## § 4. ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА О СХОДИМОСТИ. ПРОСТРАНСТВО $L^1$

Теорема о сходимости, которую мы сейчас докажем, *значительно сильнее* всего того, что излагалось в связи с интегралом Римана, и именно благодаря этой теореме интеграл Лебега обладает существенным преимуществом по сравнению с интегралом Римана. Условия, лишь немногим более ограничительные, чем обычная сходимость функций, оказываются достаточными для обеспечения сходимости интегралов.

Вначале мы приведем теорему, показывающую, как можно перейти от простой сходимости к тому, что напоминает равномерную сходимость.

Теорема 33 (Егоров). *Пусть $f_n$ — последовательность измеримых отображений $X$ в метрическое пространство $F$. Предположим еще, что эта последовательность просто сходится $\mu$-почти всюду к функции $f$. Тогда, каким бы ни был компакт $K$ из $X$ и каково бы ни было число $\delta > 0$, найдется такая компактная часть $K_\delta$ компакта $K$, что $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$, при этом на $K_\delta$ отображения $f_n$ равномерно сходятся к отображению $f$.*

Доказательство. Заранее ограничимся компактом $K$. Зададим фиксированное число $\varepsilon'$ и обозначим через $A_{n,\varepsilon'}$ множество точек $x$ из $K$, в которых $d(f_n(x), f(x)) > \varepsilon'$.

Докажем сначала, что это множество $A_{n,\varepsilon'}$ $\mu$-измеримо. Поскольку каждая из функций $f_n$ и $f$ измерима (теорема 23), то отображение $x \to (f_n(x), f(x))$ является измеримым отображением $K$ в произведение $F \times F$ (следствие 1 теоремы $23_2$). Так как $(x, y) \to d(x, y)$ является непрерывным отображением $F \times F$ в $\mathbb{R}$ (теорема $17_2$ гл. II), то из теоремы 22 следует, что вещественная функция $x \to d(f_n(x), f(x))$ измерима. Множество $A_{n,\varepsilon'}$ является пересечением $K$ и прообраза открытого множества $]\varepsilon', +\infty[$ из $\mathbb{R}$ при этом отображении. По определению, это множество измеримо. Обозначим теперь через $\mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$ объединение $\bigcup\limits_{n \geqslant m} A_{n,\varepsilon'}$. Множество $\mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$ измеримо. Точка $x \in K$ принадлежит этому объединению тогда и только тогда, когда существует такое целое $n \geqslant m$, что $d(f_n(x), f(x)) > \varepsilon'$. Последовательность $\mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$ является убывающей последовательностью измеримых множеств. Если точка $x$ принадлежит пересечению $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$ множеств $\mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$, то последовательность $f_n(x)$ не может сходиться к $f(x)$, а поскольку $f_n$ сходятся почти всюду к $f$, то это пересечение имеет меру, равную нулю. Так как убывающая последовательность множеств $\mathcal{A}_{m,\varepsilon'}$ пересекается по множеству меры нуль, то из п. 5°) теоремы 19 следует, что для заданного $\delta' > 0$ существует такое целое $m$, что $\mu(\mathscr{A}_{m,\varepsilon'}) \leqslant \delta'$ [1]). Обозначим через $\mathscr{A}_{\delta',\varepsilon'}$ это множество $\mathscr{A}_{m,\varepsilon'}$.

Таким образом, мы доказали следующий результат:

*Каковы бы ни были числа $\delta'$ и $\varepsilon' > 0$, существуют такое целое число $m' = m'(\delta', \varepsilon')$ и такое множество $\mathscr{A}_{\delta',\varepsilon'} \subset K$ меры $\leqslant \delta'$, что для всех $n \geqslant m'(\delta', \varepsilon')$ и любого $x \in K - \mathscr{A}_{\delta',\varepsilon'}$ имеет место неравенство $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon'$.*

Будем теперь брать последовательно $\delta' = \delta/2^{\nu+1}$, $\varepsilon' = 1/2^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность целых чисел $m_\nu = m'(\delta/2^{\nu+1}, 1/2^\nu)$ и множеств $\mathscr{A}_\nu = \mathscr{A}_{\delta/2^{\nu+1}, 1/2^\nu}$. Обозначим через $\mathscr{A}_\delta$ объединение множеств $\mathscr{A}_\nu$. Множество $\mathscr{A}_\delta$ является измеримым множеством меры $\leqslant \delta/2$, содержащимся в $K$. Каково бы ни было $\nu$, для $n \geqslant m_\nu$, теперь имеет место неравенство $d(f_n(x), f(x)) \leqslant 1/2^\nu$, лишь бы только $x$ не принадлежал множеству $\mathscr{A}_\delta$. Это означает, что на дополнении $K'_\delta$ этой части $\mathscr{A}_\delta$ по отношению в $K$ последовательность $f_n$ равномерно сходится к $f$. Имеем: $\mu(K'_\delta) = \mu(K - \mathscr{A}_\delta) \geqslant \mu(K) - \delta/2$. Теперь, по определению меры множеств, найдется такой компакт $K_\delta$, содержащийся в $K'_\delta$, что $\mu(K_\delta) \geqslant \mu(K) - \delta$ или $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$ и на $K_\delta$ функции $f_n$ равномерно сходятся к $f$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) Может показаться, что возможно найти такую часть $K_\delta$ компакта $K$, чтобы $\mu(K - K_\delta) = 0$ и чтобы на $K_\delta$ функции $f_n$ сходились равномерно к $f$, но это не так. Рассмотрим, например, последовательность вещественных функций, определенных на $\mathbb{R}$ по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \qquad \text{(IV, 4; 1)}$$

Очевидно, при $n$, стремящемся к $+\infty$, $f_n$ сходятся просто к 0. На компакте $[0, 1]$ при любом $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, и любом $n$ множество точек $x$, в которых $|f_n(x)| > \varepsilon$, имеет меру $1/n > 0$, что противоречит предположению.

2°) Если $X$ не компактно, то заменить $K$ на $X$ невозможно. В самом деле, рассмотрим вещественные функции вещественной переменной и возьмем в качестве $f_n$ функцию, определенную по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < n, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant n. \end{cases} \qquad \text{(IV, 4; 2)}$$

[1]) Только здесь мы воспользовались тем фактом, что рассмотрение ведется на компакте $K$; множества $\mathscr{A}_{m,\varepsilon'}$ имеют конечную меру, и теорема может быть применена.

Очевидно, что последовательность функций $f_n$ просто сходится к функции 0. Однако, каково бы ни было $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, и каково бы ни было $n$, множество точек $x$, в которых справедливо неравенство $|f_n(x)| > \varepsilon$, измеримо и имеет бесконечную меру.

Следствие (свойство Лузина). *Пусть $f$ — отображение $X$ в метризуемое сепарабельное пространство $F$. Если $f$ $\mu$-измеримо, то, каким бы ни был компакт $K$ из $X$ и каково бы ни было $\delta > 0$, найдется такой компакт $K_\delta \subset X$, что $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$, а сужение $f$ на $K_\delta$ является непрерывным отображением, и обратно.*

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что $f$ является этажной функцией. Эта функция принимает постоянные значения $f_i$ на конечном числе непересекающихся множеств $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, объединение которых равно $X$. Пусть $K$ — некоторый компакт. Для каждого $i$ обозначим через $K_i$ такой компакт $\subset A_i \cap K$, что $\mu(K_i) \geqslant \mu(A_i \cap K) - \delta/N$. Тогда в качестве $K_\delta$ достаточно взять объединение $K_i$. Множество $K_\delta$ является компактом, $\mu(K - K_\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{N} = \frac{\delta}{N} N = \delta$ и, кроме того, $K_\delta$ является объединением непересекающихся и замкнутых множеств $K_i$. Поскольку прообраз каждого замкнутого множества (и даже всего множества) из $F$ при отображении $f_\delta$ является объединением $K_i$, а, следовательно, замкнут, то сужение $f_\delta$ функции $f$ на $K_\delta$ непрерывно на $K_\delta$.

Пусть теперь $f$ — произвольное измеримое отображение. Согласно теореме $23_2$, существует последовательность этажных функций $f_n$, сходящихся почти всюду к $f$ при $n$, стремящемся к бесконечности. Согласно теореме Егорова, если мы выберем некоторую метрику на $F$, то найдется такой компакт $K'_\delta$, $\mu(K - K'_\delta) \leqslant \delta/2$, на котором функции $f_n$ сходятся равномерно к $f$. Поскольку $f_n$ является этажной функцией, то из только что доказанного вытекает, что можно найти такой компакт $K_n \subset K'_\delta$, $\mu(K_n - K'_\delta) \leqslant \delta/2^{n+2}$, чтобы функции $f_n$ были непрерывными на $K_n$. Положим теперь $K_\delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Это множество является некоторым компактом из $K$ и $K - K_\delta \subset (K - K'_\delta) \cup \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} (K'_\delta - K_n) \right)$, а, следовательно, $\mu(K - K_\delta) \leqslant \mu(K - K'_\delta) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu(K'_\delta - K_n) \leqslant \frac{\delta}{2} +$

$+\frac{\delta}{2}=\delta$. Кроме того, на $K_\delta$ все функции $f_n$ непрерывны и равномерно сходятся к $f$, а, значит, функция $f$ непрерывна на $K_\delta$. Мы использовали теорему Егорова, в которой пространство $F$ предполагается метрическим (для того чтобы иметь возможность говорить о равномерной сходимости). Однако окончательный результат (непрерывность $f$ на $K_\delta$), очевидно, не зависит от этой метрики.

2°) Обратно, предположим, что свойство Лузина для функции $f$ выполнено. Пусть $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество $F$ и $B=f^{-1}(\mathcal{O})$. Поскольку $f$ непрерывна на $K_\delta$, то $B\cap K_\delta$ является открытым множеством компакта $K_\delta$. Таким образом, это множество является пересечением некоторого открытого множества из $X$ и компакта $K_\delta$, а, значит, $\mu$-измеримо. Далее,

$$\mu(B\cap K_\delta)\leqslant\mu_*(B\cap K)\leqslant\mu^*(B\cap K)\leqslant\mu(B\cap K_\delta)+\mu^*(B\cap(K-K_\delta))\leqslant$$
$$\leqslant\mu(B\cap K_\delta)+\mu(K-K_\delta)\leqslant\mu(B\cap K_\delta)+\delta,$$

а, следовательно, $\mu^*(B\cap K)-\mu_*(B\cap K)\leqslant\delta$. Поскольку $\delta$ произвольно, то $\mu^*(B\cap K)=\mu_*(B\cap K)$, что означает измеримость множества $B\cap K$. Так как полученное справедливо для любого компакта $K$ и $X$ является счетным объединением компактов, то $B=f^{-1}(\mathcal{O})$ измеримо, а $f$ является измеримым отображением.

Замечание. Обратное утверждение 2°) справедливо для произвольного топологического пространства $F$ (лишь бы, как всегда, $X$ было счетным в бесконечности). Напротив, утверждение 1°) использовало теорему Егорова, из-за которой $F$ предполагалось метризуемым, и теорему $23_2$, в которой требуется, как это видно из ее доказательства, чтобы $F$ было метризуемым и сепарабельным. Таким образом, свойство Лузина, вообще говоря, является более сильным, чем измеримость, однако оно ему эквивалентно, если метризуемое пространство $F$ сепарабельно. Напомним, что на стр. 510 мы дали *предварительное* определение измеримости, предполагая метризуемое $F$ сепарабельным. Теперь мы можем дать окончательное определение: *каково бы ни было топологическое пространство $F$, отображение $f$ называется измеримым, если оно обладает свойством Лузина.* Теперь можно показать, что теоремы 21, 22 и следствия 1, 2, 3 теоремы $23_2$ верны без каких-либо условий, налагаемых на $F$; теоремы 23, $23_2$ верны только для метризуемого пространства $F$; теорема Егорова 33 предполагает $F$ метрическим (для того чтобы можно было говорить о равномерной сходимости). Последнее следствие (Лузина) можно перефразировать, говоря, что если $f$ измерима, то прообраз каждого борелевского множества из $F$ измерим, в то время как обратное утверждение справедливо лишь в том случае, когда метризуемое $F$ сепарабельно. Учитывая сказанное в примечании на стр. 510, мы проявили осторожность, рассмотрев только предварительное определение, предполагающее $F$ метризуемым и сепарабельным, для того чтобы высказать утверждение с предположениями, соответствующими окончательному определению.

Теорема 34 (частная теорема Лебега). *Пусть $X$ — локально компактное пространство, снабженное мерой Радона $\mu \geqslant 0$, и $\vec{F}$ — пространство Банаха. Пусть $\vec{f}_n$ — последовательность функций, определенных на $X$, со значениями в $\vec{F}$, имеющих носители в одном и том же компакте $K$ и мажорируемых по норме одним и тем же числом $M \geqslant 0$. Если функции $\vec{f}_n$ интегрируемы, измеримы*[1] *и просто сходятся почти всюду к $\vec{f}$ при $n$, стремящемся к $+\infty$, то $\vec{f}$ интегрируема и измерима, $\int \vec{f}_n$ сходятся к $\int \vec{f}$ и даже $\int \|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ сходится к 0.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Из предыдущей теоремы вытекает, что для числа $\delta = \varepsilon/4M$ можно найти такую измеримую часть $K_\delta$ компакта $K$, что $\mu(K-K_\delta) \leqslant \delta$, и такую, что на $K_\delta$ последовательность $\vec{f}_n$ равномерно сходится к $\vec{f}$. Теперь можно выбрать такое целое число $p$, что для всех $n \geqslant p$ и любого $x \in K_\delta$ имеет место неравенство

$$\|\vec{f}(x)-\vec{f}_n(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(K)}. \tag{IV, 4; 3}$$

Отсюда следует, что для $n \geqslant p$ функция $\|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ не превосходит функции, принимающей значение $\varepsilon/2\mu(K)$ на множестве $K_\delta$, равной $2M$ на множестве $K-K_\delta$ и равной 0 на дополнении к компакту $K$. Поэтому для $n \geqslant p$ имеет место оценка

$$\int^* \|\vec{f}-\vec{f}_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(K)}\mu(K)+2M\delta=\varepsilon. \tag{IV, 4; 4}$$

Это неравенство показывает, что последовательность интегрируемых функций $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\vec{f}$. Отсюда следует, что $\vec{f}$ интегрируема, $\int \vec{f}$ является пределом $\int \vec{f}_n$ и $\int \|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ сходится к нулю.

