рантой, имеет наименьшую абсолютную мажоранту, а именно: точную нижнюю грань минорируемого нулем непустого множества абсолютных мажорант (множество вещественных мер является полной решеткой).

Однако *мера со значениями в бесконечномерном банаховом пространстве, вообще говоря, не имеет абсолютной мажоранты.* Рассмотрим, например, случай компактного пространства X. Пусть $\vec{E} = \mathscr{C}(X)$ — пространство с обычной нормой. Тождественное отображение $\varphi \to \varphi$ определяет на X меру $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E} = \mathscr{C}(X)$. У этой меры нет абсолютной мажоранты (кроме случая, когда X конечно). В самом деле, пусть λ — ее абсолютная мажоранта. Тогда для любой функции $\varphi \geqslant 0$ $\|\varphi\| = \|\mu(\varphi)\| \leqslant \lambda(\varphi)$. Если X — бесконечное множество, то для любого n можно найти n попарно не пересекающихся открытых множеств (следствие 6 теоремы 11, примененное к n замкнутым множествам, сводящимся к отдельным точкам). Для каждого из них можно найти непрерывные функции α_i, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, с носителями в этих множествах, принимающие значение 1 не менее чем в одной точке (лемма 1 к теореме 11). Так как $1 = \|\alpha_i\| \leqslant \lambda(\alpha_i)$, то $n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leqslant \lambda(1)$, что невозможно, поскольку $\lambda(1)$ конечно. Мы получаем, что $\vec{\mu}$ абсолютной мажоранты не имеет.

Замечание. Мы определили $|\mu|$ для вещественной $\mathbb{C}$-меры μ, но не для комплексной $\mathbb{C}$-меры. Теперь возможно сделать и это. Более общо, если $\vec{\mu}$ является мерой со значениями в конечномерном векторном пространстве $\vec{E}$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то в качестве $|\vec{\mu}|$ можно взять ее наименьшую абсолютную мажоранту. Эта мажоранта является некоторой мерой $\geqslant 0$ и $\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant |\mu|(|\varphi|)$. В соотношении $\|\vec{\mu}\| \leqslant \||\vec{\mu}|\|$ в случае скалярной меры (вещественной $\mathbb{R}$-меры или комплексной $\mathbb{C}$-меры) имеет место равенство. Равенство не будет выполняться в общем случае векторной меры (см. примечание к теореме 15), а, значит в частности, для $\mathbb{R}$-меры со значением в $\mathbb{C}$.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ. ТЕОРИЯ ЛЕБЕГА

Пусть μ — некоторая мера $\geqslant 0$ на локально компактном пространстве X. Постараемся определить меру $\mu(\varphi)$ для функций φ, отличных от непрерывных функций с компактным носителем. Точно так же в случае меры $\mu = dx$ с помощью теории

Римана мы могли определить $\int \varphi\, dx$ для функций φ, отличных от непрерывных функций, имеющих компактные носители. Впрочем, если $\mu = \delta_{(a)}$, то совершенно естественно положить $\mu(\varphi) = \delta_{(a)}(\varphi) = \varphi(a)$ *для любой комплексной функции* φ *на* X.

Излагаемая здесь теория Лебега является значительно более общей, чем теория Римана. Даже в случае меры $\mu = dx$ множество интегрируемых по Лебегу функций шире, чем множество функций, интегрируемых по Риману. Однако эта теория сложнее, тоньше и зачастую скучнее. Поэтому мы позволим себе принять некоторые из теорем без доказательства [1]).

Раз и навсегда предположим, что X является локально компактным, счетным в бесконечности пространством, т. е. пространством, являющимся объединением счетного множества компактов [2]). Это будет, например, случай конечномерных векторных пространств, поскольку их всегда можно рассматривать как счетное объединение замкнутых шаров, т. е. компактных частей. Все локально компактные пространства, обычно встречающиеся в анализе, обладают этим свойством. Поэтому вводимое ограничение не является особо существенным. Оно не является необходимым для всей теории, но потребуется для нескольких фундаментальных теорем. С другой стороны, мы всегда будем считать, что на X задана мера Радона $\mu \geqslant 0$. Говорят, что X *является пространством с мерой, если X локально компактно, счетно в бесконечности и снабжено мерой* $\mu \geqslant 0$. Тот факт, что $\mu \geqslant 0$, существен.

Внешние меры открытых множеств

Пусть $\mathcal{O}$ — открытая часть X. *Внешней мерой открытого множества $\mathcal{O}$ относительно меры* μ называется норма $\|\mu\|_{\mathcal{O}}$ сужения μ на это открытое множество, т. е. точная верхняя грань $\mu(\varphi)$ на всех функциях φ из $\mathscr{C}(X)$ с носителем в $\mathcal{O}$, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Эта мера будет обозначаться через $\mu^*(\mathcal{O})$. Число $\mu^*(\mathcal{O})$ неотрицательно, конечно или бесконечно.

Для мер открытых множеств можно доказать ряд свойств. Некоторые из этих свойств очевидны.

---

[1]) *Приводимый здесь метод изложения теории Лебега не является ни самым кратким, ни самым лучшим.* Однако: 1) будет введено минимальное число новых понятий, а именно: не будет необходимости в изучении полунепрерывных снизу функций; 2) одновременно получатся интегралы от векторных функций; 3) все, что здесь вводится, во всяком случае постоянно применяется в анализе.

[2]) Мы повторим это условие, если оно будет *существенным* для справедливости теоремы. Такое ограничение уже вводилось в теореме 11.

Например, если $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ — два открытых множества и если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то в силу положительности μ получаем: $\mu^*(\mathcal{O}_1) \leqslant \leqslant \mu^*(\mathcal{O}_2)$.

С другой стороны, $\mu^*(\emptyset) = 0$ и $\mu^*(X) = \|\mu\|$.

Приведем два примера не столь элементарных свойств.

1°) Пусть $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ — возрастающая последовательность открытых множеств X. Их объединение $\mathcal{O}$ является открытым множеством, и имеет место формула

$$\mu^*(\mathcal{O}) = \mu^*\left(\bigcup_n \mathcal{O}_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(\mathcal{O}_n). \qquad \text{(IV, 3; 1)}$$

Докажем эту формулу. Прежде всего, имеет место очевидное неравенство $\mu^*(\mathcal{O}) \geqslant \mu^*(\mathcal{O}_n)$.

Пусть теперь M — такое произвольное конечное число, что $M < \mu^*(\mathcal{O})$. Нам достаточно доказать, что существует такое целое число n, что $\mu^*(\mathcal{O}_n) \geqslant M$. Согласно определению $\mu^*(\mathcal{O})$, существует такая функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ с носителем в $\mathcal{O}$, что $0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 1$ и $\mu(\varphi) \geqslant M$. Открытые множества $\mathcal{O}_n$ пересекают компактный носитель K функции φ по открытым множествам этого компакта. Тем самым определяется возрастающая последовательность открытых множеств этого компакта. Поскольку объединение $\mathcal{O}$ множеств $\mathcal{O}_n$ покрывает K, то существует такое целое число n, при котором $\mathcal{O}_n$ покрывает компакт K. Функция φ принадлежит $\mathscr{C}(X)$, имеет носитель в $\mathcal{O}_n$ и удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, так что, по определению меры $\mu^*(\mathcal{O}_n)$, имеет место соотношение $\mu(\varphi) \leqslant \mu^*(\mathcal{O}_n)$. Отсюда получаем неравенство $\mu^*(\mathcal{O}_n) \geqslant M$, доказывающее наше утверждение.

2°) Пусть $\mathcal{O}$ является объединением последовательности открытых множеств $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$. Тогда

$$\mu^*(\mathcal{O}) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(\mathcal{O}_n). \qquad \text{(IV, 3; 2)}$$

В самом деле, пусть $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеет носитель K в $\mathcal{O}$ и $0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 1$. Множества $\mathcal{O}_n$ образуют открытое покрытие K. Поскольку K является компактом, то достаточно конечного числа этих множеств $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ для покрытия K. Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ является разложением единицы, подчиненным покрытию $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ компакта K. Тогда $\alpha_i\varphi$ принадлежит $\mathscr{C}(X)$, имеет носитель в $\mathcal{O}_i$ и $0 \leqslant \alpha_i\varphi \leqslant 1$, а, значит, $\mu(\alpha_i\varphi) \leqslant \mu^*(\mathcal{O}_i)$. Отсюда

$$\mu(\varphi) = \sum_{i \in I} \mu(\alpha_i\varphi) \leqslant \sum_{i \in I} \mu^*(\mathcal{O}_i) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(\mathcal{O}_n). \qquad \text{(IV, 3; 3)}$$

Переходя в левой части к точной верхней грани по всем рассматриваемым функциям φ, получаем соотношение (IV, 3; 2).

Замечания. 1°) Предположим, что μ является атомической мерой $\sum\limits_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)}$, где все $c_\nu \geqslant 0$. Из теоремы 15 вытекает, что

$$\mu^*(\mathcal{O}) = \|\mu\|_{\mathcal{O}} = \sum_{a_\nu \in \mathcal{O}} c_\nu \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 3; 4)}$$

2°) Пусть $X = \mathbb{R}$ и μ является мерой $p\,dx$, где $p \geqslant 0$ — локально интегрируемая по Риману функция. Если, кроме того, $\mathcal{O}$ является открытым ограниченным интервалом $]a, b[$, то

$$\mu^*(]a,\ b[) = \int_{[a,\ b]} p(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 3; 5)}$$

В самом деле, неравенство $\mu^*(]a, b[) \leqslant \int_{[a,\ b]} p(x)\,dx$ очевидно. Однако легко найти a' и b', $a < a' < b' < b$, такие, что

$$\int_{[a,\ a']} p(x)\,dx + \int_{[b,\ b']} p(x)\,dx \leqslant ((a' - a) + (b' - b)) \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Если теперь взять функцию φ, равную 1 в $[a', b']$, 0 в $\complement]a'', b''[$, где $a'' = (a + a')/2$, $b'' = (b + b')/2$, и аффинную там, где она еще не определена, то получим:

$$\mu(\varphi) \geqslant \int_{[a',\ b']} p(x)\,dx \geqslant \int_{[a,\ b]} p(x)\,dx - \varepsilon.$$

Искомый результат получается в силу произвольности ε.

3°) Если мера μ равна нулю в открытом множестве $\mathcal{O}$ (см. определение на стр. 465), то $\mu^*(\mathcal{O}) = 0$, и обратно. Мера дополнения к носителю меры μ равна нулю.

4°) Если замыкание открытого множества $\mathcal{O}$ компактно, то мера $\mu^*(\mathcal{O})$ конечна. В самом деле, найдем, согласно следствию 1 теоремы 11, функцию $\theta \in \mathscr{C}(X)$, $\geqslant 0$ и $\equiv 1$ на $\overline{\mathcal{O}}$. Тогда для всех функций φ, служащих для определения $\mu^*(\mathcal{O})$, необходимо имеет место неравенство $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\theta)$ и, следовательно, $\mu^*(\mathcal{O}) \leqslant \leqslant \mu(\theta)$.

Внутренняя мера компакта

Пусть K — некоторый компакт из X. *Внутренней мерой компакта K относительно меры* μ называется точная нижняя грань $\mu(\varphi)$ по всевозможным функциям $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$ и $\geqslant 1$ на окрестностях компакта K. Эта мера обозначается через $\mu_*(K)$. Она всегда конечна, поскольку, согласно следствию 1 теоремы 11, существует хотя бы одна функция φ_0, обладающая указанными свойствами и, следовательно, искомая точная нижняя грань $\leqslant \mu(\varphi_0)$.

Предположим, что K является некоторым компактом, содержащимся в открытом множестве $\mathcal{O}$. Покажем, что тогда $\mu_*(K) \leqslant \mu^*(\mathcal{O})$.

По следствию 1 теоремы 11, существует функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, равная 1 в некоторой окрестности K и имеющая носитель в $\mathcal{O}$. Теперь, по определению $\mu_*(K)$ и $\mu^*(\mathcal{O})$, имеют место неравенства $\mu_*(K) \leqslant \mu(\varphi)$ и $\mu(\varphi) \leqslant \mu^*(\mathcal{O})$, из которых вытекает наше утверждение.

Примеры. 1°) Если μ является атомической мерой $\sum_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)}$, где $c_\nu \geqslant 0$, то

$$\mu_*(K) = \sum_{a_\nu \in K} c_\nu. \tag{IV, 3; 5_2}$$

В самом деле, для любой функции $\varphi \geqslant 0$, такой, что $\varphi \geqslant 1$ в некоторой окрестности K, имеет место неравенство $\sum_\nu c_\nu \varphi(a_\nu) \geqslant \geqslant \sum_{a_\nu \in K} c_\nu$, а значит, и $\mu_*(K) = \sum_{c_\nu \in K} c_\nu$. С другой стороны, пусть $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность K с компактным замыканием (см. примечание на стр. 456). Тогда $\sum_{a_\nu \in \mathcal{O}} c_\nu < +\infty$. Следовательно, существует такое конечное множество J, что $\sum_{\substack{\nu \notin J \\ a_\nu \in \mathcal{O}}} c_\nu \leqslant \varepsilon$.

Обозначим через $\mathcal{O}'$ открытое множество, полученное из $\mathcal{O}$ удалением точек a_ν, $\nu \in J$, $a_\nu \notin K$. Тогда

$$\mu_*(K) \leqslant \mu^*(\mathcal{O}') = \sum_{a_\nu \in \mathcal{O}'} c_\nu \leqslant \sum_{a_\nu \in K} c_\nu + \varepsilon. \tag{IV, 3; 5_3}$$

Поскольку ε произвольно, $\mu_*(K) \leqslant \sum_{a_\nu \in K} c_\nu$, а, значит, $\mu_*(K) = \sum_{a_\nu \in K} c_\nu$.

2°) Пусть μ является мерой $p\,dx$ на $\mathbb{R}$, где $p \geqslant 0$, и пусть K — ограниченный интервал $[a, b]$. Тогда

$$\mu_*([a, b]) = \int_{[a, b]} p(x)\,dx. \tag{IV, 3; 5_4}$$

Рассуждения остаются теми же, что и в примере 1°). Прежде всего непосредственно видно, что $\mu_*([a, b]) \geqslant \int_{[a, b]} p(x)\,dx$. Выберем затем такой открытый интервал $]a', b'[$, $a' < a < b < b'$, чтобы $\int\limits_{[a,\,a']} p(x)\,dx + \int\limits_{[b,\,b']} p(x)\,dx \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\mu_*([a,\ b]) \leqslant \mu^*(]a',\ b'[) = \int\limits_{[a',\,b']} p(x)\,dx \leqslant \int\limits_{[a,\,b]} p(x)\,dx + \varepsilon,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Измеримые множества. Мера множеств

Определение. *Внешней мерой подмножества A множества X относительно* μ называется точная нижняя грань внешних мер открытых множеств, содержащих A. Эта мера обозначается через $\mu^*(A)$.

