норма этой меры равна сумме числового ряда*

$$\left\| \sum_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)} \right\| = \sum_{\nu} |c_\nu|. \qquad \text{(IV, 2; 7)}$$

Прежде всего, если функция φ по модулю не превосходит 1, то

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \sum_{\nu} |c_\nu|, \qquad \text{(IV, 2; 7}_2\text{)}$$

откуда вытекает неравенство $\|\mu\| \leqslant \sum\limits_{\nu} |c_\nu|$. С другой стороны, по определению суммы сходящегося ряда с положительными членами существует такое конечное подмножество J множества индексов, при котором сумма $\sum\limits_{\nu \in J} |c_\nu|$ будет $\geqslant \left(\sum\limits_{\nu} |c_\nu|\right) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим теперь через φ непрерывную комплексную функцию над X, не превосходящую по модулю 1 и принимающую в каждой из точек a_ν, $\nu \in J$, значение $\bar{c}_\nu / |c_\nu|$[1]). Теперь видно, что

$$\mu(\varphi) = \sum_{\nu \in J} |c_\nu| + \sum_{\nu \notin J} c_\nu \varphi(a_\nu), \qquad \text{(IV, 2; 8)}$$

---

[1]) Пусть X, например, является интервалом $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$. Тогда, очевидно, можно найти комплексную непрерывную функцию φ, не превосходящую по модулю 1 и принимающую в конечном числе точек из X данные значения, равные по модулю 1. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_l$ — эти точки. Тогда достаточно взять функцию φ аффинной в каждом из интервалов $[a, d_1]$, $[d_1, d_2]$, ..., $[d_l, b]$. Эта возможность вовсе не очевидна, если X является произвольным компактом. Однако это существенно в нашем доказательстве. В дальнейшем мы убедимся, что это возможно (следствие 3 теоремы 11).

откуда следует оценка снизу

$$|\mu(\varphi)| \geqslant \left(\sum_\nu |c_\nu| - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sum_{\nu \notin J} |c_\nu| \geqslant \sum_\nu |c_\nu| - \varepsilon. \qquad \text{(IV, 2; 9)}$$

Так как $\|\varphi\| = 1$, то

$$\|\mu\| \geqslant |\mu(\varphi)| \geqslant \sum_\nu |c_\nu| - \varepsilon. \qquad \text{(IV, 2; 10)}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем $\|\mu\| \geqslant \sum\limits_\nu |c_\nu|$, откуда и вытекает требуемый результат.

Заметим также, что обозначение Σ, написанное ранее без обоснования, может быть теперь строго обосновано: речь идет о *нормально сходящемся ряде векторов банахова пространства* $\mathscr{C}'(X)$. В самом деле, так как $\|c_\nu \delta_{(a_\nu)}\| = |c_\nu|$ и $\sum\limits_\nu |c_\nu| < +\infty$, то ряд $\sum\limits_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)}$ нормально сходится к некоторому элементу из $\mathscr{C}'(X)$. Пусть μ_1 — этот элемент. Поскольку для фиксированного φ функция $\nu \to \nu(\varphi)$ является линейной непрерывной формой над $\mathscr{C}'(X)$, то из теоремы 60 гл. II получаем

$$\mu_1(\varphi) = \left(\sum_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)}\right) \cdot \varphi = \sum_\nu \left(c_\nu \delta_{(a_\nu)} \cdot \varphi\right) = \sum_\nu c_\nu \varphi(a_\nu) = \mu(\varphi)\,^{1)}. \qquad \text{(IV, 2; 11)}$$

Следовательно, $\mu = \mu_1$ можно записать в виде $\sum\limits_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)}$.

2-й пример. Возьмем в качестве X компактный интервал $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$. Тогда интеграл $\varphi \to \int\limits_{[a,b]} \varphi(x)\,dx$ определяет некоторую меру Радона над X. Из неравенства (IV, 1; 19) видно, что норма этой меры $\leqslant b - a$. Впрочем, если вычислить значение этой меры на функции $\varphi \equiv 1$, то мы получим неравенство $\|\mu\| \geqslant \left|\int\limits_{[a,b]} \varphi\right| = b - a$. Итак, *норма такой меры равна* $b - a$.

Более общо, если p является интегрируемой по Риману комплекснозначной функцией, определенной на $[a, b]$, то она определяет меру по формуле

$$\mu(\varphi) = \int_{[a,b]} p(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 2; 12)}$$

---

[1]) По определению.

Норма этой меры, очевидно, $\leqslant \int |p(x)|\,dx$. Позже мы покажем, что *норма в точности равна этому интегралу.*

Определенные таким образом меры, в противоположность атомическим мерам, называются *рассеянными* в том смысле, что они не содержат точечной массы.

Говорят также, что эта мера является мерой с плотностью p по отношению к мере dx, и записывают ее через $p\,dx$ или $p(x)\,dx$ [1]. В силу обозначения dx, принятого для меры $\varphi \to \int\limits_{[a,\,b]} \varphi$, произвольная мера вместо μ обозначается через $d\mu$, а выражение $\mu(\varphi)$ называется *интегралом от функции* φ *по мере* μ *или* $d\mu$ и вместо $\mu(\varphi)$ часто обозначается через

$$\int\limits_X \varphi(x)\,d\mu(x), \quad \text{или} \quad \int\limits_X \varphi\,d\mu, \quad \text{или} \quad \int\limits_X \varphi\mu. \qquad (\text{IV}, 2; 13)$$

Естественным образом можно образовать меру как сумму двух мер, изученных в примерах 1 и 2, т. е. определить ее по формуле

$$\mu(\varphi) = \sum_\nu c_\nu \varphi(a_\nu) + \int\limits_{[a,\,b]} p(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (\text{IV}, 2; 14)$$

Говорят, что эта мера является суммой точечных масс c_ν, расположенных в точках a_ν интервала $[a, b]$, и рассеянной меры плотности p по отношению к мере dx. Ее обозначают через

$$\mu = \sum_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)} + p\,dx. \qquad (\text{IV}, 2; 15)$$

---

[1]) Обозначение $\int$ для меры $\varphi \to \int\limits_{[a,\,b]} \varphi(x)\,dx$ совершенно корректно. Обозначение dx *логически противоестественно*, ибо x фигурирует в интеграле как *переменная интегрирования*, которую можно обозначить или y, или t, или другим символом. Точно так же более корректно обозначать меру через $p(x)dx$, а не в виде $p\,dx$, подчеркивая этим двойным введением переменной x ее промежуточную роль. При этом $p(x)\,dx$ может быть заменена на $p(y)\,dy$ или $p(t)dt$. Эта некорректность аналогична той, которая отмечалась при употреблении выражения «функция x^2» вместо «функция $x \to x^2$» (см. стр. 11). Однако, как и в случае функций, часто допускают вольность речи. Если возникает сомнение, то говорят «мера $1(x)dx$» вместо «мера dx», поскольку здесь речь идет о мере $p(x)dx$, где $p(x) = 1$ для всех x, т. е. $p(x) \equiv 1$. Можно так же для dx, как и для $p\,dx$, писать полностью «мера $\varphi \to \int\limits_{[a,\,b]} \varphi(x)\,p(x)\,dx$».

Норма этой меры, очевидно, оценивается сверху числом

$$\sum_{\nu} |c_\nu| + \int_{[a,\,b]} |p(x)|\,dx. \qquad \text{(IV, 2; 16)}$$

Покажем, что если все a_ν различны, то *норма в точности равна этой величине.*

Зададим $\varepsilon > 0$ и определим конечное множество индексов J так, чтобы $\sum_{\nu \notin J} |c_\nu| \leqslant \varepsilon/6$. Поскольку p интегрируема по Риману, то можно найти такую ступенчатую на $[a, b]$ функцию q, для которой имеет место неравенство

$$\int_{[a,\,b]} |p(x) - q(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \qquad \text{(IV, 2; 16}_2\text{)}$$

Обозначим теперь через $d_0 = a,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n = b$ множество точек разбиения, соответствующего функции q, и точек a_ν, $\nu \in J$. Для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ можно теперь найти такой интервал $[d'_i, d''_{i+1}] \subset]d_i, d_{i+1}[$, при котором имело бы место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} |q_i|\,((d'_i - d_i) + (d_{i+1} - d''_{i+1})) \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \qquad (q_i = q \text{ в }]d_i,\ d_{i+1}[).$$

$$\text{(IV, 2; 16}_3\text{)}$$

Определим теперь функцию φ следующим образом. В каждом из интервалов $[d'_i, d''_{i+1}]$ будем считать ее равной постоянной $\bar{q}_i/|q_i|$. В каждой из точек d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, совпадающей с точкой a_ν, $\nu \in J$, положим ее равной числу $\bar{c}_\nu/|c_\nu|$. В интервалах, где она еще не определена, определим ее как аффинную функцию. Очевидно, *модуль* φ *всюду не превосходит* 1.

С другой стороны, имеют место неравенства

$$\left|\sum_{\nu} c_\nu \varphi(a_\nu) - \sum_{\nu} |c_\nu|\right| \leqslant \left|\sum_{\nu} c_\nu \varphi(a_\nu) - \sum_{\nu \in J} c_\nu \varphi(a_\nu)\right| +$$
$$+ \left|\sum_{\nu \in J} c_\nu \varphi(a_\nu) - \sum_{\nu \in J} |c_\nu|\right| + \left|\sum_{\nu \in J} |c_\nu| - \sum_{\nu} |c_\nu|\right|. \qquad \text{(IV, 2; 16}_4\text{)}$$

Второй член правой части равен нулю, поскольку $\varphi(a_\nu) = \dfrac{\bar{c}_\nu}{|c_\nu|}$ для $\nu \in J$. Первый и третий члены не превосходят $\varepsilon/6$. Поэтому

$$\left|\sum_{\nu} c_\nu \varphi(a_\nu) - \sum_{\nu} |c_\nu|\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV, 2; 16}_5\text{)}$$

Далее,

$$\left|\int_{[a,b]} p(x)\varphi(x)\,dx - \int_{[a,b]} |p(x)|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{[a,b]} p(x)\varphi(x)\,dx - \int_{[a,b]} q(x)\varphi(x)\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{[a,b]} q(x)\varphi(x)\,dx - \int_{[a,b]} |q(x)|\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{[a,b]} |q(x)|\,dx - \int_{[a,b]} |p(x)|\,dx\right|. \qquad (\text{IV}, 2; 16_6)$$

Согласно (IV, 2; 16_2), первый и третий члены правой части не превосходят $\varepsilon/6$. Поскольку в интервале $[d_i', d_{i+1}'']$ функция φ равна $q_i/|q_i|$, то, в силу (IV, 2; 16_3), второй член не больше $2\varepsilon/6 = \varepsilon/3$. Поэтому

$$\left|\int_{[a,b]} p(x)\varphi(x)\,dx - \int_{[a,b]} |p(x)|\,dx\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (\text{IV}, 2; 16_7)$$

Добавляя сюда (IV, 2; 16_5) и учитывая (III, 2; 14), для построенной функции φ получаем неравенство

$$\left|\mu(\varphi) - \left(\int_{[a,b]} |p(x)|\,dx + \sum_{\nu} |c_\nu|\right)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad (\text{IV}, 2; 16_8)$$

доказывающее наше утверждение, а именно то, что $\|\mu\|$ равна (IV, 2; 16).

Важно подчеркнуть, что *мера с плотностью p не изменяется, если функция p меняется в конечном числе точек.*

Плотность определяет меру, но различные плотности могут дать одну и ту же меру.

3-*й пример.* Хотя мы еще не знакомились с кратными интегралами, мы можем, однако, заметить, что если X является замкнутым параллелепипедом в $\mathbb{R}^n$, т. е. множеством, определенным неравенствами $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то на X можно определить меру $dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$ по формуле

$$\varphi \to \int\int_{\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]} \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n. \qquad (\text{IV}, 2; 17)$$

Норма этой меры равна объему параллелепипеда X, т. е. $\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Меры на локально компактном пространстве

Множество $X=\mathbb{R}$ не компактно. Тем не менее линейные формы $\varphi\to\varphi(a)$ и $\varphi\to\int\varphi(x)dx$ продолжают сохранять смысл по крайней мере в том случае, когда на φ налагают некоторые ограничения, например условие, заключающееся в том, что φ имеет компактный носитель. Поэтому имеет смысл дать следующее определение.

Пусть X — локально компактное топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{C}(X)$ векторное пространство непрерывных скалярнозначных функций φ, определенных на X и имеющих компактный носитель[1]) (этот носитель, естественно, не уточняется; каждая из функций φ этого пространства имеет компактный носитель K, но K зависит от φ). Заметим, впрочем, что *ни в коем случае не следует смешивать функцию φ, определенную и непрерывную на всем X и имеющую компактный носитель, с функцией, определенной и непрерывной на некотором компакте из X.*

Например, функция, изображенная на рис. 13, определена и непрерывна на интервале $[a, b]$. Эта функция не является функцией, определенной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и имеющей $[a, b]$ в качестве носителя. Если ее продолжить на $\mathbb{R}$, положив вне $[a, b]$ равной нулю, то она не будет непрерывной на $\mathbb{R}$, поскольку точки a и b являются ее точками разрыва.

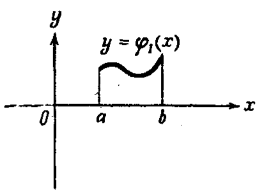

Рис. 13.

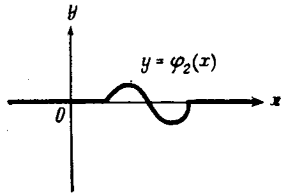

Рис. 14.

Напротив, функция, изображенная на рис. 14, определена на $\mathbb{R}$, непрерывна, имеет компактный носитель, а, следовательно, принадлежит пространству $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Если K является компактом X, то через $\mathscr{C}_K(X)$ будем обозначать векторное подпространство пространства $\mathscr{C}(X)$, образованное функциями φ, носители которых лежат в компакте K. Функция φ из $\mathscr{C}(X)$ принадлежит $\mathscr{C}_K(X)$ тогда и только тогда, когда она равна нулю на $\complement K$. Отсюда следует, что она равна

---

[1]) $\mathscr{C}(X)$ является подпространством $(\mathbb{K}^X)_{cb}$; см. примечание на стр. 439.

нулю не только на $\complement K$, но также и на границе компакта K, поскольку каждая точка этой границы является пределом точек множества $\complement K$, а функция φ непрерывна. Не следует смешивать $\mathscr{C}_K(X)$ и $\mathscr{C}(K)$. Функция φ_1 (см. рис. 13) принадлежит $\mathscr{C}([a, b])$. Функция φ_2 (см. рис. 14) принадлежит пространству $\mathscr{C}_{[a, b]}(\mathbb{R})$.

Пространство $\mathscr{C}(X)$ является объединением векторных пространств $\mathscr{C}_K(X)$, когда множество K пробегает все компактные подпространства X.

Если в пространстве $\mathscr{C}_K(X)$ ввести норму $|||\varphi||| = \sup\limits_{x \in X} |\varphi(x)|$, то оно станет банаховым пространством. В самом деле, $(\mathbb{K}^X)_{cb}$ является в этой норме банаховым пространством (следствие 3 теоремы 65 гл. II), а $\mathscr{C}_K(X)$ является в нем замкнутым векторным подпространством. (В самом деле, если при n, стремящемся к бесконечности, последовательность $\varphi_n \in \mathscr{C}_K(X)$ сходится к φ в $(\mathbb{K}^X)_{cb}$, т. е. сходится равномерно и тем более просто, то в силу равенства $\varphi_n(x) = 0$ для $x \in \complement K$ получим также $\varphi(x) = 0$, откуда $\varphi \in \mathscr{C}_K(X)$.) Из теоремы 43 гл. II теперь следует, что $\mathscr{C}_K(X)$ является банаховым пространством. Естественно, такую же норму можно ввести и на пространстве $\mathscr{C}(X)$. Однако можно показать, что тогда оно не будет банаховым. Во всяком случае *это не та норма, которая нас будет интересовать в дальнейшем.*

Определение. *Мерой Радона на локально компактном пространстве X* называется линейная форма μ, определенная на векторном пространстве $\mathscr{C}(X)$, сужение которой на каждое подпространство $\mathscr{C}_K(X)$, где K является компактом X, непрерывно.

Выясним точный смысл этого определения.

Мера μ определяет некоторое отображение, которое каждой функции φ, принадлежащей пространству $\mathscr{C}(X)$, т. е. каждой скалярной непрерывной функции φ, определенной на X, имеющей компактный носитель, ставит в соответствие скаляр $\mu(\varphi)$. Это соответствие должно быть линейным в смысле (IV, 2; 1). Однако мы не говорим, что это соответствие непрерывно на $\mathscr{C}(X)$, поскольку в этом векторном пространстве мы не вводим ни топологию, ни норму. Мы можем сказать только, что сужение этого отображения на $\mathscr{C}_K(X)$ должно быть непрерывным. Теперь, каким бы ни был компакт K из X и какова бы ни была последовательность непрерывных функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ с носителями в K, равномерно сходящаяся к 0 при n, стремящемся к $+\infty$, последовательность комплексных чисел $\mu(\varphi_n)$ сходится к нулю. Мы получаем, что каждому компакту K из X можно поставить в соответствие норму меры относительно K, а именно такую норму, при которой имеет место формула

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \|\mu\|_K \, |||\varphi||| \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathscr{C}_K(X), \qquad \text{(IV, 2; 18)}$$

где $\|\mu\|_K = \sup\limits_{\substack{\varphi \in C_K(X) \\ |||\varphi||| \leqslant 1}} |\mu(\varphi)|$.