[1]) Предположения излишни. В теореме 39, п. 1°) будет показано, что ограниченная функция с компактным носителем интегрируема тогда и только тогда, когда она измерима. Но мы пока еще этого не знаем.

Теорема 35 (общая теорема Лебега). *Пусть $X$ — локально компактное пространство, снабженное мерой Радона $\mu \geqslant 0$, и пусть $\vec{F}$ — банахово пространство. Предположим, с одной стороны, что последовательность $\vec{f}_n$, состоящая из интегрируемых и измеримых функций*[1], *просто сходится почти всюду к $\vec{f}$ при $n$, стремящемся к $+\infty$, и, с другой стороны, что существует такая вещественная интегрируемая определенная на $X$ функция $g \geqslant 0$, при которой имеет место неравенство $\|\vec{f}_n\| \leqslant g$. Тогда функция $\vec{f}$ интегрируема и измерима, $\int \vec{f}_n$ сходится к $\int \vec{f}$ и $\int \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$ сходится к нулю.*

Естественно, общая теорема Лебега содержит частную теорему Лебега. Достаточно положить функцию $g$ равной произведению $M$ на характеристическую функцию компакта $K$. Кроме того, поскольку теорема 35 будет доказана независимо от теоремы 34, можно было бы привести теорему 34 как простое следствие теоремы 35. В целях простоты мы предпочли сначала доказать теорему 34.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $g$ интегрируема, то существует такая ограниченная по модулю числом $M > 0$ с компактным носителем $K$ функция $\gamma \geqslant 0$, что имеет место неравенство

$$\int^* |g - \gamma| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}. \tag{IV, 4; 5}$$

По теореме 33, для $\delta = \varepsilon/8M$ можно найти такое подмножество $K_\delta$ компакта $K$, что $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$, на котором $\vec{f}_n$ равномерно сходится к $\vec{f}$. Найдем теперь такое целое число $p$, чтобы при $n \geqslant p$ на $K_\delta$ имело место неравенство

$$\|\vec{f} - \vec{f}_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(K)}. \tag{IV, 4; 6}$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| \leqslant \int^*_{K_\delta} \|\vec{f} - \vec{f}_n\| + \int^*_{\complement K_\delta} \|\vec{f} - \vec{f}_n\|. \tag{IV, 4; 7}$$

Первый интеграл справа является интегралом от функции, не превосходящей $\varepsilon/2\mu(K)$, и, следовательно, этот интеграл $\leqslant \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant p$. Поскольку $\|\vec{f}_n\|$ мажорируется функцией $g$ и

[1]) Здесь также требование измеримости чрезмерно. В теореме 39, п. 2°) будет показано, что интегрируемая функция измерима.

$\vec{f}_n(x)$ стремится к $\vec{f}(x)$ почти для всех $x$, то $\|\vec{f}\|$ почти всюду мажорируема функцией $g$, а, значит, второй интеграл не превосходит

$$\int\limits_{\complement K_\delta} 2g \leqslant \int\limits_{\complement K_\delta} 2\gamma + \int^* 2|g-\gamma| =$$

$$= \int\limits_{K-K_\delta} 2\gamma + \int^* 2|g-\gamma| \leqslant 2M\delta + \frac{2\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\mathrm{IV}, 4; 8)$$

В итоге мы получаем неравенство

$$\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant p. \qquad (\mathrm{IV}, 4; 9)$$

Это неравенство говорит о том, что последовательность $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\vec{f}$, составленной из интегрируемых функций. Отсюда следует, что функция $\vec{f}$ интегрируема, $\int \vec{f}_n$ сходится к $\int \vec{f}$ и $\int \|\vec{f} - \vec{f}_n\|$ сходится к нулю.

**Примеры применений теоремы Лебега**

1°) Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{[0,1]} x^n\,dx = \frac{1}{n+1}. \qquad (\mathrm{IV}, 4; 10)$$

При $n$, стремящемся к бесконечности, он сходится к нулю. Это можно было предвидеть с помощью теоремы Лебега. Действительно, $x^n$ сходится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности, во всех точках полуоткрытого интервала $]0, 1]$, т. е. почти всюду на интервале интегрирования. Функции $|x^n|$, кроме того, мажорируемы постоянной 1. Здесь мы можем воспользоваться частной теоремой Лебега. (Легко видеть, что $x^n$ не сходятся равномерно к своему пределу.)

2°) Рассмотрим последовательность вещественных функций, определенных для $n \geqslant 1$ по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{для} \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \qquad (\mathrm{IV}, 4; 11)$$

Эти функции просто сходятся к 0. Интеграл от $f_n$, очевидно, равен $n^{\alpha-1}$ и потому стремится к 0 при $\alpha < 1$.

Наименьшая мажоранта, общая для всех функций $f_n$, определяется формулой

$$g(x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right]^{\alpha} & \text{для} \quad 0<x\leqslant 1\ ^{1)},\\ 0 & \text{вне этого интервала.}\end{cases} \qquad \text{(IV, 4; 12)}$$

При $\alpha<1$ функция $g$ мажорируется на $[0, 1]$ интегрируемой функцией $1/x^{\alpha}$ [2], а, следовательно, интегрируема. Это значит, что при $\alpha<1$ применима теорема Лебега. Напротив, при $\alpha\geqslant 1$ теорему Лебега применить невозможно, поскольку мы имеем последовательность функций, просто сходящихся к 0, интеграл от которых к нулю не сходится. В самом деле, поскольку функция $\left[\frac{1}{x}\right]^{\alpha}\geqslant\frac{1}{x^{\alpha}}-1$ не интегрируема на $[0, 1]$, то функции $f_n$ не мажорируемы одной и той же интегрируемой функцией $g$. Этот пример показывает, что ограничения, фигурирующие в формулировке теоремы Лебега, неизбежны. Однако имеется случай, для которого такие ограничения не нужны. Так будет тогда, когда функции $f_n$ образуют возрастающую последовательность вещественных функций (см. теорему 36).

Замечание. Теорема Лебега сформулирована только для последовательности $\vec{f}_n$. Пусть теперь $T$ — некоторое топологическое пространство, $A$ — часть $T$ и $a$ — точка пространства $T$, принадлежащая замыканию $A$.

Предположим, что $\vec{f}_t$ является интегрируемой на $X$ функцией со значениями в $\vec{F}$, зависящей от параметра $t\in A$. Предположим еще, что при $t\in A$, стремящемся к $a$, функция $\vec{f}_t$ просто сходится почти всюду к $\vec{f}$ и что имеет место неравенство $\|\vec{f}_t\|\leqslant g$, где $g$ — фиксированная интегрируемая функция $\geqslant 0$. Возникает вопрос: *можно ли при этих условиях утверждать, что $\vec{f}$ интегрируема и что $\int\vec{f}_t\in\vec{F}$ сходится к $\int\vec{f}$, когда $t$ стремится к $a$, оставаясь в множестве $A$? Это будет именно так, если $T$ метризуемо.* В самом деле, выберем в $T$ некоторую метрику. Прежде всего, $a$, находясь в замыкании $A$, является пределом не менее одной последовательности точек из $A$ (теорема 15 гл. II). При этом $\vec{f}_{a_n}$ сходятся просто почти всюду к $\vec{f}$ при $n$, стремящемся к бесконечности, и удовлетворяют неравенству

---

[1]) $[n]$ — целая часть $n$.

[2]) Мы еще не доказали, что $1/x^{\alpha}$ интегрируема на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha<1$. Однако здесь речь идет только о примере, обоснование которого можно найти в обычных учебниках по математическому анализу.

$\|\vec{f}_{a_n}\| \leqslant g$. Из теоремы Лебега следует, что $\vec{f}$ интегрируема. Кроме того, для *любой последовательности этого вида* $\int \vec{f}_{a_n}$ сходится к $\int \vec{f}$. Предположим, что $\int \vec{f}_t$ для значений $t \in A$, сходящихся к $a$, не сходится к $\int \vec{f}$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\eta > 0$ можно будет найти такую точку $t \in A$, для которой $d(t, a) \leqslant \eta$ и $\left\| \int \vec{f}_t - \int \vec{f} \right\| > \varepsilon$.

Задавая значения $\eta = 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$, мы можем определить такую последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ элементов из $A$, что $d(a_n, a) \leqslant 1/n$ и $\left\| \int \vec{f}_{a_n} - \int \vec{f} \right\| > \varepsilon$. Но это невозможно, так как $\int \vec{f}_{a_n}$ должен сходиться к $\int \vec{f}$, чем и доказывается наше утверждение.

Теорема 36 (теорема Фату). *Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — возрастающая последовательность функций $\geqslant 0$ на $X$ (с конечными или бесконечными значениями), т. е. $f_0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$. Если при этих условиях $f$ является пределом функций $f_n$, то справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \int^* f_n = \int^* f \leqslant +\infty. \tag{IV, 4; 13}$$

Доказательство. Очевидно, левая часть не превосходит правой; поэтому нам достаточно доказать противоположное неравенство. С этой целью мы сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — возрастающая последовательность неотрицательных функций, определенных на $X$. Пусть $g_0, g_1, g_2, \ldots$ — такая последовательность интегрируемых функций (не обязательно возрастающая), мажорирующих $f_0, f_1, f_2, \ldots$, что*

$$\int g_n \leqslant \int^* f_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{IV, 4; 14}$$

*Тогда, если через $\gamma_n$ обозначить верхнюю огибающую функций $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n$, мы получим неравенство*

$$\int \gamma_n \leqslant \int^* f_n + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \tag{IV, 4; 15}$$

Это неравенство, очевидно, справедливо при $n = 0$. Докажем его справедливость при любых $n$ по индукции, предполагая, что оно верно для $n - 1$.

Для любых вещественных чисел справедливо равенство

$$u+v=\sup(u,\ v)+\inf(u,\ v). \qquad (IV, 4; 16)$$

Отсюда следует, что можно написать следующее равенство:

$$\int \gamma_n = \int \sup(\gamma_{n-1},\ g_n) = \\ = \int \gamma_{n-1} + \int g_n - \int \inf(\gamma_{n-1},\ g_n). \qquad (IV, 4; 17)$$

Рассмотрим члены правой части. В силу предположения индукции, первый интеграл не превосходит $\int^* f_{n-1} + \varepsilon(1-1/2^n)$. Второй член, в силу неравенства (IV, 4; 14), не превосходит $\int^* f_n + \varepsilon/2^{n+1}$.

С другой стороны, поскольку $g_{n-1}$ мажорирует $f_{n-1}$, то $\gamma_{n-1}$ мажорирует $f_{n-1}$. То же самое будет иметь место и для функции $g_n$, мажорирующей $f_n$ и тем более $f_{n-1}$. Поэтому справедливо неравенство $\inf(\gamma_{n-1}, g_n) \geqslant f_{n-1}$, откуда

$$\int \inf(\gamma_{n-1},\ g_n) \geqslant \int^* f_{n-1}. \qquad (IV, 4; 18)$$

Окончательно получаем, что выражение $\int \gamma_n$ допускает такую оценку:

$$\int \gamma_n \leqslant \int^* f_{n-1} + \varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \\ + \int^* f_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \int^* f_{n-1} = \int^* f_n + \varepsilon\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right), \qquad (IV, 4; 19)$$

что позволяет закончить доказательство неравенства (IV, 4; 15) по индукции.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Фату.

1°) Предположим сначала, что $f$ ограничена сверху числом $M \geqslant 0$ и имеет компактный носитель $K$. Зададим $\varepsilon > 0$. Для каждой функции $f_n$ можно найти такую этажную ограниченную функцию $g_n \geqslant f_n$ с компактным носителем, для которой справедливо неравенство (IV, 4; 14). Вполне можно предполагать, что сама функция $g_n$ ограничена числом $M$ и имеет компактный носитель $K$. В противном случае ее можно заменить на 0 во всех точках $x$, не принадлежащих $K$, и на $M$ во всех точках $x$, в которых $g_n(x) > M$. Образованная таким образом новая последовательность этажных функций будет удовлетворять неравенству (IV, 4; 14).

Обозначим через $\gamma_n$ верхнюю огибающую функций $g_0, g_1, \ldots$ $\ldots, g_n$. Тогда последовательность $\gamma_n$ будет возрастающей последовательностью этажных функций $\geqslant 0$. Они имеют предел $\gamma$, который не превосходит $M$ и имеет носитель в $K$. Согласно частной теоремы Лебега (теорема 34), $\gamma$ интегрируема и $\int \gamma_n$ сходятся к $\int \gamma$. С другой стороны, согласно лемме, справедливо неравенство (IV, 4; 15).

Поскольку теперь, как это мы видели ранее, $\int \gamma_n$ сходится к $\int \gamma$, то имеет место неравенство

$$\int \gamma \leqslant \lim_{n\to\infty} \int^* f_n + \varepsilon, \tag{IV, 4; 20}$$

где предел существует, так как речь идет о некоторой возрастающей последовательности неотрицательных чисел. Однако поскольку для любого $n$ справедливы неравенства $\gamma \geqslant \gamma_n \geqslant f_n$, то $\gamma \geqslant f$ и мы получаем соотношение

$$\int^* f \leqslant \lim_{n\to\infty} \int^* f_n + \varepsilon. \tag{IV, 4; 21}$$

Это соотношение верно при любом $\varepsilon > 0$; поэтому справедливо требуемое неравенство

$$\int^* f \leqslant \lim_{n\to\infty} \int^* f_n. \tag{IV, 4; 22}$$

2°) Предположим теперь, что $f \geqslant 0$ произвольна. Обозначим, как всегда, через $f_{M, K}$ функцию, равную $f$ во всех точках $x$, принадлежащих $K$, в которых $f(x) \leqslant M$, равную нулю вне $K$ и равную $M$ в точках $x \in K$, в которых $f(x) > M$.

Построим такие же функции для $f_n$. Тогда последовательность функций $(f_n)_{M, K}$ является возрастающей последовательностью функций $\geqslant 0$, сходящейся к $f_{M, K}$. В силу только что доказанного,

$$\int^* f_{M, K} = \lim_{n\to\infty} \int^* (f_n)_{M, K} \leqslant \lim_{n\to\infty} \int^* f_n. \tag{IV, 4; 23}$$

Переходя теперь к точной верхней грани по всем значениям $M$ и $K$, снова получаем (IV, 4; 22), чем и заканчивается доказательство теоремы Фату.

Следствие 0. *Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — некоторая возрастающая последовательность частей $X$, объединение которых дает $A$. Тогда*

$$\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n). \tag{IV, 4; 23$_2$}$$

Это соотношение вытекает непосредственно из теоремы Фату и соотношения (IV, 3; 18).