Внутренней мерой подмножества A относительно μ называется точная верхняя грань внутренних мер компактов, содержащихся в A. Внутренняя мера обозначается через $\mu_*(A)$. Поскольку для компакта K, содержащегося в открытом множестве $\mathcal{O}$, справедливо неравенство $\mu_*(K) \leqslant \mu^*(\mathcal{O})$, то $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.

Если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ и $\mu_*(A) \leqslant \mu_*(B)$.

Если A является объединением конечного или счетного семейства множества A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu^*(A_n). \qquad \text{(IV, 3; 6)}$$

Это неравенство очевидно, если одно из чисел $\mu^*(A_n)$ равно $+\infty$. Предположим поэтому, что все они конечны.

Для каждого n можно найти такое открытое множество $\mathcal{O}_n \supset A_n$, что $\mu^*(\mathcal{O}_n) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Если $\mathcal{O} = \bigcup\limits_n \mathcal{O}_n$, то получаем

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(\mathcal{O}) \leqslant \sum_n \mu^*(\mathcal{O}_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon\ ^{1)}. \qquad \text{(IV, 3; 6}_2\text{)}$$

Поскольку ε произвольно, мы получаем отсюда (IV, 3; 6).

Предположим теперь, что множества A_n не пересекаются. В этом случае *неравенство* (IV, 3; 6) *вовсе не обязано перейти в равенство* (оно станет равенством, если A_n измеримы; см. формулу (IV, 3; 7_3)). [Подчеркнем, однако, что неравенство перейдет в равенство тогда, когда не только A_n, но и $\bar{A}_n$ не будут пересекаться. Мы воспользуемся этим только после теоремы 19, а докажем с помощью этой теоремы.

Для заданного N можно найти открытые непересекающиеся множества $\mathcal{O}_n \supset \bar{A}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ (следствие 6 теоремы 11). Для каждого открытого множества $\mathcal{O} \supset A$ имеет место включе-

[1]) Согласно (IV, 3; 2).

ние $\mathcal{O} \supset \bigcup_{n=0}^{N} (\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_n)$. Так как множества $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_n$ открыты, а значит, измеримы и не пересекаются, то по теореме 19 получаем

$$\mu(\mathcal{O}) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_n) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu^*(A_n).$$

Переходя к точной нижней грани по всем $\mathcal{O}$, получаем неравенство $\mu^*(A) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu^*(A_n)$, откуда, устремляя N к $+\infty$, получаем $\mu^*(A) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$ и, следовательно, $\mu^*(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Замыкания A_n не пересекаются.] С другой стороны, при непересекающихся A_n для внутренних мер имеют место неравенства. Ограничимся, как и ранее, случаем конечных $\mu_*(A_n)$, так как в противном случае рассматриваемое свойство очевидно. Для каждого n можно найти такой компакт $K_n \subset A_n$, при котором $\mu_*(K_n) \geqslant \mu_*(A_n) - \varepsilon/2^{n+2}$. Затем для заданного N можно найти непрерывные функции α_n, $n=0, 1, 2, \ldots, N$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, принимающие значение 1 в некоторой окрестности K_n и имеющие попарно пересекающиеся носители (пользуясь следствием 6 теоремы 11, мы можем взять попарно не пересекающиеся открытые множества $\mathcal{U}_i$, содержащие K_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, и применить следствие 1 этой теоремы к каждой паре $K_i \subset \mathcal{U}_i$). Пусть теперь задана функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $\varphi \geqslant 0$, равная 1 в окрестности множества $K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_N$ и такая, что $\mu(\varphi) \leqslant \mu_*(K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_n) + \varepsilon/2$. Так как $\alpha_n \varphi \geqslant 0$ и равна 1 на окрестности множества K_n, то $\mu(\alpha_n \varphi) \geqslant \mu_*(K_n)$. Однако поскольку носители функций α_n не пересекаются, то $\varphi \geqslant \alpha_0 \varphi + \ldots + \alpha_N \varphi$, а, следовательно, $\mu(\varphi) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu(\alpha_n \varphi) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu_*(K_n)$, что дает неравенство

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{N} K_n\right) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu_*(K_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно,

$$\mu_*(A) \geqslant \mu_*\left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right) \geqslant \mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{N} K_n\right) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu_*(K_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu_*(A_n) - \varepsilon. \tag{IV, 3; 7}$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то $\mu_*(A) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu_*(A_n)$, и поскольку последнее соотношение верно при любом N, то *для попарно не пересекающихся A_n, дающих* *в объединении множество A*, получаем

$$\mu_*(A) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(A_n). \qquad \text{(IV, 3; 7}_2\text{)}$$

Говорят, что подмножество A множества X *псевдоизмеримо* по μ, если его внутренние и внешние меры (конечные или нет) равны между собой. Их общее значение называется мерой A и обозначается через $\mu(A)$. Мы ввели название псевдоизмеримого, а не измеримого множества, поскольку, как мы увидим позднее, это определение слишком широко: измеримым следует назвать часть псевдоизмеримых множеств, для которых справедливо свойство аддитивности.

Докажем некоторые свойства так определенной меры множеств.

1°) *Открытые множества псевдоизмеримы.* В самом деле, пусть $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество и M — такое конечное число, что $\mu^*(\mathcal{O}) > M$. Тогда существует такая функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{O}$, что $\mu(\varphi) \geqslant M$.

Пусть K — компактный носитель φ. Для каждой функции $\psi \in \mathscr{C}(X)$, $\geqslant 0$ и $\geqslant 1$ на некоторой окрестности K справедливо неравенство $\mu(\psi) \geqslant \mu(\varphi) \geqslant M$. Переходя к точной нижней грани по всевозможным таким ψ, получим $\mu_*(K) \geqslant M$. Поскольку это справедливо для любого M, то $\mu_*(\mathcal{O}) = \sup\limits_{K \subset \mathcal{O}} \mu_*(K) = \mu^*(\mathcal{O})$, что означает псевдоизмеримость открытого множества $\mathcal{O}$.

2°) *Компактные множества псевдоизмеримы.* Пусть K — произвольный компакт. Пусть φ — функция из $\mathscr{C}(X)$, $\geqslant 0$ и $\geqslant 1$ в окрестности K и такая, что $\mu(\varphi) \leqslant \mu_*(K) + \varepsilon$. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество $\supset K$, на котором $\varphi(x) \geqslant 1$. Так как для любой функции $\psi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{O}$ имеет место неравенство $\psi \leqslant \varphi$, то $\mu(\psi) \leqslant \mu(\varphi)$. Переходя к точной верхней грани по всем ψ, получим неравенства $\mu^*(\mathcal{O}) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu_*(K) + \varepsilon$. Отсюда, поскольку ε произвольно, получаем равенство $\mu^*(K) = \inf\limits_{\mathcal{O} \supset K} \mu^*(\mathcal{O}) = \mu_*(K)$, означающее псевдоизмеримость компакта K.

3°) Пусть A является объединением конечного или счетного числа псевдоизмеримых *непересекающихся* множеств A_n. Из неравенств (IV, 3; 6) и (IV, 3; 7_2) непосредственно следует, что A *псевдоизмеримо* и что

$$\mu(A) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n). \qquad \text{(IV, 3; 7}_3\text{)}$$

4°) Пусть C и D — два *непересекающихся* подмножества X. Мы уже знаем, что

$$\mu^*(C \cup D) \leqslant \mu^*(C) + \mu^*(D). \qquad \text{(IV, 3; 7}_4\text{)}$$

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество $\supset(C \cup D)$ и K — некоторый компакт $\subset C$. Тогда $\mathcal{O}-K$ является некоторым открытым множеством, содержащим D, а, значит, $\mu(\mathcal{O}-K) \geqslant \mu^*(D)$. С другой стороны, $\mathcal{O}$ является объединением двух псевдоизмеримых непересекающихся подмножеств K (компакт) и $\mathcal{O}-K$ (открытое множество). Из 3°) следует, что

$$\mu(\mathcal{O})=\mu(K)+\mu(\mathcal{O}-K) \geqslant \mu(K)+\mu^*(D).$$

Переходя теперь по всевозможным K при фиксированном $\mathcal{O}$ к точной верхней грани, получаем: $\mu(\mathcal{O}) \geqslant \mu_*(C)+\mu^*(D)$. Точная верхняя грань по всевозможным $\mathcal{O}$ дает замечательное неравенство:

$$\mu^*(C \cup D) \geqslant \mu_*(C)+\mu^*(D). \qquad (\mathrm{IV}, 3; 7_5)$$

(Здесь, очевидно, можно переставлять множества C и D.)

В частности, *если C псевдоизмеримо*, то из (IV, 3; 7_4) и (IV, 3; 7_5) можно получить *замечательное равенство* (замечательное потому, что редко удается получать равенства, в которых участвуют не псевдоизмеримые множества):

$$\mu^*(C \cup D)=\mu(C)+\mu^*(D). \qquad (\mathrm{IV}, 3; 7_6)$$

Что же касается внутренних мер, то, согласно (IV, 3; 7_2), прежде всего имеем:

$$\mu_*(C \cup D) \geqslant \mu_*(C)+\mu_*(D). \qquad (\mathrm{IV}, 3; 7_7)$$

Пусть K — некоторый компакт $\subset(C \cup D)$ и $\mathcal{O}$ — открытое множество $\supset D$. Компакт $K \cap \complement\mathcal{O}$ содержится в C, а, следовательно, его мера $\leqslant \mu_*(C)$. Так как множество $K \cup \mathcal{O}$ является объединением двух псевдоизмеримых непересекающихся множеств $\mathcal{O}$ (открытое множество) и $K \cap \complement\mathcal{O}$ (компакт), то оно псевдоизмеримо и из 3°) получаем

$$\mu(K) \leqslant \mu(K \cup \mathcal{O})=\mu(\mathcal{O})+\mu(K \cap \complement\mathcal{O}) \leqslant \mu(\mathcal{O})+\mu_*(C).$$

Переходя последовательно к точной верхней грани по всем K, а затем к точной нижней грани по всевозможным $\mathcal{O}$, получаем:

$$\mu_*(C \cup D) \leqslant \mu_*(C)+\mu^*(D). \qquad (\mathrm{IV}, 3; 7_8)$$

(Здесь можно, очевидно, переставлять C и D.)

Меняя ролями C и D, затем применяя соотношения (IV, 3; 7_7) и (IV, 3; 7_8), для псевдоизмеримого C можно получить замечательное равенство:

$$\mu_*(C \cup D)=\mu(C)+\mu_*(D). \qquad (\mathrm{IV}, 3; 7_9)$$

Из соотношений (IV, 3; 7_6) и (IV, 3; 7_9) следует, что если множества C и D не пересекаются, множества C и $C \cup D$ псевдоизмеримы, а множество C имеет конечную меру, то множество D псевдоизмеримо, поскольку

$$\mu^*(D) = \mu_*(D) = \mu(C \cup D) - \mu(C).$$

В том случае, когда $\mu(C) = \mu(C \cup D) = +\infty$, этот результат не сохраняется, так как разность при этом не определена. Впрочем, легко привести и контрпример. Позже (стр. 503) мы приведем пример не псевдоизмеримого по $\mu = dx$ множества D, содержащегося в ограниченном интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$. Пусть $C = \complement([a, b])$. Тогда оно открыто и имеет меру, равную $+\infty$. Поскольку $(C \cup D) \supset C$, это множество псевдоизмеримо, имеет меру $+\infty$, но тем не менее множество D не является псевдоизмеримым.

Если положить $A = C \cup D$ и $B = C$, то полученный результат можно записать в другом эквивалентном виде. *Если A и B псевдоизмеримы, $A \supset B$ и если B имеет конечную меру, то множество $A - B = A \cap \complement B$ псевдоизмеримо и $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$.*

Полученное соотношение не сохраняется, если $\mu(B) = +\infty$. Полагая $A = X$, получаем, что *если B псевдоизмеримо и имеет конечную меру, то $\complement B$ также псевдоизмеримо* (вообще говоря, это неверно, если $\mu(B) = +\infty$).

5°) Пусть A является объединением конечного числа псевдоизмеримых множеств: $A = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. Тогда A псевдоизмеримо (и в силу (IV, 3; 6) имеет место неравенство $\mu(A) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)$). Следует подчеркнуть, что п. 5°) отличается от п. 3°), так как множества A_n здесь не предполагаются непересекающимися. Это свойство очевидно, если одно из множеств A_n имеет бесконечную меру, так как тогда и множество A будет иметь бесконечную меру. Предположим поэтому, что все меры $\mu(A_n)$ конечны. Пусть $\mathcal{O}_n$ — открытое множество, содержащее A_n и такое, что $\mu(\mathcal{O}_n) \leqslant \mu(A_n) + \varepsilon/[2(N+1)]$, и пусть K_n—такой компакт $\subset A_n$, что $\mu(K_n) \geqslant \mu(A_n) - \varepsilon/[2(N+1)]$. Тогда $\mathcal{O} = \bigcup_{n=0}^{N} \mathcal{O}_n$ является открытым множеством, содержащим A, и $K = \bigcup_{n=0}^{N} K_n$ является компактом $\subset A$. Из неравенств $\mu^*(A) - \mu_*(A) \leqslant \mu(\mathcal{O}) - \mu(K) = \mu(\mathcal{O} - K) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \mu(\mathcal{O}_n - K_n) \left(\text{ибо } (\mathcal{O} - K) \subset \bigcup_{n=0}^{N} (\mathcal{O}_n - K_n)\right) \leqslant \sum_{n=0}^{N} (\mu(\mathcal{O}_n) - \mu(K_n)) \leqslant \varepsilon$, так ε произвольно, следует, что A псевдоизмеримо.

6°) Пусть A является объединением счетного множества псевдоизмеримых множеств A_n. Пусть $B_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Согласно 5°), множества B_n псевдоизмеримы, и A_n является объединением возрастающей последовательности B_n. Если B_n имеют конечные меры, то, согласно 4°), множества $C_n = B_n - B_{n-1}$ также псевдоизмеримы.

Наконец, согласно 3°), множество A, являющееся объединением непересекающихся множеств B_0, C_1, C_2, C_3, ..., псевдоизмеримо. Результат сохраняется и в том случае, когда одно из множеств A_n имеет бесконечную меру, так как тогда бесконечную меру будет иметь множество A. Таким образом, мы доказали, что *любое конечное или счетное объединение псевдоизмеримых подмножеств псевдоизмеримо. Если B_n является возрастающей последовательностью псевдоизмеримых множеств, объединение которых равно B* (здесь $B = A$), *то* (согласно предыдущему, B псевдоизмеримо) *имеет место равенство*: $\mu(B) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n)$. В самом деле, согласно 3°), $\mu(B) = \mu(B_0) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \ldots$ и, согласно 4°), $\mu(C_n) = \mu(B_n) - \mu(B_{n-1})$, если только эти величины конечны. Отсюда в случае конечных величин $\mu(B_n)$ получаем $\mu(B) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n)$. Для случая, когда одна из этих величин бесконечна, этот результат очевиден.