Примеры мер Радона

Пример 1. Мера $\delta_{(a)}$, определенная по формуле (IV, 2; 5), также является некоторой мерой Радона на X. Аналогично, сумма $\sum\limits_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)}$ будет некоторой мерой Радона при условии, что ряд $\sum\limits_{\nu} |c_\nu|$ является «локально сходящимся», т. е. частичная сумма $\sum\limits_{a_\nu \in K} |c_\nu|$ сходится для любого компакта K из X. Формула (IV, 2; 6) в этом случае определяет линейную форму на $\mathscr{C}(X)$. С другой стороны, для каждого компакта K для любой $\varphi \in \mathscr{C}_K(X)$ имеет место неравенство $\left|\sum\limits_{\nu} c_\nu \varphi(a_\nu)\right| \leqslant \left(\sum\limits_{a_\nu \in K} |c_\nu|\right) |||\varphi|||$, из которого вытекает непрерывность рассматриваемого отображения. Отсюда следует также, что $\|\mu\|_K \leqslant \sum\limits_{a_\nu \in K} |c_\nu|$.

Однако можно получить более точное утверждение об этой норме. В самом деле, в каждой точке a_ν границы $\dot{K}$ множества K функция φ из $\mathscr{C}_K(X)$ необходимо равна нулю (каждая окрестность этой граничной точки содержит точки дополнения к K, где функция φ равна нулю и, кроме того, φ непрерывна (см. по этому поводу стр. 447). Поэтому при оценке суммы $\sum c_\nu (a_\nu)$ точки a_ν границы $\dot{K}$ можно не учитывать, так что имеет место неравенство $\|\mu\|_K \leqslant \sum\limits_{a_\nu \in \mathring{K}} |c_\nu|$, где $\mathring{K}$ — внутренность K. Теперь, пользуясь методом, примененным на стр. 443, нетрудно доказать, что $\|\mu\|_K$ в точности равна $\sum\limits_{a_\nu \in \mathring{K}} |c_\nu|$.

Пример 2. Мера $\int$ или dx на $\mathbb{R}$, как и в случае компактного интервала $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, определяется точно так же с помощью отображения $\varphi \to \int \varphi$. Ее называют *канонической мерой прямой* $\mathbb{R}$ или *мерой Лебега на* $\mathbb{R}$. Для каждого интервала $[a, b]$ ее норма $\|\mu\|_{[a,\, b]}$ равна $b - a$.

Если ρ является функцией, определенной на $\mathbb{R}$, комплексно-значной и локально интегрируемой по Риману, т. е. интегрируемой на каждом ограниченном интервале, то она определяет меру Радона μ по формуле (IV, 2; 12); мы обозначаем ее через

$p\,dx$ или $p(x)\,dx$ и называем p *плотностью по отношению к мере Лебега.*

Норма относительно компактного интервала $[a, b]$ равна при этом $\|\mu\|_{[a,\,b]} = \int\limits_{[a,\,b]} |p(x)|\,dx$. Заметим, что это утверждение не вытекает непосредственно из утверждения, полученного из формулы (IV, 2; 16). В самом деле, функция φ из $\mathscr{C}_{[a,\,b]}(\mathbb{R})$ в противоположность функциям из $\mathscr{C}([a, b])$ (см. стр. 447) равна нулю в точках a и b.

Если же выбрать a', b', $a < a' < b' < b$, так, чтобы $\int\limits_{[a,\,a']} |p(x)|\,dx + \int\limits_{[b',\,b]} |p(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, и если непрерывная на интервале $[a', b']$ функция φ определена так, что

$$\left| \int\limits_{[a',\,b']} p(x)\,\varphi(x)\,dx - \int\limits_{[a',\,b']} |p(x)|\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

согласно тому, как это было сделано на стр. 444, то можно продолжить функцию φ на интервал $[a, b]$ таким образом, чтобы она была аффинной в интервалах $[a, a']$, $[b, b']$ и принимала нулевое значение в точках a и b. Представляя теперь интервал интегрирования $[a, b]$ в виде объединения трех интервалов $[a, a']$, $[a', b']$, $[b', b]$, получаем следующее неравенство:

$$\left| \int\limits_{[a,\,b]} p(x)\,\varphi(x)\,dx - \int\limits_{[a,\,b]} |p(x)|\,dx \right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

доказывающее предыдущее утверждение. (Затем можно, естественно, ввести меры вида $\sum\limits_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)} + p\,dx$.)

В силу того что функции φ имеют компактные носители, мы смогли ввести меры предыдущего типа, где функция p может возрастать на бесконечности с произвольной скоростью. Например, p может быть функцией e^{x^2} или функцией $e^{e^{x^2}}$, и она вполне определит меру Радона $p\,dx$.

Нормой меры μ называется точная верхняя грань чисел $\|\mu\|_K$ по всем компактам K из X. Эта норма, обозначаемая через $\|\mu\|$, неотрицательна, конечна или равна $+\infty$ (и, следовательно, несмотря на свое название, не является нормой). Очевидно, ее можно определить по формуле

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{C}(X) \\ |||\varphi||| \leqslant 1}} |\mu(\varphi)|. \tag{IV, 2; 19}$$

Хотя пространство мер невозможно рассматривать как сопряженное к пространству $\mathscr{C}(X)$, его, однако, обозначают через $\mathscr{C}'(X)$. Это множество является, естественно, векторным пространством с тем же самым определением суммы и умножения на скаляр, что и в том случае, когда X компактно. Однако оно не нормировано. Напротив, подпространство пространства $\mathscr{C}'(X)$, образованное из таких μ, для которых $\|\mu\|$ конечна, является векторным нормированным пространством. Легко видеть, что это пространство является банаховым.

Применения к механике и физике

В механике часто приходится рассматривать распределение масс в пространстве. В свою очередь в физике сталкиваются с распределением электрических зарядов. Меры Радона над аффинным евклидовым трехмерным пространством E дают хорошие модели для этих распределений масс и распределений зарядов. То, что в механике называется точечной массой m, помещенной в точке a, или в физике — электрическим зарядом e, расположенным в точке a, является не чем иным, как мерой Радона $m\delta_{(a)}$ или $e\delta_{(a)}$.

Если в физике рассматривается распределение масс или зарядов, определенных с помощью плотности $p(x)$, то это означает, что рассматривается мера Радона $p(x)dx$, где dx является мерой трехмерного объема в E. В случае прямоугольной системы координат это будет мера $p(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

В механике и физике часто рассматривается распределение масс или зарядов, расположенных на замкнутой поверхности Σ, принадлежащей классу C^1, в трехмерном евклидовом пространстве с «поверхностной плотностью» $p(x)$. Эта величина является мерой Радона, определенной равенством

$$\mu(\varphi) = \int_{\Sigma} \varphi(x)\, p(x)\, dS\ ^{1)}. \tag{IV, 2; 20}$$

Ее удобнее будет обозначать через pdS. Точно так же распределение зарядов или масс, расположенных на замкнутой кривой L класса C^1, линейной плотности p относительно дуги ds определяется по формуле

$$\mu(\varphi) = \int_{L} \varphi(x)\, p(x)\, ds \tag{IV, 2; 21}$$

и может быть обозначено через pds.

Векторные меры

Рассмотренные выше меры были скалярными.

Пусть теперь $\vec{E}$ — векторное нормированное пространство. *Мерой $\vec{\mu}$ на X со значениями в $\vec{E}$* будем называть линейное ото-

---

1) Такие «поверхностные интегралы» будут определены позже в § 10.

бражение $\mathscr{C}(X)$ в $\vec{E}$, сужение которого на каждое подпространство $\mathscr{C}_K(X)$, где K является компактом X, непрерывно. Таким образом, здесь для $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ величина $\vec{\mu}(\varphi)$ или $\vec{\mu}\cdot\varphi$ является элементом $\vec{E}$. Как прежде, определяются нормы $\|\vec{\mu}\|_K$ и $\|\vec{\mu}\|$. В качестве примера мер при полном $\vec{E}$ можно взять $\vec{\mu} = \sum_\nu \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}$, где $\vec{c}_\nu \in \vec{E}$, или $\overrightarrow{d\mu} = \vec{p}(x)\,dx$, где $\vec{p}$ является функцией, определенной на $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{E}$ и локально интегрируемой по Риману. При этом $\sum_\nu \vec{c}_\nu \varphi(a_\nu) \in \vec{E}$ (предполагая, как ранее, что на любом компакте K множества X $\sum_{a_\nu \in K} \|\vec{c}_\nu\| < \infty$, получим, согласно теореме 55 гл. II, что ряд $\sum_\nu \vec{c}_\nu \varphi(a_\nu)$ сходится) и $\int \vec{p}(x)\varphi(x)\,dx \in \vec{E}$. Для норм имеют место неравенства

$$\left\| \sum_\nu \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} \right\|_K \leqslant \sum_{a_\nu \in K} \|\vec{c}_\nu\| \quad \text{и} \quad \|\vec{p}\,dx\|_{[a,b]} \leqslant \int_{[a,b]} \|\vec{p}(x)\|\,dx\,^{1)}.$$

[1]) Мы всегда писали $\mathscr{C}(X)$ без уточнения поля скаляров. Пусть $\vec{E}$ — векторное нормированное пространство над комплексным полем. Тогда $\mathbb{C}$-мера $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E}$ для поля скаляров $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ является отображением пространства $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})$ *комплексных* непрерывных функций φ с компактным носителем в пространство $\vec{E}$, линейным относительно $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}$-мера $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E}$ для поля скаляров $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ является отображением пространства $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ *вещественных* непрерывных функций φ с компактным носителем в E, линейным относительно $\mathbb{R}$. Мера $\vec{\mu}$ для поля $\mathbb{C}$ определяет меру $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ для поля $\mathbb{R}$. Мера $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ является лишь сужением на $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ функции $\vec{\mu}$: $\mathscr{C}(X; \mathbb{C}) \to \vec{E}$.

Так, например, если $\vec{E} = \mathbb{C}$, то μ является скалярной мерой, однако $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ является уже векторной мерой со значениями в векторном пространстве $\mathbb{C}$ размерности 2 над $\mathbb{R}$.

Пространство скалярных $\mathbb{K}$-мер (или $\mathbb{K}$ — сопряженное пространство к $\mathscr{C}(X; \mathbb{K})$) обозначается через $\mathscr{C}'(X; \mathbb{K})$.

Рассмотрим теперь при тех же условиях векторное нормированное пространство $\vec{E}$ над полем $\mathbb{C}$, и пусть $\vec{\nu}$ является некоторой мерой относительно $\mathbb{R}$, т. е. является некоторым $\mathbb{R}$-линейным отображением пространства $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ в $\vec{E}$. Тогда возможно единственным образом продолжить ее на некоторую меру $\vec{\nu}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathbb{C}$, полагая $\vec{\nu}_{\mathbb{C}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \vec{\nu}(\varphi_1) + i\vec{\nu}(\varphi_2)$. При этом $(\vec{\nu}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \vec{\nu}$ и $(\vec{\mu}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \vec{\mu}$.

Заметим, что *нормы* $\vec{\mu}$ *и* $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ (*или* $\vec{\nu}$ *и* $\vec{\nu}_{\mathbb{C}}$) *могут быть различными*. Рассмотрим, например, скалярную меру $\mu = \delta_{(a)} + i\,\delta_{(b)}$. Ее норма относительно

Разложение единицы

Приведем одну теорему относительно вещественных непрерывных функций на локально компактном пространстве X, которой мы будем пользоваться в теории мер.

Теорема 11. *Пусть X — локально компактное пространство, «счетное в бесконечности», т. е. являющееся объединением счетного множества компактов. Пусть, кроме того, $(\Omega_i)_{i \in I}$ — покрытие (конечное или нет) пространства X открытыми множествами. Тогда существует система вещественных непрерывных функций α_i, зависящих от того же множества индексов I, такая, что $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, α_i имеет носитель в Ω_i, каждая точка X имеет окрестность, в которой лишь конечное число функций α_i не равно тождественно нулю, сумма $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ тождественно равна 1 на X. Если X является многообразием класса C^m (m конечно или $= +\infty$) над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, то функции α_i можно брать из класса C^m*[1]).

Замечания. 1°) По-видимому, вместе с образованием суммы $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ возникает задача обоснования ее сходимости, тем более досадная, что I может не быть счетным. Однако в условии указывается, что в каждой точке $x \in X$ и даже во всех точках окрестности x эта сумма конечна, поскольку все ее члены, кроме конечного числа их, равны нулю.

При локально компактном X мы приходим к тому, что на каждом компакте из X все α_i, кроме конечного числа их, равны тождественно нулю. В этом случае говорят, что *система α_i локально конечна.*

2°) Хорошо видно, почему функции α_i определяют разложение единицы: имеет место разложение 1 в сумму функций α_i с носителями в заданных открытых множествах Ω_i.

Если $\overline{\Omega}_i$ компактны, то α_i имеют компактные носители и, следовательно, принадлежат $\mathscr{C}(X)$. Говорят, что разложение единицы $(\alpha_i)_{i \in I}$ *подчинено* покрытию $(\Omega_i)_{i \in I}$.

скалярного поля $\mathbb{C}$ равна $\sup|\varphi(a) + i\varphi(b)|$, где sup берется по всем комплексным функциям φ, не превосходящим по модулю 1. Величина эта равна 2. Норма этой же меры в поле скаляров $\mathbb{R}$ вычисляется как тот же sup, взятый по *вещественным* функциям φ, не превосходящим по модулю 1, и равна $\sqrt{2}$. Почти всегда берут $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

[1]) Это улучшение (переход в класс C^m) в интегральном исчислении не играет никакой роли. Однако оно нам понадобится в теории распределений. *Существенным* здесь является то, что рассматривается многообразие C^m *по отношению к полю вещественных чисел.* Утверждение неверно в случае поля комплексных чисел. Далее мы увидим, что при доказательстве леммы 1 будет применяться поле вещественных чисел.

3°) Если X локально компактно, но не является счетным в бесконечности, то результат не верен. Однако имеет место более слабое утверждение, достаточное для некоторых приложений, которое мы здесь приводить не будем (оно основывается на леммах 1 и 2, верных для произвольного локально компактного пространства X).

Нормированное векторное конечномерное пространство локально компактно и счетно в бесконечности, поскольку оно является объединением шаров $\| x \| \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$.

4°) Пространство X, для которого справедлива теорема о разложении единицы, называется *паракомпактным* пространством. Локально компактное, счетное в бесконечности пространство паракомпактно. Можно показать, что метризуемое пространство паракомпактно.

Для доказательства мы предварительно рассмотрим три леммы.

Лемма 1. *Пусть Ω — открытое множество локально компактного пространства X и a — точка Ω. Тогда существует непрерывная функция γ, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, с компактным носителем в Ω, такая, что $\gamma(a) > 0$. Если X является многообразием класса C^m, то γ можно брать в классе C^m.*

Естественно, что лемма тем интереснее, чем меньше окрестность Ω точки a.

1°) Пусть X — произвольное локально компактное пространство. Теорема верна в общем случае, но мы ее докажем только для того случая, когда локально компактное пространство X метризуемо. Итак, предположим, что в нем введена некоторая метрика. Поскольку Ω является открытым множеством, содержащим a, а X — локально компактно, то найдется компактный шар $B(a, \eta)$ с центром в точке a и радиуса $\eta > 0$, содержащийся в Ω[1]. Обозначим теперь через F вещественную функцию, непрерывную на полупрямой $\mathbb{R}_+$ (вещественные числа $\geqslant 0$), удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant F \leqslant 1$ и такую, что $F(0) > 0$ и $F(t) = 0$ для $t \geqslant \eta$. Можно будет, например, взять функцию, определенную по формуле

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t > \eta, \\ \eta - t & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta. \end{cases} \qquad \text{(IV, 2; 22)}$$

Функция $x \to F(d(a, x))$ обладает требуемыми свойствами. Она непрерывна как суперпозиция двух непрерывных функций.

[1]) В самом деле, a имеет компактную окрестность V. Так как $\Omega \cap V$ является окрестностью точки a, то существует такое $\eta > 0$, что замкнутый шар $B(a, \eta)$ лежит в $\Omega \cap V$. Этот шар лежит в Ω и, будучи замкнутым в компакте V, компактен.

Поскольку $d(a, a) = 0$ и $F(0) = \eta$, то при $x = a$ она принимает значение η. Она равна нулю вне шара $B(a, \eta)$, поскольку вне этого шара $d(a, x) > \eta$, и $F(t) = 0$ при $t \geqslant \eta$. Отсюда следует, что ее носитель содержится в этом шаре, являющемся компактом в Ω. Понятно, почему метризуемость пространства является *существенным упрощением* задачи. В самом деле, метрика определяет бесконечное множество вещественных непрерывных функций в метрическом пространстве, а именно, функции $x \to d(a, x)$. Напротив, если мы знаем только, что X является топологическим пространством, то, кроме постоянных функций, мы не знаем a priori других вещественных непрерывных функций на X.

2°) Предположим теперь, что X является многообразием V размерности n над полем вещественных чисел класса C^m (возможно, $m = +\infty$)[1]). Пусть Φ является некоторой картой V с образом, содержащим точку a. Карта Φ является гомеоморфизмом класса C^m некоторого открытого множества $\mathcal{O}_1$ из $\mathbb{R}^n$ на $\Phi(\mathcal{O}_1) \subset V$. Пусть $\Omega_1 = \Phi^{-1}(\Omega)$ и $a_1 = \Phi^{-1}(a)$.