Следствие 1. *Пусть $f_n$ — последовательность интегрируемых функций произвольного знака, заданных на $X$, со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Предположим, что эта последовательность монотонна (т. е. для всех $n$ либо $f_n \geqslant f_{n-1}$, либо $f_n \leqslant f_{n-1}$) и сходится к $f$. Тогда*

*1°) если $\int^* |f| < +\infty$, то $f$ интегрируема и $\int f_n$ сходится к $\int f$;*

*2°) если $\int^* |f| = +\infty$, то $f$ не интегрируема и $\int f_n$ стремится к $\pm\infty$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1°). Предположим, для определенности, что последовательность $f_n$ является возрастающей. Тогда имеет место неравенство $f_0 \leqslant f_n \leqslant f$. Отсюда следует, что $|f_n| \leqslant |f_0| + |f|$, а, значит,

$$\left| \int f_n \right| \leqslant \int^* |f| + \int |f_0|. \qquad (IV, 4; 24)$$

Последовательность вещественных чисел $\int f_n$ оказалась возрастающей и ограниченной. Значит, она имеет предел. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое целое число $p$, при котором для всех $m \geqslant n \geqslant p$ имеет место неравенство

$$\int f_m - \int f_n \leqslant \varepsilon \quad \text{или} \quad \int (f_m - f_n) \leqslant \varepsilon\,^{1)}. \qquad (IV, 4; 24_2)$$

Последовательность функций $f_m - f_n$ при фиксированном $n$ и $m$, стремящемся к бесконечности, является возрастающей последовательностью неотрицательных функций. Поэтому мы можем применить теорему Фату и записать

$$\int^* (f - f_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant p. \qquad (IV, 4; 25)$$

Поскольку речь идет о неотрицательной функции, то $\int^* (f - f_n) = \int^* |f - f_n|$. Отсюда получается, что последовательность $f_n$ является аппроксимирующей последовательностью для $f$, состоящей из интегрируемых функций, чем и заканчивается доказательство нашего утверждения.

Для доказательства утверждения 2°) предположим, что $\int^* |f| = +\infty$. Если $f$ интегрируема, то интегрируемой будет функция $|f|$, что противоречит равенству $\int^* |f| = +\infty$. Поэтому $f$ не интегрируема.

[1]) Функция $f_m - f_n$ не определена в тех точках, где обе функции $f_m$ и $f_n$ равны бесконечности. Однако эти точки образуют множество нулевой меры, и на него можно не обращать внимания.

С другой стороны, если предположить, как ранее, что последовательность $f_n$ возрастает, то мы получим, что $f_n - f_0$ образуют возрастающую последовательность неотрицательных функций, сходящихся к $f - f_0$. По теореме Фату в этом случае можно написать

$$\int^* (f - f_0) = \lim_{n\to\infty} \int f_n - \int f_0. \qquad \text{(IV, 4; 26)}$$

Так как имеет место неравенство

$$|f| \leqslant |f_0| + |f - f_0|, \quad \text{то} \quad +\infty = \int^* |f| \leqslant \int |f_0| + \int^* |f - f_0|, \qquad \text{(IV, 4; 27)}$$

откуда $\int^* |f - f_0| = +\infty$, так что соотношение (IV, 4; 26) полностью доказывает наше утверждение.

Предыдущие результаты получены при некоторых предположениях относительно $\int^* |f|$. Можно наложить условия на величины $\int f_n$, и тогда мы получим следующие эквивалентные результаты.

Следствие 2. *В условиях следствия* 1:

1°) если величины $\left|\int f_n\right|$ *ограничены, то $f$ интегрируема и $\int f_n$ сходится к $\int f$;*

2°) если величины $\left|\int f_n\right|$ *не ограничены, то $f$ не интегрируема и $\int f_n$ сходится к $\pm\infty$.*

Из теоремы Фату как следствие вытекает теорема о счетной выпуклости, значение которой мы уже подчеркивали.

Следствие 3 (неравенство счетной выпуклости). *Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательность вещественных неотрицательных функций (с конечными или бесконечными значениями), определенных на $X$. Тогда имеет место неравенство счетной выпуклости:*

$$\int^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int^* u_n \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 4; 28)}$$

Доказательство. Для конечной суммы $\sum_{n=0}^{m}$ неравенство выпуклости справедливо (теорема 25). Правая часть при $m$, стремящемся к бесконечности, стремится к правой части соотношения (IV, 4; 28) независимо от того, конечна она или нет.

С другой стороны, поскольку сумма $u_0 + u_1 + \ldots + u_m$ возрастает вместе с $m$ и сходится при $m$, стремящемся к бесконечности, к сумме $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, то по теореме Фату левая часть будет сходиться к левой части соотношения (IV, 4; 28), откуда и вытекает требуемый результат.

Замечание. Из теоремы следует, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int^* u_n < +\infty$, то $\int^* \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\right) < +\infty$, а, следовательно, согласно теореме 26, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ почти всюду сходится.

Следствие 4 (о перестановочности знаков $\sum$ и $\int$ для рядов с положительными членами). *Если $u_n$ образуют последовательность неотрицательных и интегрируемых функций (с конечными или бесконечными значениями) на $X$, то имеет место равенство*

$$\int^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 4; 29)}$$

*Если же одна из частей этого равенства принимает конечное значение, то функция $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ интегрируема и*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n. \qquad \text{(IV, 4; 30)}$$

В самом деле, равенство $\int S_m = \sum\limits_{n=0}^{m} \int u_n \left(\text{где } S_m = \sum\limits_{n=0}^{m} u_n\right)$ справедливо для любой конечной суммы. Остается лишь, учитывая теорему и следствия 1 и 2, перейти к пределу при $m$, стремящемся к бесконечности.

Мы видим, насколько полезна теорема Фату при интегрировании рядов, составленных из положительных функций. Напротив, теорема Лебега 35 в ее прямой форме мало приспособлена для операций над рядами, поскольку для того чтобы иметь возможность написать равенство (IV, 4; 30) для функций $\vec{u}_n$ с векторными значениями, необходимо знать, будет ли разность

$\vec{S}-\vec{S}_n$, т. е. остаток $\vec{R}_n$, мажорироваться по норме при произвольном $n$ некоторой интегрируемой функцией $g \geqslant 0$, а это, вообще говоря, установить трудно. Тем не менее, имеет место весьма важная теорема.

Теорема 37. *Пусть $\vec{u}_n$ — последовательность функций, определенных $\mu$-почти всюду на $X$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int^* \|\vec{u}_n\|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n(x)$ $\mu$-почти всюду сходится абсолютно. Следовательно, этот ряд определяет $\mu$-почти всюду некоторый вектор $\vec{S}(x)$. Если функции $\vec{u}_n$ интегрируемы, то определенная таким путем $\mu$-почти всюду на $X$ функция $\vec{S}$ со значениями в $\vec{F}$ $\mu$-интегрируема и имеет место равенство*

$$\int \vec{S} = \sum_{n=0}^{\infty}\int \vec{u}_n, \quad \text{или} \quad \int \sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n = \sum_{n=0}^{\infty}\int \vec{u}_n. \qquad \text{(IV, 4; 31)}$$

*Кроме того,*

$$\left\|\int \vec{S}\right\| \leqslant \int \|\vec{S}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int \|\vec{u}_n\|, \qquad \text{(IV, 4; 32)}$$

$$\lim_{m\to\infty}\int \|\vec{R}_m\| = 0, \qquad \text{(IV, 4; 33)}$$

*где $\vec{R}_m$ — остаток $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\vec{u}_n$.*

Доказательство. Сначала можно продолжить $\vec{u}_n$ туда, где они не определены, и считать их определенными всюду.

Если мы предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int^* \|\vec{u}_n\|$ сходящийся, и обозначим через $f$ неотрицательную функцию, определенную равенством

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\|u_n(x)\| \leqslant +\infty, \qquad \text{(IV, 4; 33}_2\text{)}$$

то, согласно (IV, 4; 29), получим $\int^* f < +\infty$.

Теперь из теоремы 26 получаем, что функция $f$ почти всюду конечна. Так как в точках $x$, в которых $f(x)$ конечна, ряд

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n(x)$ абсолютно сходится в $\vec{F}$, то, согласно теореме 55 гл. II, он тем более просто сходится. Обозначим через $\vec{S}(x)$ его сумму. Очевидно, $\vec{S}$ является функцией, определенной почти всюду на $X$, со значениями в $\vec{F}$. Если теперь мы положим $\vec{S}_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ и $\vec{R}_m=\vec{S}-\vec{S}_m$, то для $\vec{R}_m$ получим оценку

$$\int^* \|\vec{R}_m\| \leqslant \int^* \left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\vec{u}_n\|\right)=\sum_{n=m+1}^{\infty}\int^* \|\vec{u}_n\|. \quad \text{(IV, 4; 34)}$$

Поскольку ряд $\sum\int^*\|\vec{u}_n\|$ с неотрицательными членами сходится, то из последнего неравенства следует, что $\int^*\|\vec{R}_m\|$ сходится к 0 при $m$, стремящемся к бесконечности. Следовательно, если $\vec{u}_n$ интегрируемы, то последовательность $\vec{S}_m$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\vec{S}$, составленной из интегрируемых функций, а, значит, $\vec{S}$ интегрируема и $\int\vec{S}_m$ стремится к $\int\vec{S}$, откуда и вытекают соотношения (IV, 4; 31). Нами даже доказано большее, поскольку мы знаем, что $\int\|\vec{S}-\vec{S}_m\|=\int\|\vec{R}_m\|$ стремится к 0 при $m$, стремящемся к бесконечности, т. е. справедливо равенство (IV, 4; 33). Соотношение (IV, 4; 32) является результатом применения соотношения (IV, 4; 34) к $\vec{S}$ вместо $\vec{R}_m$.

Теорема 38. *Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная почти всюду на $X$, со значениями в $\vec{F}$, и пусть $\vec{f}_n$ — аппроксимирующая последовательность функции $\vec{f}$, т. е. такая последовательность функций, что $\int^*\|\vec{f}-\vec{f}_n\|$ сходится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности. Тогда из последовательности $\vec{f}_n$ можно извлечь такую подпоследовательность, которая будет почти всюду сходиться к $\vec{f}$*[1].

В самом деле, шаг за шагом можно определить строго возрастающую последовательность целых чисел $p_0$, $p_1$, $p_2$ ...,

[1]) Функции $\vec{f}_n$ и $\vec{f}$ не предполагались интегрируемыми, но именно этот случай будет наиболее интересным. Эта теорема (которую можно было бы доказать значительно раньше) дает интересное освещение поведения аппроксимирующей последовательности.

таких, что

$$\int^{*} \|\vec{f}-\vec{f}_{p_n}\| \leqslant \frac{1}{2^n}. \qquad \text{(IV, 4; 35)}$$

При этом имеет место оценка

$$\int^{*} \|\vec{f}_{p_{n+1}}-\vec{f}_{p_n}\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \text{(IV, 4; 36)}$$

и, следовательно, если мы положим $\vec{u}_n=\vec{f}_{p_{n+1}}-\vec{f}_{p_n}$, то получим неравенство $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int^{*}\|\vec{u}_n\|<+\infty$.

Из теоремы 37 теперь следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ является почти всюду сходящимся, другими словами, что подпоследовательность $\vec{f}_{p_n}$ сходится почти всюду к некоторой предельной функции $\vec{g}$. Кроме того, из доказанного в теореме 37 следует, что $\int^{*}\|\vec{f}_{p_n}-\vec{g}\|$ сходится к 0, а поскольку $\int^{*}\|\vec{f}_{p_n}-\vec{f}\|$ также сходится к 0, то интеграл $\int^{*}\|\vec{f}-\vec{g}\|$ равен нулю. Значит, $\vec{f}$ и $\vec{g}$ почти всюду равны, а это означает, что последовательность $\vec{f}_{p_n}$ почти всюду сходится к $\vec{f}$.

Замечание. Этот результат весьма важен. *Он показывает, что из последовательности $\vec{f}_n$ или из любой ее подпоследовательности можно извлечь частичную подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $\vec{f}$. Однако будет неверным считать, что сама последовательность $\vec{f}_n$ необходимо сходится почти всюду к $\vec{f}$.*

В самом деле, рассмотрим следующий пример. Возьмем в качестве $X$ тригонометрическую окружность, а в качестве меры $\mu$ выберем меру $d\theta$. Рассмотрим последовательность точек $a_n$, определенных по формуле $a_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n$, $n \geqslant 1$, и обозначим через $f_n$ функцию, равную 1 в интервале $[a_n, a_{n+1}]$ и равную 0 вне его. Так как $\int f_n=1/(n+1)$, то $\int |f_n|$ сходится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности. Функции $f_n$ образуют аппроксимирующую последовательность для функции 0. Однако, как легко видеть, последовательность $f_n$ не сходится *ни при каком значении* $x$ к 0. В самом деле, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ расходится, то точки $a_n$ проходят бесконечное число раз по окружности и, следовательно, каждая точка $x$ для бесконечного числа значений $n$ содержится в интервале $[a_n, a_{n+1}]$, а значит, для бесконечного числа значений $n$ $f_n(x) = 1$. Теорема же, напротив, утверждает, что из последовательности $f_n$ можно выделить подпоследовательность, почти всюду сходящуюся к 0. В самом деле, определим последовательность целых чисел $p_n$ таким образом, чтобы интервал $[a_{p_n}, a_{p_n+1}]$ содержал фиксированную точку $c$. Поскольку длина этого интервала стремится к 0, последовательность $f_{p_n}$ сходится к нулю в каждой точке $\neq c$, т. е. всюду, кроме одной точки, а, значит, почти всюду.

**Характеристика интегрируемых функций.**
**Интегрируемость и измеримость**

Теорема 39. *Пусть $\vec{f}$ — отображение локально компактного пространства $X$, снабженного мерой Радона $\mu \geqslant 0$, в банахово пространство $\vec{F}$.*

1°) *Если функция $\vec{f}$ ограничена и имеет компактный носитель, то, для того чтобы она была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой.*

2°) *Если $\vec{f}$ произвольна, то, для того чтобы была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой и чтобы верхний интеграл $\int^* \|\vec{f}\|$ был конечен.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что первая часть теоремы является частным случаем ее второй части.

Предположим сначала, что $\vec{f}$ интегрируема. Тогда, в силу теоремы 29, $\|\vec{f}\|$ также интегрируема и, следовательно, согласно следствию 4 из теоремы 29, интеграл $\int^* \|\vec{f}\| = \int \|\vec{f}\|$ необходимо конечен. С другой стороны, если $\vec{f}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для функции $\vec{f}$, составленной из этажных функций, то из теоремы 38 следует, что из последовательности $\vec{f}_n$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $\vec{f}$. Таким образом, функция $\vec{f}$ является почти всюду пределом некоторой последовательности измеримых функций и, следовательно, по теореме 23 измерима.