7°) *Пусть A является конечным пересечением псевдоизмеримых подмножеств A_n с конечными мерами*: $A = \bigcap\limits_{n=0}^{N} A_n$. *Тогда A будет псевдоизмеримым.*

Для доказательства будем рассуждать, как в п. 5°), с теми же обозначениями, но полагая на этот раз $\mathcal{O} = \bigcap\limits_{n=0}^{N} \mathcal{O}_n$ и $K = \bigcap\limits_{n=0}^{N} K_n$.

Тогда $\mu^*(A) - \mu_*(A) \leqslant \mu(\mathcal{O}) - \mu(K) = \mu(\mathcal{O} - K) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} \mu(\mathcal{O}_n - K_n)$

$$\left(\text{так как } \mathcal{O} - K \subset \bigcup_{n=0}^{N} (\mathcal{O}_n - K_n)\right) = \sum_{n=0}^{N} (\mu(\mathcal{O}_n) - \mu(K_n)) \leqslant \varepsilon, \quad \text{что}$$

в силу произвольности ε доказывает наше утверждение. Однако здесь, в противоположность п. 5°), *результат не сохраняется, если мера одного из множеств A_n бесконечна*. В самом деле, пусть D — не псевдоизмеримое множество, содержащееся в ограниченном интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ (см. стр. 503). Так как $A = [a, b]$ псевдоизмеримо, то множество $B = D \cup \complement[a, b]$, содержащее $\complement[a, b]$, псевдоизмеримо и имеет бесконечную меру. Здесь $A \cap B = D$ не является псевдоизмеримым.

8°) *Пересечение конечного или счетного числа псевдоизмеримых множеств конечной меры псевдоизмеримо.*

В самом деле, пусть $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ и $B_n = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Тогда, согласно 7°), каждое множество B_n является псевдоизмеримым, последовательность B_n убывающая и ее пересечением является множество A. Далее, $B_n = B_0 - (B_0 - B_n)$. Так как последовательность $B_0 - B_n$ является возрастающей, то к ней можно применить 6°), откуда вытекает, что $B_0 - (B_0 - A) = A$ псевдоизмеримо и, кроме того, $\mu(B_0 - A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_0 - B_n)$. Таким образом, *если B_n является убывающей последовательностью псевдоизмеримых множеств конечной меры с пересечением, равным B* (здесь A), *то* $\mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Полученные результаты можно было бы считать весьма удовлетворительными, если бы не имели места следующие факты:

Если A и B псевдоизмеримы и $A \supset B$, но $\mu(B) = +\infty$, то $A - B$ может оказаться не псевдоизмеримым. Пересечение двух псевдоизмеримых множеств может оказаться не псевдоизмеримым, если одно из этих множеств имеет бесконечную меру.

Эти недостатки можно устранить, если ввести более сильное определение.

Множество A называется измеримым, если для любого компакта K пересечение $A \cap K$ псевдоизмеримо (оно необходимо имеет конечную меру). *Измеримое множество псевдоизмеримо*, т. е. свойство измеримости сильнее свойства псевдоизмеримости. Действительно, множество X можно представить как объединение последовательности компактов K_n. Следовательно, если $A \cap K_n$ псевдоизмеримы, то, согласно 6°), A также будет псевдоизмеримым. С другой стороны, *всякое псевдоизмеримое множество конечной меры измеримо*. Это следует из того, что в этом случае, согласно 7°), псевдоизмеримо множество $A \cap K$. Однако *псевдоизмеримое множество бесконечной меры не обязательно измеримо*. Например, если D не псевдоизмеримо и содержится в $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то множество $D \cup \complement[a, b]$ псевдоизмеримо, имеет бесконечную меру, но не измеримо, так как его пересечение с компактом $[a, b]$ не является псевдоизмеримым. Очевидно также, что *если A и B измеримы, $A \supset B$, то $A - B$ всегда измеримо*, поскольку $(A - B) \cap K = (A \cap K) - (B \cap K)$. Однако формула $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$ теряет смысл при $\mu(B) = +\infty$.

С другой стороны, объединение или пересечение A конечного или счетного множества измеримых множеств A_n измеримо, поскольку в этом случае $A \cap K$ является объединением или пересечением множеств $A_n \cap K$. Впрочем, *дополнение $\complement A$ измеримого множества A измеримо* и от объединения к пересечению можно перейти через дополнение. Напротив, формула $\mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$ для *убывающей* последовательности измеримых множеств B_n, пересечение которых равно B, *всегда предполагает, что B_n имеют конечные меры* (это видно из доказательства этой формулы). Если, например, мы возьмем меру dx на $\mathbb{R}$, то последовательность множеств $B_n = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \geqslant n\}$ является убывающей, каждое из множеств имеет бесконечную меру, их пересечение пусто, а, значит, имеет меру 0.

Добавим еще, что *каждое замкнутое множество F измеримо*, поскольку в том случае, когда X является объединением компактов K_n, это множество является объединением компактов $F \cap K_n$. Переходом к дополнению отсюда легко получить, что *каждое открытое множество измеримо* даже в том случае, когда оно имеет бесконечную меру.

Повторим определения, введенные в процессе изложения материала.

Определение. Множество $A \subset X$ *псевдоизмеримо, если* $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Это общее значение называется *мерой множества* и обозначается через $\mu(A)$. Множество A называется *измеримым*, если оно псевдоизмеримо и если, кроме того, для каждого компакта K множество $A \cap K$ псевдоизмеримо.

Нами была доказана следующая теорема:

Теорема 19. 1°) *Все открытые и замкнутые множества измеримы.*

2°) *Если A и B — два измеримых подмножества X и $A \supset B$, то множество $A - B$ измеримо и $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$, если только $\mu(A)$ и $\mu(B)$ не равны $+\infty$. В частности, если A измеримо, то $\complement(A)$ также измеримо.*

3°) *Если A является объединением конечного или счетного семейства измеримых множеств, $A = \bigcup\limits_n A_n$, то A измеримо и, кроме того, имеет место неравенство*

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{IV, 3; 8}$$

переходящее в равенство, если множества A_n попарно не пересекаются.

3°_2) *Пересечение конечного или счетного семейства измеримых множеств измеримо.*

4°) *Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств. Тогда их объединение A измеримо и, кроме того, имеет место формула*

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n). \tag{IV, 3; 9}$$

5°) *Если $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — убывающая последовательность измеримых множеств, то их пересечение A измеримо. Кроме того, если все множества A_n имеют конечную меру, то имеет место* *формула* (IV, 3; 9). *Эта формула не верна, если все* $\mu(A_n)$ *бесконечны.*

Замечание 1. Позже мы получим новую формулу для внешних мер: если A_n является *возрастающей* последовательностью *произвольных* подмножеств X, объединение которых равно A, то $\mu^*(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(A_n)$ (см. следствие 0 теоремы 36). Однако сейчас надо будет доказать это равенство в частном случае, который нам вскоре понадобится: для любого $A\subset X$ $\mu^*(A)=$ $=\sup\mu^*(A\cap K)$, где sup берется по всевозможным компактам K множества X. Это действительно частный случай высказанного выше общего утверждения, поскольку X является объединением возрастающей последовательности компактов K_n. Предположим прежде всего, что $\mu^*(A)<+\infty$. Тогда существует открытое множество $\mathcal{O}\supset A$, имеющее конечную меру. Пересечения $\mathcal{O}\cap \complement K_n$ образуют убывающую последовательность непересекающихся измеримых множеств, имеющих конечные меры. Согласно п. 5°) теоремы 19, при n, стремящемся к бесконечности, $\mu(\mathcal{O}\cap\complement K_n)$ стремится к 0. Так как $(A\cap\complement K_n)\subset(\mathcal{O}\cap\complement K_n)$, то $\mu^*(A\cap\complement K_n)$ также стремится к 0. Поскольку $A=(A\cap K_n)\cup(A\cap$ $\cap\complement K_n)$, то $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap K_n)+\mu^*(A\cap\complement K_n)$, а, следовательно, $\mu^*(A\cap K_n)\leqslant\mu^*(A)$ стремится к $\mu^*(A)$ при n, стремящемся к бесконечности.

Предположим теперь, что $\mu^*(A)=+\infty$. Допустим для простоты, что X метризуемо и что рассматриваются замкнутые компактные шары (в противном случае можно провести рассуждение, аналогичное проведенному на стр. 457).

Положим $A_n=A\cap\{x\in X;\ n\leqslant d(x,a)\leqslant n+1\}$. Положим затем $B_0=A_0\cup A_2\cup A_4\cup\ldots$ и $B_1=A_1\cup A_3\cup A_5\cup\ldots$. Тогда $A=B_0\cup B_1$; поэтому $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B_0)+\mu^*(B_1)$, а, значит, хотя бы одно из слагаемых, например $\mu^*(B_0)$, равно $+\infty$. Так как B_0 является объединением непересекающихся замкнутых множеств, то (см. стр. 494) $+\infty=\mu^*(B_0)=\mu^*(A_0)+\mu^*(A_2)+$ $+\mu^*(A_4)+\ldots$. Полученный ряд оказался расходящимся. Но тогда

$$\mu^*(A\cap\{x\in X;\ d(x,a)\leqslant 2N+1\})\geqslant\mu^*(A_0\cup A_2\cup\ldots\cup A_{2N})=$$
$$=\mu^*(A_0)+\mu^*(A_2)+\ldots+\mu^*(A_{2N})$$

стремится к $+\infty=\mu^*(A)$ при N, стремящемся к бесконечности.

Замечание 2. Не может быть и речи о распространении теоремы 19 на объединение или пересечение *несчетных* семейств подмножеств. Например, по мере dx любое множество $A\subset\mathbb{R}$ (измеримое или нет, конечной меры или нет) является объединением своих точек, которые представляют собой измеримые множества нулевой меры.

Различные примеры. 1°) Пусть μ — атомическая мера $\sum_{\nu} c_\nu \delta_{(a_\nu)}$, где все $c_\nu \geqslant 0$. Из замечаний на стр. 492—493 следует, что все подмножества A множества X измеримы и имеет место формула

$$\mu(A) = \sum_{a_\nu \in A} c_\nu \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 3; 10)}$$

2°) Для меры $p\,dx$ на $\mathbb{R}$ всегда существуют неизмеримые подмножества, кроме того случая, когда мера $p\,dx$ равна нулю.

Приведем пример неизмеримого множества. Пусть X представляет собой тригонометрическую окружность. На ней можно определить естественную меру Радона $\mu = d\theta$, называемую угловой мерой. Эту меру можно определить, например, следующим образом.

Поскольку каждая точка X определяется некоторым вещественным числом с точностью до 2π, то пространство $\mathscr{C}(X)$ непрерывных функций на X (так как X компактно, то они имеют компактный носитель) можно отождествить с пространством непрерывных периодических функций на вещественной прямой с периодом 2π. Обозначим через $\mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ пространство этих функций, нормированное по формуле $\|\varphi\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Определять меру на X или определять линейную непрерывную форму на $\mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ — это, в сущности, равносильно. Поэтому мера $\mu = d\theta$ может быть задана формулой

$$\mu(\varphi) = \int_{[a,\, a+2\pi]} \varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R}), \qquad \text{(IV, 3; 11)}$$

где точку a можно выбрать произвольно. Результат от выбора a не зависит, поскольку все функции φ периодичны с периодом 2π [1]). Эта мера инвариантна относительно вращения (с центром в начале координат) множества X. Это означает, что при любом α имеет место формула

$$\mu(\varphi(x)) = \mu(\varphi(x-\alpha)), \qquad \varphi \in \mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R}). \qquad \text{(IV, 3; 12)}$$

Отсюда также естественно вытекает, что μ-мера множеств X инвариантна относительно вращения. Если A является некоторым подмножеством X и если A_α есть множество, полученное из A вращением на угол α, то справедлива формула $\mu^*(A_\alpha) = \mu^*(A)$, $\mu_*(A_\alpha) = \mu_*(A)$. Кроме того, A_α измеримо тогда и

[1]) Мы привели эту меру к известному понятию интеграла Римана на $\mathbb{R}$. Однако не представляет никакого труда построить теорию интеграла Римана $\int_X \varphi(\theta)\,d\theta$ на тригонометрической окружности X.

только тогда, когда измеримо множество A, и при этом $\mu(A_\alpha)=\mu(A)$.

Обозначим теперь через α число, несоизмеримое с π и выбранное раз и навсегда. Будем говорить, что точки x, y множества X конгруэнтны, если $y-x$ целое кратное α. Тем самым в множестве X мы определим некоторое отношение эквивалентности. Пусть $\dot{X}$ — фактормножество. Следует ожидать, что фактормножество $\dot{X}$, как и само множество X, имеет мощность континуума. В самом деле, с одной стороны, существует сюръекция X на $\dot{X}$, а, значит, $\operatorname{card} X \geqslant \operatorname{card} \dot{X}$. С другой стороны, каждый класс эквивалентности счетен и потому $\operatorname{card} X \leqslant \nu \operatorname{card} \dot{X}$, и, поскольку $\operatorname{card} \dot{X} \geqslant \nu$ (противоположное означает, что существует лишь конечное число классов; так как каждый из них счетен, то и X будет счетным, что невозможно), то, согласно теореме 5 гл. I, $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \dot{X}$. Окончательно получаем, что $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \dot{X} = \gamma$ — мощность континуума. Пусть теперь A является подмножеством X, содержащим по точке из каждого класса эквивалентности. (Очевидно, в классе эквивалентности ни одна из точек не выделяется среди других и выбор точки не регламентируется никаким правилом. Мы вынуждены для этого континуального числа выборов пользоваться аксиомой выбора Цермело (см. примечание на стр. 28).)

Докажем теперь, что множество A не является μ-измеримым. В самом деле, так как множество A содержит не более одной точки из каждого класса эквивалентности, то множества $A_{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются. С другой стороны, поскольку A содержит не менее одной точки из каждого класса эквивалентности, то объединение множеств $A_{n\alpha}$ дает все множество X. Впрочем, A и $A_{n\alpha}$ могут быть преобразованы одно в другое с помощью вращения $n\alpha$, и, следовательно, их внешние и внутренние меры совпадают. Если A измеримо, то множества $A_{n\alpha}$ измеримы и имеют ту же самую меру; при этом выполняется равенство

$$2\pi=\mu(X)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu(A_{n\alpha})=\mu(A)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}1.$$

Однако это равенство невозможно. В самом деле, если A имеет нулевую меру, то отсюда следует, что X также будет иметь нулевую меру, в то время как его мера равна 2π. Если мера A больше нуля, то X имеет бесконечную меру.