Предположим, что лемма доказана в $\mathbb{R}^n$ для функции класса C^m. Другими словами, предположим, что найдена некоторая функция γ_1 класса C^m на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем K_1, содержащимся в Ω_1, удовлетворяющая неравенству $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 1$ и такая, что $\gamma_1(a_1) > 0$. Тогда лемма будет доказанной также и в V. В самом деле, определим γ на V следующим образом: $\gamma = \gamma_1 \circ \Phi^{-1}$ в множестве $\Phi(\Omega_1) \subset \Omega$ и $\gamma = 0$ вне его.

Функция Φ^{-1} является обратной биекцией для Φ, т. е. отображением множества $\Phi(\mathcal{O}_1)$ на $\mathcal{O}_1$. Функция γ принадлежит классу C^m. Действительно, пусть $b \in V$. Если $b \in \Phi(\Omega_1)$, то γ равна $\gamma_1 \circ \Phi^{-1}$, и поскольку Φ является картой класса C^m, а γ_1 — функцией класса C^m на $\mathcal{O}_1$, то γ принадлежит классу C^m в окрестности точки b (теорема 33_3 гл. III). Если $b \notin \Phi(\Omega_1)$, то b лежит в открытом множестве $\complement_V \Phi(K_1)$ многообразия V, дополнительном к компакту $\Phi(K_1)$. Функция γ равна нулю в этом множестве и, следовательно, принадлежит классу C^m в окрестности точки b. Мы только что видели, что γ равна нулю в дополнении к компакту $\Phi(K_1)$, а, следовательно, ее носитель лежит в компакте $\Phi(K_1) \subset \Phi(\Omega_1) \subset \Omega$. Эта функция удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $\gamma(a) = \gamma_1(a_1) > 0$.

Остается решить задачу для функции γ_1, принадлежащей классу C^m на $\mathbb{R}^n$. Поскольку число m может быть произвольным, то мы должны найти функцию γ_1 класса C^∞. Введем в $\mathbb{R}^n$ обычную евклидову метрику. Тогда функция $x_1 \to r = d(a_1, x_1)$ не-

---

[1]) Поскольку каждая точка многообразия имеет окрестность, гомеоморфную некоторому открытому множеству из $\mathbb{R}^n$, то существует также меньшая компактная окрестность. *Многообразие является локально компактным пространством.*

прерывна, но не дифференцируема в точке a_1, однако ее квадрат r^2, являясь полиномом 2-й степени относительно своих координат, принадлежит классу C^∞.

Пусть $\eta_1 > 0$ — такое число, что компактный шар $B(a_1, \eta_1)$ лежит в множестве Ω_1. Если вместо F рассмотреть вещественную функцию G, определенную на $\mathbb{R}_+$ по формуле

$$G(s) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad s \geqslant \eta_1^2, \\ e^{-\frac{1}{\eta_1^2 - s}} & \text{для} \quad s < \eta_1^2, \end{cases} \tag{IV, 2; 23}$$

то получим, что она удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant G \leqslant 1$, что $G(0) > 0$, что $G(s)$ равна нулю для $s \geqslant \eta_1^2$ и что G непрерывна (ибо, когда $s \to \eta_1^2$, $s < \eta_1^2$, $\lim e^{-1/(\eta_1^2 - s)} = e^{-\infty} = 0$). Более того, *$G$ принадлежит классу C^∞*. В самом деле, последовательным дифференцированием можно убедиться, что для $s < \eta_1^2$ производные G имеют вид

$$G^{(k)}(s) = P_k\left(\frac{1}{\eta_1^2 - s}\right) e^{-\frac{1}{\eta_1^2 - s}}, \tag{IV, 2; 24}$$

где P_k — полином от одной переменной. При s, стремящемся к η_1^2 по значениям $< \eta_1^2$, функция $G^{(k)}(s)$ стремится к нулю (поскольку показательная функция растет быстрее любого полинома). Для $s > \eta_1^2$ имеем $G^{(k)}(s) \equiv 0$. Следовательно, $G^{(k)}(s)$ стремится к 0 при s, стремящемся к η_1^2 по произвольным значениям $\neq \eta_1^2$. Теорема 14 гл. III, примененная шаг за шагом к последовательным производным, дает, что G бесконечно дифференцируема, а все ее производные при $s = \eta_1^2$ равны нулю. Вот график этой функции G:

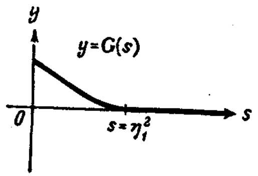

Рис. 15

(Разложение Тейлора порядка m для функции G в окрестности точки $s = \eta_1^2$ сводится к остаточному члену. Ряд Тейлора функции G по степеням $s - \eta_1^2$ сходится, поскольку все его члены равны нулю, но он не представляет функцию для $s < \eta_1^2$.)

Функция $\gamma_1(x_1) = G((d(a_1, x_1))^2) = G(r^2)$ принадлежит классу C^∞ как композиция двух функций G и r^2 класса C^∞ и $\gamma_1(a_1) = G(0) > 0$.

Так как $0 \leqslant G \leqslant 1$, то $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Наконец, для $d(a_1, x_1) \geqslant \eta_1$ функция γ_1 равна нулю, поскольку $G(s)$ равна нулю для $s \geqslant \eta_1^2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть X — локально компактное пространство и $(\Omega_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие X. Пусть K — некоторый компакт пространства X. Тогда существует система непрерывных функций $\beta_i \geqslant 0$, зависящих от того же множества индексов I, равных нулю, кроме конечного их числа, имеющих компактные носители, содержащиеся в Ω_i, и таких, что сумма $\sum\limits_{i \in I} \beta_i$ положительна на K. Если X является многообразием класса C^m, то функции β_i можно выбирать из класса C^m.*

Пусть ξ — некоторая точка K. Точка ξ может принадлежать нескольким открытым множествам Ω_i. Выберем произвольно одно из них и обозначим через $i(\xi)$ соответствующий ему индекс, такой, чтобы $\xi \in \Omega_{i(\xi)}$. Пусть теперь γ_ξ: $x \to \gamma_\xi(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 1 относительно открытого множества $\Omega_{i(\xi)}$ и точки ξ этого множества. Обозначим через ω_ξ множество точек x, в которых $\gamma_\xi(x) > 0$. При ξ, пробегающем K, множества ω_ξ образуют некоторое открытое покрытие K. В самом деле, они являются открытыми множествами и $\xi \in \omega_\xi$. Последнее означает, что эти открытые множества полностью покрывают K. Поскольку K является компактом, для него существует конечное подпокрытие. Иначе говоря, существует конечное число точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$, таких, что ω_{ξ_ν} при $\nu = 1, 2, \ldots, l$ образуют открытое покрытие K. Обозначим теперь через β_i функцию $\sum\limits_{i(\xi_\nu)=i} \gamma_{\xi_\nu}$. Функция β_i непрерывна и $\geqslant 0$. Если X является многообразием класса C^m, то эта функция принадлежит классу C^m. Ее носитель содержится в объединении носителей функций γ_{ξ_ν}, $i(\xi_\nu) = i$, т. е. является компактом и содержится в Ω_i. Для каждой точки $x \in K$ существует хотя бы одна из точек ξ_ν, такая, что $x \in \omega_{\xi_\nu}$, ибо ω_{ξ_ν} образуют покрытие K. Соответствующая функция γ_{ξ_ν} в точке x положительна. Следовательно, соответствующая функция β_i $(i = i(\xi_\nu))$ положительна в точке x. Отсюда вытекает, что функция $\sum\limits_{i \in I} \beta_i$ положительна на K, чем и завершается доказательство леммы[1]).

[1]) Носитель функции $\sum\limits_{i \in I} \beta_i = \beta$, содержащийся в объединении носителей функций β_i, является некоторым компактом H, содержащим открытое

Лемма 3. *Пусть X — локально компактное, счетное в бесконечности пространство. Тогда существует последовательность компактов K_n и открытых множеств U_n с компактными замыканиями, таких, что $K_n \subset U_n$, K_n образуют покрытие X и любой компакт пересекается лишь с конечным числом $\overline{U}_n$.*

Так как X счетно в бесконечности, существует последовательность компактов A_n, объединение которых дает X. Каждый из A_n имеет компактную окрестность B_n (см. примечание[1])). Внутренности $B_n \supset A_n$ в объединении дают X. Положим $C_n = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. Множества C_n образуют возрастающую последовательность компактов, и множества $\mathring{C}_n \supset A_n$ в объединении дают X. Кроме того, для каждого компакта из X существует такое целое число n, что $\mathring{C}_n \supset K$. В самом деле, последовательность $\mathring{C}_n \cap K$ является возрастающей последовательностью открытых множеств на компакте K, объединение которых равно K. Следовательно, одно из них совпадает с K.

Положим затем $D_n = C_n - \mathring{C}_{n-1} = C_n \cap \complement \mathring{C}_{n-1}$. Множество D_n замкнуто (как пересечение двух замкнутых множеств), содержится в компакте C_n и, следовательно, компактно. Объединение D_n снова дает X. Действительно, если $x \in X$ и если n является таким *первым числом*, при котором $x \in C_n$ и $x \notin C_{n-1}$, то $x \notin \mathring{C}_{n-1}$ и, следовательно, $x \in D_n$.

Пусть теперь $p(n)$ — наименьшее целое число p, такое, что $\mathring{C}_p \supset C_n$. Пусть $q(n)$ — наибольшее целое число q, такое, что $C_q \subset \mathring{C}_{n-1}$. Положим $E_n = C_{p(n)} - \mathring{C}_{q(n)}$. Множество E_n компактно по той же причине, что и рассмотренное выше множество D_n; E_n является окрестностью D_n. В самом деле, если $x \in D_n$, то $x \in C_n$, а, следовательно, $x \in \mathring{C}_{p(n)}$. Далее, так как $x \notin \mathring{C}_{n-1}$, то $x \notin C_{q(n)}$, а значит, $x \in \mathring{C}_{p(n)} - C_{q(n)}$. Поэтому $\mathring{C}_{p(n)} - C_{q(n)} =$

множество U точек, в которых $\beta > 0$, и содержащим само K. Отсюда следует, что *H является компактной окрестностью K*. Можно доказать непосредственно следующее свойство: в локально компактном пространстве *X любой компакт K имеет компактную окрестность* H и даже фундаментальную систему компактных окрестностей.

В самом деле, пусть U — некоторая окрестность K. Поскольку каждая точка $x \in K$ имеет фундаментальную систему компактных окрестностей в X (стр. 75), то существует некоторое открытое множество Ω_x в X, содержащее x, с компактным замыканием $\overline{\Omega}_x$ в U. Множества Ω_x образуют некоторое открытое покрытие компакта K. Из него можно выбрать конечное подпокрытие $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Множество $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \ldots \cup \overline{\Omega}_n$ является компактной окрестностью K, содержащейся в U.

$= \mathring{C}_{p(n)} \cap \complement C_{q(n)}$ является открытым множеством, содержащим D_n и, конечно, содержащимся в E_n. Наконец, последовательность E_n локально конечна. В самом деле, пусть K — некоторый компакт. Тогда существует такое q, что $C_q \supset K$ (и даже $\mathring{C}_q \supset K$). Затем существует такое n, что $\mathring{C}_{n-1} \supset C_q$. Тогда $q(n) \geqslant q$, а, значит, для $m \geqslant n$ имеем: $q(m) \geqslant q$ и $\mathring{C}_{q(m)} \supset \supset C_q \supset K$. Отсюда вытекает, что E_m с K не пересекаются.

Очевидно, $K_n = D_n$ и $U_n = \mathring{E}_n$ удовлетворяют условиям леммы 3 [1]).

Докажем теперь теорему 11, используя множества K_n и U_n. Для каждого n рассмотрим покрытие компакта K_n из X открытыми множествами $\Omega_i \cap U_n$. К нему можно применить лемму 2 и найти непрерывные функции $\beta_{i,n} \geqslant 0$ класса C^m (если только X является многообразием класса C^m), равные нулю, кроме конечного их числа, и такие, что $\beta_{i,n}$ имеют носители в $\Omega_i \cap U_n$ (компактные, поскольку $\overline{U}_n$ компактно), а сумма $\sum\limits_{i \in I} \beta_{i,n}$ положительна на K_n.

Обозначим теперь через β_i функцию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_{i,n}$. Хотя эта сумма и бесконечна, она локально конечна. В самом деле, если K является некоторым компактом X, то существует лишь конечное число n, при котором K пересекается с U_n. Для каждого из таких n имеется только конечное число отличных от нуля функций $\beta_{i,n}$. Для всех других n функции $\beta_{i,n}$ с носителем в U_n равны нулю на K. Отсюда следует, что функция β_i непрерывна на X, а в случае, когда X является многообразием класса C^m, функция β_i принадлежит классу C^m. Действительно, свойство непрерывности и дифференцируемости в точке множества X может быть доказано, если вести рассмотрения только в некоторой окрестности этой точки, которая может быть выбрана компактной. Тогда сумма, определяющая β_i, конечна в этой окрестности. Носитель функции β_i содержится в замыкании объединения носителей функций $\beta_{i,n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Это объединение локально конечно, т. е. лишь конечное число носителей пересекается с любым компактом пространства X. Отсюда непосредственно вытекает, что объединение этих носителей замкнуто и что

---

[1]) Это построение лучше понять на примере векторного нормированного пространства X. Возьмем в качестве A_n шар $\|x\| \leqslant n$. В качестве B_n можно будет взять шар $\|x\| \leqslant n+1$, а вместо C_n взять B_n. Множество $D_n = K_n$ будет представлять собой шаровой слой $n \leqslant \|x\| \leqslant n+1$; для любого n $p(n) = n+1$ и $q(n) = n-2$. Множество E_n теперь будет шаровым слоем, а U_n является открытым множеством $n-1 < \|x\| < n+1$. Все построение в этом случае становится очевидным.

оно является носителем β_i [1]). Этот носитель, следовательно, содержится в Ω_i.

Положим теперь $\beta = \sum_{i \in I} \beta_i = \sum_{i,n} \beta_{i,n}$. То же самое рассуждение показывает, что β *непрерывна и принадлежит классу* C^m, *если* X *является многообразием класса* C^m. Каждая точка X принадлежит хотя бы одному K_n, и, следовательно, в этой точке $\sum_{i \in I} \beta_{i,n} > 0$, так как больше нуля по крайней мере одна из функций $\beta_{i,n}$. Последнее означает, что $\beta > 0$ всюду в X. Но тогда функция $\alpha_i = \beta_i/\beta$ непрерывна на X, принадлежит классу C^m, если X является многообразием класса C^m, и имеет носитель в Ω_i. Так как система β_i локально конечна, то система $\alpha_i \geqslant 0$ также локально конечна. Далее, сумма $\sum_{i \in I} \alpha_i$ равна $\sum_{i \in I} \beta_i/\beta = 1$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть* X — *локально компактное, счетное в бесконечности пространство,* F — *замкнутое множество из* X, *а* Ω — *открытое множество, содержащее* F. *Тогда существует непрерывная вещественная функция* α *на* X, *принадлежащая классу* C^m, *если* X — *многообразие класса* C^m, *имеющая носитель в* Ω, *удовлетворяющая неравенству* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и равная* 1 *на некоторой окрестности множества* F.

В самом деле, для доказательства достаточно применить теорему к покрытию X, образованному множествами Ω и $\complement F$. Если через α и β обозначить функции, соответствующие этому покрытию, то $\alpha + \beta = 1$. Носитель β лежит в $\complement F$, его дополнение является открытым множеством, содержащим F, на котором β равна нулю, а следовательно, $\alpha = 1$.

Заметим, что если F компактно, то, согласно примечанию на стр. 456, можно взять Ω с компактным замыканием и тогда α имеет компактный носитель. Впрочем, в этом случае нет необходимости предполагать X счетным в бесконечности (см. замечание 3°) после формулировки теоремы 11).

Следствие 2. *Пусть* X — *локально компактное, счетное в бесконечности пространство,* A *и* B — *два замкнутых непересекающихся подмножества* X. *Тогда существует вещественная непрерывная функция* α, *принадлежащая классу* C^m, *если* X —

[1]) Объединение F *бесконечного* семейства замкнутых множеств F_n не замкнуто. Однако оно замкнуто, если это семейство *локально конечно*. В самом деле, пусть $x \in X$ принадлежит замыканию множества F, а $\mathcal{V}$ — компактная окрестность x. Пусть n — такое целое число, что $F_m \cap \mathcal{V} = \emptyset$ для $m > n$. Тогда x является точкой замыкания множества $\bigcup_{m \leqslant n} F_m$. Это множество замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств. Отсюда следует, что $x \in \bigcup_{m \leqslant n} F_m \subset F$, т. е. следует, что F замкнуто.

многообразие класса C^m, равная 1 всюду на некоторой окрестности A и равная 0 всюду на некоторой окрестности B.

Действительно, для доказательства достаточно к пространству X, замкнутому множеству A и открытому множеству $\Omega = \complement B$ применить следствие 1. Тот факт, что функция α имеет носитель в $\complement B$ означает, что она равна нулю всюду на некоторой окрестности B.