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что $\vec{f}$ измерима и что интеграл $\int^* \|\vec{f}\|$ конечен.

1°) Предположим сначала, что $\vec{f}$ ограничена по норме числом $M \geqslant 0$ и имеет компактный носитель $K$.

Мы знаем, что тогда $\vec{f}$ будет почти всюду пределом некоторой последовательности этажных функций $\vec{f}_n$ (теорема $23_2$). Заменяя $\vec{f}_n$ на $\vec{f}_n \frac{M}{\|\vec{f}_n\|}$ на тех этажах, где норма $>M$ (это не нарушает почти всюду сходимости к $\vec{f}$), можно предполагать, что все $\|\vec{f}_n\|$ ограничены числом $M$. Кроме того, их носители можно считать лежащими в $K$, ибо в противном случае их можно умножить на характеристическую функцию компакта $K$. Из частной теоремы Лебега 34 теперь вытекает, что $\vec{f}$ интегрируема, а $\vec{f}_n$ образуют ее аппроксимирующую последовательность.

2°) Перейдем теперь к общему случаю произвольной функции $\vec{f}$. Пусть $K_0, K_1, K_2, \ldots$ — возрастающая последовательность компактов, объединение которых составляет $X$.

Обозначим через $\vec{f}_n$ функцию, равную $\vec{f}$ на множестве $H_n$ точек $x \in K_n$, в которых $\|\vec{f}(x)\| \leqslant n$, и равную $\vec{0}$ вне его. Множество $H_n$ является пересечением компакта $K_n$ и прообраза интервала $[0, +n]$, определяемого измеримой функцией $\|\vec{f}\|$ (композиция функции $\vec{f}$ и нормы; см. теорему 22). Следовательно, $H_n$ как пересечение измеримых множеств измеримо. Функция $\vec{f}_n$ является произведением $\vec{f}\varphi_{H_n}$ и, следовательно, также измерима (следствие 3 теоремы $23_2$). Поскольку она ограничена и имеет компактный носитель, она интегрируема. Мы знаем также, что функции $\|\vec{f}_n\|$ измеримы. Эти функции образуют возрастающую последовательность неотрицательных функций и их предел равен $\|\vec{f}\|$. В силу предположения $\int^* \|\vec{f}\| < +\infty$, из следствия 1 теоремы Фату получаем, что $\|\vec{f}\|$ интегрируема. Но тогда функции $\vec{f}_n$ сходятся к $\vec{f}$ при $n$, стремящемся к бесконечности, и мажорируемы по норме интегрируемой функцией $\|\vec{f}\| \geqslant 0$. По теореме Лебега 35 функция $\vec{f}$ интегрируема.

Следствие 1. *Всякая ограниченная измеримая функция $\vec{f}$, равная нулю вне некоторого множества $Y$ конечной внешней меры, интегрируема.*

В самом деле,

$$\int^* \|\vec{f}\| \leqslant \|\!|\vec{f}|\!\| \, \mu^*(Y) < +\infty.$$

Следствие 2. *Если $\|\mu\| < +\infty$, то всякая $\mu$-измеримая и* *ограниченная функция $\vec{f}$, и в частности всякая непрерывная и ограниченная функция, интегрируема.*

В самом деле,

$$\int^{*} \|\vec{f}\| \leqslant |||\vec{f}||| \, \|\mu\|.$$

Следствие 3. *Для того чтобы $\vec{f}$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой и верхние интегралы от функций $\|\vec{f}\|_{M,K}$, определенные на стр.* 521, *были ограниченными независимо от выбора $M$ и $K$. Достаточно даже, чтобы ограниченность имела место для последовательности $M_n$, стремящейся к бесконечности, и для возрастающей подпоследовательности компактов $K_n$, объединение которых равно $X$.*

Это утверждение вытекает из того, что при этих условиях $\int^{*} \|\vec{f}\|$ является пределом величин $\int^{*} \|\vec{f}\|_{M_n, K_n}$.

Следствие 4 (выпуклость и среднее значение). *Пусть $\vec{C}$ — выпуклое замкнутое множество из $\vec{F}$. Если $\vec{f}$ интегрируема на измеримом множестве $A$ конечной меры $\neq 0$ и если $\vec{f}(A) \subset \vec{C}$, то ее среднее значение на $A$: $\frac{1}{\mu(A)} \int_A \vec{f}\, d\mu$ принадлежит $\vec{C}$.*

Доказательство. Предположим раз и навсегда, что $\vec{0} \in \vec{C}$. Будем продолжать функцию $\vec{f}$ нулем в $\complement A$ так, чтобы имело место соотношение $\vec{f}(X) \subset \vec{C}$.

Предположим сначала, что $\vec{f}$ — этажная функция. Ее можно записать в виде $\vec{f} = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \chi_{A_i}$, где $\vec{g}_i \in \vec{C}$ и $\chi_{A_i}$ — характеристические функции множеств $A_i$. В противоположность тому, как это делается в других случаях, мы будем включать слагаемое $\vec{0} \cdot \chi_{A_0}$ там, где $\vec{f}$ принимает значение $\vec{0}$, с тем расчетом, чтобы можно было считать $A_i$ непересекающимися и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Тогда, согласно барицентрическому свойству выпуклости, вектор

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \vec{f}\, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \mu(A_i \cap A)$$

лежит в $\vec{C}$, поскольку $\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \cap A) = \mu(A)$.

Предположим теперь, что $\vec{f}$ ограничена и имеет компактный носитель. Часть 1°) доказательства теоремы 39 дает нам возможность с помощью теоремы $23_2$ и ее замечания 2°) построить аппроксимирующую последовательность для $\vec{f}$, образованную из этажных функций $\vec{f}_n$ со значениями в $\vec{f}(X) \subset \vec{C}$. Согласно предыдущему, $\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A f_n\, d\mu$ будет лежать в $\vec{C}$, а, значит, в силу замкнутости $\vec{C}$, там же будет находиться и $\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \vec{f}\, d\mu$.

Пусть, наконец, $\vec{f}$ — произвольная функция. Часть 2°) доказательства теоремы 39 дает нам аппроксимирующую последовательность для функции $\vec{f}$, образованную из ограниченных с компактным носителем функций $\vec{f}_n$, принимающих свои значения в $\vec{C} \cup \{\vec{0}\} = \vec{C}$. Новый переход к пределу дает необходимый результат. Доказательство закончено, если $\vec{0} \in \vec{C}$.

Пусть, в общем случае, $\vec{c}$ — некоторая точка $\vec{C}$. Тогда множество $\vec{C} - \vec{c}$ замкнуто, выпукло и содержит $\vec{0}$. Функция $\vec{f} - \vec{c}$ принимает значения в этом выпуклом множестве. Поэтому

$$\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \vec{f}\, d\mu = \vec{c} + \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A (\vec{f} - \vec{c})\, d\mu \in \vec{c} + (\vec{C} - \vec{c}) = \vec{C},$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Ограничение $\mu(A) \neq 0$ можно убрать, если написать

$$\int\limits_A \vec{f}\, d\mu \in \mu(A)\, \vec{C}.$$

З а м е ч а н и я. 1°) Как мы уже говорили на стр. 516, функции, встречающиеся на практике, обычно измеримы. В этих случаях интегрируемость $\vec{f}$ эквивалентна неравенству $\int^* \|\vec{f}\| < \infty$.

2°) Пусть $f$ — *измеримая неотрицательная функция, определенная на* $X$. Если $\int^* f$ конечен, то эта функция интегрируема и (согласно следствию 4 теоремы 29) имеет место равенство $\int^* f = \int f$. Если $\int^* f = +\infty$, то $\int f$ смысла не имеет. Однако если $f$ измерима $\geqslant 0$ и $\int^* f = +\infty$, то теперь будет разумным писать $\int f = \int^* f = +\infty$ (однако это не означает, что $f$ интегрируема!). Таким образом, *если $f$ измерима и $\geqslant 0$, то во всех случаях* $\int^* f = \int f$. Впрочем, для измеримого подмножества $A$ множества $X$ в случае $\mu^*(A) = +\infty$ мы уже писали $\mu(A) = +\infty$.

### Теория интегрирования, основанная на свойствах непрерывных и полунепрерывных снизу функций

В предыдущем изложении теории продолжения Лебега мы отвели существенную роль мере множеств и этажным функциям. Этого можно было бы полностью избежать, воспользовавшись полунепрерывными снизу функциями со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ (см. определение на стр. 85).

Прежде всего, непосредственно видно, что верхняя или нижняя огибающего конечного числа полунепрерывных снизу функций также является полунепрерывной снизу функцией и что верхняя огибающая (но не нижняя огибающая) произвольного конечного или бесконечного семейства полунепрерывных снизу функций является полунепрерывной снизу функцией. В частности, верхняя огибающая семейства непрерывных функций является полунепрерывной снизу функцией. [Полунепрерывные сверху функции обладают аналогичными свойствами. Однако на этот раз полунепрерывной сверху является нижняя огибающая произвольного семейства полунепрерывных сверху функций (в частности, непрерывных функций). Впрочем, $f$ полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда $-f$ полунепрерывана снизу.] Характеристическая функция некоторой части $A$ множества $X$ полунепрерывна снизу (соответственно сверху) тогда и только тогда, когда эта часть открыта (соответственно замкнута). Свойства открытых и замкнутых множеств, относящиеся к объединению или пересечению конечного или произвольного числа множеств, являются выражением свойств полунепрерывных снизу или сверху функций относительно верхних или нижних огибающих конечного или произвольного семейства функций. Сумма конечного числа полунепрерывных сверху или снизу неотрицательных функций со значениями в $\mathbb{R}$ (но не в $\overline{\mathbb{R}}$, поскольку тогда сумма может оказаться неопределенной или равной $+\infty$, $-\infty$) обладает тем же самым свойством. Сумма бесконечного семейства полунепрерывных снизу (в частности, непрерывных) неотрицательных функций полунепрерывна снизу, поскольку она является верхней огибающей конечных частных сумм.

Полунепрерывная снизу (или сверху) функция $f$ является борелевской, а, значит, измеримой по любой мере Радона $\geqslant 0$.

В самом деле, при любом $a$ множество $f^{-1}(]a, +\infty])$ открыто. Поэтому, составляя разность, находим, что при любых $a$ и $b$ множество $f^{-1}(]a, b])$ будет борелевским, а вместе с ним будет борелевским и множество $f^{-1}(]a, b[) = \bigcup\limits_{n=1,2,\dots} f^{-1}(]a, b-1/n])$. Однако каждое открытое множество $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}$ является объединением счетного множества открытых непересекающихся интервалов. Поэтому $f^{-1}(\mathcal{O})$ будет борелевским множеством, а вместе с этим функция $f$ будет борелевской.

Теорема $39_2$. *Верхний интеграл от полунепрерывной снизу неотрицательной функции $f \geqslant 0$ (с конечными значениями или нет) является точной верхней гранью интегралов от неотрицательных функций $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, которые минорируют $f$.*

Доказательство. Пусть $f$ — полунепрерывная снизу функция, принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}_+$. Для каждой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, имеет место неравенство $\mu(\varphi) = \int \varphi \leqslant \int^* f$. Мы должны показать, что для любого $A < \int^* f$ можно найти такую функцию $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ и $\mu(\varphi) \geqslant A$.

Прежде всего, из определения верхнего интеграла следует, что если $A < B < \int^* f$, то найдутся такое число $M \geqslant 0$ и такой компакт $K \subset X$, что $\int^* f_{M,K} \geqslant B$[1]. Введем открытую окрестность $\mathscr{V}$ компакта $K$, ее характеристическую функцию $\chi_{\mathscr{V}}$ и функцию $g = \inf(f, M\chi_{\mathscr{V}})$. Так как $f_{M,K} \leqslant g \leqslant f$, то $\int^* g \geqslant B$. Функция $g$, кроме того, полунепрерывна снизу как нижняя огибающая двух таких функций. Теперь функция $g$ ограничена и имеет компактный носитель. Пусть $\chi_{k,n}$ — характеристическая функция множества $\mathcal{O}_{k,n} = g^{-1}(]kM/n, M[)$. Это множество открыто, поскольку $g$ полунепрерывна снизу. Положим теперь $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{M}{n} \chi_{k,n}$. Функция $g_n$ является этажной функцией, принимающей значения $kM/n$ на множествах $g^{-1}(]kM/n, (k+1)Mn/n[)$ и равной 0 вне этих множеств. Таким образом, $g_n \leqslant g$ и $g - g_n \leqslant M/n$. При $n$, стремящемся к бесконечности, функции $g_n$, имеющие носители в фиксированном компакте $\overline{\mathscr{V}}$, сходятся равномерно к $g$, а, значит, $\int g_n$ сходятся к $\int g$. Следовательно, существует такое целое число $n$, что $\int g_n > A$. Зафиксировав

[1]) Смотри определение $f_{M,K}$ на стр. 521.

такое $n$, положим $\delta = \int g_n - A > 0$. Для каждого $k$ найдем такие непрерывные функции $\varphi_k \geqslant 0$ с компактными носителями в $\mathcal{O}_{k,n}$, что $\mu(\varphi_k) \geqslant \mu(\mathcal{O}_{k,n}) - \delta/M$. Функция $\varphi = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{n} \varphi_k$ неотрицательна, имеет компактный носитель, мажорируема функцией $g_n$ (а значит, мажорируема функцией $g$ и, следовательно, функцией $f$) и такова, что

$$\mu(\varphi) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{n} \mu(\mathcal{O}_{k,n}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{n} \frac{\delta}{M} = \int g_n - \frac{n-1}{n} \delta > A.$$

Замечание. Этот результат для полунепрерывных снизу неотрицательных функций является весьма частным. Если, например, взять характеристическую функцию $f$ множества иррациональных чисел в $\mathbb{R}$, то ее верхний интеграл равен $+\infty$. Однако для любой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, такой, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, имеет место равенство $\mu(\varphi) = 0$.