Итак, A неизмеримо. Кроме того, из неравенства (IV, 3; 7_2) следует, что

$$2\pi=\mu_*(X)\geqslant\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu_*(A_{n\alpha})=\mu_*(A)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}1,$$

т. е. что нижняя мера множества A равна нулю. Однако это множество неизмеримо, и, следовательно, его внешняя мера > 0. Приведенный здесь пример кажется неестественным. Можно отметить общий факт относительно всех ненулевых мер вида $p dx$ на прямой $\mathbb{R}$ или $p d\theta$ на тригонометрической окружности (p — интегрируемая по Риману функция): *неизвестно, как явно образовать неизмеримые множества. Можно лишь с помощью аксиомы выбора доказать их существование.* Это означает, что все множества, которые встречаются в приложениях и которые обычно всегда определены явно, измеримы. Открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал $|a, b|$ измерим, и его мера равна $\int\limits_{[a, b]} p(x)\, dx$.

3°) Теорема 19 позволяет указать очень широкую категорию измеримых множеств.

Назовем *σ-алгеброй частей множества X* совокупность $\mathcal{T}$ его частей, обладающую следующими свойствами:

a) если $A \in \mathcal{T}$, то $\complement A \in \mathcal{T}$;

b) любое объединение или пересечение конечного или счетного множества частей, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$[1].

Вот некоторые примеры σ-алгебр: прежде всего это пустая σ-алгебра, не содержащая ни одного множества; затем σ-алгебра, состоящая лишь из некоторого подмножества и его дополнения, и, наконец, σ-алгебра всех частей множества X.

Если $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — две σ-алгебры, то части X, принадлежащие одновременно обеим σ-алгебрам, образуют некоторую σ-алгебру, которая называется пересечением σ-алгебр $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Точно так же определяется пересечение $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ конечного или бесконечного семейства σ-алгебр. Отсюда, в частности, вытекает, что если $\mathcal{S}$ является произвольным множеством частей X, то существует наименьшая σ-алгебра, содержащая это множество, а именно — пересечение всех содержащих его σ-алгебр. Пусть теперь X — топологическое пространство. Тогда *борелевской* называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые в смысле топологии X части (и, следовательно, содержащая также все замкнутые части). Часть множества X называется *борелевской*, если она принадлежит борелевской σ-алгебре. Борелевская σ-алгебра из X зависит только от топологии X. Например, пересечение счетного множества открытых частей (которое не обязательно открыто) и объединение счетного множества замкнутых частей (которое не обязательно замкнуто) являются борелевскими. Имеются и другие примеры. Борелевская часть «универсально

---

[1]) Автор вместо термина σ-алгебры использует термин «tribu» (племя). — *Прим. ред.*

измерима» в том смысле, что она измерима по любой из мер Радона μ на X.

В самом деле, по теореме 19 множество всех μ-измеримых частей X является σ-алгеброй, зависящей, естественно, от μ. Это множество заведомо содержит открытые подмножества и, следовательно, содержит борелевскую σ-алгебру. Весьма тонкие теоремы позволяют показать, что существуют и другие универсально измеримые части X, отличные от борелевских.

Множества нулевой меры

Теорема 20. *Для того чтобы часть A множества X имела нулевую меру относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существовало такое открытое множество $\mathcal{O}$ из X, содержащее A, что $\mu(\mathcal{O}) \leqslant \varepsilon$. Любое объединение конечной или счетной совокупности множеств меры нуль имеет нулевую меру.*

Доказательство. Первое условие означает, что внешняя мера $\mu^*(A)$ равна нулю. Поскольку тогда меньшая внутренняя мера неизбежно также равна нулю, рассматриваемое множество A измеримо и имеет нулевую меру. То, что касается конечной или счетной совокупности множеств, вытекает из теоремы 19 и из того факта, что сумма ряда с нулевыми членами равна нулю.

Следствие. *Всякое счетное множество на вещественной прямой $\mathbb{R}$ по мере $p\,dx$ имеет нулевую меру.*

Следствие вытекает из теоремы 20 и из того факта, что множество, состоящее из одной точки, имеет нулевую меру.

Замечания. 1°) Мера всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ или отрезка с несовпадающими концами не равна нулю по мере dx. Отсюда вытекает новое доказательство того факта, что прямая или отрезок не являются счетными множествами. Эти примеры еще раз показывают, что объединение бесконечной несчетной совокупности множеств нулевой меры, в частности совокупность точек, не обязательно должно иметь меру, равную нулю.

2°) Глядя на следствие, можно было бы подумать, что на вещественной прямой $\mathbb{R}$ не существует других множеств нулевой меры по мере dx, кроме счетных множеств. Однако это неверно. Мы сейчас построим на интервале $[0, 1]$ множество, называемое совершенным множеством Кантора, имеющее мощность континуума и нулевую меру. Рассмотрим сначала множество E_1, являющееся объединением интервалов $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Разделим каждый из этих интервалов на три равные части, оставим из них лишь первую и третью части и обозначим образованное таким образом множество через E_2. Множество E_2 является объединением 4 интервалов $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$, $\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Разделим снова каждый из этих 4 интервалов, составляющих E_2, на 3 равных интервала, выбросим средний из них и полученное множество, являющееся объединением 8 интервалов, обозначим через E_3. Продолжая так далее, мы получим убывающую последовательность замкнутых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$. Мера множества E_n равна, очевидно, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, а, значит, пересечение E всех множеств E_n имеет нулевую меру. Докажем, однако, что множество E имеет мощность континуума. В самом деле, любая точка E может быть определена единственным образом с помощью произвольной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где a_i является одним из двух слов: «первый» или «второй».

Пусть $x \in E$. Слово a_1 будет первым или вторым в зависимости от того, находится ли x в первом интервале $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ или во втором $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, объединение которых составляет множество E_1. Пусть, например, a_1 = «первый». Слово a_2 будет первым или вторым в зависимости от того, находится ли x в первом подинтервале $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ или же во втором подинтервале $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$ разбиения интервала $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, входящего в множество E_2. Так можно продолжать неограниченно. Положим теперь $b_n = 0$, если a_n = «первый» и $b_n = 2$, если a_n = «второй». Непосредственно видно, что соответствие между x и последовательностью $b_n = 0$ или 2 полностью определяется равенством $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$ и что эта формула определяет некоторую биекцию между E и множеством $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ отображений $\mathbb{N}$ в $\{0, 2\}$ или множеством последовательностей элементов 0 или 2. Из результатов гл. I следует, что $\operatorname{card} E = \operatorname{card}\mathfrak{P}\{\mathbb{N}\} = 2^{\nu} = \gamma$, т. е. мощность континуума. Впрочем, множество E можно определить, воспользовавшись представлением точек интервала $[0, 1]$ не в десятичной, а в троичной системе счисления, т. е. системе счисления по основанию 3. Множество E тогда будет множеством точек, в троичном разложении которых применяются только числа 0 и 2 и не используется число 1 (элемент, имеющий два троичных разложения принадлежит E тогда и только тогда, когда одно из этих разложений может быть записано только с помощью чисел 0 и 2). Множество E, описанное впервые в прошлом столетии Кантором, обладает, кроме того, следующими свойствами: оно *совершенно*. Это означает, что оно замкнуто в $\mathbb{R}$ и что ни одна из его точек не является изолированной. Любая окрестность каждой из его точек содержит даже, как это легко доказать, бесконечное множество точек E мощности континуум.

Приведем еще один поучительный пример. Пусть a_0, a_1, a_2, ... — плотная последовательность точек прямой $\mathbb{R}$ (например, множество рациональных чисел, упорядоченных в последовательность). Пусть c_0, c_1, c_2, ... — такая последовательность положительных чисел, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty$. Обозначим через E_ε множество $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{x \in \mathbb{R};\ |x - a_n| < \varepsilon c_n\}$. Это множество открыто (как объединение открытых множеств), и его мера естественным образом мажорируется числом $2\varepsilon \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Обозначим теперь через E пересечение множеств E_ε, соответствующих всевозможным $\varepsilon > 0$. Мера этого множества равна нулю. Можно было бы подумать, что оно счетно и сводится к последовательности точек a_n. Однако мы рекомендуем удивленному читателю самому доказать, что в действительности это множество имеет мощность континуума.

Если в качестве меры на $\mathbb{R}^n$ взять меру $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то мера множества будет соответствовать его объему, и, следовательно, как мы увидим позже, дифференцируемое многообразие размерности $< n$ будет необходимо иметь нулевую меру. Здесь мы получаем очень простые примеры множеств нулевой меры, имеющих мощность континуума.

3°) Множество $\complement\{a\}$ по мере Дирака $\delta_{(a)}$ имеет нулевую меру.

4°) По мере, тождественно равной 0, любое множество имеет меру, равную нулю.

Свойства, выполняющиеся почти всюду

Пусть P — свойство, относящееся к точкам локально компактного пространства X, снабженного мерой Радона $\mu \geqslant 0$[1]. Это свойство определяется заданием множества A точек X, обладающих данным свойством.

Говорят, что это свойство выполняется μ-почти всюду, или μ-почти все точки X обладают этим свойством, если дополнение $\complement A$ множества A имеет нулевую меру относительно меры μ. Можно было бы ограничиться словами «почти всюду», если бы

[1]) Свойство P относительно точек X можно определить как отображение множества X в двухэлементное множество {да, нет}. Говорят, что $x \in X$ обладает свойством P, если $P(x)$ = да.

мера μ была задана раз навсегда и если бы это не приводило к недоразумениям. Заметим, однако, что при мере $\mu = dx$ понятие «почти всюду» вполне соответствует нашей интуиции. Это не так для других мер. Например, для меры $\mu = \delta_{(a)}$ — единичная масса в точке a — некоторое свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется в точке a. Для нулевой меры μ любое свойство выполняется почти всюду (так же точно, впрочем, как и отрицание этого свойства). Вот что означает для функции f, определенной на метрическом пространстве X со значениями в метрическом пространстве F, свойство быть *почти всюду непрерывной*:

$$(\exists A \in \mathfrak{P}(X),\ \mu(\complement A) = 0)\,(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)$$
$$(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in X,\ d(a, x) \leqslant \eta) : (d(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon),$$

или иначе: множество точек, в которых f разрывна, имеет относительно μ меру, равную нулю. Если $\vec{F}$ является векторным пространством, то утверждение «некоторое отображение $\vec{f}$ пространства X в $\vec{F}$ почти всюду равно нулю» означает, что множество точек $x \in X$, в которых $\vec{f}(x) \neq \vec{0}$, имеет меру, равную нулю.

На вещественной прямой по мере $\mu = dx$ почти все точки являются иррациональными и даже трансцендентными.

Теорема 21. *Пусть P_0, P_1, P_2, ... — конечное или счетное множество свойств, относящихся к точкам X. Если каждое из этих свойств выполняется почти всюду, то свойство $P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots$, состоящее в том, что одновременно должны выполняться все свойства P_n, само выполняется почти всюду.*

Это фундаментальная теорема теории вероятностей.

Доказательство. Пусть A_n — множество точек, обладающих свойством P_n. Тогда $A = \bigcap\limits_n A_n$ будет множеством точек, обладающих свойством P. Его дополнение $\bigcup\limits_n (\complement A_n)$ имеет нулевую меру как объединение счетного множества множеств нулевой меры.

Конечно, аналогичного утверждения для несчетного множества свойств не существует. Например, для меры $\mu = dx$ на $\mathbb{R}$ свойство «x обладает свойством P_a, если $x \neq a$» верно почти всюду. Здесь $P = \bigwedge\limits_a P_a$ является следующим свойством: «x не совпадает ни с одной точкой $\mathbb{R}$». Этим свойством не обладает ни одна точка.

μ-измеримые функции со значениями в метризуемом сепарабельном пространстве

Предварительное определение. Пусть F — метризуемое пространство. Говорят, что это пространство *сепарабельно*, если в F существует счетное плотное множество.

Пусть f — отображение локально компактного пространства X, снабженного мерой $\mu \geqslant 0$, в метризуемое сепарабельное пространство F. Говорят, что f *μ-измеримо* или *просто измеримо* (когда это не приводит к недоразумению), если прообраз при отображении f каждой открытой части F является μ-измеримой частью X.

В этом определении причина, из-за которой мы предположили F сепарабельным, непосредственно не видна. Можно определить измеримые функции со значениями в произвольном топологическом пространстве, но тогда надо будет дать более сложное определение, эквивалентное предыдущему в том случае, когда F метризуемо и сепарабельно[1]). Из этого определения вытекает, что каждое непрерывное отображение X в F измеримо, ибо прообраз каждого открытого множества из F является открытым множеством, а, следовательно, согласно п. 1°) теоремы 19, измерим.

Естественно, переходом к дополнению можно было бы в определении заменить открытые подмножества на замкнутые. Впрочем, множество частей F, прообраз которых при отображении f μ-измерим, является некоторой σ-алгеброй (см. стр. 505). Если f измеримо, то эта σ-алгебра содержит открытые, а, значит, борелевские множества, и прообраз каждого борелевского множества из F является μ-измеримым.

Пусть A — некоторая часть X и φ — ее характеристическая функция. Эта функция, рассматриваемая как отображение X в топологическое сепарабельное пространство $\mathbb{R}$[2]) или дискретное пространство $\{0, 1\}$, измерима тогда и только тогда, когда A измеримо, поскольку прообраз каждого открытого множества при этом отображении равен либо $\emptyset$, либо X, либо A, либо $\complement A$.

Теорема 21_2. *Пусть f и g — два отображения X в F. Если эти отображения почти всюду равны и одно из них измеримо, то другое также измеримо.*

Доказательство. Пусть A — множество точек x, в которых $f(x) = g(x)$. По условию, $\complement A$ является множеством меры

---

[1]) См. следствие теоремы 33.

Мы здесь не повторяем, вообще говоря, что F сепарабельно, кроме тех случаев, когда это существенно для справедливости теоремы.

[2]) $\mathbb{R}$ сепарабельно, поскольку счетное множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$.

нуль. Следовательно, все множества, входящие в $\complement A$, имеют нулевую меру, а, значит, измеримы. Предположим теперь, что отображение f измеримо, и покажем, что тогда отображение g также измеримо. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество F. Перейдем от $f^{-1}(\mathcal{O})$ к $g^{-1}(\mathcal{O})$ с помощью двух следующих операций: добавим сначала множество элементов, принадлежащих $g^{-1}(\mathcal{O})$, но не принадлежащих $f^{-1}(\mathcal{O})$. Это множество является частью $\complement A$, а, значит, представляет собой измеримое множество. Далее, вычтем множество точек, принадлежащих $f^{-1}(\mathcal{O})$, но не принадлежащих $g^{-1}(\mathcal{O})$. Это множество снова является частью $\complement A$ и, значит, измеримо. Это означает, что $g^{-1}(\mathcal{O})$ измеримо и что, следовательно, функция g измерима.