Следствие 3. *Пусть X — локально компактное, счетное в бесконечности пространство, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — семейство замкнутых попарно непересекающихся частей X, $\vec{E}$ — банахово пространство и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — произвольные векторы из $\vec{E}$. Существует непрерывная на X функция $\vec{f}(x)$ со значениями в $\vec{E}$, равная e_i в окрестности множества F_i.*

Доказательство. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через F'_i объединение множеств F_j, $j \neq i$, а через Ω_i — дополнение множества F'_i. Поскольку пересечение F'_i пусто, то объединение Ω_i равно X. Множества Ω_i образуют некоторое открытое покрытие X. Пусть (α_i), $i \in I$, — соответствующее разложение единицы. Тогда носитель функции α_i лежит в Ω_i, а, значит, α_i равна нулю в некоторой окрестности F'_i. Поскольку сумма $\sum\limits_i \alpha_i$ равна 1, то мы получаем, что функция α_i равна 1 в некоторой окрестности F_i. Функция

$$\vec{f}(x) = \sum_{i \in I} \vec{e}_i \alpha_i(x) \quad \text{или} \quad \vec{f} = \sum_{i \in I} \vec{e}_i \alpha_i \qquad \text{(IV, 2; 25)}$$

удовлетворяет неравенствам $\|\vec{f}(x)\| \leqslant (\max\limits_{i \in I} \|\vec{e}_i\|) \sum\limits_{i \in I} \alpha_i(x) = \max\limits_{i \in I} \|\vec{e}_i\|$. Отсюда $|||\vec{f}||| \leqslant \max \|\vec{e}_i\|$. Однако поскольку на F_i функция $\vec{f}$ равна $\vec{e}_i$, то имеют место обратные неравенства, а, значит, $|||\vec{f}||| = \max \|\vec{e}_i\|$.

Следствие 4. *Пусть X — локально компактное, счетное в бесконечности пространство, F — замкнутое подмножество X. Пусть $\vec{g}$ — непрерывная функция на F со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Предположим, что каждая точка $a \in F$ имеет такую открытую окрестность $\mathscr{V}_a$ в X, что сужение $\vec{g}$ на $F \cap \mathscr{V}_a$ можно продолжить на $\mathscr{V}_a$ до некоторой непрерывной функции $\vec{G}_a$ (соответственно принадлежащей классу C^m, если X является многообразием класса C^m). Тогда функцию $\vec{g}$, определенную на F, можно продолжить на X до непрерывной функ-*

ции $\vec{G}$ (соответственно принадлежащей классу C^m) со значениями в $\vec{E}$.

Доказательство. Множество всех $\mathscr{V}_a$ и $\complement F$ образует открытое покрытие X. Ему можно поставить в соответствие разложение единицы, образованное функциями α_a с носителем в $\mathscr{V}_a$ и функцией α_0 с носителем в $\complement F$: $\left(\sum_{a\in F}\alpha_a\right)+\alpha_0=1$.

Рассмотрим теперь функцию $\alpha_a\vec{G}_a$. Эта функция определена только в $\mathscr{V}_a$. Однако ее можно определить на всем X, придавая ей значение 0 вне $\mathscr{V}_a$. При этом она останется непрерывной (соответственно принадлежащей классу C^m). В открытом множестве $\mathscr{V}_a$ она совпадает с функцией $\alpha_a\vec{G}_a$, которая непрерывна (соответственно принадлежит классу C^m). Если $x\notin\mathscr{V}_a$, то она совпадает с 0 (в открытом дополнении носителя α_a). Рассмотрим теперь сумму $\vec{G}=\sum_{a\in F}\alpha_a\vec{G}_a$. Так как эта сумма локально конечна, то она определяет на X некоторую непрерывную функцию (соответственно функцию класса C^m).

В каждой точке $x\in F$ для любого $a\in F$ имеет место равенство $\vec{G}_a(x)=\vec{g}(x)$, ибо каждое $\vec{G}_a$ является продолжением $\vec{g}$. Поэтому для каждого $x\in F$ имеем: $\sum_{a\in F}\alpha_a\vec{G}_a(x)=$ $=\vec{g}(x)\sum_{a\in F}\alpha_a(x)$. Поскольку $\alpha_0(x)$ равна нулю на F, сумма равна 1, а, следовательно, $\vec{G}(x)=\vec{g}(x)$, так что функция $\vec{G}$ является продолжением функции $\vec{g}$.

Заметим, что это следствие содержит как частные случаи все предыдущие следствия. Если, например, мы обратимся к следствию 3, то увидим, что в нем на X продолжают лишь функцию $\vec{g}$, определенную на $\bigcup_i F_i$ и равную постоянной $\vec{e}_i$ на каждом F_i.

Следствие 5. *Пусть X является многообразием класса C^m, $m\geqslant 1$, размерности N и V — замкнутое подмногообразие класса C^m многообразия X размерности n. Пусть $\vec{g}$ — функция, определенная на V, со значениями в пространстве $\vec{E}$ класса C^m. Тогда эту функцию можно продолжить в X до функции $\vec{G}$ класса C^m со значениями в $\vec{E}$.*

Доказательство. Достаточно обратиться к условиям предыдущего следствия. Для точки $a\in V$ можно найти открытую окрестность $\mathscr{V}_a$ точки a в X и некоторую карту Φ_a, т. е. C^m-диффеоморфизм некоторого открытого множества $\mathcal{O}_a$ из $\mathbb{R}^N$ на $\mathscr{V}_a$. Кроме того, если записать $\mathbb{R}^N$ в виде произведения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ и представить каждую из его точек x как пару (y, z), $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{N-n}$, то можно считать, что отображение Φ_a переводит пересечение $\mathcal{O}_a \cap \mathbb{R}^n$ на пересечение $\mathscr{V}_a \cap V$ (следствие 2_2 теоремы 32 гл. III)[1].

Задача продолжения $\vec{g}$ из $V \cap \mathscr{V}_a$ на $\mathscr{V}_a$ сводится к задаче продолжения функции $\vec{h} = \vec{g} \circ \Phi_a$, определенной в $\mathcal{O}_a \cap \mathbb{R}^n$, на открытое множество $\mathcal{O}_a$ или, по крайней мере, на некоторую окрестность точки $\alpha = \Phi_a^{-1}(a)$ в этом открытом множестве. Такое продолжение в $\mathbb{R}^N$ очевидно. Оно определено функцией $(y, z) \to \vec{h}(y)$, что и требовалось доказать.

Следствие 6. *Пусть X — локально компактное, счетное в бесконечности пространство и $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — замкнутые попарно непересекающиеся подмножества. Тогда существуют попарно непересекающиеся окрестности подмножеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$.*

В самом деле, построим, согласно следствию 3, функцию G с вещественными значениями, соответствующую значениям $e_i = \pm i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Открытые окрестности $\mathscr{V}_i = \{x \in X;\ i - 1/2 < G(x) < i + 1/2\}$ множеств F_i удовлетворяют утверждению леммы.

Пространство, обладающее этим свойством, называется *нормальным*. Локально компактное счетное в бесконечности пространство нормально. Более общо, паракомпактное пространство нормально. Однако обратное утверждение не верно.

Следствие 7. *Пусть X — локально компактное счетное в бесконечности пространство. Пусть $(\Omega_i)_{i \in I}$ является открытым покрытием X. Тогда найдется локально конечное покрытие $(\Omega_i')_{i \in I}$, зависящее от того же множества индексов и такое, что $\overline{\Omega_i'} \subset \Omega_i$.*

В самом деле, для непосредственного применения теоремы 11 достаточно в качестве Ω_i' взять множество таких x, чтобы $\alpha_i(x) > 0$; Ω_i' являются открытыми множествами. Так как $\overline{\Omega_i}$ являются носителями α_i, то они содержатся в Ω_i. В каждой точке

[1]) Это следствие было доказано для подмногообразия V размерности n некоторого аффинного пространства размерности N, например $\mathbb{R}^N$. Здесь X является абстрактным многообразием размерности N, V — некоторым подмногообразием X размерности n. Однако с помощью карты окрестности a в X приходят к открытому множеству из $\mathbb{R}^N$ и к подмногообразию этого открытого множества. Следствие применено именно в этих условиях.

$x \in X$ сумма $\sum_{i \in I} \alpha_i(x)$ равна 1, а, следовательно, одна из $\alpha_i(x)$ положительна и x лежит в соответствующем множестве Ω_i'. Тем самым множества Ω_i' образуют некоторое покрытие. Это покрытие локально конечно, поскольку локально конечна система α_i.

Укажем, наконец, без доказательства результат, частично обобщающий следствие 5 (но относящийся к непрерывным функциям, а не к функциям класса C^m). Перед этим введем новое понятие. Пусть $\vec{F}$ — банахово пространство и $\vec{f}$ — непрерывная функция с компактным носителем в X и со значениями в $\vec{F}$. Говорят, что эта функция *разложима*, если она выражается в виде

$$\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \varphi_i(x) \quad \text{или} \quad \vec{f} = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \varphi_i,$$

где $\vec{g}_i$ — постоянные векторы из $\vec{F}$, а φ_i — скалярные непрерывные функции с компактным носителем. Множество значений такой функции лежит в векторном конечномерном подпространстве пространства $\vec{F}$, порожденном векторами $\vec{g}_i$. Обратно, пусть $\vec{f}$ — непрерывная функция с компактным носителем, принимающая свои значения в векторном конечномерном подпространстве $\vec{G}$ пространства $\vec{F}$. Пусть $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_N$ — базис $\vec{G}$. Для каждого $x \in X$, $\overrightarrow{f(x)}$ является вектором $\vec{G}$, а следовательно, его можно единственным образом записать в виде $\overrightarrow{f(x)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \varphi_i(x)$, и, значит, функция $\vec{f}$ является суммой $\sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \varphi_i$. Функция φ_i: $X \to \mathbb{C}$ является композицией функции $\vec{f}$: $X \to \vec{G}$ и непрерывного отображения $\vec{G} \to \mathbb{C}$, которое каждому вектору из $\vec{G}$ ставит в соответствие его i-ю координату в выбранном базисе. Такая функция непрерывна. Ее носитель, поскольку он содержится в носителе $\vec{f}$, компактен, а сама функция $\vec{f}$ разложима. Таким образом, непрерывные разложимые функции с компактным носителем можно назвать непрерывными функциями с компактным носителем *конечного ранга*. Их множество является подпространством векторного пространства $\mathscr{C}(X; \vec{F})$ непрерывных функций с компактным носителем и значениями в $\vec{F}$. Можно показать, что это множество изоморфно тензорному произведению

$\mathscr{C}(X)$ на $\vec{F}$, которое кратко обозначают через $\mathscr{C}(X)\otimes\vec{F}$. Это множество совпадает с $\mathscr{C}(X;\vec{F})$, если $\vec{F}$ конечномерно.

Следствие 8. *Пусть K является некоторым компактом X и $\vec{f}$ — непрерывная функция на K со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$ и какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ множества K, существует на X такая непрерывная разложимая функция $\vec{f}_\varepsilon$ с компактным носителем $\subset\mathscr{V}$, что $|||\vec{f}-\vec{f}_\varepsilon|||\leqslant\varepsilon$. Можно даже эту функцию выбрать в виде $\vec{f}_\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i\varphi_i$, где $\varphi_i\geqslant 0$, и так, чтобы было справедливым неравенство*

$$\left\|\|\vec{f}\|-\sum_{i=1}^{N}\|\vec{g}_i\|\varphi_i\right\|\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Для любой точки $a\in K$ существует такая открытая окрестность $\mathscr{V}_a\subset\mathscr{V}$ точки a в X, что для каждой точки x из этой окрестности имеет место неравенство: $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a)\|\leqslant\varepsilon$.

Множество K покрывается конечным числом окрестностей $\mathscr{V}_a:\mathscr{V}_{a_1},\mathscr{V}_{a_2},\ldots,\mathscr{V}_{a_N}$. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N,\alpha_0$ — некоторое разбиение единицы в X относительно покрытий $\mathscr{V}_{a_i}$ и $\complement K$. Тогда разложимая функция $\vec{f}_\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{f(a_i)}\alpha_i$ удовлетворяет условию следствия. В самом деле, поскольку $\alpha_0(x)$ отлична от нуля только в $\complement K$, где $\overrightarrow{f(x)}$ равна нулю, то $\overrightarrow{f(x)}\alpha_0(x)$ равна нулю, а, следовательно, $\overrightarrow{f(x)}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x)\overrightarrow{f(x)}$.

Теперь имеем

$$\left\|\overrightarrow{f(x)}-\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{f(a_i)}\alpha_i(x)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{N}(\overrightarrow{f(x)}-\overrightarrow{f(a_i)})\alpha_i(x)\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{N}\varepsilon\alpha_i(x)\leqslant\varepsilon\,[1].$$

Точно так же

$$\|\overrightarrow{f(x)}\|-\sum\|\overrightarrow{f(a_i)}\|\alpha_i(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}(\|\overrightarrow{f(x)}\|-\|\overrightarrow{f(a_i)}\|)\alpha_i(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\alpha_i(x)\leqslant\varepsilon.$$

---

[1]) $\|\overrightarrow{f(x)}-\overrightarrow{f(a_i)}\|\leqslant\varepsilon$ для $x\in\mathscr{V}_{a_i}$ и $\alpha_i(x)=0$ для $x\notin\mathscr{V}_{a_i}$.

Теорема 12. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, Y — замкнутое подмножество X, $\vec{g}$ — непрерывная функция на Y со значениями в нормированном конечномерном векторном пространстве $\vec{E}$. Тогда существует на X непрерывная функция $\vec{G}$ со значениями в $\vec{E}$, являющаяся продолжением $\vec{g}$ (т. е. совпадающая с $\vec{g}$ на Y) и удовлетворяющая условию*:

$$\sup_{x\in X}\|\vec{G}(x)\|=\sup_{y\in Y}\|\vec{g}(y)\|\leqslant+\infty. \qquad \text{(IV, 2; 26)}$$

Если g вещественна, то и G можно брать вещественной и, сверх того,

$$\sup_{x\in X} G(x)=\sup_{y\in Y} g(y), \qquad \inf_{x\in X} G(x)=\inf_{y\in Y} g(y). \qquad \text{(IV, 2; 27)}$$

(Эти величины могут быть равны $\pm\infty$.)

Если X локально компактно и является объединением счетного множества компактных подмножеств, аналогичный результат имеет место, если $\vec{E}$ является бесконечномерным банаховым пространством.

Носитель меры Радона

Интуитивно под носителем распределения масс в механике или распределением электрических зарядов в физике понимают наименьшее замкнутое множество, содержащее всю массу или весь заряд.

Определение. Пусть X — локально компактное пространство, $\vec{\mu}$ — мера Радона на X со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$, Ω — некоторое открытое множество X. Говорят, что $\vec{\mu}$ *равна нулю в Ω, если для каждой функции φ из $\mathscr{C}(X)$ с носителем в Ω $\vec{\mu}(\varphi)$ равна нулю*[1].

Интуитивно это значит, что в открытом множестве Ω нет массы или заряда.

Точно так же говорят, что две меры $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$ на X совпадают или равны в Ω, если их разность $\vec{\mu}_1-\vec{\mu}_2$ равна нулю в Ω.

Теорема 13. *Пусть X — локально компактное пространство и $(\Omega_i)_{i\in I}$ — произвольное семейство (конечное или нет)*

---

[1]) Здесь надо обратить внимание на то, что носитель φ является компактом, а Ω открыто. В дальнейшем мы увидим, почему надо выбирать Ω открытым.

открытых множеств этого пространства. Тогда, если мера Радона $\vec{\mu}$ на X равна нулю на каждом из множеств Ω_i, то она равна нулю в их объединении Ω.

Доказательство. Пусть φ является некоторой функцией из $\mathscr{C}(X)$ с компактным носителем K в Ω. Нам надо доказать, что $\vec{\mu}(\varphi)$ равна нулю. Поскольку K компактно, то его можно покрыть конечным числом множеств Ω_i. Пусть это будут $(\Omega_i)_{i \in I}$. Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ и α_0 — разложение единицы относительно покрытия $(\Omega_i)_{i \in I}$, $\complement K$ пространства X. Поскольку $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = 1$ на K, *то на всем* X имеет место тождество $\varphi = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i \varphi$ [1]).

Так как $\vec{\mu}$ линейна, то $\vec{\mu}(\varphi) = \sum\limits_{i \in I} \vec{\mu}(\alpha_i \varphi)$. Каждый из членов правой части этого равенства равен нулю, ибо $\alpha_i \varphi$ имеет носитель в Ω_i, а $\vec{\mu}$ предполагалась равной нулю в Ω_i, и, следовательно, $\vec{\mu}(\varphi)$ также равна нулю. Теперь мы видим, для чего нужно разложение единицы, — чтобы *разложить* φ, *имеющую носитель в объединении* Ω *множеств* Ω_i, *в сумму конечного числа функций* $\varphi_i = \alpha_i \varphi$, *имеющих носители в* Ω_i.

Следствие. *Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на локально компактном пространстве X. Тогда среди всех открытых множеств существует наибольшее, в котором мера $\vec{\mu}$ равна нулю.*

В самом деле, рассмотрим все открытые множества, в которых мера $\vec{\mu}$ равна нулю. Объединение этих множеств открыто, а, согласно теореме, $\vec{\mu}$ на нем равна нулю. Это объединение, очевидно, является наибольшим открытым множеством, в котором $\vec{\mu}$ равна нулю.

Определение. Замкнутое множество F, являющееся дополнением к наибольшему открытому множеству Ω, в котором мера Радона $\vec{\mu}$ на X равна нулю, называется *носителем* $\vec{\mu}$. *Пустой носитель* имеет единственная мера, равная нулю ($\vec{\mu}(\varphi) = \vec{0} \in \vec{E}$ для любой функции φ).