Для произвольной неотрицательной функции имеет место

Теорема $39_3$. *Верхний интеграл неотрицательной функции является точной нижней гранью верхних интегралов от полунепрерывных снизу функций, мажорирующих данную функцию.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть вначале функция $f$ ограничена и имеет компактный носитель. Пусть $g$ — такая этажная функция с компактным носителем, что $g \geqslant f$ и $\int g \leqslant \int^* f + \varepsilon/2$. Функция $g$ имеет вид $\sum_{i=1}^{N} g_i \chi_{A_i}$, где $g_i$ — постоянные $>0$ и $A_i$ — измеримые множества конечной меры. Пусть теперь $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |g_i|$. Найдем для каждого $i$ такое открытое множество $\mathcal{O}_i \supset A_i$, чтобы $\mu(\mathcal{O}_i) \leqslant \mu(A_i) + \varepsilon/(2NM)$, и положим $h = \sum_{i=1}^{N} g_i \chi_{\mathcal{O}_i}$. Тогда, так как $\mathcal{O}_i$ — открытое множество, каждая функция $\chi_{\mathcal{O}_i}$ полунепрерывна снизу, а, следовательно, $h$ также полунепрерывна снизу и имеют место неравенства

$$f \leqslant g \leqslant h \quad \text{и} \quad \int h \leqslant \sum_{i=1}^{N} g_i \left( \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2NM} \right) \leqslant \int g + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int^* f + \varepsilon,$$

что и доказывает теорему для этого случая.

Пусть теперь функция $f$ произвольна. Рассмотрим функцию $f_{n, K_n}$ ($K_n$ — возрастающая последовательность компактов, объединение которых равно $X$; определение $f_{M,K}$ см. на стр. 521). Эта функция ограничена и имеет компактный носитель. Следовательно, существует полунепрерывная снизу функция $g_n$, такая, что

$$f_{n,K_n} \leqslant g_n \quad \text{и} \quad \int g_n \leqslant \int^* f_{n,K_n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Если теперь мы положим $\gamma_n = \sup(g_0, g_1, \ldots, g_n)$, то из леммы, использованной при доказательстве теоремы Фату 36, вытекает неравенство

$$\int \gamma_n \leqslant \int^* f_{n,K_n} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Последовательность $\gamma_n$ является возрастающей, каждая из функций $\gamma_n$ полунепрерывна снизу, а их предел $\gamma$ при $n$, стремящемся к бесконечности, являющийся также их верхней огибающей, полунепрерывен снизу. Для любого $n$ имеет место неравенство $f_{n,K_n} \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma$, а, значит, $f \leqslant \gamma$. С другой стороны, по теореме Фату

$$\int^* \gamma = \lim_{n\to\infty} \int^* \gamma_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int^* f_{n,K_n} + \varepsilon = \int^* f + \varepsilon,$$

чем и заканчивается доказательство теоремы в общем случае.

Замечания. 1°) Заменить полунепрерывные снизу функции на непрерывные функции, очевидно, невозможно. Например, если $f$ является характеристической функцией рациональных чисел на $\mathbb{R}$, то ее верхний интеграл равен нулю, однако любая мажорирующая ее функция $\geqslant 1$ и имеет бесконечный интеграл.

2°) Как мы это видели в примечании на стр. 521, здесь мы получаем верхний интеграл от некоторой неотрицательной функции с помощью двух предельных переходов, исходя из функции $\mu(\varphi)$:

$$\int^* f = \inf_{(g \geqslant f,\ g \text{ полунепр. снизу})} \left( \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant g \\ \varphi \in \mathscr{C}(X)}} \mu(\varphi) \right). \qquad \text{(IV, 4; 40)}$$

По-видимому, введение верхнего интеграла по этой формуле, взятой *за определение*, было бы наилучшим и наиболее коротким. Однако такой метод будет более абстрактным. Затем можно было бы *определить* непосредственно скалярные интегрируемые функции по теореме 32, т. е. с применением аппроксимирующей последовательности, составленной функциями из $\mathscr{C}(X)$. Тогда интеграл $\int \varphi$ был бы, *по определению*, равен $\mu(\varphi)$ (что позволило бы избавиться от «идиотской» теоремы 30). Меру множеств можно определить, после определения интеграла от функций, как интеграл от их характеристической функции. Конечно, фундаментальные теоремы останутся теми же самыми, а некоторые доказательства окажутся более сложными, чем в принятом нами изложении.

Для того чтобы определить интеграл от векторных функций, введем пространство $\mathscr{C}(X)\otimes\vec{F}$ непрерывных *разложимых* функций с компактным носителем, т. е. функций вида $\vec{g}=\sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i\varphi_i$, где $\vec{g}_i$ — постоянные из $\vec{F}$ и $\varphi_i\in\mathscr{C}(X)$. Положим, *по определению*, $\int\vec{g}=\sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i\mu(\varphi_i)$ (что полностью совпадает с соответствующим интегралом в принятой нами теории). Можно убедиться в том, что результат совершенно не зависит от частного представления непрерывной и разложимой функции $\vec{g}$ (как мы уже это делали при введении интеграла от этажных функций). *Так снова определяются те же самые интегрируемые функции, что и ранее, и тот же самый интеграл.* В самом деле, каждая интегрируемая функция в этой новой теории имеет аппроксимирующую последовательность, образованную из интегрируемых функций в прежнем смысле (функции из $\mathscr{C}(X)\otimes\vec{F}$), и тот же самый интеграл. Обратное утверждение справедливо в силу теоремы 32.

Для полунепрерывных снизу неотрицательных функций имеется обобщение теоремы Фату, справедливое для *несчетных* семейств:

Теорема $39_4$. *Пусть $(f_i)_{i\in I}$ — произвольное семейство пополунепрерывных снизу неотрицательных функций, и пусть $f$ — их верхняя огибающая. Предположим, кроме того, что семейство является «возрастающим» в следующем смысле: какими бы ни были индексы $i$, $j\in I$, существует такое $k\in I$, что $f_k\geqslant\geqslant\sup(f_i,f_j)$. Тогда $\int^* f=\sup_{i\in I}\int^* f_i$.*

Доказательство. Совершенно очевидно, что $\int^* f\geqslant\geqslant\sup_{i\in I}\int^* f_i$. Пусть теперь $A$ — произвольное число $<\int^* f$. Согласно теореме $39_2$, можно найти такую функцию $\varphi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\varphi\leqslant f$, что $\int\varphi>A$. Пусть $K$ — носитель функции $\varphi$ и $\delta=\left(\int\varphi-A\right)\Big/\mu(K)$. Для каждого $a\in K$ можно выбрать такой индекс $i_a\in I$, при котором $f_{i_a}(a)\geqslant f(a)-\delta/2\geqslant\varphi(a)-\delta/2$. При этом, поскольку $\varphi$ непрерывна и $f_{i_a}$ полунепрерывна снизу, найдется такая открытая окрестность $\mathscr{V}_a$ точки $a$ в $X$, что для всех $x \in \mathscr{V}_a$ справедливо неравенство $f_{i_a}(x) \geqslant \varphi(x) - \delta$. Множество $K$ может быть покрыто конечным числом множеств $\mathscr{V}_a$. Пусть это будут множества $\mathscr{V}_{a_1}, \mathscr{V}_{a_2}, \ldots, \mathscr{V}_{a_n}$. Обозначим теперь через $k$ индекс, при котором $f_k \geqslant \sup\left(f_{i_{a_1}}, f_{i_{a_2}}, \ldots, f_{i_{a_n}}\right)$ (условие «возрастания»). Тогда на всем $K$ имеем $f_k \geqslant \varphi - \delta$, и, следовательно, всюду $f_k \geqslant (\varphi - \delta)\chi_K$, поскольку вне $K$ вторая функция равна нулю, а первая $\geqslant 0$. При этом $\int^* f_k \geqslant$ $\geqslant \int \varphi - \delta\mu(K) \geqslant A$, что и доказывает наше утверждение.

Это почти единственное свойство теории интегрирования, справедливое для предела несчетных семейств функций. Этот результат не верен для произвольных $f_i \geqslant 0$. Пусть, например, $f = 1$ на $\mathbb{R}$ и $\mu = dx$. Возьмем в качестве $f_i$ характеристические функции конечных множеств. Тогда $\int^* f_i = 0$ и $\int^* f = +\infty$.

З а м е ч а н и е. *Существенно, что мы всегда предполагали $X$ счетным в бесконечности.* Вот пример того, что может случиться, если не делать этого предположения. Пусть пространство $X$ является суммой несчетного числа прямых $\mathbb{R}$. Точнее, пусть $I$ является несчетным множеством индексов и для каждого $i \in I$ множество $\mathbb{R}_i$ изоморфно $\mathbb{R}$. Множества $\mathbb{R}_i$ предполагаются непересекающимися в $X$, а их объединение считается равным $X$. Введем в $X$ следующую топологию: подмножество $X$ считается открытым, если открыто его пересечение с каждым множеством $\mathbb{R}_i$, $i \in I$. Множество $X$ не является счетным в бесконечности. В самом деле, множества $\mathbb{R}_i$ образуют открытое покрытие любого компакта $K$, из которого можно выбрать конечное подпокрытие. Другими словами, $K$ содержится в объединении конечного числа множеств $\mathbb{R}_i$. Следовательно, счетное объединение компактов из $X$ содержится в счетном объединении множеств $\mathbb{R}_i$ и не может совпадать со всем $X$. Введем на каждом $\mathbb{R}_i$ меру $dx$. Тогда будет определена мера Радона $\mu \geqslant 0$ на $X$. В самом деле, если $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, то ее компактный носитель содержится в конечном объединении $\mathbb{R}_i$: $\bigcup\limits_{i \in J} \mathbb{R}_i$, и можно будет положить $\mu(\varphi) = \sum\limits_{i \in J} \int \varphi_i\, dx$, где $\varphi_i$ — сужение $\varphi$ на $\mathbb{R}_i$. Рассмотрим теперь множество $A$, образованное из точек 0 всех множеств $\mathbb{R}_i$. Оно замкнуто, однако не является измеримым в смысле определения, данного на стр. 501. В самом деле, всякое открытое множество, содержащее $A$, должно содержать открытые непустые множества на всех $\mathbb{R}_i$, а, значит, его мера равна $+\infty$. Каждый компакт, содержащийся в $A$, содержит только нули конечного числа множеств $\mathbb{R}_i$. Следовательно, его мера равна нулю. Таким образом, $\mu^*(A) = +\infty$ и $\mu_*(A) = 0$. Поэтому, например, равенство $\mu^*(A) = \sup \mu^*(A \cap K)$ для каждого компакта $K$ из $X$ неверно. Пусть $\chi_A$ — характеристическая функция множества $A$. Она не измерима в смысле, указанном на стр. 510. Тем не менее она обладает свойством Лузина, которое в случае счетности в бесконечности влечет за собой измеримость. Ее верхний интеграл, определенный так, как это указано на стр. 520, является точной верхней гранью верхних интегралов от ограниченных функций с компактным носителем, минорирующих эту функцию. Далее, каждая неотрицательная функция с компактным носителем, ограничивающая снизу функцию $\chi_A$, имеет интеграл, равный нулю, поэтому $\int^* \chi_A = 0 \neq \mu^*(A)$. Напротив, каждая полунепрерывная снизу функция $\geqslant \chi_A$ имеет бесконечный интеграл. В теории интегрирования, где верхний интеграл определяется полунепрерывными снизу функциями, $\int^* \chi_A = \mu^*(A) = +\infty$. Значит, различные теории интегрирования не эквивалентны. Если попытаться в одну теорию включить случай множества $X$, не счетного в бесконечности, то интеграл нужно определять с помощью полунепрерывных снизу функций. Мера множеств определяется интегралом от их характеристических функций. Измеримые функции определяются по Лузину. Множество называется измеримым, если измерима его характеристическая функция, т. е. обладает свойством Лузина. В этом случае бо́льшая часть прежних теорем сохраняется, но не все. Предположение о том, что $X$ счетно в бесконечности, мы повторяли в условиях теорем только тогда, когда это было необходимым, и даже в теории интегрирования, построение которой исходило из полунепрерывных снизу функций. Однако *каждый человек, обладающий элементарной осторожностью, будет остерегаться даже думать о локально компактных пространствах $X$, не являющихся счетными в бесконечности, так как при этом возможны самые грубые ошибки.*

### Пространства $\mathscr{L}^p(X, \mu; \vec{F})$

Пусть $f$ — вещественная неотрицательная функция с конечными или бесконечными значениями, определенная $\mu$-почти всюду на $X$. Назовем *нормой порядка $p$ функции $f$*, где $p$ — вещественное конечное число $\geqslant 1$, число, определяемое по формуле

$$N_p(f) = N_p(X, \mu; f) = \left(\int^* f^p\right)^{1/p}. \qquad \text{(IV, 4; 41)}$$

Теорема 40. *Если $f \leqslant g$, то $N_p(f) \leqslant N_p(g)$. Имеют место соотношения*

$$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g), \qquad N_p(kf) = |k| N_p(f) \qquad \text{(IV, 4; 42)}$$

*(неравенство выпуклости или неравенство Минковского). Более общо, имеет место неравенство счетной выпуклости:*

$$N_p\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_p(u_n), \qquad \text{(IV, 4; 43)}$$

*где $u_n$ — неотрицательные функции, определенные на множестве $X$.*

Доказательство. Соотношение для $kf$ очевидно. Рассмотрим функции $f$ и $g$. Предположим сначала, что они являются этажными функциями с компактным носителем и что имеют место разложения

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_{X_i}, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} g_i \varphi_{X_i}, \qquad \text{(IV, 4; 44)}$$

где $f_i$ и $g_i$ — постоянные и $X_i$ — измеримые подмножества $X$.

Интеграл $N_p(f)$ является нормой порядка $p$: $\|\vec{Z}\|_p$, где $\vec{Z}$ — вектор пространства $\mathbb{C}^n$ с составляющими $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ (где $Z_i = f_i$) относительно весов $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $c_i = \mu(X_i)$. Рассматривая точно так же функцию $g$, можно убедиться в том, что неравенство выпуклости является неравенством Минковского, доказанным в теореме 35 гл. III.

Предположим теперь, что $f$ и $g$ — произвольные, но ограниченные функции с компактным носителем. Обозначим через $f_1$ и $g_1$ этажные функции с компактным носителем, мажорирующие функции $f$ и $g$. Тогда имеет место неравенство

$$N_p(f+g) \leqslant N_p(f_1 + g_1) \leqslant N_p(f_1) + N_p(g_1). \qquad \text{(IV, 4; 45)}$$

Переходя справа к точной нижней грани, получаем искомое неравенство выпуклости для функций $f$ и $g$.