Теорема 22. *Пусть F и G — два метризуемых пространства, f — измеримое отображение X в F и g — непрерывное отображение F в G. Тогда сложное отображение $g \circ f$ множества X в G измеримо.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество из G. Тогда прообраз $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{O}))$ является прообразом при отображении f открытого множества $g^{-1}(\mathcal{O})$ и, следовательно, измерим.

Теорема 23. *Пусть X — локально компактное пространство, снабженное мерой $\mu \geqslant 0$, и пусть F — метризуемое пространство. Тогда любое отображение f пространства X в F, являющееся μ-почти всюду пределом последовательности $f_0, f_1, f_2, \ldots$ μ-измеримых отображений X в F, измеримо. В частности, каждое отображение, являющееся почти всюду пределом последовательности непрерывных отображений, измеримо.*

Когда мы говорим, что f является почти всюду пределом последовательности f_n, то хотим этим сказать, что эта последовательность является почти всюду сходящейся и имеет пределом функцию f. Другими словами, существует множество A, дополнение к которому по мере μ имеет нулевую меру, такое, что для каждого $x \in A$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ при n, стремящемся к $+\infty$.

Доказательство. Предположим прежде всего, что последовательность f_n просто сходится *всюду* к f. Пусть B — произвольное подмножество F. Обозначим через A_n прообраз $f_n^{-1}(B)$, а затем через $\mathcal{A}_m$ пересечение $\bigcap\limits_{n \geqslant m} A_n$. Множество $\mathcal{A}_m$ представляет собой множество таких точек x, для которых все $f_n(x)$ при $n \geqslant m$ лежат в B. Множества $\mathcal{A}_m$ образуют некоторую возрастающую последовательность множеств, объединение которых мы обозначим через $\mathcal{A}$.

Поскольку каждое из множеств $f_n(x)$ измеримо, то для открытого или замкнутого подмножества B каждое из A_n измеримо и, следовательно, множества $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}$ измеримы.

Предположим, что B *открыто*, и покажем, что в этом случае множество $\mathcal{A}$ заключено между $f^{-1}(B)$ и $f^{-1}(\overline{B})$:

$$f^{-1}(B) \subset \mathcal{A} \subset f^{-1}(\overline{B}). \qquad \text{(IV, 3; 13)}$$

Прежде всего очевидно включение $\mathcal{A} \subset f^{-1}(\overline{B})$. В самом деле, $x \in \mathcal{A}$ означает, что x принадлежит одному из $\mathcal{A}_m$ с подходящим m. Значит, $f_n(x) \in B$ для $n \geqslant m$, а, следовательно, $f(x) \in \overline{B}$ (теорема 15 гл. II). В рассуждении не требуется, чтобы множество B было открыто.

Пусть теперь B открыто; покажем, что $f^{-1}(B) \subset \mathcal{A}$. Если $x \in f^{-1}(B)$, то это говорит о том, что $f(x)$, равный пределу $f_n(x)$, является элементом y из B. Поскольку B открыто, существует некоторая окрестность элемента y, лежащая в B. Из определения предела вытекает, что существует такое целое число m, что для любого $n \geqslant m$ элемент $f_n(x)$ принадлежит B. Но тогда x принадлежит A_n для всех $n \geqslant m$ и, следовательно, принадлежит $\mathcal{A}_m$ и тем более $\mathcal{A}$. Таким образом, мы не знаем, измеримы ли прообразы $f^{-1}(B)$ или $f^{-1}(\overline{B})$, но мы знаем, что если B открыто, то существует измеримое подмножество $\mathcal{A}$, заключенное между ними.

Пусть теперь B — произвольное *замкнутое* подмножество F. Обозначим через B_k объединение всех шаров[1]) радиуса $1/k$ с центрами в B. Это множество как объединение открытых шаров открыто. Последовательность B_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, является убывающей последовательностью, а пересечение B_k равно B. В самом деле, очевидно, что это пересечение содержит B. С другой стороны, если x принадлежит этому пересечению, то расстояние от x до *замкнутого* множества B не больше $1/k$ при любом k, т. е. равно нулю, а это означает, что $x \in B$. В свою очередь пересечение замыканий $\overline{B}_k$ совпадает с B. В самом деле, с одной стороны, оно содержит B, но с другой, если точка принадлежит замыканию $\overline{B}_k$, она является пределом точек из B_k и, в силу непрерывности функции расстояния (см. гл. II, стр. 83), расстояние от x до $B \leqslant 1/k$. Таким образом, если x лежит в пересечении $\overline{B}_k$, то его расстояние до B равно нулю, т. е. x лежит в B. Мы образовали две убывающие последовательности множеств: открытые множества B_k и множества $\overline{B}_k$, пересечение которых равно B. Поскольку B_k открыто, то из сказанного выше вытекает, что между множествами $f^{-1}(B_k)$ и $f^{-1}(\overline{B}_k)$ можно вставить измеримое множество $\mathcal{A}^{(k)}$. Пересечение измеримых множеств $\mathcal{A}^{(k)}$, являющееся измеримым, должно

[1]) Надо сначала выбрать в F какую-нибудь метрику.

содержать пересечение множеств $f^{-1}(B_k)$ и содержаться в пересечении множеств $f^{-1}(\overline{B}_k)$. Тем самым обязательно измеримо множество $f^{-1}(B)$, чем и доказывается теорема для этого случая.

Перейдем теперь к общему случаю, при котором последовательность f_n только почти всюду сходится к f. Обозначим через A множество тех x, для которых последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. *Изменим* все функции f_n, полагая $f_n(x) = c$ при x, принадлежащем $\complement A$, где c — произвольный фиксированный элемент F. Измененные функции f_n почти всюду равны исходным функциям f_n и, следовательно, каждая из них измерима (теорема 21). Однако теперь последовательность измененных функций f_n сходится *всюду* к функции, равной f во всех точках множества A и равной постоянной c во всех точках множества $\complement A$. Эта функция, согласно изложенному выше, измерима, и поскольку она почти всюду равна f, то f также измерима. Эта теорема допускает следующее очень важное обращение.

μ-этажные функции

Этажные функции по отношению к мере Радона $\mu \geqslant 0$ на локально компактном пространстве X обобщают ступенчатые функции, введенные для определения интеграла Римана.

Пусть F — произвольное множество. Отображение f пространства X в множестве F называется *μ-этажным* или просто *этажным* (когда это не приводит к недоразумению), если существует разбиение X на конечное число непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, таких, что каждое из них μ-измеримо и на каждом из них отображение f постоянно. Такое разбиение называется допустимым разбиением для отображения f. Естественно, что для данного отображения f может существовать бесчисленное множество таких разбиений точно так же, как это было для ступенчатых функций. Среди них существует наилучшее в том смысле, что оно содержит наименьшее возможное число частей, но оно нас не интересует. Если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две этажные функции со значениями в векторном пространстве $\vec{F}$, то сумма $\vec{f}+\vec{g}$ и произведение $\vec{f}$ на постоянный скаляр являются этажными функциями.

Последнее утверждение очевидно. Первое же вытекает из того, что если $(X_i)_{i \in I}$ является допустимым разбиением X для $\vec{f}$ и $(X_j)_{j \in J}$ является допустимым разбиением для $\vec{g}$, то каждое из множеств $X_i \cap X_j$ измеримо и на каждом из них функция $\vec{f}$ и функция $\vec{g}$ постоянны, а вместе с ними постоянна функция $\vec{f}+\vec{g}$. Другими словами, *этажные функции на X со значениями* *в векторном пространстве $\vec{F}$ образуют векторное подпространство $\vec{F}^X$ всех функций, заданных на X со значениями в $\vec{F}$.*

Теорема 23_2. *Для того чтобы отображение локально компактного счетного в бесконечности пространства X в метризуемое пространство F было μ-измеримым, необходимо и достаточно, чтобы оно было пределом μ-почти всюду некоторой последовательности μ-этажных функций.*

Доказательство. Каждая этажная функция измерима, поскольку прообраз каждой части при отображении, определяемом этой функцией, есть объединение измеримых частей X, на которых функция постоянна. Согласно теореме 23, этим свойством будет обладать функция, являющаяся пределом почти всюду последовательности этажных функций.

Обратно, пусть f — измеримое отображение X в метрическое сепарабельное пространство F. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — некоторая последовательность, плотная в F. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Объединение всех шаров $B(a_n, \varepsilon)$ равно F. Но эти шары не являются непересекающимися. Образуем последовательность множеств $C_{n,\varepsilon} = B(a_n, \varepsilon) \cap \complement B(a_0, \varepsilon) \cap \complement B(a_1, \varepsilon) \cap \ldots \cap \complement B(a_{n-1}, \varepsilon)$. Множества $C_{n,\varepsilon}$ не пересекаются, а их объединение равно F. Множества $D_{n,\varepsilon} = f^{-1}(C_{n,\varepsilon})$ не пересекаются, и их объединение равно X. Кроме того, $C_{n,\varepsilon}$ являются борелевскими множествами, а, следовательно, $D_{n,\varepsilon}$ измеримы. Пусть K — некоторый компакт X. Множества $D_{n,\varepsilon} \cap K$ не пересекаются, измеримы, а их объединение равно K. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(D_{n,\varepsilon} \cap K)$ сходится, а его сумма равна $\mu(K)$. Для каждого $\delta > 0$ можно определить целое число $N(\varepsilon, K, \delta)$, зависящее от ε, K, δ и такое, чтобы объединение $D_{k,\varepsilon} \cap K$ для всех $k > N$ имело меру $\leqslant \delta$. Пусть $E(\varepsilon, K, \delta)$ является объединением множеств $D_{k,\varepsilon}$ при $k > N(\varepsilon, K, \delta)$. Тогда $\mu(E(\varepsilon, K, \delta) \cap K) \leqslant \delta$.

Определим теперь следующим образом функции f_n. Пусть K_n — такая возрастающая последовательность компактов, что X является объединением внутренностей $\mathring{K}_n$ (см. в лемме 3 к теореме 11 последовательность B_n).

Известно, что для любого компакта K множества X существует такое целое число m, что $K \subset K_n$ для $n \geqslant m$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} a_k, \text{ если } x \in D_{k,1/n}, & k \leqslant N(1/n, K_n, 1/2^{n+1}), \\ a \text{ в других случаях.} \end{cases}$$

Множества $D_{k,1/n}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ не пересекаются, измеримы и в объединении дают все множество X. Значит, f_n является по построению этажной функцией. Если $x \in D_{k,1/n}$,

$k \leqslant N(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$, то $f_n(x) = a_k$, и так как $f(D_{k,\,1/n}) \subset C_{k,\,1/n} \subset B(a_k, 1/n)$, то имеем $f(x) \in B(a_k, 1/n)$. Но тогда $d(f(x), f_n(x)) \leqslant 1/n$. Следовательно, $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ при n, стремящемся к бесконечности, только в том случае, когда для бесконечного числа значений n точка x находится в объединении множеств $D_{k,\,1/n}$, $k > N(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$, т. е. в $E(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$. Множество E точек X, в которых $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$ при n, стремящемся к бесконечности, удовлетворяет для бесконечного множества n соотношению $E \subset E(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$, а, значит, $E \subset \bigcup\limits_{n \geqslant m} E(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$ для любого m.

Пусть K — произвольный компакт из X и m — такое целое число, что $K_m \supset K$. Тогда $E \cap K \subset \bigcup\limits_{n \geqslant m} (E(1/n, K_n, 1/2^{n+1}) \cap K_n)$,

а, следовательно, $\mu(E \cap K) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant m} 1/2^{n+1} = 1/2^m$.

Так как в качестве m можно взять сколь угодно большое целое число, то $\mu(E \cap K) = 0$. Поскольку это справедливо для каждого компакта K из X, то $\mu(E) = 0$, и, значит, f_n сходится к f почти всюду при n, стремящемся к бесконечности.

Следствие 1. *Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_m$ — некоторые метрические пространства. Для того чтобы отображение f пространства X в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$, определенное отображениями f_i из X в F_i, было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы каждое из составляющих отображений f_i было измеримым. В частности, для того чтобы отображение X в аффинное конечномерное пространство, снабженное системой координат, было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы каждая из его составляющих была измеримой.*

Доказательство. Совершенно ясно, что если отображение f измеримо, то каждое из его составляющих отображений f_i измеримо. В самом деле, каждая составляющая получается как композиция f и проекции F на F_i, являющейся непрерывным отображением. Остается лишь применить теорему 22.

Обратное утверждение носит более глубокий характер. Оно опирается на теорему 23_2. По предположению, f_i является измеримым отображением. Следовательно, существует последовательность этажных отображений $(f_i)_n$ множества X в F_i, сходящаяся к f_i, при n, стремящемся к бесконечности, всюду, кроме точек множеств $B_i \subset X$ меры нуль. Объединение B множеств B_i также имеет нулевую меру. По определению топологического произведения, в каждой точке $x \in \complement B$ последовательность $f_n(x) = ((f_1)_n(x), (f_2)_n(x), \ldots, (f_m)_n(x))$ сходится к $f(x)$. Следовательно, f, являясь пределом почти всюду последовательности этажных функций, измерима.

Следствие 2. *Если $\vec{F}$ является векторным нормированным пространством, $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — измеримыми отображениями X в $\vec{F}$ и k — скалярной измеримой функцией, то отображения $\vec{f}+\vec{g}$ и $k\vec{f}$ измеримы, т. е. μ-измеримые на X функции со значениями в $\vec{F}$ образуют некоторое векторное пространство.*

Доказательство. Отображение $x\to\vec{f}(x)+\vec{g}(x)$ является композицией отображения $x\to(\vec{f}(x),\ \vec{g}(x))$ множества X в измеримое, по следствию 1, множество $\vec{F}\times\vec{F}$ и непрерывного отображения $(\vec{f},\ \vec{g})\to\vec{f}+\vec{g}$ пространства $\vec{F}\times\vec{F}$ в пространство $\vec{F}$. Согласно теореме 22, это отображение измеримо. Точно так же отображение $x\to k(x)\vec{f}(x)$ является композицией измеримого отображения $x\to(k(x),\vec{f}(x))$ множества X в $\mathbb{K}\times\vec{F}$ и непрерывного отображения $(k,\ \vec{f})\to k\vec{f}$ множества $\mathbb{K}\times\vec{F}$ в $\vec{F}$.