Из этого определения вытекает, что если φ является функцией из $\mathscr{E}(X)$, $\vec{\mu}$ — мерой Радона и *если носитель φ и носи-*

---

[1]) Это верно как для любой точки $x \in K$ (поскольку тогда $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$) так и для $x \notin K$ (поскольку тогда оба члена равны нулю).

тель $\vec{\mu}$ *не имеют общих точек*, т. е. если φ обращается в нуль на некоторой окрестности носителя $\vec{\mu}$, *то* $\vec{\mu}(\varphi)=\vec{0}$. В самом деле, носитель функции φ в этом случае лежит в дополнении к носителю $\vec{\mu}$, т. е. по определению носителя лежит в открытом множестве, в котором $\vec{\mu}$ равна нулю.

Отсюда следует, что если две функции φ_1 и φ_2 из $\mathscr{C}(X)$ равны на всей окрестности носителя $\vec{\mu}$, то $\vec{\mu}(\varphi_1)$ и $\vec{\mu}(\varphi_2)$ равны между собой. В самом деле, функция $\varphi_1-\varphi_2$ равна нулю на открытом множестве, содержащем носитель $\vec{\mu}$, а, значит, носитель $\varphi_1-\varphi_2$ и носитель $\vec{\mu}$ не пересекаются, откуда и следует наше утверждение. Однако можно доказать более точный результат:

Теорема 13_2. *Если φ обращается в нуль на носителе $\vec{\mu}$, то $\vec{\mu}(\varphi)=0$. Если φ_1 и φ_2 равны на носителе $\vec{\mu}$, то $\vec{\mu}(\varphi_1)=\vec{\mu}(\varphi_2)$.*

Доказательство. Пусть F — носитель $\vec{\mu}$ и K — носитель φ. Зададим $\varepsilon>0$. Поскольку мера $\vec{\mu}$ непрерывна на $\mathscr{C}_K(X)$, то найдется такое $\eta>0$, что для функции $\psi\in\mathscr{C}_K(X)$, такой, что $\|\psi\|\leqslant\eta$, имеет место неравенство $\|\vec{\mu}(\psi)\|\leqslant\varepsilon$. Поскольку φ непрерывна и равна нулю на F, существует такая окрестность $\mathscr{U}$ множества F, в которой $|\varphi|\leqslant\eta$.

Пусть α — непрерывная вещественная функция на X, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, имеющая компактный носитель $\subset\mathscr{U}$, равная 1 в окрестности компакта $K\cap F$ (следствие 1 теоремы 11).

Рассмотрим носитель функции $\alpha\varphi-\varphi=(\alpha-1)\varphi$. Прежде всего, он содержится в носителе K функции φ. Поскольку $\alpha-1$ равна нулю в окрестности множества $K\cap F$, то он содержится в $\complement(K\cap F)=\complement K\cup\complement F$. Поскольку этот носитель лежит в K, то он находится в $\complement F$, т. е. в дополнении к носителю $\vec{\mu}$. Поэтому $\vec{\mu}(\alpha\varphi-\varphi)=\vec{0}$ или $\vec{\mu}(\alpha\varphi)=\vec{\mu}(\varphi)$.

Теперь $\alpha\varphi\in\mathscr{C}_K(X)$ и $\|\alpha\varphi\|\leqslant\eta$ (поскольку $|\varphi|\leqslant\eta$ на $\mathscr{U}$ и носитель α лежит в $\mathscr{U}$). Значит, $\|\vec{\mu}(\alpha\varphi)\|\leqslant\varepsilon$ и, следовательно, $\|\vec{\mu}(\varphi)\|\leqslant\varepsilon$.

Поскольку ε произвольно, отсюда следует, что $\vec{\mu}(\varphi)=\vec{0}$.

Следствие. *Для того чтобы мера $\vec{\mu}$ на X имела носитель, лежащий в множестве A, образованном конечным числом точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной комбинацией мер Дирака:*

$$\vec{\mu}=\vec{c}_1\delta_{(a_1)}+\vec{c}_2\delta_{(a_2)}+\ldots+\vec{c}_n\delta_{(a_n)}. \qquad (IV, 2; 27_2)$$

Доказательство. Легко видеть прежде всего, что если мера $\vec{\mu}$ имеет указанный вид, то она обязательно имеет носитель в A, поскольку на дополнении к A она равна нулю. Нам остается доказать обратное утверждение. Пусть $\vec{\mu}$ — мера, имеющая носитель в A. Пусть θ_i — функция из $\mathscr{C}(X)$, равная 1 в точке a_i и равная 0 в точках a_j, $j \neq i$ (следствие 3 теоремы 11). Положим теперь $\vec{\mu}(\theta_i) = \vec{c}_i$ для всех i. Тогда для любой функции φ имеет место соотношение

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\,\theta_i + \chi, \qquad (\text{IV}, 2; 27_3)$$

где χ является функцией, равной нулю на A. Из теоремы получаем, что $\vec{\mu}(\chi) = \vec{0}$, так что

$$\vec{\mu}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\,\vec{\mu}(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{c}_i \varphi(a_i), \qquad (\text{IV}, 2; 27_4)$$

чем и заканчивается доказательство следствия.

Теорема 14. *Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на локально компактном пространстве X. Точка $a \in X$ принадлежит носителю F меры $\vec{\mu}$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества ω пространства X, содержащего a, мера $\vec{\mu}$ в этом множестве отлична от нуля.*

Точка a не принадлежит носителю F тогда и только тогда, когда существует открытое множество ω, содержащее a, в котором мера $\vec{\mu}$ равна нулю.

Доказательство. Из эквивалентности соотношений $A \Rightarrow B$ и $\urcorner B \Rightarrow \urcorner A$ (теорема 11 гл. I) следует, что обе части теоремы эквивалентны. Поэтому достаточно доказать, например, вторую часть. Точка a не принадлежит F тогда и только тогда, когда она лежит в $\Omega = \complement F$. Поскольку Ω является наибольшим открытым множеством, в котором $\vec{\mu} = \vec{0}$, то точка a не принадлежит F тогда и только тогда, когда существует такое открытое множество ω, содержащее a, в котором $\vec{\mu} = \vec{0}$.

Пример 1. *Пусть $\vec{\mu} = \sum\limits_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}$ — атомическая мера Радона. Точки a_ν по условию различны, а сумма $\sum\limits_{a_\nu \in K} \|\vec{c}_\nu\|$ для каждого компакта K из X конечна* (см. стр. 448). *Носитель этой меры Радона является замыканием объединения a_ν.*

Доказательство. Обозначим через A объединение a_ν, через $\bar{A}$ его замыкание и через Ω — дополнение к $\bar{A}$. Очевидно, что если носитель φ лежит в Ω, то $\vec{\mu}(\varphi)=\vec{0}$. Следовательно, носитель F меры $\vec{\mu}$ содержится в $\bar{A}$. Остается показать, что каждая точка a_j объединения A принадлежит носителю F. Тогда $A\subset F$, или, в силу замкнутости носителя F, $\bar{A}\subset F$, или, окончательно, $\bar{A}=F$. Итак, пусть точка $a_j\in A$ и $\mathscr{V}$ — компактная окрестность a_j. Ряд $\sum\limits_{a_\nu\in\mathscr{V}}\|\vec{c}_\nu\|$ сходится. Значит, существует конечное подмножество J множества индексов I, такое, что $\sum\limits_{\substack{a_\nu\in\mathscr{V}\\ \nu\notin J}}\|\vec{c}_\nu\|\leqslant\frac{1}{2}\|\vec{c}_j\|$. Поскольку J конечно, существует открытое множество ω, содержащее a_j, лежащее в $\mathscr{V}$ и не содержащее никаких других точек a_k с $k\in J$. При этом имеет место следующая оценка:

$$\sum_{\substack{a_\nu\in\omega\\ \nu\neq j}}\|\vec{c}_\nu\|\leqslant\frac{1}{2}\|\vec{c}_j\|. \qquad (IV, 2; 28)$$

Пусть теперь Ω — произвольная открытая окрестность точки a_j. Покажем, что $\vec{\mu}$ не может обратиться в нуль в Ω, а это будет свидетельствовать о том, что a_j принадлежит носителю F меры $\vec{\mu}$. Согласно лемме 1 к теореме 11, существует вещественная непрерывная функция φ с компактным носителем в $\omega\cap\Omega$, удовлетворяющая неравенствам $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ и такая, что $\varphi(a_j)=1$. При этом имеют место соотношения

$$\vec{\mu}(\varphi)=\vec{c}_j+\sum_{\nu\neq j}\vec{c}_\nu\varphi(a_\nu), \qquad (IV, 2; 29)$$

откуда

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\|\geqslant\|\vec{c}_j\|-\sum_{\substack{a_\nu\in\omega\\ \nu\neq j}}\|\vec{c}_\nu\|\geqslant\frac{1}{2}\|\vec{c}_j\|,$$

а, значит, $\vec{\mu}(\varphi)\neq\vec{0}$, чем и заканчивается доказательство утверждения.

Пример 2. *Пусть $\vec{p}$ — интегрируемая по Риману, определенная на $\mathbb{R}$ функция со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Тогда носитель меры $\vec{p}dx$ плотности $\vec{p}$ относительно меры dx лежит в носителе функции $\vec{p}$ и в случае непрерывности $\vec{p}$ совпадает с носителем $\vec{p}$.*

Это свойство устанавливает связь между понятиями носителя функции и носителя меры.

Прежде всего, в силу предыдущей теоремы, носитель $\vec{\mu}$ содержится в носителе $\vec{p}$. В самом деле, если носитель φ находится в дополнении носителя $\vec{p}$, то интеграл $\int \varphi \vec{p}\, dx$, очевидно, равен нулю. Покажем, что в случае непрерывности $\vec{p}$ носитель $\vec{\mu}$ совпадает с носителем $\vec{p}$. Пусть a — такая точка, что $\vec{p}(a) \neq \neq 0$. Покажем, что a принадлежит носителю $\vec{\mu}$. Отсюда будет вытекать, что носитель $\vec{\mu}$ содержит все точки x, в которых $\vec{p}(x) \neq 0$, и, следовательно, содержит также замыкание множества этих точек, т. е. носитель функции $\vec{p}$. Отсюда мы получим, что носитель $\vec{\mu}$ совпадает с носителем $\vec{p}$. Поскольку функция $\vec{p}$ непрерывна в точке a, то существует такое открытое множество ω, содержащее a, что для любого $x \in \omega$ имеет место неравенство

$$\|\vec{p}(x) - \vec{p}(a)\| \leqslant \frac{1}{2} \|\vec{p}(a)\|. \tag{IV, 2; 30}$$

Теперь видно, что обращение в нуль меры $\vec{\mu}$ в любом открытом множестве Ω, содержащем a, невозможно. В самом деле, выберем произвольную функцию $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$ с носителем в $\omega \cap \Omega$. Тогда будут справедливы соотношения

$$\left\| \int (\vec{p}(x) - \vec{p}(a))\, \varphi(x)\, dx \right\| \leqslant \frac{1}{2} \|\vec{p}(a)\| \int \varphi. \tag{IV, 2; 31}$$

Следовательно,

$$\left\| \int \vec{p}(x)\, \varphi(x)\, dx \right\| \geqslant \left\| \int \vec{p}(a)\, \varphi(x)\, dx \right\| - \frac{1}{2} \|\vec{p}(a)\| \int \varphi = \frac{1}{2} \|\vec{p}(a)\| \int \varphi > 0, \tag{IV, 2; 32}$$

откуда следует, что $\vec{\mu}(\varphi) \neq 0$ и, значит, мера $\vec{\mu}$ не равна нулю в Ω.

Замечание. Если $\vec{p}$ не непрерывна, то носитель меры $\vec{p}dx$ не обязательно является носителем $\vec{p}$. Например, если $\vec{p}$ всюду, кроме точки $a \in \mathbb{R}$, равна нулю, то носителем $\vec{p}$ является $\{a\}$. Однако мера $\vec{p}dx$ равна нулю и ее носитель пуст.

Пример 3. *Пусть $\vec{\mu}$ является мерой Радона, определенной на $\mathbb{R}$ по формуле $\vec{\mu} = \sum_{\nu} \vec{c}_{\nu}\delta_{(a_{\nu})} + \vec{p}\,dx$, где все точки a_{ν} различны, сумма $\sum_{\nu} \|\vec{c}_{\nu}\|$ локально сходится, а функция $\vec{p}$ непрерывна. Тогда носитель $\vec{\mu}$ является объединением носителя A, функции $\vec{p}$ и замыкания множества a_{ν}.*

Этот результат сразу же вытекает из предыдущего. Действительно, легко видеть, что носитель $\vec{\mu}$ содержится в рассматриваемом множестве. Поэтому достаточно последовательно показать, что этот носитель содержит каждую из точек a_{ν} и, кроме того, каждую такую точку a, не принадлежащую замыканию a_{ν}, в которой $\vec{p}(a) \neq \vec{0}$. Рассмотрим точку a_j. Повторяя построение из примера 1, выберем в качестве ω открытый интервал, такой, что

$$\int_{\omega} \|\vec{p}(x)\|\,dx \leqslant \frac{1}{4}\|c_j\|.$$

Построим затем для каждой окрестности Ω точки a_j такую же функцию φ, что и в примере 1, для которой на этот раз имеет место соотношение

$$\vec{\mu}(\varphi) = \vec{c}_j + \sum_{\nu \neq j} \vec{c}_{\nu}\varphi(a_{\nu}) + \int_{\omega} \vec{p}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\| \geqslant \|\vec{c}_j\| - \frac{1}{2}\|\vec{c}_j\| - \frac{1}{4}\|\vec{c}_j\| = \frac{1}{4}\|\vec{c}_j\|,$$

чем и доказывается первое утверждение.

Рассмотрим теперь точку a, не принадлежащую замыканию множества точек a_{ν} и такую, что $\vec{p}(a) \neq \vec{0}$. Построим такое же открытое множество ω, что и в примере 2, но так, чтобы оно не содержало точек a_{ν}. После этого рассуждения, проведенные при доказательстве примера 2, повторяются без изменения.

Объединяя результаты, указанные на стр. 443, с доказанными в примерах 1—3, получим следующую теорему:

Теорема 15. *Пусть a_{ν} — различные точки X, $\vec{c}_{\nu}$ — такие векторы банахова пространства $\vec{E}$, при которых для любого компакта K из X сумма $\sum_{a_{\nu} \in K} \|\vec{c}_{\nu}\|$ конечна. Тогда можно определить на X меру $\vec{\mu} = \sum_{\nu} \vec{c}_{\nu}\delta_{(a_{\nu})}$ со значениями в $\vec{E}$*

по формуле

$$\left(\sum_\nu \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}\right) \cdot \varphi = \sum_\nu \vec{c}_\nu \varphi(a_\nu). \qquad (IV, 2; 32_2)$$

Для каждого компакта K имеет место неравенство

$$\left\| \sum_\nu \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} \right\|_K \leqslant \sum_{a_\nu \in \mathring{K}} \| \vec{c}_\nu \| \qquad (IV, 2; 32_3)$$

и, кроме того,

$$\left\| \sum_\nu \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} \right\| \leqslant \sum_\nu \| \vec{c}_\nu \|. \qquad (IV, 2; 32_4)$$

(Если $\vec{E}$ является полем скаляров, то эти неравенства переходят в равенства[1]*).)*

Пусть X является прямой $\mathbb{R}$ и $\vec{p}$ — функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\vec{E}$, локально интегрируемая по Риману. Тогда эта функция определяет меру $\vec{p}\,dx$ со значениями в $\vec{E}$ по формуле

$$\vec{p}\,dx \cdot \varphi = \int \vec{p}(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (IV, 2; 32_5)$$

Для каждого интервала $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$

$$\| \vec{p}\,dx \|_{[a,\, b[} \leqslant \int_{[a,\, b]} \| \vec{p}(x) \|\,dx, \qquad (IV, 2; 32_6)$$

где неравенство переходит в равенство, если $\vec{E}$ является полем скаляров.

---

[1]) Однако ничего такого не получится, если $\vec{E}$ является векторным пространством размерности $n \geqslant 2$. Возьмем, например, $\vec{E} = \mathbb{R}^n$ с введенной в нем нормой Минковского $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 < p \leqslant +\infty$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть n точек компакта X, и пусть $\vec{c}_\nu$ есть точка $\mathbb{R}^n$, ν-я координата которой равна 1, а все остальные равны нулю ($\vec{c}_\nu$ образуют канонический базис $\mathbb{R}^n$). Тогда $\|\vec{\mu}(\varphi)\| = \left\| \sum_{\nu=1}^n \varphi(a_\nu)\, \vec{c}_\nu \right\| = \left(\sum_{\nu=1}^n |\varphi(a_\nu)|^p\right)^{1/p}$. Точная верхняя грань этого выражения для $\|\varphi\| \leqslant 1$ достигается при $\varphi = 1$. Она равна $n^{1/p}$. Итак, $\sum_{\nu=1}^n \|\vec{c}_\nu\| = n$ и для $n \geqslant 2$ $n^{1/p} < n$.

Для суммы мер на всем компактном интервале $[a, b]$ *прямой* $\mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$\left\| \sum_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} + \vec{p}\,dx \right\|_{[a,\,b]} \leqslant \sum_{a_\nu \in [a,\,b]} \|\vec{c}_\nu\| + \int_{[a,\,b]} \|\vec{p}(x)\|\,dx, \qquad (\text{IV}, 2; 32_7)$$

переходящее в равенство, если $\vec{E}$ *является полем скаляров.*

Носитель меры $\sum\limits_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}$ *является замыканием объединения* a_ν. *Носитель меры* $\sum\limits_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} + \vec{p}\,dx$ *при непрерывном* $\vec{p}$ *является объединением замыкания множества* a_ν *и носителя* $\vec{p}$.