Перейдем теперь к случаю произвольных неотрицательных функций $f$ и $g$. Если мы построим определенные ранее функции $f_{M,K}$, $g_{M,K}$, $(f+g)_{M,K}$, то получим неравенство

$$(f+g)_{M,K} \leqslant f_{M,K} + g_{M,K}, \qquad \text{(IV, 4; 46)}$$

откуда вытекает неравенство

$$N_p((f+g)_{M,K}) \leqslant N_p(f_{M,K}) + N_p(g_{M,K}) \leqslant N_p(f) + N_p(g). \qquad \text{(IV, 4; 47)}$$

Чтобы получить нужную формулу, достаточно слева перейти к точной верхней грани по всем $M$ и $K$.

Докажем, наконец, неравенство счетной выпуклости. Для конечного числа $m$ первых членов имеет место неравенство

$$N_p(u_0+u_1+\ldots+u_m)\leqslant N_p(u_0)+N_p(u_1)+\ldots+N_p(u_m). \tag{IV, 4; 48}$$

Для получения нужного результата надо, пользуясь теоремой Фату 36, перейти к пределу при $m$, стремящемся к бесконечности.

Определение. Пусть $X$ — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, снабженное мерой Радона $\mu\geqslant 0$, и пусть $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство. Пусть $p$ — конечное вещественное число $\geqslant 1$.

Говорят, что функция $\vec{f}$, определенная на $X$, со значениями в $\vec{F}$, *принадлежит пространству* $\mathscr{L}^p(X,\mu;\vec{F})$, или просто $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, если это не может привести к недоразумению[1]), или что *она имеет интегрируемую р-ю степень*, если, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, существует такая этажная функция $\vec{g}$ с компактным носителем, определенная на $X$, и со значениями в $\vec{F}$, при которой имеет место неравенство $N_p(\|\vec{f}-\vec{g}\|)\leqslant\varepsilon$, или иначе: если существует последовательность $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ этажных функций с компактным носителем, для которых $N_p(\|\vec{f}-\vec{f}_n\|)$ сходится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности. В этом случае говорят, что последовательность $\vec{f}_n$ является *аппроксимирующей последовательностью* для функции $\vec{f}$ в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu;\vec{F})$, составленной из этажных функций[2]). Иногда, допуская вольность речи, говорят, что функция $\vec{f}$ *принадлежит пространству* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, если она определена только *почти всюду* и если любое ее продолжение туда, где она не определена, принадлежит $\mathscr{L}^p(\vec{F})$. Пространство $\mathscr{L}^1(X,\mu;\vec{F})$ является пространством интегрируемых функций со значениями в $\vec{F}$. Таким образом, мы обобщаем понятие пространства инте-

[1]) Напротив, не следует в обозначении опускать $\vec{F}$. Обозначение $\mathscr{L}^p(X;\mu)$ или $\mathscr{L}^p$ применяется в том случае, когда $\vec{F}$ является скалярным полем.

[2]) Если провести рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 32, опираясь при этом на лемму 2 к теореме 30 с $\delta=(\varepsilon/2NM)^p$, то можно увидеть, что этажные функции можно заменить на непрерывные разложимые функции с компактным носителем.

грируемых функций. Однако для $p \neq 1$ интегрируемость функции, принадлежащей пространству $\mathscr{L}^p(X, \mu; \vec{F})$, гарантирована.

Теорема 41. *Если $\vec{f}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, то неотрицательная функция $\|\vec{f}\|: x \to \|\vec{f}(x)\|$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^p$.*

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 29 для случая $p = 1$.

Теорема 42. *Пространство $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ является векторным пространством, и в этом пространстве функция $N_p$, определенная формулой*

$$N_p(\vec{f}) = N_p(\|\vec{f}\|) = \left(\int^* \|\vec{f}\|^p\right)^{1/p}, \qquad \text{(IV, 4; 49)}$$

*является полунормой.*

Доказательство. Пусть $\vec{f}_n$ и $\vec{g}_n$ — две аппроксимирующие последовательности функций $\vec{f}$ и $\vec{g}$ в $\mathscr{L}^p(\vec{F})$. Тогда из неравенства Минковского следует, что сумма $\vec{f}_n + \vec{g}_n$ является аппроксимирующей последовательностью для $\vec{f} + \vec{g}$, принадлежащей поэтому к $\mathscr{L}^p(\vec{F})$. Аналогичное рассуждение можно провести относительно функции $k\vec{f}$, где $k$ — скалярная постоянная. *Полунормой* в векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция $N$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\begin{aligned} N(k\vec{X}) &= |k|\, N(\vec{X}), \\ N(\vec{X} + \vec{Y}) &\leqslant N(\vec{X}) + N(\vec{Y}). \end{aligned} \qquad \text{(IV, 4; 50)}$$

Если, кроме того, из $N(\vec{X}) = 0$ следует $\vec{X} = \vec{0}$, то мы получаем обычную норму. Тот факт, что $N_p$ является полунормой, тривиальным образом вытекает из теоремы Минковского 40. Однако, как легко видеть, эта функция не является нормой. В самом деле, если $N_p(\vec{f}) = 0$, т. е. если $\int^* \|\vec{f}\|^p = 0$, то *это означает лишь, что функция $\vec{f}$ почти всюду равна нулю* (теорема 26), и, значит, она не обязательно должна быть нулевым элементом векторного пространства $\mathscr{L}^p(\vec{F})$.

Теорема 43. *Пусть $u_n$ является последовательностью функций, определенных почти всюду на $X$, со значениями в $F$,* *принадлежащих* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ *и таких, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} N_p(\vec{u}_n)$ *является сходящимся. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(x)$ *почти всюду абсолютно сходится, и если через* $\vec{S}(x)$ *обозначить его сумму* $\vec{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(x)$, *то* $\vec{S}$ *будет функцией, определенной почти всюду и принадлежащей пространству* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$. *Кроме того, имеет место соотношение*

$$N_p(\vec{S}) = N_p\left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_p(\vec{u}_n) \qquad \text{(IV, 4; 51)}$$

(*неравенство счетной выпуклости*). *Величина* $N_p(S - \vec{S}_m) = N_p(\vec{R}_m)$ *стремится к* 0 *при* $m$, *стремящемся к бесконечности, а* $N_p(\vec{S}_m)$ *стремится к* $N_p(\vec{S})$.

Доказательство аналогично доказательству, проведенному для $p = 1$ (теорема 37). Хотя $N_p$ является полунормой, а не нормой, и, следовательно, $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ является лишь полунормированным векторным пространством, часто применяется язык теории нормированных пространств. Например, если $\vec{f}_n$ является последовательностью функций из $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ и если $N_p(\vec{f} - \vec{f}_n)$ стремится к 0, то говорят, что «$\vec{f}_n$ стремится к $\vec{f}$ в $\mathscr{L}^p(\vec{F})$». Однако здесь предел не единствен. Если $\vec{f}_n$ «стремится к» $\vec{f}$, то эта функция также стремится и к $\vec{g}$, лишь бы только эта функция была почти всюду равной $\vec{f}$. В теореме 43 утверждается, что $\vec{S}_m$ стремится к $\vec{S}$ в $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, поскольку $N_p(\vec{S} - \vec{S}_m)$ стремится к нулю при $m$, стремящемся к бесконечности. В ней говорится также, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ является сходящимся в $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ и даже абсолютно сходящимся. (Мы снова допускаем вольности речи, поскольку $\vec{S}$ определена лишь почти всюду. Аналогичная вольность заключается уже в самой записи $\vec{S} \in \mathscr{L}^p(\vec{F})$.)

Следствие. *Если последовательность функций* $\vec{f}_n$ *сходится к функции* $\vec{f}$ *в* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ *при* $n$, *стремящемся к бесконечности, то из рассматриваемой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность, которая сходится почти всюду к* $\vec{f}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 38.

Теорема 44. *Для того чтобы функция $\vec{f}$, определенная на $\vec{X}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, принадлежала пространству $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой и чтобы интеграл $\int^* \|\vec{f}\|^p$ был конечным.*

Доказательство остается тем же самым, что и в случае $p = 1$ (теорема 39).

Следствие. *Если $\vec{f}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, то функция $\|\vec{f}\|^p$: $x \to \|\vec{f}(x)\|^p$ интегрируема на $X$. Более общо, если $q \leqslant p$, то функция $\|\vec{f}\|^p$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^{p/q}(X, \mu) = \mathscr{L}^{p/q}$.*

Доказательство. Из сформулированного условия и теоремы вытекает, что функция $\vec{f}$ измерима. В силу непрерывности нормы, то же самое имеет место для функции $\|\vec{f}\|^q$ (теорема 9 гл. II и теорема 22). Теперь нужный результат вытекает, в силу теоремы 44, из неравенства $\int^* (\|\vec{f}\|^q)^{p/q} = (N_p(\vec{f}))^p < +\infty$.

Теорема 45 (о применении линейного непрерывного отображения). *Пусть $L$ — линейное непрерывное отображение банахова пространства $\vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$. Если $\vec{f}$ является функцией, определенной на $X$ со значениями в $\vec{F}$, принадлежащей пространству $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, то функция $L \circ \vec{f}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^p(\vec{G})$ и, кроме того, имеет место неравенство*

$$N_p(L \circ \vec{f}) \leqslant \| L \| N_p(\vec{f}). \qquad \text{(IV, 4; 52)}$$

*Если, в частности, $p = 1$, то $L \circ \vec{f}$ интегрируема и*

$$\int L \circ \vec{f} = L\left(\int \vec{f}\right). \qquad \text{(IV, 4; 53)}$$

Так как $\|(L \circ \vec{f})x\| \leqslant \|L\| \, \|\vec{f}(x)\|$, то неравенство очевидно. Рассматривая аппроксимирующую последовательность, легко убедиться в справедливости заключительной части теоремы. Мы видим, что *непрерывное линейное отображение $L$ пространства $\vec{F}$ в пространство $\vec{G}$ определяет линейное непрерывное* *отображение пространства* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ *в пространство* $\mathscr{L}^p(\vec{G})$ *с нормой* $\leqslant \|L\|$ [1]).

Теорема 46 (о применении билинейного непрерывного отображения; неравенство Гёльдера). *Пусть* $\vec{f}$ *принадлежит* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ *и* $\vec{g}$ *принадлежит* $\mathscr{L}^q(\vec{G})$, *а* $B$ *является непрерывным билинейным отображением* $\vec{F}\times\vec{G}$ *в* $\vec{H}$. *Если теперь* $r\geqslant 1$ *определено из равенства* $1/r=1/p+1/q$, *то функция* $B(\vec{f};\vec{g}): x\to\to B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))$ *принадлежит пространству* $\mathscr{L}^r(\vec{H})$ *и, кроме того, имеет место неравенство Гёльдера:*

$$N_r(B(\vec{f}, \vec{g}))\leqslant\|B\|N_p(\vec{f})N_q(\vec{g}). \qquad \text{(IV, 4; 54)}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f$ и $g$ являются вещественными неотрицательными функциями. Тогда неравенство Гёльдера относительно произведения $fg$ доказывается точно так же, как доказывалось неравенство Минковского (теорема 40). Только на этот раз надо свести его к теореме 36 гл. III. Затем неравенство (IV, 4; 54) можно получить и во всех остальных случаях, так как, в силу неравенства $\|B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))\|\leqslant\leqslant\|B\|\|\vec{f}(x)\|\|\vec{g}(x)\|$, задача сведется непосредственно к случаю произведения двух вещественных неотрицательных функций. Заметим теперь, что в силу предположений, наложенных на функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$, они измеримы, и поэтому из следствия 3 теоремы $23_2$ вытекает, что $B(\vec{f}, \vec{g})$ является измеримым отображением $X$ в $\vec{H}$. Для того чтобы убедиться, что эта функция принадлежит пространству $\mathscr{L}^r(\vec{H})$, теперь достаточно применить теорему 44.

Замечания. 1°) Если $r<1$ (например, если $p=1$, $q=1$, а значит, $r=1/2$), то никакого определенного заключения сделать невозможно.

2°) Содержание теоремы можно передать, сказав, что $(\vec{f}, \vec{g})\to B(\vec{f}, \vec{g})$ является билинейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{L}^p(\vec{F})\times\mathscr{L}^q(\vec{G})$ в пространство $\mathscr{L}^r(\vec{H})$ (в упрощенном изложении, принятом на стр. 565).

Следствие 1. *Пусть* $p$ *и* $p'$ — *два сопряженных показателя, т. е. показателя, удовлетворяющих соотношению* $1/p+1/p'=1$,

[1]) Здесь опять допущена некоторая неточность языка, о которой мы говорили на стр. 565, ибо $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ является всего лишь полунормированным.

*или* $p' = 1/(1-p)$. *Если* $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ *принадлежат соответственно пространствам* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ *и* $\mathscr{L}^{p'}(\vec{G})$, *то функция* $B(\vec{f}, \vec{g})$ *интегрируема и имеет место неравенство*:

$$\left\| \int B(\vec{f}, \vec{g}) \right\| \leqslant \|B\| N_p(\vec{f}) N_{p'}(\vec{g}). \qquad \text{(IV, 4; 55)}$$

Для доказательства достаточно применить теорему, учитывая тот факт, что $\left\| \int B(\vec{f}, \vec{g}) \right\| \leqslant \int \| B(\vec{f}, \vec{g}) \| = N_1(B(\vec{f}, \vec{g}))$.

Это следствие играет особо важную роль в том случае, когда рассматриваются функции с вещественными или комплексными значениями и когда билинейное отображение является обычным произведением. В этом случае имеет место неравенство

$$\left| \int fg \right| \leqslant N_p(f) N_{p'}(g). \qquad \text{(IV, 4; 56)}$$

Следствие 2. *Если* $\vec{f}$ *и* $\vec{g}$ *принадлежат соответственно пространствам* $\mathscr{L}^2(\vec{F})$ *и* $\mathscr{L}^2(\vec{G})$, *то функция* $B(\vec{f}, \vec{g})$ *интегрируема и имеет место неравенство*

$$\left\| \int B(\vec{f}, \vec{g}) \right\| \leqslant \|B\| N_2(\vec{f}) N_2(\vec{g}). \qquad \text{(IV, 4; 57)}$$

Эта теорема особенно важна в случае функций с комплексными значениями, для которых имеет место неравенство Коши—Шварца:

$$\left| \int f\bar{g} \right| \leqslant \left( \int |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int |g|^2 \right)^{1/2}. \qquad \text{(IV, 4; 58)}$$

Общеизвестно прямое доказательство этого неравенства. С этой целью записывают очевидное неравенство

$$\int (f + \lambda g)(\bar{f} + \bar{\lambda}\bar{g}) = \int |f + \lambda g|^2 \geqslant 0 \qquad \text{(IV, 4; 59)}$$

и, разлагая левую часть по $\lambda$, получают, что трехчлен

$$\int |f|^2 + \lambda \int g\bar{f} + \bar{\lambda} \int f\bar{g} + |\lambda|^2 \int |g|^2 \qquad \text{(IV, 4; 60)}$$

при любом $\lambda$ должен быть неотрицательным. Это означает, что его дискриминант должен быть неположительным, откуда следует неравенство (IV, 4; 58).