Следствие 3. *Пусть $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{H}$ — векторные нормированные пространства, $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — измеримые отображения X в $\vec{F}$ и $\vec{G}$ соответственно, и пусть B — билинейное непрерывное отображение $\vec{F}\times\vec{G}$ в $\vec{H}$. Тогда отображение $B(\vec{f},\ \vec{g})$: $x\to B(\vec{f}(x),\ \vec{g}(x))$ из X в $\vec{H}$ измеримо.*

Доказательство. Рассматриваемое отображение является композицией измеримого отображения $x\to(\vec{f}(x),\vec{g}(x))$ множества X в пространство $\vec{F}\times\vec{G}$ (следствие 1) и непрерывного отображения B пространства $\vec{F}\times\vec{G}$ в пространство $\vec{H}$, а, значит, согласно теореме 22, является измеримым отображением[1]).

Из предыдущих теорем можно сделать вывод, что все функции, встречающиеся на практике, измеримы. Для случая, когда X — прямая и $\mu=dx$, никто не может привести явный пример неизмеримой вещественной функции. Конечно, пользуясь аксиомой выбора, можно доказать *существование* вещественной неизмеримой функции, например, характеристической функции множества A, построенного на стр. 504.

---

[1]) Предположение о том, что B билинейно, излишне. Мы приводим это следствие потому, что оно полезно на практике.

Борелевские функции

Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство F называется *борелевским*, если прообраз при отображении f каждой открытой части F является борелевским множеством. Так как части F, прообразы которых при отображении f является борелевскими, образуют, очевидно, σ-алгебру частей из F, то эта σ-алгебра может содержать открытые множества (или замкнутые множества) лишь тогда, когда она содержит борелевские. Поэтому в определении можно заменить открытые части на замкнутые или борелевские части из F. Это понятие зависит только от топологии X и F. Например, часть из X будет борелевской тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция является борелевской. Мы видим, что если X локально компактно и счетно в бесконечности, а метризуемое пространство F сепарабельно, то борелевская функция на X со значениями в F универсально измерима, т. е. μ-измерима по любой мере Радона $\mu \geqslant 0$ на X.

Борелевские функции обладают следующими свойствами.

1°) *Композиция двух борелевских отображений является борелевским отображением*: если f является борелевским отображением X в Y, а g — борелевским отображением Y в Z, то $g \circ f$ является борелевским отображением X в Z, поскольку прообраз борелевского множества является борелевским множеством.

2°) *Предел последовательности борелевских отображений X в метризуемое пространство F является борелевским отображением.* Доказательство то же самое, что и доказательство теоремы 23; следует лишь заменить в нем везде слово «измеримый» на «борелевский».

3°) Не ясно, является ли каждая борелевская функция пределом последовательности этажных борелевских функций (под этим понимается функция, принимающая лишь конечное число значений на некоторых борелевских множествах; все это без какой-либо связи с мерой Радона). Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 23_2. Пусть u_n — функция, равная a_n в множестве $D_{n,1/n}$. Так как $B(a_k, 1/n)$, а, значит, $C_{k,1/n}$ и, следовательно, $D_{k,1/n}$ являются борелевскими множествами и $d(f, u_n) \leqslant 1/n$, то функция u_n является борелевской. Однако она имеет счетное множество этажей $D_{k,1/n}$, следовательно, не является этажно-борелевской. Функция u_n является простым пределом при m, стремящемся к бесконечности, этажно-борелевских функций $v_{n,m}$, где $v_{n,m}=a_k$ в $D_{k,1/n}$ для $k \leqslant m$ и $v_{n,m}=a \in F$ вне этих множеств. Таким образом, *каждая борелевская функция f со значениями в метризуемом сепарабельном пространстве F является равномерным пределом последовательности борелевских функций u_n, каждая из которых является простым пределом последовательности этажно-борелевских функций $v_{n,m}$.*

4°) *Для того чтобы отображение f пространства X в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ было борелевским, необходимо и достаточно в случае метрических сепарабельных пространств F_i, чтобы каждая из составляющих f_i отображения f была борелевским отображением X в F_i.* В самом деле, каждое отображение f_i является композицией f и непрерывной проекции F на F_i. Так как f является борелевским отображением, то f_i также будут борелевскими отображениями. Обратно, предположим, что f_i — борелевские отображения и F_i — метризуемые сепарабельные пространства. Теперь можно воспроизвести доказательство следствия 1 теоремы 23_2, но с двумя последовательными переходами к пределу. Пользуясь свойством 3°), получаем, что отображение f борелевское.

Замечание. Теперь можно существенно улучшить результат теоремы 23_2.

1°) Пусть сначала A — измеримое множество конечной меры. Тогда существует убывающая последовательность открытых множеств $\mathcal{O}_n \supset A$, таких, что $\mu(\mathcal{O}_n) \leqslant \mu(A) + 1/n$. Пересечение A^* множеств $\mathcal{O}_n$ является борелевским множеством, содержащим A, и $\mu(A^* - A) = 0$. Заменяя открытые множества $\mathcal{O}_n \supset A$ на компакты $K_n \subset A$, можно построить борелевское множество $A_* \subset A$ так, что $\mu(A - A_*) = 0$. Если мера множества A не конечна, то его можно представить в виде объединения множеств $A \cap K_n$, где K_n — возрастающая последовательность компактов, объединение которых дает X, и, значит, во всех случаях можно найти два борелевских множества A^* и A_*, такие, что $A_* \subset A \subset A^*$ и $\mu(A^* - A_*) = 0$.

Можно сказать, что *с точностью до множества нулевой μ-меры всякое μ-измеримое множество является борелевским.* Это обстоятельство весьма интересно, поскольку борелевские множества универсально измеримы и зависят только от топологии X. Можно еще сказать, что σ-алгебра μ-измеримых подмножеств X (зависящая от μ) является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все борелевские множества (зависящие лишь от топологии X) и подмножества нулевой μ-меры.

2°). Пусть теперь f является μ-измеримой функцией со значениями в метрическом сепарабельном пространстве F. При построении этажных функций f_n в теореме 23_2 вместо того, чтобы брать $f_n = a_k$ на $D_{k,1/n}$, мы положим $f_n = b_k$, где b_k — произвольная точка множества $B(a_k, 1/n)$. Теперь можно b_k выбирать в образе $f(X) \subset F$ (ибо, если $D_{k,\,1/n}$ не пусто, то $f(X) \cap B(a_k, 1/n)$ не пусто). Таким образом, можно считать, что *все функции f_n принимают значения в образе $f(X)$*.

3°) Пусть A — этажи функции f_n. Каждый этаж является объединением некоторого борелевского множества $B_{i,\,n}$ и некоторого множества нулевой меры. Функция g_n, равная f_n на множествах $B_{i,\,n}$ и любой фиксированной точке множества $f(X)$ вне $B_{i,\,n}$, является борелевской и почти всюду равна f_n. Поэтому функции g_n могут полностью заменить функции f_n. Эти функции g_n сходятся к f только почти всюду. Пусть N — множество точек, в которых они не сходятся. Пусть N^* — борелевское множество нулевой меры, содержащее N. Пусть h_n — функция, равная g_n на $\complement N^*$ и фиксированному элементу множества $f(X)$ на N^*. Тогда h_n будут борелевскими функциями со значениями в $f(X)$. Однако теперь они сходятся *всюду* к некоторому пределу h, почти всюду равному f и принимающему значения в $f(X)$. Предел h последовательности борелевских функций является борелевской функцией. Поэтому окончательно получаем следующее:

Каждая измеримая функция f, определенная на X, со значениями в F почти всюду равна некоторой борелевской функции, принимающей значения в $f(X)$, которая сама является почти всюду пределом последовательности этажно-борелевских функций, значения которых лежат в $f(X)$.

4°) Приведем улучшение другого рода. Предположим, что F компактно, или просто, что $f(X)$ содержится в компакте множества F. Тогда для каждого n найдется конечное число шаров $B(a_k, 1/n)$, покрывающих это множество. Для построения функции f_n вместо числа $N(1/n, K_n, 1/2^{n+1})$ в общем случае можно взять конечное число этих шаров. Так как при этом $d(f_n, f) \leqslant 1/n$, то *этажные функции f_n сходятся всюду и равномерно к функции f*. Можно даже в этом случае выбрать их так, чтобы $f_n(X) \subset f(X)$. Однако их невозможно взять борелевскими (за исключением того случая, когда сама функция f является борелевской; тогда по самому построению они будут борелевскими).

Предположим, например, что $F = \mathbb{C}$ и что f является ограниченной борелевской функцией с компактным носителем K. Свои значения она принимает в некотором компакте пространства $\mathbb{C}$, а, следовательно, является равномерным пределом некоторой последовательности этажных борелевских функций, ограниченных в их совокупности и имеющих носители в фиксированном компакте (поскольку всегда можно умножить их на характеристическую функцию компакта K).

Интеграл от векторной этажной функции

Пусть $\vec{f}$ есть μ-этажная функция с компактным носителем. Тогда *интегралом от этажной функции* $\vec{f}$ *по мере* μ называют величину

$$\int \vec{f} d\mu = \sum_{i \in I} \vec{f}_i \mu(X_i) \qquad \text{(IV, 3; 14)}$$

для допустимого разложения функции $\vec{f}$. Здесь $\vec{f}_i$ — постоянные значения функции $\vec{f}$ на X_i. Непосредственно видно, как мы в этом убедились в случае интеграла Римана, что такая величина не зависит от выбранного разложения функции $\vec{f}$. Интеграл от характеристической функции измеримого множества с компактным замыканием является его мерой. Таким образом определенный интеграл является линейным отображением пространства этажных функций с компактным носителем и значениями в $\vec{F}$ в векторное пространство $\vec{F}$. С другой стороны, если $\vec{f}$ является этажной функцией, равной нулю в дополнении к измеримому множеству A, то мы сразу же получаем оценку

$$\left\| \int \vec{f} d\mu \right\| \leqslant \int \|\vec{f}\| d\mu \leqslant \||\vec{f}\|| \mu(A). \qquad \text{(IV, 3; 15)}$$

Если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ являются этажными почти всюду равными функциями, то они имеют один и тот же интеграл.

Верхний интеграл от вещественной неотрицательной функции

Определение. Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, снабженное мерой Радона $\mu \geqslant 0$. Пусть f — вещественная функция $\geqslant 0$, определенная на X, с конечными или бесконечными значениями[1]). Если f ограничена и имеет компактный носитель, то *верхним интегралом от функции* f *относительно меры* μ называется точная нижняя грань интегралов относительно μ от этажных функций g с компактным носителем $\geqslant f$. Пусть теперь f — произвольная функция. Тогда верхним интегралом от f относительно μ называется точная верхняя грань, конечная или равная $+\infty$, верхних интегралов от ограниченных функций $\geqslant 0$ с компактным носителем, не превосходящих f.

[1]) В этом случае выражение «вещественная функция» не верно, так как функция принимает значения не в $\mathbb{R}$, а в $\overline{\mathbb{R}}$.

Верхний интеграл от f относительно μ обозначается через $\int^* f\,d\mu$ [1]), или $\int^* f(x)\,d\mu(x)$, или $\int^* f$, если это не приводит к недоразумению.

Замечание. Пусть M — некоторое число $\geqslant 0$ и K — некоторый компакт множества X. Обозначим через $f_{M,K}$ функцию, равную $f(x)$ в точках x компакта K, в которых $f(x) \leqslant M$, равную M в точках компакта K, в которых $f(x) > M$, и равную 0 вне K. Тогда $f_{M,K}$ является ограниченной функцией с компактным носителем, а ее верхний интеграл описывается согласно первой части определения. Вторая часть эквивалентна следующему утверждению: верхний интеграл от f является точной верхней гранью верхних интегралов от функций $f_{M,K}$. Можно также сказать, что если $M_0, M_1, M_2, \ldots$ является числовой последовательностью, стремящейся к $+\infty$ при n, стремящемся к $+\infty$, и если $K_0, K_1, K_2, \ldots$ является возрастающей последовательностью компактов, дающих в объединении X (такая последовательность всегда существует, поскольку X предполагается счетным в бесконечности), то верхний интеграл от f является пределом при n, стремящемся к $+\infty$, верхних интегралов от функций f_{M_n, K_n}.

Теорема 24. *Если функции f и g почти всюду равны, то их верхние интегралы равны.*

Доказательство. Предположим сначала, что обе почти всюду равные функции f и g ограничены числом $M \geqslant 0$ и имеют носители, лежащие в компакте K. Пусть B — множество нулевой меры точек x, в которых $f(x) \neq g(x)$.

Пусть теперь f_1 — этажная функция $\geqslant f$. Если через g_1 обозначить верхнюю огибающую функции f_1 и произведения M на характеристическую функцию B, то g_1 будет этажной, $g_1 \geqslant g$, и поскольку f_1 и g_1 почти всюду равны, то $\int^* g \leqslant \int g_1 = \int f_1$. Если взять теперь точную нижнюю грань интегралов от f_1, то

[1]) Существенная разница между верхним интегралом Римана (относительно dx) и верхним интегралом Лебега (относительно произвольной меры $\mu \geqslant 0$) состоит в том, что первый получается одним переходом к пределу, в то время как второй требует двух предельных переходов при вычислении точной верхней грани и точной нижней грани. Здесь мы произвели четыре перехода к пределу: два для того, чтобы определить измеримые множества, и два теперь. Однако это всего лишь видимость, вызванная методом изложения, не являющимся, как мы об этом уже говорили, наилучшим (см. примечание на стр. 490). В действительности определение верхнего интеграла можно свести к двум предельным переходам, но не к одному.

Позже мы получим следующее соотношение между верхним интегралом Римана и верхним интегралом Лебега: для ограниченной с компактным носителем функции $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ при $\mu = dx$ верхний интеграл Римана $\geqslant$ верхнего интеграла Лебега.

мы увидим, что $\int^* g \leqslant \int^* f$. Такое же рассуждение показывает, что $\int^* f \leqslant \int^* g$. Предположим теперь, что f и g — произвольные функции. Пусть теперь f_2 — некоторая ограниченная функция $\leqslant f$ с компактным носителем. Если через g_2 мы обозначим нижнюю огибающую функций g и f_2, то получим $g_2 \leqslant g$. Кроме того, так как f_2 и g_2 почти всюду равны, ограничены и имеют компактный носитель, то $\int^* g \geqslant \int^* g_2 = \int^* f_2$. Переходя к точной верхней грани в верхних интегралах от f_2, получаем: $\int^* g \geqslant \int^* f$. Аналогичное рассуждение с перестановкой f и g окончательно приводит к равенству $\int^* g = \int^* f$.