Продолжение меры на непрерывные функции φ с некомпактным носителем

Интуитивно кажется возможным придать смысл выражению $\vec{\mu}(\varphi)$ в том случае, когда $\vec{\mu}$ является мерой Радона с носителем A, а φ — скалярной непрерывной функцией с носителем B даже в том случае, когда B некомпактно, *лишь бы только* A *и* B *имели компактное пересечение* K.

Действительно, пусть α является некоторой функцией из $\mathscr{C}(X)$, равной 1 на всей окрестности компакта K (согласно следствию 1 теоремы 11, такие функции существуют). Тогда носитель функции $\alpha\varphi$, поскольку он находится в пересечении носителей функций α и φ, компактен.

Положим по определению

$$\vec{\mu}(\varphi) = \vec{\mu}(\alpha\varphi) \qquad (\text{IV}, 2; 33)$$

— соотношение, имеющее смысл, поскольку $\alpha\varphi \in \mathscr{C}(X)$. Для обоснования этого определения достаточно показать, что правая часть не зависит от выбора α. Итак, пусть α_1 и α_2 — две функции, равные 1 в некоторой окрестности компакта K. Функция $\alpha_1\varphi - \alpha_2\varphi$ и мера $\vec{\mu}$ имеют непересекающиеся носители. (Если некоторая точка принадлежит носителю $\vec{\mu}$, то она лежит в A. Если же она принадлежит носителю функции $(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi$, то она содержится в носителе функции φ, т. е. в B и в носителе функции $\alpha_1 - \alpha_2$, а значит, лежит в $\complement K$. Рассматриваемое пересечение содержится в $A \cap B \cap \complement K = K \cap \complement K = \varnothing$.) Тогда

$$\vec{\mu}(\alpha_1\varphi - \alpha_2\varphi) = \vec{0} \text{ или } \vec{\mu}(\alpha_1\varphi) = \vec{\mu}(\alpha_2\varphi).$$

В частности, если $\vec{\mu}$ имеет компактный носитель, то для непрерывной функции φ с произвольным носителем можно определить $\vec{\mu}(\varphi)$, полагая $\vec{\mu}(\varphi)=\vec{\mu}(\alpha\varphi)$, где $\alpha\in\mathscr{C}(X)$ и равна 1 в некоторой окрестности носителя $\vec{\mu}$.

Например, если $\mu=\delta_{(a)}$, то для непрерывной скалярной функции φ с произвольным носителем получаем формулу (IV, 2; 5). Отсюда следует, что в случае $\mu=\delta_{(a)}$ можно вычислить $\mu(\varphi)$ даже для разрывных функций φ, что мы и сделаем в § 3.

Пусть $\vec{\mu}$ — мера с компактным носителем. Вектор $\vec{\mu}(1)$ из $\vec{E}$ называется «полной массой». Например, если $\vec{E}$ полно и $\vec{\mu}=\sum\limits_{\nu}\vec{c}_\nu\delta_{(a_\nu)}$, где a_ν содержатся в одном компакте и $\sum\limits_{\nu}\|c_\nu\|<\infty$, то полная масса равна $\sum\limits_{\nu}\vec{c}_\nu\in\vec{E}$. Если $X=\mathbb{R}$ и $d\vec{\mu}=\vec{p}\,dx$, где $\vec{p}$ имеет компактный носитель, то полная масса равна $\int\vec{p}(x)\,dx\in\vec{E}$. Легко видеть, откуда возникло выражение «полная масса». Если μ принимает вещественные значения и представляет собой распределение зарядов (в физике), то рассматриваемое выражение действительно даёт «полный заряд» (естественно, заряд алгебраический — полная масса $\delta_{(a)}-\delta_{(b)}$ равна нулю).

Определенное только что продолжение $\vec{\mu}$ обладает следующими очевидными свойствами.

Теорема 16. *Пусть A и B — замкнутые множества из X с компактным пересечением K. Для меры Радона $\vec{\mu}$ на X со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$ и носителем в A и для непрерывной скалярной функции φ с носителем в B можно определить $\vec{\mu}(\varphi)\in\vec{E}$ с помощью формулы* (IV, 2; 33), *где α — функция из $\mathscr{C}(X)$, равная* 1 *на некоторой окрестности пересечения K. Результат не зависит от выбора α. Если* φ_1 и φ_2 *обладают теми же свойствами, что и φ, и если k является некоторым скаляром, то $\vec{\mu}(\varphi_1+\varphi_2)=\vec{\mu}(\varphi_1)+\vec{\mu}(\varphi_2)$ и* $\vec{\mu}(k\varphi)=k\vec{\mu}(\varphi)$. *Если непрерывные функции φ_n с носителем в B равномерно сходятся к* 0 *при n, стремящемся к бесконечности, то $\vec{\mu}(\varphi_n)\in\vec{E}$ сходятся к $\vec{0}$. Кроме того, имеет место оценка*

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\|\leqslant\|\vec{\mu}\|\sup_{x\in X}|\varphi(x)|. \qquad (\text{IV}, 2; 33_2)$$

Замечание. В условии теоремы достаточно было считать, что существует окрестность компакта K, на которой φ_n равномерно сходятся к 0 при $n\to\infty$. Отсюда уже следует, что $\vec{\mu}(\varphi_n)$ сходятся к $\vec{0}$.

Принцип кусочной склейки мер

Теорема 17. *Пусть X — локально компактное пространство и $(\Omega_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство открытых множеств, образующих покрытие X. Пусть $(\vec{\mu}_i)_{i \in I}$ — семейство мер, зависящих от того же семейства индексов. Предположим, что $\vec{\mu}_i$ является мерой, определенной на локально компактном пространстве Ω_i*[1]) *со значениями в одном и том же нормированном пространстве $\vec{E}$, и что в каждом из пересечений $\Omega_i \cap \Omega_j$ двух открытых множеств меры $\vec{\mu}_i$ и $\vec{\mu}_j$ равны. Тогда на X существует, и притом единственная, мера $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E}$, которая в каждом открытом множестве Ω_i равна мере $\vec{\mu}_i$.*

Доказательство. Единственность $\vec{\mu}$ очевидна: если $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$ — две меры, обладающие указанными свойствами, то $\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2$ равна нулю в каждом Ω_i, а, следовательно, по теореме 13 равна нулю в их объединении, которое совпадает с X. Значит, $\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2$.

Доказательство существования можно было бы провести с помощью модифицированной теоремы 11 (см. замечание 3°)) без какого-либо предположения о счетности X. Однако для простоты мы предположим, что X является объединением счетного множества компактов, и применим разложение единицы.

Итак, пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ — непрерывное разложение единицы, подчиненное покрытию $(\Omega_i)_{i \in I}$ пространства X. Пусть φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(X)$. Функция $\alpha_i\varphi$ принадлежит $\mathscr{C}(\Omega_i)$. Поэтому к ней можно применить меры $\vec{\mu}_i$ и рассматривать $\vec{\mu}_i(\alpha_i\varphi)$. Определим теперь меру $\vec{\mu}$ по формуле

$$\vec{\mu}(\varphi) = \sum_{i \in I} \vec{\mu}_i(\alpha_i\varphi). \qquad \text{(IV, 2; 33}_3\text{)}$$

Эта формула имеет определенный смысл. В самом деле, носитель функции φ компактен, и на этом компакте все функции α_i, кроме конечного их числа, равны нулю, так что предыдущая сумма конечна. Она, очевидно, определяет линейное отображение пространства $\mathscr{C}(X)$ в банахово пространство $\vec{E}$. Из неравенства

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant \sum_{i \in I} \|\vec{\mu}_i\|_K \|\alpha_i\varphi\| \leqslant \Big(\sum_{i \in I} \|\vec{\mu}_i\|_K\Big) \|\varphi\|, \qquad \text{(IV, 2; 33}_4\text{)}$$

[1]) Открытое множество локально компактного пространства локально компактно.

где J — такое конечное множество индексов, при которых α_i не равны тождественно нулю на K, следует, что это отображение непрерывно на $\mathscr{C}_K(X)$.

Введенное отображение определяет, очевидно, некоторую меру на X со значениями в $\vec{E}$. Остается доказать, что в множествах Ω_j имеет место равенство $\vec{\mu}=\vec{\mu}_j$. Если компактный носитель функции φ лежит в Ω_j, то для каждого i носитель $\alpha_i\varphi$ содержится в $\Omega_j \cap \Omega_i$. Поскольку в этом открытом множестве $\vec{\mu}_j=\vec{\mu}_i$, то в формуле (IV, 2; 33_3) можно заменить $\vec{\mu}_i(\alpha_i\varphi)$ на $\vec{\mu}_j(\alpha_i\varphi)$ и получить равенство

$$\vec{\mu}(\varphi)=\sum_{i\in I}\vec{\mu}_j(\alpha_i\varphi)=\vec{\mu}_j\Big(\sum_{i\in I}\alpha_i\varphi\Big)=\vec{\mu}_j(\varphi), \qquad (IV, 2; 33_5)$$

из которого следует утверждение теоремы.

Комплексные и вещественные меры

Определение. До сих пор мы не уточняли характер поля скаляров $\mathbb{K}$, которое можно было отождествлять либо с $\mathbb{R}$, либо с $\mathbb{C}$. Через $\mathscr{C}(X)$ мы обозначали пространство непрерывных скалярных функций на X с компактным носителем. Оба возможных случая поля $\mathbb{K}$ рассматривались нами одновременно. Однако очевидно, что в некоторых задачах целесообразно уточнять, о каком поле скаляров идет речь.

Пусть $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})=\mathscr{C}(X)$ — пространство *комплексных* функций, и пусть μ — комплексная мера на X, $\mu\in\mathscr{C}'(X)$.

Говорят, что мера μ *вещественна*, если $\mu(\varphi)$ — вещественна[1]) для любой вещественной функции φ.

Для того чтобы мера Радона μ была вещественной, необходимо и достаточно, чтобы для любой комплексной функции φ из $\mathscr{C}(X)$ имело место равенство

$$\mu(\bar{\varphi})=\overline{\mu(\varphi)}, \qquad (IV, 2; 34)$$

другими словами, чтобы $\mu(\varphi)$ и $\mu(\bar{\varphi})$ были комплексно сопряженными.

В самом деле, пусть μ является вещественной мерой. Любая комплексная функция φ может быть представлена единственным

[1]) Вот другая интерпретация. Пусть μ — комплексная мера, т. е. $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathscr{C}(X;\ \mathbb{C})$ в поле скаляров $\mathbb{C}$. Оно определяет (см. примечание на стр. 451) некоторую меру $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ относительно $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$, т. е. определяет некоторое $\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathscr{C}(X;\ \mathbb{R})$ в двумерное векторное пространство $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. При этом μ вещественна тогда и только тогда, когда $\vec{\mu}_{\mathbb{R}}$ будет принимать свои значения в подпространстве $\mathbb{R}$ пространства $\mathbb{C}$.

образом в виде $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — вещественные функции. Эти функции необходимо непрерывны и имеют компактный носитель. Так как $\mu(\varphi) = \mu(\varphi_1) + i\mu(\varphi_2)$ и $\mu(\bar\varphi) = \mu(\varphi_1) - i\mu(\varphi_2)$, а $\mu(\varphi_1)$, $\mu(\varphi_2)$ вещественны, то получаем соотношение (IV, 2; 34). Обратно, если это соотношение справедливо, то это говорит о том, что для каждой вещественной функции φ число $\mu(\varphi)$ совпадает со своим сопряженным, т. е. вещественно.

Пусть теперь μ — произвольная мера Радона. Обозначим через $\bar\mu$ *комплексно сопряженную меру* Радона, определяемую формулой

$$\bar\mu(\varphi) = \overline{\mu(\bar\varphi)} \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathscr{C}(X), \text{ или } \overline{\mu(\varphi)} = \bar\mu(\bar\varphi). \qquad \text{(IV, 2; 35)}$$

Прежде всего, это настоящая мера Радона. В самом деле, формула определяет некоторую комплексную функцию на $\mathscr{C}(X)$. Функция эта линейна, поскольку

$$\begin{aligned} \bar\mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \overline{\mu(\overline{\varphi_1 + \varphi_2})} = \overline{\mu(\bar\varphi_1) + \mu(\bar\varphi_2)} = \overline{\mu(\bar\varphi_1)} + \overline{\mu(\bar\varphi_2)} = \\ = \bar\mu(\varphi_1) + \bar\mu(\varphi_2), \\ \bar\mu(k\varphi) = \overline{\mu(\overline{k\varphi})} = \overline{\bar k\mu(\bar\varphi)} = k\overline{\mu(\bar\varphi)} = k\bar\mu(\varphi)\ ^{1)}, \end{aligned} \qquad \text{(IV, 2; 36)}$$

и она непрерывна на каждом $\mathscr{C}_K(X)$, где K — компакт из X.

Конечно, комплексно сопряженной мерой для $\bar\mu$ *будет* μ, т. е. имеет место обратимость, согласно которой можно говорить, что *меры* μ *и* $\bar\mu$ *комплексно сопряжены друг другу. Две меры* μ *и* $\bar\mu$ *комплексно сопряжены тогда и только тогда, когда их значения на двух комплексно сопряженных функциях* φ *и* $\bar\varphi$ *соответственно комплексно сопряжены* (*вторая формула* (IV, 2; 35)), *или, иначе, когда, для любой вещественной функции* φ, $\mu(\varphi)$ *и* $\bar\mu(\varphi)$ *комплексно сопряжены. Отображение* $\mu \to \bar\mu$ *является полулинейной биекцией пространства* $\mathscr{C}'(X)$ *на себя, т. е.*

$$\begin{aligned} \overline{\mu_1 + \mu_2} = \bar\mu_1 + \bar\mu_2, \\ \overline{k\mu} = \bar k\bar\mu. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 2; 37)}$$

Мера вещественна тогда и только тогда, когда она совпадает со своей комплексно сопряженной (формула (IV, 2; 34)). Соотношение между μ и $\bar\mu$ можно еще выразить в следующей форме:

любая комплексная мера Радона μ *может быть записана, и притом единственным образом, в виде* $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, *где* μ_1 *и* μ_2 — *вещественные меры Радона; при этом* $\bar\mu = \mu_1 - i\mu_2$.

---

1) Следует внимательно рассмотреть эту последовательность равенств; здесь существенно используется тот факт, что правая часть равенства (IV, 2; 35) дважды содержит символ сопряжения. Функция $\varphi \to \overline{\mu(\varphi)}$ *полулинейна* и не является линейной точно так же, как и функция $\varphi \to \mu(\bar\varphi)$.

В самом деле, если такое разложение возможно, то, учитывая (IV, 2; 37) и то, что вещественная мера совпадает со своей сопряженной, получаем $\bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2$ и, следовательно, имеет место единственное представление

$$\mu_1 = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{\mu - \bar{\mu}}{2i}. \qquad \text{(IV, 2; 38)}$$

Обратно, обе меры, определенные этой формулой, совпадают со своими сопряженными и являются, следовательно, вещественными. При этом $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.

Будет полезным собрать все полученные результаты в общую таблицу:

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,\ \bar{\varphi} = \varphi_1 - i\varphi_2; \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2},\quad \varphi_2 = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i};$$

$$\bar{\mu}(\varphi) = \overline{\mu(\bar{\varphi})}, \quad \overline{\mu(\varphi)} = \bar{\mu}(\bar{\varphi}); \qquad \text{(IV, 2; 39)}$$

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2,\ \bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2; \qquad \mu_1 = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2},\quad \mu_2 = \frac{\mu - \bar{\mu}}{2i}.$$

Вещественные положительные меры

Говорят, что $\mathbb{C}$-мера Радона μ на X положительна, если для любой неотрицательной функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеет место неравенство $\mu(\varphi) \geqslant 0$. Это записывается так: $\mu \geqslant 0$. Очевидно, для такой меры из $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ следует $\mu(\varphi_1) \leqslant \mu(\varphi_2)$.

Из определения следует, что положительная мера обязательно вещественна.

Мера Радона μ называется отрицательной (в обозначениях: $\mu \leqslant 0$), если $\mu(\varphi) \leqslant 0$ для любой функции $\varphi \geqslant 0$.

Для того чтобы мера была отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы она была противоположной по знаку к некоторой положительной мере.

Если μ и ν — две вещественные меры на X, то говорят, что $\mu \geqslant \nu$, если $\mu - \nu \geqslant 0$. Это означает, что для любой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$ имеет место неравенство $\mu(\varphi) \geqslant \nu(\varphi)$.

Если $\mu \geqslant \nu \geqslant 0$ и $\varphi \geqslant \psi \geqslant 0$, то $\mu(\varphi) \geqslant \nu(\psi) \geqslant 0$.