Совсем просто это получается из неравенства Коши — Шварца (теорема $2_3$ гл. III), примененного к полуторалинейной форме $(f, g) \to \int f\bar{g}$, определенной в векторном пространстве $\mathscr{L}^2$.

Однако для того, чтобы иметь право говорить о *векторном пространстве* $\mathscr{L}^2$, определять указанную полуторалинейную форму и иметь возможность писать (IV, 4; 59) и (IV, 4; 60), *надо показать, что если* $f \in \mathscr{L}^2$ *и* $g \in \mathscr{L}^2$, *то* $f\bar{g}$ *интегрируема и* $f+g \in \mathscr{L}^2$. Это можно сделать непосредственно следующим образом. Функции $f+g$ и $f\bar{g}$ измеримы. Так как

$$|f+g|^2 \leqslant 2(|f|^2+|g|^2) \quad \text{и} \quad |f\bar{g}| \leqslant |f|^2+|g|^2, \qquad \text{(IV, 4; 61)}$$

то $N_2(f+\bar{g})$ и $N_1(f\bar{g})$ конечны и результат вытекает из теоремы 44. Полезно знать, в каком случае в (IV, 4; 58) имеет место обобщенное неравенство $\leqslant$ и в каком случае — строгое неравенство $<$. Если, с одной стороны, $N_2(\vec{g}) > 0$ и если, с другой, для каждого значения $\lambda$ норма $N_2(\vec{f}+\lambda\vec{g}) > 0$, то трехчлен (IV, 4; 59) в нуль никогда не обратится, а его дискриминант будет отрицателен, а, следовательно, неравенство будет строгим. Мы видим, что всегда имеет место строгое неравенство, за исключением того случая, когда существуют две комплексные постоянные $\alpha$ и $\beta$, не обращающиеся одновременно в нуль и такие, что функция $\alpha\vec{f}+\beta\vec{g}$ равна почти всюду нулю.

Следствие 3 (критерий принадлежности различным пространствам $\mathscr{L}^p(\vec{F})$). *Если* $\|\mu\| < +\infty$, *то каждая функция, принадлежащая* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, *принадлежит всем пространствам* $\mathscr{L}^r(\vec{F})$ *для* $r \leqslant p$ *и, кроме того, имеет место неравенство*

$$N_r(\vec{f}) \leqslant \|\mu\|^{1/r-1/p} N_p(\vec{f}). \qquad \text{(IV, 4; 61}_2\text{)}$$

Доказательство. В самом деле, для доказательства достаточно к функции $\vec{f}$ и к постоянной скалярной функции $g=1$ применить теорему 46. Функция $B$ в этом случае является билинейным отображением $(\vec{f}, k) \to k\vec{f}$ пространства $\vec{F} \times \mathbb{K}$ в $\vec{F}$. Число $q$ определяется из равенства $1/q = 1/r - 1/p$ [1]).

Эта теорема особенно важна в различных приложениях. Если, например, $X$ является ограниченным интервалом вещественной прямой и $\mu = dx$, то при $r \leqslant p$ принадлежность к $\mathscr{L}^p$ влечет за собой принадлежность к $\mathscr{L}^r$. В частности, функция,

---

[1]) Доказательство одной принадлежности $\vec{f} \in \mathscr{L}^r(\vec{F})$ без неравенства (IV, 4; 61) очевидно. В самом деле, $\vec{f}$ измерима. Далее, $\|\vec{f}(x)\|^r \leqslant \|\vec{f}(x)\|^p$, если $\|\vec{f}(x)\| \geqslant 1$, и $\leqslant 1$, если $\|\vec{f}(x)\| \leqslant 1$. Значит, $\|\vec{f}(x)\|^r \leqslant 1 + \|\vec{f}(x)\|^p$ и верхний интеграл от $\|f\|^r$ конечен (так как $\|\mu\| < +\infty$, то $\int^* 1$ конечен).

принадлежащая к какому-либо пространству $\mathscr{L}^p$, принадлежит к $\mathscr{L}^1$ и, значит, интегрируема. Напротив, как легко видеть:

1°) Между пространствами $\mathscr{L}^p$ не существует отношений обратного порядка. Функция, принадлежащая $\mathscr{L}^p$, вовсе не обязана принадлежать $\mathscr{L}^s$ при $s > p$. Пусть, например, на компактном интервале $[0, 1]$ прямой $\mathbb{R}$ в качестве меры взято $d\mu = dx$ и рассматривается функция $f(x) = 1/x^\alpha$. Тогда для $\alpha = 1/2$ она принадлежит $\mathscr{L}^1$, но не принадлежит $\mathscr{L}^2$.

2°) Если норма меры $\mu$ бесконечна, то между различными пространствами $\mathscr{L}^p$ не существует никаких отношений включения. Возьмем, например, $X = \mathbb{R}$ и $d\mu = dx$. Тогда пример, приведенный в п. 1°), показывает, что принадлежность функции к $\mathscr{L}^p$ не влечет за собой ее принадлежности к $\mathscr{L}^s$, $s > p$. Обратно, функция $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ в этом случае принадлежит $\mathscr{L}^2$, но не принадлежит $\mathscr{L}^1$.

3°) В пространстве $(\mathbb{C}^{[0, 1]})_{cb}$ комплексных непрерывных функций, определенных на интервале $[0, 1]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, *нормы $N_p$ относительно меры $dx$ при различных $p$ не эквивалентны*. Этот факт дает нам простой пример неэквивалентных норм в векторном бесконечномерном пространстве (см. на стр. 58 теорему 13 гл. II). В этом пространстве $N_p$ является нормой, а не только полунормой. В самом деле, если $N_p(f) = 0$, то функция $f$ должна быть почти всюду равной нулю. Эта функция непрерывна. Пусть $c$ — произвольная точка $[0, 1]$. Для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать такое число $\eta > 0$, что из неравенства $|x - c| \leqslant \eta$ следует неравенство $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$. Множество таких точек $x$ заполняет интервал длины $\geqslant \eta$, а функция $f$ почти всюду равна нулю. Следовательно, должна существовать хотя бы одна точка $x$, такая, что $f(x) = 0$, а, значит, $|f(c)| \leqslant \varepsilon$. Так как $\varepsilon$ произвольно, то $f(c) = 0$. Поскольку $c$ произвольно, функция $f$ тождественно равна нулю, а число $N_p$ является нормой.

Рассмотрим для каждого $n$ функцию $f_n(x)$ (см. рис. 16), определенную по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - nx) & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{для} \quad x > \frac{1}{n}. \end{cases} \qquad \text{(IV, 4; 61}_2\text{)}$$

Эта функция непрерывна, и имеет место равенство

$$N_p(f_n) = n^{1-1/p}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}. \qquad \text{(IV, 4; 61}_3\text{)}$$

Устремим $n$ к бесконечности. Тогда для $q > p$ невозможно найти такое фиксированное число $k > 0$, при котором

$N_q(f_n) \leqslant kN_p(f_n)$, и из теоремы 12 гл. II вытекает неэквивалентность $N_q$ и $N_p$.

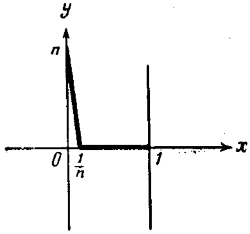


Рис. 16.

Следствие 4. *Если функция $\vec{f}$ одновременно принадлежит пространствам $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ и $\mathscr{L}^q(\vec{F})$, то она принадлежит всем $\mathscr{L}^r(\vec{F})$, $p \leqslant r \leqslant q$, и имеет место неравенство*

$$N_r(\vec{f}) \leqslant (N_p(\vec{f}))^\alpha (N_q(\vec{f}))^\beta, \qquad \text{(IV, 4; 61}_4\text{)}$$

*где*

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q}}{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}}, \qquad \beta = \frac{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}}{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}}.$$

Доказательство. Поскольку функция $\vec{f}$ измерима, то достаточно (теорема 44) проверить соотношение (IV, 4; $61_4$) для $\|\vec{f}\|$ или же для произвольной измеримой вещественной функции $g \geqslant 0$[1]).

Поскольку $p \leqslant r \leqslant q$, то $1/q \leqslant 1/r \leqslant 1/p$. Число $1/r$ определяет барицентр точек $1/p$ и $1/q$ с весами $\alpha$ и $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Поэтому $1/r = \alpha/p + \beta/q$. Числа $\alpha$ и $\beta$ равны числам, указанным в условии теоремы. Поскольку $\alpha + \beta = 1$, то $g = g^\alpha g^\beta$ и, кроме того, $g^\alpha \in \mathscr{L}^{p/\alpha}$, $g^\beta \in \mathscr{L}^{q/\beta}$ и $N_{p/\alpha}(g^\alpha) = (N_p(g))^\alpha$, $N_{q/\beta}(g^\beta) = (N_q(g))^\beta$.

---

[1]) Если проверяется лишь принадлежность $\vec{f}$ пространству $\mathscr{L}^r(\vec{F})$, а не соотношение (IV, 4; $61_4$), то этот факт очевиден. В самом деле, поскольку $\vec{f}$ измерима, то достаточно доказать, что $N_r(\vec{f})$ конечна. Далее, $\|\vec{f}(x)\|^r \leqslant \|\vec{f}(x)\|^p$, если $\|\vec{f}(x)\| \leqslant 1$, и $\leqslant \|\vec{f}(x)\|^q$, если $\|\vec{f}(x)\| \geqslant 1$. Поэтому $\|\vec{f}(x)\|^r \leqslant \|\vec{f}(x)\|^p + \|\vec{f}(x)\|^q$ и ее верхний интеграл, очевидно, конечен.

Если теперь к произведению $g^\alpha g^\beta = g$ применить неравенство Гёльдера (IV, 4; 54) с показателями $p/\alpha$, $q/\beta$, $\frac{1}{p/\alpha} + \frac{1}{q/\beta} = \frac{1}{r}$, то мы получим соотношение (IV, 4; $61_4$).

В качестве следствия получаем: *множество конечных чисел* $p \geqslant 1$, *для которых заданная функция* $\vec{f}$ *принадлежит* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, *является интервалом из* $[1, +\infty[$ *(открытым, полуоткрытым или замкнутым). Кроме того, неравенство* (IV, 4; $61_4$) *показывает, что на этом интервале функция* $\xi \to \ln N_{1/\xi}(\vec{f})$ *выпукла* (см. стр. 204).

## Пространства $L^p(X, \mu; \vec{F})$. Теорема Фишера — Рисса

При изучении пространств $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ постоянно приходится испытывать существенные затруднения, связанные с наличием полунорм вместо норм, не позволяющих пользоваться теоремами, относящимися к нормированным векторным пространствам.

*Для того чтобы обойти эти затруднения, мы введем новое нормированное пространство.* В пространстве $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ множество функций $\vec{f}$, для которых $N_p(\vec{f}) = 0$, является некоторым векторным подпространством, а именно подпространством функций, почти всюду равных нулю. Мы можем теперь рассматривать факторпространство пространства $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ по этому векторному подпространству. *Это факторпространство называют пространством* $L^p(X, \mu; \vec{F})$ или просто $L^p(\vec{F})$, когда это не приводит к недоразумениям. Элементом $L^p(\vec{F})$ является не функция, определенная на $X$ со значениями в $\vec{F}$, а *класс попарно почти всюду равных между собой функций.* Две функции, определенные на $X$, называются $\mu$-*эквивалентными в смысле Лебега*, или просто *эквивалентными*, когда это не приводит к недоразумениям, если они $\mu$-почти всюду равны. Тогда $L^p(\vec{F})$ является «пространством функций, принадлежащих $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ и определенных с точностью до эквивалентности».

Конечно, $L^p(\vec{F})$, будучи факторпространством некоторого векторного пространства по векторному подпространству, само является векторным пространством (гл. I, стр. 20). Кроме того, *это векторное пространство нормировано.* В самом деле, каждый элемент $\vec{f}^\bullet$ пространства $L^p(\vec{F})$ *является множеством функций* $\vec{f}$ *из* $\mathscr{L}^p(\vec{F})$, *имеющих одну и ту же полунорму* $N_p(\vec{f})$. Эту общую полунорму называют нормой рассматриваемого элемента $\vec{f}^{\bullet}$ пространства $L^p(\vec{F})$. *То, что это норма, очевидно.* Действительно, она тривиальным образом удовлетворяет неравенствам (IV, 4; 50). Кроме того, если $N_p(\vec{f}^{\bullet})=0$, то $\vec{f}^{\bullet}$ является классом, составленным из функций, почти всюду равных нулю, т. е. нулевым элементом пространства $L^p(\vec{F})$.

Теорема 47 (Фишера — Рисса). *Векторное нормированное пространство $L^p(X, \mu; \vec{F})$, где $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство, само является банаховым пространством, т. е. это пространство полно.*

Доказательство. Для доказательства мы можем опереться на теорему 56 гл. II. Пусть $\vec{u}_n^{\bullet}$ — такая последовательность элементов из $L^p(\vec{F})$, при которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} N_p(\vec{u}_n^{\bullet})$ сходится. Выберем в каждом классе $\vec{u}_n^{\bullet}$ некоторый представитель, т. е. элемент $\vec{u}_n$ из класса $\vec{u}_n^{\bullet}$. Тогда будет иметь место соотношение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} N_p(\vec{u}_n) < +\infty$. Из теоремы 43 следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ сходится почти всюду к некоторому элементу $\vec{S}$ из $\mathscr{L}^p(\vec{F})$ и что, кроме того, $N_p(\vec{S}-\vec{S}_m)$ сходится к 0 при $m$, стремящемся к бесконечности. Если через $\vec{S}^{\bullet}$ обозначить класс $\vec{S}$, то он будет некоторым элементом пространства $L^p(\vec{F})$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n^{\bullet}$ будет сходиться к $\vec{S}^{\bullet}$ в $L^p(\vec{F})$. Этим рассуждением заканчивается доказательство полноты рассматриваемого пространства.