Следствие. *Если функция $f \geqslant 0$ почти всюду равна нулю, то ее верхний интеграл равен нулю.*

Теорема 25. *Пусть f и g — две функции $\geqslant 0$ на X и k — скалярная постоянная. Тогда если $f \leqslant g$, то $\int^* f \leqslant \int^* g$. Кроме того,*

$$\int^* (f+g) \leqslant \int^* f + \int^* g \quad \text{и} \quad \int^* kf = k \int^* f. \tag{IV, 3; 16}$$

Первая формула является неравенством выпуклости. В противоположность тому, что имело место для интеграла Римана, *эта формула распространяется на счетное неравенство выпуклости* [1]), *в чем проявляется существенное преимущество интеграла Лебега над интегралом Римана.*

Доказательство. Свойства эти очевидны. Докажем, например, первую из формул (IV, 3; 16).

Предположим сначала, что f и g ограничены и имеют компактный носитель. Тогда, с точностью до очевидных изменений, доказательство совпадет с доказательством, приведенным для интеграла Римана в теореме 2. Рассмотрим теперь общий случай, когда f и g произвольны. Если ввести определенные выше функции $f_{M,K}$, то мы получим неравенство

$$(f+g)_{M,K} \leqslant f_{M,K} + g_{M,K}, \tag{IV, 3; 17}$$

откуда

$$\int^* (f+g)_{M,K} \leqslant \int^* f_{M,K} + \int^* g_{M,K} \leqslant \int^* f + \int^* g.$$

---

[1]) Следствие 3 теоремы 36.

Переходя в интеграле $\int^* (f+g)_{M,K}$ к точной верхней грани по всем значениям M и всем компактам $K \subset X$, получаем требуемый результат.

Легко видеть, что если A является некоторой частью X и φ_A — ее характеристическая функция, то

$$\int^* \varphi_A = \mu^*(A)\,^{1)}. \tag{IV, 3; 18}$$

В частности, $\int^* 1$ является мерой X, т. е. нормой μ.

Теорема 26. *Если верхний интеграл от $f \geqslant 0$ конечен, то функция f почти всюду конечна. Если верхний интеграл от f равен нулю, то и функция f почти всюду равна нулю.*

Доказательство. Пусть сначала $\int^* f < +\infty$. Обозначим через A_n множество точек x, в которых $f(x) \geqslant n$. Если φ_n является его характеристической функцией, то $f \geqslant n\varphi_n$, откуда вытекает неравенство

$$\int^* f \geqslant n\,\mu^*(A_n). \tag{IV, 3; 19}$$

Если через A обозначить множество точек x, в которых $f(x) = +\infty$, то при любом n будет справедливым неравенство

$$\int^* f \geqslant n\,\mu^*(A), \tag{IV, 3; 20}$$

из которого следует, что $\mu^*(A) = 0$, т. е. f почти всюду принимает конечные значения.

Предположим теперь, что $\int^* f = 0$. Обозначим на этот раз через B_k множество точек x, в которых $f(x) \geqslant 1/k$, а через φ_k — его характеристическую функцию. Так как $f \geqslant \frac{1}{k}\varphi_k$, то имеет место неравенство

$$0 = \int^* f \geqslant \frac{1}{k}\,\mu^*(B_k), \tag{IV, 3; 21}$$

из которого следует, что $\mu^*(B_k) = 0$. Множество B точек x, в которых $f(x) > 0$, являясь объединением счетной совокупности множеств B_k с нулевой мерой, само имеет нулевую меру, а, следовательно, функция f почти всюду равна нулю.

---

[1]) Это очевидно, если $\bar{A}$ компактно. Если же A произвольно, то, согласно замечанию 1°) к теореме 19, результат можно получить с помощью формулы $\mu^*(A) = \sup\limits_{K \subset A} \mu^*(A \cap K)$ (K — компакты).

Интегрируемость функций с векторными значениями

Определение. Пусть X — локально компактное пространство, снабженное мерой Радона $\mu \geqslant 0$ и $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Говорят, что функция $\vec{f}$, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$ *μ-интегрируема*, или *интегрируема относительно* μ, или просто *интегрируема*, когда это не приводит к недоразумению, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая функция $\vec{g}$, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$, μ-этажная и с компактным носителем, для которой имеет место неравенство:

$$\int^* \| \vec{f} - \vec{g} \| \, d\mu \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(IV, 3; 22)}$$

Сказанное эквивалентно следующему определению: существует такая последовательность $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots$ этажных функций с компактными носителями, определенных на X, со значениями в $\vec{F}$, что величина $\int^* \| \vec{f} - \vec{f}_n \|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Такая последовательность называется *аппроксимирующей последовательностью функции* $\vec{f}$ *для интеграла Лебега относительно* μ. Вместо *интегрируемая* функция говорят также *суммируемая*.

Если две функции, определенные на X, со значениями в $\vec{F}$ почти всюду равны и если одна из них интегрируема, то интегрируема и другая функция, которая будет иметь ту же аппроксимирующую последовательность (теорема 24).

Замечания. Замечания 1°)—3°) на стр. 424—425 могут быть здесь повторены с заменой слов «интегрируема по Риману относительно dx на $\mathbb{R}$» словами «имеет компактный носитель и интегрируема по Лебегу относительно μ на X» (ограничение «с компактным носителем» не нужно для замечания 1°)) и слова «ступенчатая» на слово «μ-этажная». Если нам надо будет сделать ссылку на это замечание, то мы будем говорить: см. замечания 1°), 2°) или 3°) на стр. 524.

Интеграл Лебега от функции с векторными значениями

Теорема 27. *Пусть $\vec{f}$ — отображение X в банахово пространство $\vec{F}$. Если $\vec{f}$ интегрируема и если $\vec{f}_n$ образуют аппроксимирующую последовательность этажных функций с ком-*

пактными носителями для $\vec{f}$, то интегралы $\int \vec{f}_n$ имеют предел, не зависящий от выбора аппроксимирующей последовательности.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Определение. В условиях предыдущей теоремы общий предел интегралов $\int \vec{f}_n$ по всем аппроксимирующим последовательностям называется *интегралом от функции $\vec{f}$ относительно* μ. Интеграл этот обозначается различными способами:

$$\int \vec{f}\,d\mu, \quad \int \vec{f}\mu, \quad \int \vec{f}(x)\,d\mu(x), \quad \int \vec{f}\,[1]. \qquad (IV, 3; 23)$$

Если две интегрируемые функции почти всюду равны, то они имеют один и тот же интеграл, поскольку у них одни и те же аппроксимирующие последовательности.

Если $\vec{f}$ является отображением некоторой части Y множества X в $\vec{F}$, то говорят, что $\vec{f}$ *интегрируема на* Y, если интегрируемой будет функция $\vec{f}$, определенная на X, равная $\vec{f}$ на Y и $\vec{0}$ вне Y. При этих условиях полагают

$$\int_Y \vec{f} = \int \vec{f}\,[2]. \qquad (IV, 3; 24)$$

Замечание. Естественно, каждая этажная функция с компактным носителем интегрируема и ее интеграл определяется по формуле (IV, 3; 14).

Теорема 28. *Если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — две интегрируемые на X функции со значениями в $\vec{F}$ и k — скалярная постоянная, то $\vec{f}+\vec{g}$ и $k\vec{f}$ также интегрируемы; кроме того, имеют место следующие равенства:*

$$\int k\vec{f} = k\int \vec{f} \quad \text{и} \quad \int (\vec{f}+\vec{g}) = \int \vec{f} + \int \vec{g}. \qquad (IV, 3; 25)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Эта теорема говорит о том, что μ-интегрируемые на X функции со значениями в $\vec{F}$ образуют векторное пространство по

[1]) Имеется такое множество различных обозначений для интеграла от $\vec{f}$ относительно μ, что остается лишь сказать: всякая формула, в которой присутствует векторная функция $\vec{f}$ и мера $\mu \geqslant 0$, означает интеграл от $\vec{f}$ относительно μ.

[2]) Если $\vec{f}$ уже определена всюду на X, то $\vec{f}$ является произведением $\vec{f}\varphi_Y$ функции $\vec{f}$ на характеристическую функцию φ_Y множества Y.

отношению к полю скаляров $\mathbb{K}$ и что интеграл является линейным отображением этого векторного пространства в $\vec{F}$.

Следствие 1. *Если Y и Z — два подмножества X, то функция $\vec{f}$ будет интегрируемой на их объединении тогда и только тогда, когда она интегрируема на каждом из этих подмножеств; при этом*

$$\int\limits_{Y\cup Z}\vec{f}=\int\limits_{Y}\vec{f}+\int\limits_{Z}\vec{f}. \qquad \text{(IV, 3; 26)}$$

Доказательство аналогично доказательству следствия теоремы 4.

Следствие 2. *Если $\vec{f}$ является этажной функцией, $\vec{f}=\sum\limits_i \vec{f}_i\varphi_{X_i}$, где $\vec{f}_i$ — постоянные, а φ_{X_i} — характеристические функции измеримых множеств X_i конечной меры (не обязательно имеющих компактное замыкание), то $\vec{f}$ интегрируема и имеет место соотношение* (IV, 3; 14). *В частности, если A является измеримым множеством конечной меры, то $\int \varphi_A=\mu(A)$.*

Доказательство. В силу теоремы 28, достаточно доказать только последнее утверждение. Пусть K_n — возрастающая последовательность компактов, объединение которых равно X. По теореме 19, $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A\cap K_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A-A\cap K_n)=0$. Характеристические функции $\varphi_{A\cap K_n}$ являются этажными с компактным носителем. Поэтому $\int\varphi_{A\cap K_n}=\mu(A\cap K_n)$ и (согласно (IV, 3; 18)) $\int^*\left(\varphi_A-\varphi_{A\cap K_n}\right)=\mu^*(A-A\cap K_n)=\mu(A-A\cap K_n)$ стремится к нулю. Таким образом, $\varphi_{A\cap K_n}$ образуют аппроксимирующую последовательность для φ_A, которая поэтому оказывается интегрируемой и $\int\varphi_A=\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_{A\cap K_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A\cap K_n)=\mu(A)$.

Теорема 29. *Если функция $\vec{f}$, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$ интегрируема, то функция $\|\vec{f}\|$: $x\to\|\vec{f}(x)\|$ также интегрируема и имеет место неравенство*

$$\left\|\int\vec{f}\right\|\leqslant\int\|\vec{f}\|. \qquad \text{(IV, 3; 27)}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Следствия. Здесь можно повторить следствия теоремы 5. В следствиях 3 и 3_2 надо заменить $[a, b]$ на произвольную измеримую часть Y множества X и $(b-a)$ на $\mu(Y)$. Ссылаясь на эти результаты, мы будем говорить: следствия 1, 2, 3, 3_2, 4, 5 теоремы 29.

Теорема 30. *Если φ является функцией с комплексными значениями, принадлежащей множеству $\mathscr{C}(X)$, то она интегрируема относительно μ и ее интеграл $\int \varphi$ совпадает с $\mu(\varphi)$.*

Эта теорема весьма *существенна*. Она говорит о том, что довольно сложное построение, выполненное нами для интегрирования, дает некоторое продолжение исходной линейной формы $\varphi \to \mu(\varphi)$, определенной на $\mathscr{C}(X)$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что каждая функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ интегрируема и, более общо, что каждая непрерывная с компактным носителем K функция $\vec{f}$ на X со значениями в $\vec{F}$ интегрируема. Пусть $\mathscr{V}$ — некоторая компактная окрестность K, и пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $a \in K$ выберем такую ее окрестность $\mathscr{V}_a \subset \mathscr{V}$, чтобы для $x \in \mathscr{V}_a$ выполнялось неравенство $\|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\| \leqslant \varepsilon/\mu(\mathscr{V})$. Конечное число таких окрестностей покрывает все множество K. Пусть это будут окрестности $\mathscr{V}_{a_1}, \mathscr{V}_{a_2}, \ldots, \mathscr{V}_{a_n}$. Положим $C_1 = \mathscr{V}_{a_1}$, $C_2 = \mathscr{V}_{a_2} \cap \complement \mathscr{V}_{a_1}, \ldots,$ $C_n = \mathscr{V}_{a_n} \cap \complement (\mathscr{V}_{a_1} \cup \mathscr{V}_{a_2} \cup \ldots \cup \mathscr{V}_{a_{n-1}})$. Каждое из множеств C_i является борелевским, а значит, измеримым. Обозначим через $\vec{f}_\varepsilon$ функцию, равную $\vec{f}(a_i)$ в C_i и равную $\vec{0}$ в дополнении к объединению $\mathscr{V}_{a_i}$. Функция $\vec{f}_\varepsilon$ — этажная, имеет компактный носитель и $\|\vec{f} - \vec{f}_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu(\mathscr{V})}$, поэтому $\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, $\vec{f}$ интегрируема.

Остается теперь доказать, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ $\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$. Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть A — измеримая часть X, φ — непрерывная функция с компактным носителем, мажорируемая характеристической функцией χ_A множества A. Тогда $\mu(\varphi) \leqslant \mu(A)$.*

Доказательство леммы 1. Очевидно, $\int \varphi \leqslant \int \chi_A = \mu(A)$. Однако нас интересует не $\int \varphi$, а $\mu(\varphi)$, и мы еще не знаем, равны ли они между собой.

Пусть $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество $\supset A$. Если мы покажем, что $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\mathcal{O})$, то, переходя к точной нижней грани по всем $\mathcal{O}$, мы получим нужный нам результат. Все сводится к тому, чтобы исключить A и заменить его на открытое множество $\mathcal{O}$. Затем можно предположить, что $\overline{\mathcal{O}}$ компактно. Действительно, если $\mathcal{V}$ является компактной окрестностью носителя (по предположению компактного) функции φ, то можно будет заменить множество $\mathcal{O}$ на множество $\mathcal{O} \cap \mathring{\mathcal{V}}$, имеющее компактное замыкание. Наконец, можно считать функцию $\varphi \geqslant 0$ или в противном случае заменить ее на φ^+. Пусть теперь K_n — компакт $\{x \in X;\ \varphi(x) \geqslant 1/n\}$, $n \geqslant 1$. Пусть α_n — непрерывная функция, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{O}$, равная 1 на K_n (следствие 1 теоремы 11).