Замечание. Пусть μ — некоторая мера $\geqslant 0$. Для любой вещественной функции φ имеет место неравенство $-|\varphi| \leqslant \varphi \leqslant |\varphi|$, а, значит, $-\mu(|\varphi|) \leqslant \mu(|\varphi|) \leqslant \mu(|\varphi|)$, или

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \mu(|\varphi|). \qquad \text{(IV, 2; 39}_2\text{)}$$

Это соотношение сохраняется и для комплексной функции φ, однако его доказательство в этом случае значительно сложнее. Пусть K — носитель φ и $\mathscr{V}$ — компактная окрестность K. Пусть ψ — функция, построенная по функции φ согласно следствию 8 теоремы 11 и такая, что

$$\psi=\sum_{i=1}^{N} g_i\psi_i, \quad g_i\in\mathbb{C}, \quad \psi_i\in\mathscr{C}(X), \qquad (IV, 2; 39_3)$$

где $\psi_i\geqslant 0$ и имеют носитель в $\mathscr{V}$. Тогда

$$\left|\varphi(x)-\sum_{i=1}^{N} g_i\psi_i(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\,\|\mu\|_{\mathscr{V}}}, \qquad (IV, 2; 39_4)$$

$$\left||\varphi(x)|-\sum_{i=1}^{N}|g_i|\psi_i(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\,\|\mu\|_{\mathscr{V}}}. \qquad (IV, 2; 39_5)$$

Первое и второе неравенства последовательно дают

$$|\mu(\varphi)|\leqslant\sum_{i=1}^{N}|g_i|\mu(\psi_i)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\mu(|\varphi|)+\varepsilon. \qquad (IV, 2; 39_6)$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (IV, 2; 39_2), поскольку ε произвольно.

Позже мы укажем другой метод, использующий теорию продолжения Лебега. Будем рассматривать μ как некоторую $\mathbb{R}$-меру ($\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$). Функция $\vec{\varphi}\in\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ является функцией с векторными значениями в двумерном пространстве $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Поэтому (IV, 2; 39_2) перейдет в формулу (IV, 3; 27).

Из (IV, 2; 39_2) следует, что для вычисления $\|\mu\|_K$ можно ограничиться рассмотрением вещественных неотрицательных функций φ, при этом

$$\|\mu\|_K=\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{C}_K(X)\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 1}}\mu(\varphi) \quad \text{и} \quad \|\mu\|=\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{C}(X)\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 1}}\mu(\varphi). \qquad (IV, 2; 39_7)$$

Используя понятия, введенные в примечании на стр. 451, можно сказать, что если μ является вещественной положительной $\mathbb{C}$-мерой, то меры μ и $\mu_{\mathbb{R}}$ имеют одинаковую норму. Позже (см. замечание на стр. 488) мы увидим, что это утверждение остается справедливым, если μ является произвольной вещественной $\mathbb{C}$-мерой. Но это, конечно, неверно, когда μ является произвольной комплексной $\mathbb{C}$-мерой (это видно из примера в примечании на стр. 451). Можно также сказать, что в формуле $\|\mu\|_K=\sup_{|\varphi|\leqslant 1}|\mu(\varphi)|$ следует брать всевозможные комплексные функции φ. Если μ вещественна, то можно ограничиться вещественными функциями φ. Если $\mu\geqslant 0$, то достаточно брать $\varphi\geqslant 0$.

Бинарное отношение $\mu \leqslant \nu$ определяет на множестве вещественных мер на X некоторое отношение порядка. Для обоснования этого утверждения достаточно доказать единственное нетривиальное свойство: из неравенств $\mu \leqslant \nu$ и $\mu \geqslant \nu$ всегда следует равенство $\mu = \nu$. Для $\varphi \geqslant 0$ из этих неравенств следует равенство $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$. Но всякая вещественная функция из $\mathscr{C}(X)$ может быть представлена в виде разности двух неотрицательных функций из $\mathscr{C}(X)$ (например, $\varphi = |\varphi| - (|\varphi| - \varphi)$), а, следовательно, равенство справедливо для любой вещественной функции φ, а значит, и для комплексной функции $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, откуда $\mu = \nu$. Отношение порядка «совместимо с $\mathbb{R}$-векторной структурой пространства вещественных мер» в том смысле, что:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{из } \mu_1 \leqslant \nu_1 \text{ и } \mu_2 \leqslant \nu_2 & \text{следует } \mu_1 + \mu_2 \leqslant \nu_1 + \nu_2, \\ \text{из } \mu \leqslant \nu \text{ при } k \geqslant 0 & \text{следует } k\mu \leqslant k\nu. \end{array}\right\} \quad (\mathrm{IV}, 2; 39_8)$$

Векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное структурой порядка, обладающей этими свойствами, называется *полуупорядоченным векторным пространством.* Первое соотношение выражает тот факт, что $\mu \geqslant \nu$ эквивалентно неравенству $\mu - \nu \geqslant 0$ и что $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ влечет за собой $\mu + \nu \geqslant 0$. Второе означает, что при $k \geqslant 0$ из $\mu \geqslant 0$ следует $k\mu \geqslant 0$. Заметим, что в этом случае из $\mu \leqslant \nu$ следует $-\nu \leqslant -\mu$, т. е. следует неравенство $k\mu \geqslant k\nu$ при $k \leqslant 0$.

Пример. Рассмотрим меру, определенную на $\mathbb{R}$ формулой (IV, 2; 15). Ее сопряженная мера равна

$$\sum_{\nu} \bar{c}_\nu \delta_{(a_\nu)} + \bar{p}\,dx. \qquad (\mathrm{IV}, 2; 40)$$

Мера μ вещественна тогда и только тогда, когда мера $\sum\limits_{\nu} (c_\nu - \bar{c}_\nu)\,\delta_{(a_\nu)} + (p - \bar{p})\,dx$ равна нулю. Эта мера будет равна нулю, если все числа c_ν вещественны и вещественна функция p. Обратно, если эта мера равна нулю, то ее носитель пуст. Отсюда по теореме 15_2 в случае непрерывной функции p можно получить, что все величины $c_\nu - \bar{c}_\nu$ равны нулю и что равна нулю функция $p - \bar{p}$, иначе говоря, что вещественны c_ν и вещественна функция p. Этот результат, естественно, может быть неверным, если функция p не является непрерывной. Конечно, c_ν вещественны, но функция p не обязательно вещественна. Однако можно утверждать, *и это существенно*, что не обязательно равные p и $\operatorname{Re} p$ определяют одну и ту же меру $p\,dx = \operatorname{Re} p\,dx$ $\left[\text{поскольку } (p - \operatorname{Re} p)\,dx = \left(\frac{p - \bar{p}}{2}\right) dx = 0\right]$ и что, следовательно, в том случае, когда p не вещественна, можно заменить ее вещественной частью $\operatorname{Re} p$ без изменения меры.

Мера μ, определенная формулой (IV, 2; 15), при $c_\nu \geqslant 0$ и $p \geqslant 0$ положительна. В случае непрерывной функции p можно доказать и обратное утверждение [1]).

В самом деле, если точки a_ν считать различными и один из коэффициентов c_ν отрицательным или если в некоторой точке a непрерывная функция p принимает значение $p(a) < 0$, то без труда доказывается, что функция $\varphi \geqslant 0$, построенная в примерах 1—3 на стр. 468—471, удовлетворяет неравенству $\mu(\varphi) < 0$, и мы получили противоречие.

Решетки

Полуупорядоченное множество E называется *решеткой*, если любая его часть, образованная из двух элементов, имеет точную верхнюю грань (т. е. наименьшую из мажорант) и точную нижнюю грань. То же самое будет и для любого конечного непустого подмножества E. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ является решеткой. Полуупорядоченное множество $\mathbb{R}^X$ функций на X с вещественными значениями (см. стр. 23) есть решетка так же, как и множество $(\mathbb{R}^X)_c$ вещественных непрерывных функций на топологическом пространстве X. Напротив, множество полиномов на $\mathbb{R}$ с вещественными коэффициентами относительно обычного отношения порядка, очевидно, не является решеткой. *Если E — полуупорядоченное векторное пространство* (что имело место в предыдущих примерах), *то для того чтобы оно было решеткой, достаточно, чтобы для любого $e \in E$ существовал элемент $e^+ = \sup(e, 0)$.* В самом деле, пусть e и f — два произвольных элемента из E. Тогда элемент $e + (f - e)^+$ мажорирует элемент $e = e + 0$ и $e + (f - e) = f$. Если g мажорирует e и f, то $g - e$ мажорирует $e - e = 0$ и $f - e$, т. е. мажорирует $(f - e)^+$. Значит, g мажорирует элемент $e + (f - e)^+$, являющийся, таким образом, точной верхней гранью e и f. С другой стороны, e и f имеют точную нижнюю грань, а именно $-\sup(-e, -f)$. Наконец, всегда имеет место равенство $\sup(e, f) + \inf(e, f) = e + f$. Действительно, очевидно, что $\sup(e - h, f - h) = \sup(e, f) - h$. Полагая $h = e + f$, получаем нужную формулу. Положим $e^- = \sup(-e, 0) = (-e)^+$. Тогда $e = e + 0 = \sup(e, 0) + \inf(e, 0) = e^+ + e^-$. Элементы e^+ и e^- называются положительной и отрицательной частью e. Несмотря на свое название, $e^- \geqslant 0$, а не $\leqslant 0$, и скорее $-e^-$ заслуживает названия отрицательной части [2]). Теперь видно, что каждый

---

[1]) Если p не является непрерывной, то на те же вопросы дают полный ответ теоремы 52—54.

[2]) Точно так же a и b называются вещественной и мнимой частью комплексного числа $a + bi$, хотя скорее bi заслуживает названия мнимой части.

16 Зак. 1339

элемент e из E является разностью двух неотрицательных элементов: e^+ и e^-. Такое представление возможно бесконечным числом способов, поскольку можно положить $e = e_1 - e_2$, где $e_1 = e^+ + a$ и $e_2 = e^- + a$, $a \geqslant 0$. Однако e^+ и e^- являются наименьшими элементами $\geqslant 0$, разность которых дает e. В самом деле, если $e = e_1 - e_2$, e_1 и $e_2 \geqslant 0$, то e_1 мажорирует e и 0, а, следовательно, и e^+, e_2 мажорирует $-e$ и 0, а значит, и e^-. Мы возвращаемся к прежней форме: $e_1 = e^+ + a$, $e_2 = e^- + a$, $a \geqslant 0$. Элементы e^+ и e^- являются «дизъюнктными» в том смысле, что единственным элементом $\geqslant 0$, минорирующим оба элемента, является 0. Мало того, каждый элемент g, минорирующий одновременно e^+ и e^-, не больше нуля. В самом деле, высказанное утверждение означает, что $\inf(e^+, e^-) = 0$. Далее, $e^+ + \inf(0, e^- - e^+) = e^+ + \inf(0, -e) = e^+ - \sup(0, e) = e^+ - e^+ = 0$. Наконец, абсолютной величиной e называют точную верхнюю грань элементов e и $-e$: $|e| = \sup(e, -e)$.

Так как $|e| + e = \sup(2e, 0) = 2e^+$, то $|e| = 2e^+ - e = 2e^+ - (e^+ - e^-) = e^+ + e^-$. Поскольку $\inf(e^+, e^-) = 0$, то $e^+ + e^-$ также равен $\sup(e^+, e^-)$.

Говорят, что полуупорядоченное множество является полной решеткой, если любая его непустая мажорируемая часть имеет точную верхнюю грань, а любая непустая минорируемая часть имеет точную нижнюю грань (из первого условия, впрочем, следует второе, ибо если некоторая непустая часть A минорируема, то множество ее минорант мажорируемо и не пусто, а значит, имеет точную верхнюю грань, являющуюся точной нижней гранью части A. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ является полной решеткой точно так же, как и множество $\mathbb{R}^X$ функций на X с вещественными значениями. Однако если X является топологическим пространством, то множество $(\mathbb{R}^X)_c$ вещественных непрерывных на X функций является решеткой, но не полной.

Например, пусть X — вещественная прямая $\mathbb{R}$ и A — часть множества $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})_c$, образованная из непрерывных функций, мажорируемых характеристической функцией отрезка $[-1, 1]$. Точная верхняя грань множества A в полуупорядоченном множестве $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всевозможных вещественных функций на $\mathbb{R}$ является этой характеристической функцией. Так как характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$ разрывна, то A не имеет точной верхней грани в множестве $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})_c$ непрерывных функций.

Теорема 18. *Полуупорядоченное векторное пространство вещественных мер Радона на локально компактном пространстве X является полной решеткой. Если μ является некоторой вещественной мерой,* $\mu^+ = \sup(\mu, 0)$, $\mu^- = \sup(-\mu, 0)$, $|\mu| = \sup(\mu, -\mu) = \sup(\mu^+, \mu^-) = \mu^+ + \mu^-$, *то имеют место сле-*

дующие формулы:

$$\mu^+(\varphi) = \sup_{\substack{0 \leqslant \psi \leqslant \varphi \\ \psi \in \mathscr{C}(X)}} \mu(\psi) \quad \textit{для} \quad \varphi \geqslant 0, \tag{IV, 2; 41}$$

$$\| \mu \| = \| \mu^+ \| + \| \mu^- \|, \tag{IV, 2; 41$_2$}$$

где нормы вычислены на X или на некотором компакте K пространства X;

$$| \mu |(\varphi) = \sup_{\substack{|\psi| \leqslant \varphi \\ \psi \in \mathscr{C}(X)}} \mu(\psi) \quad \textit{для} \quad \varphi \geqslant 0$$

и (IV, 2; 41$_3$)

$$\| |\mu| \| = \| \mu \| = \| \mu^+ \| + \| \mu^- \|$$

на X или на некотором компакте K из X.

Таким образом, для $\varphi \geqslant 0$, $\mu(\varphi) \leqslant \mu^+(\varphi)$, $-\mu(\varphi) \leqslant \mu^-(\varphi)$ и, для произвольного φ, $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu|(|\varphi|)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{C}^+(X)$ множество функций $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$. Определим на $\mathscr{C}^+(X)$ функцию μ^+ со значениями в $\mathbb{R}_+$ по формуле (IV, 2; 41).

Она дает конечное значение, поскольку если K является носителем функции φ, то имеет место неравенство $|\mu(\psi)| \leqslant \leqslant \| \mu \|_K \| \psi \| \leqslant \| \mu \|_K \| \varphi \|$. Неравенство $\mu^+(\varphi) \geqslant 0$ следует из того, что среди функций ψ имеется функция 0. Покажем, что эта функция μ^+ на $\mathscr{C}^+(X)$ обладает следующими свойствами «линейности»:

$$\begin{gathered} \mu^+(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\varphi_2), \\ \mu^+(\lambda\varphi) = \lambda\mu^+(\varphi) \ \text{при} \ \lambda \geqslant 0. \end{gathered} \tag{IV, 2; 41$_4$}$$

Второе свойство очевидно. Поэтому достаточно доказать лишь первое. Каковы бы ни были функции ψ_1 и ψ_2, такие, что $0 \leqslant \leqslant \psi_1 \leqslant \varphi_1$ и $0 \leqslant \psi_2 \leqslant \varphi_2$, имеют место неравенства $0 \leqslant \psi_1 + + \psi_2 \leqslant \varphi_1 + \varphi_2$, откуда $\mu(\psi_1) + \mu(\psi_2) = \mu(\psi_1 + \psi_2) \leqslant \mu^+(\varphi_1 + + \varphi_2)$. Переходя к точной верхней грани относительно ψ_1 и ψ_2, отсюда непосредственно получаем:

$$\mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\varphi_2) \leqslant \mu^+(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Впрочем, если $\psi \in \mathscr{C}^+(X)$, $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi_1 + \varphi_2$, то можно найти такие две функции ψ_1 и ψ_2, которые удовлетворяли бы соотношениям:

$$0 \leqslant \psi_1 \leqslant \varphi_1, \quad 0 \leqslant \psi_2 \leqslant \varphi_2 \ \text{и} \ \psi_1 + \psi_2 = \psi.$$

Для этого достаточно взять

$$\psi_1 = \inf(\psi, \varphi_1) \ \text{и} \ \psi_2 = \psi - \psi_1.$$

Из определения следует, что имеют место соотношения $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \leqslant \varphi_1$, $0 \leqslant \psi_2$ и $\psi_1 + \psi_2 = \psi$. Пусть теперь $x \in X$. Если $\psi(x) \leqslant \leqslant \varphi_1(x)$, то $\psi_1(x) = \psi(x)$ и, следовательно, $\psi_2(x) = 0 \leqslant \varphi_2(x)$.

Если же, напротив, $\psi(x) > \varphi_1(x)$, то $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$, откуда

$$\psi_2(x) = \psi(x) - \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

Во всех случаях получаем $0 \leqslant \psi_2 \leqslant \varphi_2$.

Теперь будет справедливо неравенство

$$\mu(\psi) = \mu(\psi_1) + \mu(\psi_2) \leqslant \mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\varphi_2),$$

откуда, переходя к точной верхней грани относительно ψ, получаем неравенство $\mu^+(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\varphi_2)$, заканчивающее доказательство соотношения (IV, 2; 41_4).

Пусть теперь задана вещественная функция φ из $\mathscr{C}(X)$ произвольного знака. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде разности $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ двух функций $\geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$. Достаточно, например, положить $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, поскольку обе непрерывные функции φ^+ и φ^- имеют компактный носитель.

Определим теперь $\mu^+(\varphi)$ по формуле

$$\mu^+(\varphi) = \mu^+(\varphi_1) - \mu^+(\varphi_2).$$

Такое определение будет обоснованным лишь в том случае, когда мы докажем независимость $\mu^+(\varphi)$ относительно разложения $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ [1]). Итак, если $\varphi = \varphi_3 - \varphi_4$ — другое разложение, то $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$, откуда, согласно (IV, 2; 41_4), $\mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\varphi_4) = \mu^+(\varphi_2) + \mu^+(\varphi_3)$ и, следовательно, $\mu^+(\varphi_1) - \mu^+(\varphi_2) = \mu^+(\varphi_3) - \mu^+(\varphi_4)$, что полностью доказывает эту независимость. Мера μ^+ теперь определена как некоторая функция на $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ со значениями в $\mathbb{R}$. Очевидно, кроме того, что эта функция μ^+ линейна на этом векторном пространстве. В самом деле, формула $\mu^+(\lambda\varphi) = \lambda\mu^+(\varphi)$ очевидна и достаточно лишь доказать аддитивность. Если φ и ψ — две вещественные функции из $\mathscr{C}(X)$, то можно их записать в виде $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi = \psi_1 - \psi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \geqslant 0$. Теперь можно записать разложение $\varphi + \psi = (\varphi_1 + \psi_1) - (\varphi_2 + \psi_2)$, из которого с помощью (IV, 2; 41_4) следует формула

$$\mu^+(\varphi + \psi) = \mu^+(\varphi_1 + \psi_1) - \mu^+(\varphi_2 + \psi_2) =$$
$$= \mu^+(\varphi_1) + \mu^+(\psi_1) - \mu^+(\varphi_2) - \mu^+(\psi_2) = \mu^+(\varphi) + \mu^+(\psi),$$

заканчивающая доказательство линейности μ^+.

Проверим теперь свойство непрерывности, которое нам позволит утверждать, что μ^+ является некоторой скалярной $\mathbb{R}$-мерой.

Пусть K — некоторый компакт и α — функция $\geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$, равная 1 в некоторой окрестности компакта K (следствие теоремы 11). Положим $\mu^+(\alpha) = k$. Тогда для вещественной функ-

[1]) Если пользоваться только φ^+ и φ^-, то это доказательство не нужно. Однако тогда мы не сможем доказать линейности μ^+, так как $(\varphi + \psi)^+ \neq \varphi^+ + \psi^+$.

ции φ имеют место неравенства

$$-\|\varphi\|\alpha \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\|\alpha, \qquad (IV, 2; 41_5)$$

а, следовательно,

$$-\|\varphi\|\mu^+(\alpha) \leqslant \mu^+(\varphi) \leqslant \|\varphi\|\mu^+(\alpha) \text{ или } |\mu^+(\varphi)| \leqslant k\|\varphi\|,$$

из которых следует непрерывность μ^+ на $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ и справедливость неравенства $\|\mu^+\|_K \leqslant k = \mu^+(\alpha)$[1]. Этим заканчивается доказательство того, что μ^+ является некоторой $\mathbb{R}$-мерой. Мера эта, очевидно, $\geqslant 0$.

По определению, $\mu^+ \geqslant \mu$. Кроме того, каждая мера $\nu \geqslant 0$, мажорирующая меру μ, т. е. мажорирующая μ и 0, для любой функции $\varphi \geqslant 0$ и $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi$ удовлетворяет неравенствам $\nu(\varphi) \geqslant \nu(\psi) \geqslant \mu(\psi)$, а, следовательно, после перехода к точной верхней грани относительно ψ, — неравенству $\nu(\varphi) \geqslant \mu^+(\varphi)$, из которого вытекает соотношение $\nu \geqslant \mu^+$. Последнее означает, что μ^+ является точной верхней гранью μ и 0 в полуупорядоченном векторном пространстве вещественных мер на X. Значит, это пространство является решеткой.

Для произвольного компакта K имеет место неравенство $\|\mu\|_K \leqslant \|\mu^+\|_K + \|\mu^-\|_K$. Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая функция $\varphi_1 \in \mathscr{C}_K(X)$, при которой имеет место неравенство

$$\|\mu^+\| \geqslant \mu^+(\varphi_1) \geqslant \|\mu^+\|_K - \frac{\varepsilon}{4}, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 1.$$

(Можно взять $\varphi_1 \geqslant 0$, поскольку $\mu^+ \geqslant 0$. См. формулу (IV, 2; 39_7).)

Существует теперь функция $\psi_1 \in \mathscr{C}_K(X)$, $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \varphi_1 \leqslant 1$, такая, что

$$\mu(\psi_1) \geqslant \mu^+(\varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \|\mu^+\|_K - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же существует такая функция $\psi_2 \in \mathscr{C}_K(X)$, $0 \leqslant \psi_2 \leqslant 1$, при которой

$$-\mu(\psi_2) \geqslant \|\mu^-\|_K - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $\theta = \psi_1 - \psi_2$ лежит в $\mathscr{C}_K(X)$ и удовлетворяет условиям $|\theta| \leqslant 1$ и $\mu(\theta) \geqslant \|\mu^+\|_K + \|\mu^-\|_K - \varepsilon$. Наше утверждение следует из того, что ε произвольно. Тот же результат имеет место для норм, рассматриваемых на пространстве X.

Рассмотрим теперь меру $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ и покажем, что она может быть определена по формуле (IV, 2; 41_3). Прежде всего, так как для $\psi = \psi^+ - \psi^-$ $\mu(\psi) = \mu(\psi^+) - \mu(\psi^-) \leqslant \mu^+(\psi^+) +$

---

[1]) Мимоходом мы доказали общее свойство: любая линейная форма на $\mathscr{C}(X) \geqslant 0$ над $\mathscr{C}^+(X)$ является мерой, т. е. непрерывна на каждом $\mathscr{C}_K(X)$, где K — компакт, содержащийся в X.

$+\mu^-(\psi^-) \leqslant \mu^+(\varphi)+\mu^-(\varphi)=|\mu|(\varphi)$, то левая часть формулы (IV, 2; 41_3) не меньше правой ее части. Однако существуют такие функции ψ_1, ψ_2, $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \varphi$, $0 \leqslant \psi_2 \leqslant \varphi$, для которых

$$\mu(\psi_1) \geqslant \mu^+(\varphi)-\frac{\varepsilon}{2}, \quad -\mu(\psi_2) \geqslant \mu^-(\varphi)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $\theta=\psi_1-\psi_2$ удовлетворяет неравенству $|\theta| \leqslant \varphi$. При этом $\mu(\theta) \geqslant \mu^+(\varphi)+\mu^-(\varphi)-\varepsilon=|\mu|(\varphi)-\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ отсюда получаем соотношение (IV, 2; 41_3), которое говорит о том, что

$$\||\mu|\|_K=\sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathscr{C}_K(X)}}|\mu|(\varphi)=\sup_{\substack{|\psi| \leqslant 1 \\ \psi \in \mathscr{C}_K(X)}}|\mu(\psi)|=\|\mu\|_K,$$

а, следовательно, $\||\mu|\|_K=\|\mu^+\|_K+\|\mu^-\|_K$.

Мы определили μ^+, μ^-, $|\mu|$ как скалярные $\mathbb{R}$-меры ($\mathbb{R}$-линейные отображения $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$). Полагая $\mu^+(\varphi_1+i\varphi_2)=\mu^+(\varphi_1)+i\mu^+(\varphi_2)$ и т. д., можно определить их как скалярные $\mathbb{C}$-меры, вещественные, $\geqslant 0$ в смысле, указанном на стр. 476—478.

Согласно формуле (IV, 2; 39_7), для $\mathbb{C}$-меры $\geqslant 0$ норма вычисляется, исходя из ее значения на функциях $\geqslant 0$. Откуда получается, что формула $\|\mu\|=\||\mu|\|=\|\mu^+\|+\|\mu^-\|$ сохраняется для вещественных $\mathbb{C}$-мер. Кроме того, для комплексных функций ψ (и, конечно, $\varphi \geqslant 0$) сохраняется формула (IV, 2; 41_3) вместе со своим следствием (для комплексной φ) $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu|(|\varphi|)$ (поскольку $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu^+(\varphi)|+|\mu^-(\varphi)| \leqslant \mu^+(|\varphi|)+\mu^-(|\varphi|)=|\mu|(|\varphi|)$).

Остается, наконец, показать, что пространство вещественных мер является полной решеткой. (Это замечательно! Напомним, что пространство $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ не является полной решеткой.) Итак, пусть $(\mu_i)_{i \in I}$ — произвольное мажорируемое семейство вещественных мер. Для него существует такая мера ν, что для всех i $\mu_i \leqslant \nu$. Для каждого конечного непустого подмножества J множества I обозначим через μ_J точную верхнюю грань мер μ_i, $i \in J$. Очевидно, $\mu_K \geqslant \mu_J$, если $K \supset J$. Надо лишь доказать, что множество μ_J имеет точную верхнюю грань. Пусть $\varphi \geqslant 0$. Положим

$$\mu_0(\varphi)=\sup_J \mu_J(\varphi). \qquad \text{(IV, 2; } 41_6)$$

(Внимание! Написанное вовсе не одно и то же, что $\sup\limits_{i \in I} \mu_i(\varphi)$. Это дает совсем другой результат, ибо уже для двух мер μ_1 и μ_2 равенство $(\sup(\mu_1, \mu_2))(\varphi)=\sup(\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi))$ не справедливо. Например, для μ и 0 равенство $\mu^+(\varphi)=\sup(\mu(\varphi), 0)=(\mu(\varphi))^+$ места не имеет.) Эта величина конечна, так как она мажорируется величиной $\nu(\varphi)$.

Таким путем определяется некоторая функция на $\mathscr{C}^+(X)$. Докажем, что эта функция «линейна» в смысле формулы (IV, 2; 41$_4$). Относительно умножения на скаляр это очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть свойство аддитивности. Из неравенства

$$\mu_J(\varphi_1+\varphi_2)=\mu_J(\varphi_1)+\mu_J(\varphi_2)\leqslant\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_2)$$

переходом к точной верхней грани относительно J получаем $\mu_0(\varphi_1+\varphi_2)\leqslant\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_2)$. Однако существует такое конечное множество $J\subset I$, при котором $\mu_J(\varphi_1)\geqslant\mu_0(\varphi_1)-\varepsilon/2$, и такое конечное множество K, что $\mu_K(\varphi_2)\geqslant\mu_0(\varphi_2)-\varepsilon/2$. Поэтому, обозначая $L=J\cup K$, получим:

$$\mu_0(\varphi_1+\varphi_2)\geqslant\mu_L(\varphi_1+\varphi_2)=\mu_L(\varphi_1)+\mu_L(\varphi_2)\geqslant\mu_J(\varphi_1)+\mu_K(\varphi_2)\geqslant$$
$$\geqslant\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_2)-\varepsilon,$$

откуда и вытекает искомый результат. Затем можно определить μ_0 на $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ тем же самым способом, какой был использован при определении μ^+ из μ в начале доказательства этой теоремы. Мера μ_0 будет представлять собой $\mathbb{R}$-линейную форму на $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$. Надо лишь доказать ее непрерывность на $\mathscr{C}_K(X;\mathbb{R})$. Применим способ, использованный прежде для μ^+. Выберем произвольный индекс i. Тогда для $i\in J$ из неравенства $\mu_J\leqslant\nu$ следует $\mu_J^+\leqslant\nu^+$, а из неравенства $-\mu_J\leqslant-\mu_i$ следует $\mu_J^-\leqslant\mu_i^-$. Поэтому для любой вещественной функции φ

$$\mu_J(\varphi)=\mu_J(\varphi^+)-\mu_J(\varphi^-)\leqslant\nu^+(\varphi^+)+\mu_i^-(\varphi^-)\leqslant\nu^+(|\varphi|)+\mu_i^-(|\varphi|).$$

Точно так же

$$-\mu_J(\varphi)=-\mu_J(\varphi^+)+\mu_J(\varphi^-)\leqslant$$
$$\leqslant\mu_i^-(\varphi^+)+\nu^+(\varphi^-)\leqslant\nu^+(|\varphi|)+\mu_i^-(|\varphi|).$$

Окончательно: $|\mu_J(\varphi)|\leqslant(\nu^++\mu_i^-)(|\varphi|)$, или, переходя к точной верхней грани относительно J, $|\mu_0(\varphi)|\leqslant(\nu^++\mu_i^-)(|\varphi|)$. Отсюда сразу же вытекает непрерывность μ_0 и, кроме того, неравенство

$$\|\mu_0\|_K\leqslant\|\nu^+\|_K+\|\mu_i^-\|_K.$$

Теперь μ_0 является $\mathbb{R}$-мерой (ее можно, очевидно, продолжить в $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ до некоторой вещественной $\mathbb{C}$-меры). Она очевидным образом мажорирует все меры μ_J и по определению (IV, 2; 41$_6$) является наименьшей мерой, обладающей этим свойством. Следовательно, μ_0 является точной верхней гранью мер μ_J и, значит, множество вещественных мер на X является полной решеткой.

Замечание. Мы видели (формула (IV, 2; 39_7)), что норма $\mathbb{C}$-меры $\mu \geqslant 0$ может быть вычислена с помощью $\mu(\varphi)$, где φ — вещественные функции $\geqslant 0$. Теперь мы можем сказать, что норма вещественной $\mathbb{C}$-меры μ может быть вычислена с помощью $\mu(\varphi)$ с вещественными функциями φ (и что она, следовательно, равна норме $\mu_{\mathbb{R}}$; см. примечание на стр. 451). Это как раз то, что мы видели во время доказательства теоремы. Конечно, формула (IV, 2; 39_7) не верна. Однако, в силу соотношения (IV, 2; 41_3), для вещественной или комплексной φ всегда имеет место неравенство $|\mu(\varphi)| \leqslant |\mu|(|\varphi|)$.

Говорят, что векторная мера $\vec{\mu}$ на X *абсолютно мажорируема* вещественной мерой $\lambda \geqslant 0$, если для любой вещественной неотрицательной функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеет место неравенство

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant \lambda(\varphi). \qquad \text{(IV, 2; 42)}$$

Если φ — вещественная функция произвольного знака, то

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\| = \|\vec{\mu}(\varphi^+) - \vec{\mu}(\varphi^-)\| \leqslant \lambda(\varphi^+) + \lambda(\varphi^-) = \lambda(|\varphi|). \qquad \text{(IV, 2; 42}_2\text{)}$$

С помощью разложения единицы (см. доказательство соотношения (IV, 2; 39_2)) можно показать, что это неравенство сохраняется и для комплексной функции φ. Если μ является вещественной $\mathbb{C}$-мерой, то из формулы (IV, 2; 41_3) следует, что наименьшей мерой, мажорирующей по модулю меру μ, является мера $|\mu|$.

Пусть $\vec{E}$ — конечномерное векторное пространство, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис $\vec{E}$ как векторного пространства *над полем* $\mathbb{R}$. Для каждой вещественной функции φ можно написать разложение

$$\vec{\mu}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\varphi)\vec{e}_i,$$

где μ_i: $\varphi \to \mu_i(\varphi)$ являются $\mathbb{R}$-линейными формами на $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$, непрерывными на $\mathscr{C}_K(X; \mathbb{R})$ (K — компакт пространства X), т. е. скалярными $\mathbb{R}$-мерами на X. Так как для каждого $\varphi \geqslant 0$

$$\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} \|\vec{e}_i\| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|(\varphi),$$

то $\vec{\mu}$ абсолютно мажорируема положительной мерой $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \|\vec{e}_i\| \sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i|$. Но тогда она имеет наименьшую абсолютную мажоранту. Более общо, любая мера со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$, обладающая абсолютной мажорантой, имеет наименьшую абсолютную мажоранту, а именно: точную нижнюю грань минорируемого нулем непустого множества абсолютных мажорант (множество вещественных мер является полной решеткой).

Однако *мера со значениями в бесконечномерном банаховом пространстве, вообще говоря, не имеет абсолютной мажоранты.* Рассмотрим, например, случай компактного пространства X. Пусть $\vec{E} = \mathscr{C}(X)$ — пространство с обычной нормой. Тождественное отображение $\varphi \to \varphi$ определяет на X меру $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E} = \mathscr{C}(X)$. У этой меры нет абсолютной мажоранты (кроме случая, когда X конечно). В самом деле, пусть λ — ее абсолютная мажоранта. Тогда для любой функции $\varphi \geqslant 0$ $\|\varphi\| = \|\mu(\varphi)\| \leqslant \lambda(\varphi)$. Если X — бесконечное множество, то для любого n можно найти n попарно не пересекающихся открытых множеств (следствие 6 теоремы 11, примененное к n замкнутым множествам, сводящимся к отдельным точкам). Для каждого из них можно найти непрерывные функции α_i, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, с носителями в этих множествах, принимающие значение 1 не менее чем в одной точке (лемма 1 к теореме 11). Так как $1 = \|\alpha_i\| \leqslant \lambda(\alpha_i)$, то $n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leqslant \lambda(1)$, что невозможно, поскольку $\lambda(1)$ конечно. Мы получаем, что $\vec{\mu}$ абсолютной мажоранты не имеет.

Замечание. Мы определили $|\mu|$ для вещественной $\mathbb{C}$-меры μ, но не для комплексной $\mathbb{C}$-меры. Теперь возможно сделать и это. Более общо, если $\vec{\mu}$ является мерой со значениями в конечномерном векторном пространстве $\vec{E}$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то в качестве $|\vec{\mu}|$ можно взять ее наименьшую абсолютную мажоранту. Эта мажоранта является некоторой мерой $\geqslant 0$ и $\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant |\mu|(|\varphi|)$. В соотношении $\|\vec{\mu}\| \leqslant \||\vec{\mu}|\|$ в случае скалярной меры (вещественной $\mathbb{R}$-меры или комплексной $\mathbb{C}$-меры) имеет место равенство. Равенство не будет выполняться в общем случае векторной меры (см. примечание к теореме 15), а, значит в частности, для $\mathbb{R}$-меры со значением в $\mathbb{C}$.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ. ТЕОРИЯ ЛЕБЕГА

Пусть μ — некоторая мера $\geqslant 0$ на локально компактном пространстве X. Постараемся определить меру $\mu(\varphi)$ для функций φ, отличных от непрерывных функций с компактным носителем. Точно так же в случае меры $\mu = dx$ с помощью теории