Положим $\varphi_n = \alpha_n\varphi$. Функция φ_n непрерывна, имеет носитель в $\mathcal{O}$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, а, значит, $\mu(\varphi_n) \leqslant \mu(\mathcal{O})$ (см. определение на стр. 490). Однако $|\varphi - \varphi_n| = (1 - \alpha_n)\varphi \leqslant 1/n$ и носитель этой функции лежит в $\overline{\mathcal{O}}$. Следовательно, $\mu(\varphi - \varphi_n) \leqslant \frac{1}{n}\|\mu\|_{\overline{\mathcal{O}}}$ и, значит,

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\varphi_n) + \frac{1}{n}\|\mu\|_{\overline{\mathcal{O}}} \leqslant \mu(\mathcal{O}) + \frac{1}{n}\|\mu\|_{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Так как n произвольно, то лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\vec{g}$ — векторная этажная функция с компактным носителем, мажорируемая по норме числом M, причем число множеств, на которые разбито пространство X, равно N. Тогда, каково бы ни было число $\delta > 0$, существует такая разложимая*[1]) *непрерывная функция $\vec{\gamma}$ с компактным носителем, что:*

1°) $\|\vec{g} - \vec{\gamma}\| \leqslant NM$;

2°) $\vec{\gamma} = \vec{g}$ *всюду, кроме множества с мерой* $\leqslant \delta$;

3°) *если функция g является скалярной, а, следовательно, $\gamma \in \mathscr{C}(X)$, то* $\left|\int \gamma - \mu(\gamma)\right| \leqslant \delta$;

4°) *если $g \geqslant 0$, то $\gamma \geqslant 0$.*

Доказательство леммы 2. Пусть $\vec{g} = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \chi_{A_i}$, где χ_{A_i} — характеристическая функция этажа A_i функции $\vec{g}$, на котором $\vec{g}$ принимает постоянное значение $\vec{g}_i \neq \vec{0}$. Пусть K_i — компакт и $\mathcal{O}_i$ — открытое множество, такие, что $K_i \subset A_i \subset \mathcal{O}_i$, $\mu(\mathcal{O}_i) - \mu(K_i) \leqslant \delta/NM'$, где $M' = \max(M, 1)$. Пусть γ_i — не-

[1]) Это понятие было введено в следствии 8 теоремы 11.

прерывная функция, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{O}_i$, равная 1 на некоторой окрестности компакта K_i. Положим $\gamma = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \gamma_i$. Тогда:

1°) $0 \leqslant \chi_{A_i} \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$, а, следовательно $|\gamma_i - \chi_{A_i}| \leqslant 1$ и $\|\vec{g} - \vec{\gamma}\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \|\vec{g}_i\| \, |\chi_{A_i} - \gamma_i| \leqslant NM$.

2°) На K_i $\gamma_i = \chi_{A_i} = 1$, на $\complement\mathcal{O}_i$ $\gamma_i = \chi_{A_i} = 0$, а, следовательно, всюду, кроме множества $\mathcal{O}_i - K_i$ меры $\leqslant \delta/NM' \leqslant \delta/N$. Поэтому $\vec{g} = \vec{\gamma}$ всюду, кроме некоторого множества, содержащегося в $\bigcup_{i=1}^{N} (\mathcal{O}_i - K_i)$, меры $\leqslant N(\delta/N) = \delta$.

Замечание. Из 1°) и 2°) вытекает, что $\int \|\vec{g} - \vec{\gamma}\| \leqslant \delta NM$.

3°) Пусть $\vec{F} = \mathbb{C}$, а $\int \gamma_i$ и $\mu(\gamma_i)$ оба заключены между $\mu(K_i)$ и $\mu(\mathcal{O}_i)$, а, следовательно, $\left| \int \gamma_i - \mu(\gamma_i) \right| \leqslant \mu(\mathcal{O}_i) - \mu(K_i) \leqslant \leqslant \frac{\delta}{NM'} \leqslant \frac{\delta}{NM}$. Тогда

$$\left| \int \gamma - \mu(\gamma) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |g_i| \left| \int \gamma_i - \mu(\gamma_i) \right| \leqslant M \frac{\delta}{NM} N = \delta. \quad \text{(IV, 3; 28)}$$

4°) Если $g_i \geqslant 0$, то $\gamma \geqslant 0$.

Доказательство теоремы. Пусть $\varphi \in \mathscr{C}(X)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие этажные функции g и $h \geqslant 0$ с компактным носителем, что $|\varphi - g| \leqslant h$ и $\int h \leqslant \varepsilon/2$ (см. замечание 2°) на стр. 524). Пусть M — максимум модулей величин 1, φ, g, h и N — максимальное число этажей функций g и h.

Применим последовательно к g и $h \geqslant 0$ лемму 2 при $\delta = \varepsilon/[2(1 + 5MN)]$. Согласно этой лемме, найдутся две непрерывные функции α и β с компактными носителями, обладающие свойствами 1°)—4°). Прежде всего,

$$\left| \int \varphi - \mu(\varphi) \right| \leqslant \left| \int \varphi - \int \alpha \right| + \left| \int \alpha - \mu(\alpha) \right| + |\mu(\alpha) - \mu(\varphi)|. \quad \text{(IV, 3; 29)}$$

Далее,

1°) $\qquad |\varphi - \alpha| \leqslant |\varphi - g| + |g - \alpha| \leqslant h + |g - \alpha|,$

где $\int h \leqslant \varepsilon/2$. Функция $g - \alpha$ равна нулю всюду, кроме множества меры $\leqslant \delta$, на котором она мажорируется по модулю числом NM, а, значит, $\int |g-\alpha| \leqslant \delta NM$. Окончательно получаем

$$\left|\int \varphi - \int \alpha\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \delta NM. \qquad \text{(IV, 3; 30)}$$

2°) $$\left|\int \alpha - \mu(\alpha)\right| \leqslant \delta. \qquad \text{(IV, 3; 31)}$$

3°) $$|\mu(\alpha) - \mu(\varphi)| = |\mu(\alpha-\varphi)| \leqslant \mu(|\alpha-\varphi|).$$

Из 1°) следует, что $|\alpha-\varphi| \leqslant h + |g-\alpha| \leqslant \beta + |h-\beta| + |g-\alpha|$. Далее, функция $|g-\alpha|$ равна нулю всюду, кроме множества меры δ, где она мажорируется числом MN; функция $|h-\beta|$ также равна нулю всюду, кроме множества меры δ, где она мажорируется числом NM. Поэтому $|\alpha-\varphi|-\beta$ является непрерывной функцией с компактным носителем, равной нулю всюду, кроме некоторого измеримого множества меры $\leqslant 2\delta$, на котором она мажорируется числом $2NM$.

Применяя к $(|\varphi-\alpha|-\beta)/2MN$ лемму 1, получаем:

$$|\mu(\alpha) - \mu(\varphi)| \leqslant 2\delta \cdot 2NM = 4NM\delta. \qquad \text{(IV, 3; 32)}$$

Из (IV, 3; 30)—(IV, 3; 32), в силу соответствующего выбора δ, получаем:

$$\left|\int \varphi - \mu(\varphi)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \delta NM + \delta + 4\delta NM \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(IV, 3; 33)}$$

Так как ε произвольно, то $\int \varphi = \mu(\varphi)$.

Замечание. Смешно проводить доказательство для такого очевидного утверждения, но это пришлось сделать в качестве неизбежного наказания за избранное изложение теории Лебега (см. примечание на стр. 490).

Следствие 1. *Мера Радона $\mu \geqslant 0$ на X будет известной, если будут известны меры открытых множеств (или компактных множеств)* [1].

Прежде всего, формулы $\mu(K) = \inf\limits_{\mathcal{O}\supset K} \mu(\mathcal{O})$ и $\mu(\mathcal{O}) = \sup\limits_{K\subset \mathcal{O}} \mu(K)$ говорят о том, что если известны меры открытых множеств, то известны меры компактов, и наоборот. Но тогда будут известны меры всех множеств, а, значит, интегралы всех функций. Из равенства $\mu(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$ вытекает, что $\mu(\varphi)$ известна для $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ и потому известна мера μ.

[1] Мы не утверждаем, что можно произвольно выбирать меры открытых множеств. Мы говорим лишь, что две меры Радона $\geqslant 0$, дающие для открытых множеств одни и те же меры, совпадают.

Следствие 2. *Мера Радона $\mu \geqslant 0$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ будет известной, если будут известны меры открытых интервалов (или замкнутых интервалов).*

Прежде всего из формул $\mu([a, b]) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu(]a-\varepsilon, b+\varepsilon[)$ и $\mu(]a, b[) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$ вытекает, что один из этих случаев следует из другого.

Затем легко показать, что каждое открытое множество из $\mathbb{R}$ является объединением счетного множества непересекающихся интервалов. Тогда меры открытых множеств известны, и остается лишь применить следствие 1.

Например, теория интеграла Римана (§ 1) позволила построить меру Радона dx на $\mathbb{R}$, которая для каждого интервала $|a, b|$ дает меру $b - a$. Настоящее следствие говорит о том, что в этом случае достаточно знать только это свойство.

Замечание. Пусть теперь φ — скалярная непрерывная функция с некомпактным носителем, но такая, что носитель μ и носитель φ имеют компактное пересечение K. Мы определили ранее $\mu(\varphi)$ (теорема 16) даже в том случае, когда μ является векторной мерой. Легко видеть, что *если $\mu \geqslant 0$, то функция φ является μ-измеримой и $\mu(\varphi)$ совпадает с $\int \varphi\, d\mu$.*

В самом деле, если $\alpha \in \mathscr{C}(X)$ равна 1 на некоторой окрестности K, то $\mu(\varphi)$ нами определялась как $\mu(\alpha\varphi)$. Функция $\alpha\varphi$ лежит в $\mathscr{C}(X)$, а, следовательно, интегрируема и, согласно теореме 30, $\mu(\alpha\varphi) = \int (\alpha\varphi)\, d\mu$. Функции $\alpha\varphi$ и φ равны на носителе μ [1]), поэтому они μ-почти всюду равны между собой; следовательно, φ интегрируема и $\int \varphi\, d\mu = \int (\alpha\varphi)\, d\mu = \mu(\alpha\varphi) = \mu(\varphi)$.

Теорема 31. 1°) *Если f является ограниченной вещественной функцией $\geqslant 0$ с компактным носителем на $\mathbb{R}$, то ее верхний интеграл Римана по dx не меньше ее верхнего интеграла Лебега.*

2°) *Если $\vec{f}$ является функцией, определенной на вещественной прямой, со значениями в $\vec{F}$, интегрируемой по Риману относительно меры dx, то она тем более интегрируема по Лебегу и ее интеграл в смысле Лебега равен интегралу в смысле Римана.*

Доказательство. Докажем сначала 1°). Обозначим через $\int^{*R} f$ (соответственно $\int^{*L} f$) верхний интеграл в смысле

[1]) В каждой точке носителя μ либо $\alpha = 1$ (если эта точка лежит в K), либо $\varphi = 0$; поэтому всюду $\alpha\varphi = \varphi$. С другой стороны, мы видели на стр. 492 в замечании 3°), что дополнение к носителю имеет нулевую меру.

Римана (соответственно в смысле Лебега). Поскольку каждая ступенчатая функция является этажной функцией, то, вспоминая определение этих двух верхних интегралов, получаем:

$$\int^{*L} f \leqslant \int^{*R} f.$$

Неравенство не обязательно может перейти в равенство. Может иметь место знак $<$. Рассмотрим, например, функцию f, равную 1 во всех рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в остальных точках. На стр. 492 мы видели, что $\int^{*R} f = 1$. Однако так как множество рациональных чисел имеет меру, равную нулю, то $\int^{*L} f = 0$.

Пусть теперь $\vec{f}$ — некоторая интегрируемая по Риману функция и $\vec{f}_n$ — аппроксимирующая последовательность, образованная из ступенчатых функций с компактными носителями, а, значит, тем более и из этажных функций. Тогда $\int^{*L} \|\vec{f} - \vec{f}_n\| \leqslant$ $\leqslant \int^{*R} \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$ стремится к 0. Это значит, что $\vec{f}_n$ образуют аппроксимирующую последовательность для интеграла Лебега, а, следовательно, $\vec{f}$ интегрируема по Лебегу, и ее интеграл $\int^{L} \vec{f}$, являющийся пределом интегралов $\int^{L} \vec{f}_n = \int^{R} \vec{f}_n$, равен $\int^{R} \vec{f}$.

Напротив, *указанная выше функция* $f \geqslant 0$ *интегрируема по Лебегу*, имеет интеграл, равный нулю (поскольку она почти всюду равна нулю), *однако не интегрируема по Риману*.

Теорема 32. *Каждая непрерывная на X функция со значениями в $\vec{F}$ и компактным носителем интегрируема. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$. Для того чтобы $\vec{f}$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существовала такая функция $\vec{g}$, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$, непрерывная и с компактным носителем, что $\int^{*} \|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon$, или необходимо и достаточно, чтобы существовала аппроксимирующая последовательность функции $\vec{f}$, образованная из непрерывных функций с компактным носителем. Эти функции могут даже быть выбраны разложимыми*[1]).

[1]) См. определение в следствии 8 теоремы 11.

Доказательство. Интегрируемость непрерывных функций с компактным носителем была установлена в начале доказательства теоремы 30. Следовательно, всякая функция, имеющая аппроксимирующую последовательность, образованную из непрерывных функций с компактным носителем, интегрируема.

Пусть теперь $\vec{f}$ — произвольная интегрируемая функция. Тогда существует такая этажная функция $\vec{g}$ с компактным носителем, что $\int \|\vec{f}-\vec{g}\| \leqslant \varepsilon/2$. Затем, согласно лемме 2, из доказательства теоремы 30 следует существование такой разложимой непрерывной функции $\vec{\gamma}$ с компактным носителем, что $\int \|\vec{g}-\vec{\gamma}\| \leqslant \delta NM$. Выбирая $\delta=\varepsilon/2NM$, получим $\int \|\vec{g}-\vec{\gamma}\| \leqslant \varepsilon/2$, откуда $\int \|\vec{f}-\vec{\gamma}\| \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание. Эта теорема в особенности удобна, когда $\vec{F}$ является полем комплексных чисел, так как тогда она представляет $\int f$ как предел величин $\mu(g)$, получающихся непосредственно из определения μ как линейной формы, заданной на пространстве $\mathscr{C}(X)$.

Интегрируемость и интегралы от функций, определенных почти всюду

Пусть сначала f является вещественной функцией $\geqslant 0$, определенной *почти всюду* на X. Продолжим ее произвольным образом до некоторой функции $\tilde{f} \geqslant 0$, определенной всюду на X. Интеграл $\int^* \vec{\tilde{f}}$ не зависит от выбранного продолжения, поскольку любые два таких продолжения почти всюду равны между собой. Общее их значение называется верхним интегралом от f и обозначается через $\int^* f$. Точно так же, если $\vec{f}$ является функцией, определенной почти всюду на X, со значениями в $\vec{F}$ и $\vec{\tilde{f}}$ — произвольное продолжение этой функции до функции, определенной на всем X, со значениями в $\vec{F}$, то интегрируемость $\vec{\tilde{f}}$ и величина ее интеграла не зависят от выбранного продолжения.

Если $\vec{\tilde{f}}$ интегрируема, то говорят, что $\vec{f}$ интегрируема и общее значение интегралов $\int \vec{\tilde{f}}$ называется интегралом от $\vec{f}$ и обозначается через $\int \vec{f}$.