Теорема 48. *Пусть $\vec{f}^{\bullet}$ — некоторый элемент пространства $L^1(\vec{F})$. Будем рассматривать $\int \vec{f}^{\bullet}$ как значение $\int \vec{f}$ на произвольном элементе $\vec{f}$ из класса $\vec{f}^{\bullet}$. Тогда этот интеграл является линейным непрерывным отображением пространства $L^1(X, \mu; \vec{F})$ в пространство $\vec{F}$ с нормой, равной* 1. *При этом имеет место*

$$\left\| \int \vec{f}^{\bullet} \right\| \leqslant N_1(\vec{f}^{\bullet}). \tag{IV, 4; 62}$$

Доказательство тривиально, по крайней мере в той его части, которая утверждает, что норма $\leqslant 1$. То, что норма в точности равна 1, доказывается сложнее, и мы это утверждение примем без доказательства. Впрочем, оно очевидно в том случае, когда $\vec{F}$ является скалярным полем, ибо тогда для неотрицательной функции $f$ имеет место точное равенство $\int f^{\bullet} = N_1(f)$.

Теорема 49. *В пространстве $L^p(\vec{F})$ множество классов этажных функций с компактным носителем или множество классов непрерывных разложимых функций с компактным носителем плотны.*

Утверждение, относящееся к этажным функциям, очевидно, поскольку, если $\vec{f}^{\bullet} \in L^p(\vec{F})$ и $\vec{f} \in \mathscr{L}^p(\vec{F})$ является представителем класса $\vec{f}^{\bullet}$, то для функции $\vec{f}$ найдется аппроксимирующая последовательность, образованная из этажных функций $\vec{f}_n$. При этом элементы $\vec{f}_n^{\bullet}$ сходятся к элементу $\vec{f}^{\bullet}$ в $L^p(\vec{F})$. Что касается непрерывных функций, то для доказательства следует обратиться к примечанию [2]) на стр. 563.

Замечание. Мы говорили (теорема 41 гл. II), что каждое нормированное конечномерное векторное пространство полно. Однако это неверно для бесконечномерных векторных нормированных пространств. Пространство $L^p([0, 1], dx)$ полно, но его векторное подпространство, составленное из классов непрерывных функций, плотно и, значит, не замкнуто, а следовательно, не полно (следствие 1 теоремы 42 гл. II). Отсюда легко получить, что пространство $(\mathbb{C}^{[0,1]})_{cb}$, снабженное нормой $N_p$ (см. стр. 570), также не полно.

## Пространства $\mathscr{L}^{\infty}(\vec{F})$ и $L^{\infty}(\vec{F})$

Определение. Говорят, что $\mu$-измеримая вещественная неотрицательная функция $f$, определенная на $X$, *$\mu$-существенно ограничена* или просто *существенно ограничена*, когда это не приводит к путанице, если существует такое число $M$, что почти всюду функция $f$ не превосходит $M$. Точная нижняя грань $M_0$ чисел $M$, обладающих этим свойством, называется *существенной верхней гранью* $f$ и обозначается через $N_{\infty}(f)$. Это число характеризуется следующими двумя свойствами:

1°) Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое множество значений $x$ с мерой $> 0$, что имеет место неравенство $f(x) > M - \varepsilon$.

2°) Неравенство $f(x) > M$ может иметь место только на множестве значений $x$ нулевой меры.

Если функция $f$ не является существенно ограниченной, то полагают $N_{\infty}(f) = +\infty$.

Нетрудно видеть, что $N_{\infty}(f+g) \leqslant N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g)$ и что $N_{\infty}(kf) = kN_{\infty}(f)$ для $k \geqslant 0$.

Через $\mathscr{L}^\infty(X, \mu; \vec{F})$ или просто $\mathscr{L}^\infty(\vec{F})$, когда это не приводит к недоразумению, обозначается множество функций, определенных на $X$ со значениями в $\vec{F}$, измеримых и существенно ограниченных, т. е. таких, что функция $\|\vec{f}\|$ является $\mu$-существенно ограниченной. На этом пространстве с помощью равенства $N_\infty(\vec{f}) = N_\infty(\|\vec{f}\|)$ определяется полунорма $N_\infty(\vec{f})$.

Через $L^\infty(X, \mu; \vec{F})$ или просто $L^\infty(\vec{F})$, когда это не приводит к недоразумению, обозначается векторное факторпространство пространства $\mathscr{L}^\infty(X, \mu; \vec{F})$ по векторному подпространству функций, $\mu$-почти всюду равных нулю. Это пространство является некоторым векторным нормированным пространством с нормой $N_\infty(\vec{f}^{\,\bullet}) = N_\infty(\vec{f})$, где $\vec{f}$ — произвольный элемент из класса $\vec{f}^{\,\bullet}$. Без труда проверяется, что теоремы 40—47 остаются в силе, если некоторые из показателей будут равны $+\infty$.

Теорема 44 исчезает, так как она включается в определение $\mathscr{L}^\infty(\vec{F})$. Следствие теоремы 43 может быть значительно улучшено: если $\vec{f}_n$ является такой последовательностью функций из $\mathscr{L}^\infty(\vec{F})$, что при $n$, стремящемся к бесконечности, $N_\infty(\vec{f} - \vec{f}_n)$ стремится к 0, то функции $\vec{f}_n$ почти всюду сходятся к $\vec{f}$ (нет необходимости извлекать сходящуюся подпоследовательность). В самом деле, пусть $B_n$ — множество таких значений $x$, что $\|\vec{f}(x) - \vec{f}_n(x)\| > N_\infty(\vec{f} - \vec{f}_n)$. Это множество имеет нулевую меру. Объединение $B$ множеств $B_n$ также имеет нулевую меру. Пусть $A = \complement B$. Так как $\sup\limits_{x \in A} \|\vec{f}(x) - \vec{f}_n(x)\| = N_p(\vec{f} - \vec{f}_n)$ стремится к 0 при $n$, стремящемся к бесконечности, то функции $\vec{f}_n$ сходятся просто, и даже равномерно, к функции $\vec{f}$. *Сходимость в $\mathscr{L}^\infty(\vec{F})$ является «с точностью до множества меры нуль» равномерной сходимостью функций.*

Отсюда вытекает, что в рассматриваемом пространстве теорема 49 места не имеет! В самом деле, пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mu = dx$. Если $\vec{g}$ — непрерывная функция, то $N_\infty(\vec{g})$ *совпадает с* $|||\vec{g}|||$. Действительно, множество точек $x$, в которых $\|\vec{g}(x)\| > N_\infty(\vec{g})$, является открытым множеством и имеет меру, равную нулю, т. е. пусто, и, следовательно, $N_\infty(\vec{g})$ действительно является точной верхней гранью для $\|\vec{g}\|$, т. е. равна $|||\vec{g}|||$. Если $\vec{f} \in \mathscr{L}^\infty(\vec{F})$ является пределом *непрерывных* функций $\vec{f}_n$, то $N_\infty(\vec{f}_m - \vec{f}_n)$, а вместе с ним и $|||\vec{f}_m - \vec{f}_n|||$, стремится к 0 при $m$ и $n$, стремящихся к бесконечности. Функции $\vec{f}_n$ образуют последовательность Коши в $(\vec{F}^{\mathbb{R}})_{cb}$, и, поскольку это пространство полно (следствие 2 теоремы 65 гл. II), они равномерно сходятся к непрерывной и ограниченной функции $\vec{g}$. При этом $|||\vec{f}_n - \vec{g}\,|||$, а вместе с ней и $N_\infty(\vec{f}_n - \vec{g})$, сходится к 0. Мы получаем, что $N_\infty(\vec{f} - \vec{g}) = 0$, т. е. $\vec{f}$ и $\vec{g}$ почти всюду равны. Таким образом, единственными пределами непрерывных функций могут быть функции из $\mathscr{L}^\infty(\vec{F})$, почти всюду равные непрерывным функциям. Характеристическая функция интервала $[a, b]$ этим свойством не обладает.

Теорема 50. *Пусть $\vec{f}$ — измеримая функция, определенная на $X$, со значениями в $\vec{F}$. Множество точек $p$ интервала $[1, +\infty]$, для которых $\vec{f} \in \mathscr{L}^p(\vec{F})$, образует открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал $|p_1, p_2|$. Функция $p \to N_p(\vec{f})$ является непрерывной функцией, определенной на $[p_1, p_2]$, со значениями $\geqslant 0$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Если, кроме того, $\|\mu\| = 1$, то эта функция является всегда возрастающей и даже строго возрастающей, кроме того случая, когда $\|\vec{f}\,\|$ почти всюду равна одной и той же постоянной $c$, а тогда она постоянна и равна $c$. Функция $\xi \to \ln N_{1/\xi}(f)$ всегда выпукла на $|1/p_2, 1/p_1|$.*

Доказательство. Тот факт, что множество точек $p$, для которых $\vec{f} \in \mathscr{L}^p(\vec{F})$, образует некоторый интервал, вытекает из следствия 4 теоремы 46, распространенного на бесконечные показатели.

Докажем непрерывность функции $N_p$. При этом достаточно, очевидно, ограничиться случаем, когда $f$ вещественна и неотрицательна. Пусть сначала $p_0$ — внутренняя точка интервала. Пусть $p'_1$ и $p'_2$ таковы, что $p_1 < p'_1 < p_0 < p'_2 < p_2$. При $p$, стремящемся к $p_0$, функция $f^p$ сходится просто к $f^{p_0}$. В силу примечания на стр. 571, для $p'_1 \leqslant p \leqslant p'_2$ имеет место неравенство $f^p \leqslant f^{p'_1} + f^{p'_2}$, правая часть которого не зависит от $p$ и интегрируема. Из теоремы Лебега 35 следует, что $\int f^p$ сходится к $\int f^{p_0}$. Следовательно, $N_p(f) = \left(\int f^p\right)^{1/p}$ сходится к $N_{p_0}(f) = \left(\int f^{p_0}\right)^{1/p_0}$, и непрерывность функции $N_p$ в точке $p_0$ доказана. Можно было бы также воспользоваться теоремой $7_2$.

Пусть теперь $p_0 = p_1$. Если $p_1 \in |p_1, p_2|$, то надо будет взять такое $p_2'$, чтобы $p_1 < p_2' < p_2$. Затем достаточно заменить $[p_1', p_2']$ на $[p_1, p_2']$ и провести то же самое рассуждение, что и в предыдущем случае, чтобы доказать требуемую непрерывность. Единственным новым случаем будет тот, когда $p_1 \notin |p_1, p_2|$, т. е. когда $N_{p_1}(f) = +\infty$. В этом случае надо показать, что $N_p(f)$ стремится к $+\infty$ при $p$, стремящемся к $p_1$ по значениям $> p_1$. Зададим $A > 0$; поскольку $N_{p_1}(f) = +\infty$, то существует такое число $M \geqslant 1$ и такой компакт $K$ из $X$, что $\int (f_{M,K})^{p_1} \geqslant 2A$. Для $p$, стремящегося к $p_1$ так, что $p_1 \leqslant p \leqslant p_2'$, функция $(f_{M,K})^p$ сходится к $(f_{M,K})^{p_1}$, сохраняя свой носитель в $K$ и оставаясь ограниченной числом $M^{p_2'}$. Следовательно, по частной теореме Лебега 34, при $p$, стремящемся к $p_1$, $\int (f_{M,K})^p$ стремится к $\int (f_{M,K})^{p_1}$. Значит, существует такое $\eta > 0$, что из $p \leqslant p_1 + \eta$ вытекает неравенство $\int (f_{M,K})^p \geqslant A$ и тем более неравенство $\int f^p \geqslant A$, чем полностью доказывается непрерывность в точке $p_1$. Непрерывность в точке $p_2$ доказывается точно так же, если только $p_2 < +\infty$.

Предположим теперь, что $p_2 = +\infty$, и положим $M = N_\infty(f) \leqslant \leqslant +\infty$. Надо показать, что при $p$, стремящемся к $+\infty$, $N_p(f)$ стремится к $M$. Зададим $M' < M$ и выберем $M_1'$ так, чтобы $M' < M_1' < M$. Тогда существует множество $Y$ меры $>0$, на котором $f(x) \geqslant M_1'$, и $N_p(f) \geqslant M_1' (\mu(Y))^{1/p}$. При $p$, стремящемся к $+\infty$, последняя величина стремится к $M_1'$. Следовательно, существует такое число $q'$, что при $p \geqslant q'$ имеет место неравенство $N_p(f) \geqslant M'$.

Этого достаточно для доказательства непрерывности в точке $p_2 = +\infty$, если $N_\infty(f) = +\infty$. Если же $M = N_\infty(f) < +\infty$, то надо еще установить неравенство противоположного смысла. Пусть теперь $M'' > M$. В неравенстве (IV, 4; 61$_4$), в котором вместо $p$, $q$, $r$ взяты $p_1$, $\infty$, $p$, имеем: $\alpha = (1/p)/(1/p_1)$, $\beta = = (1/p_1 - 1/p)/(1/p_1)$. Очевидно, при $p$, стремящемся к бесконечности, $\alpha$ стремится к 0 и $\beta$ стремится к 1. При этом правая часть неравенства (IV, 4; 61$_4$) стремится к $(N_{p_1}(f))^0 (N_\infty(f))^1 = M$.

Таким образом, существует такое целое число $q''$, что при $p \geqslant q''$ имеет место неравенство $N_p(f) \leqslant M''$. При этом, если $q = \sup(q', q'')$, то из неравенства $p \geqslant q$ следует неравенство $M' \leqslant N_p(f) \leqslant M''$, и непрерывность рассматриваемой функции в точке $p_2$ полностью доказана.

При $\|\mu\|=1$ неравенство (IV, 4; 61) означает, что функция $p\to N_p(f)$ является возрастающей. Можно показать, что если $f$ не равна почти всюду некоторой постоянной, то эта функция является строго возрастающей. Мы это примем без доказательства.

## Продолжение мер, не обладающих свойством неотрицательности

Мы только что видели, что для вещественной меры Радона $\mu\geqslant 0$ функцию $\varphi\to\mu(\varphi)$, первоначально определенную на $\mathscr{C}(X)$, можно продолжить до функции $f\to\int f\,d\mu$, определенной в значительно более широком векторном пространстве $\mathscr{L}^1(X, \mu)$. Мы даже определили этот интеграл для векторных функций $\vec{f}\in\mathscr{L}^1(X, \mu; \vec{F})$.

Можно ли сделать что-либо подобное, когда мера $\mu$ вещественна, но не является $\geqslant 0$ или когда она является комплексной или векторной?

Такая теория продолжения существует, но мы о ней в настоящий момент говорить не можем. Тем не менее мы сейчас изучим частное продолжение хотя бы для того случая, когда мера $\vec{\mu}$ принимает значения в конечномерном векторном пространстве.

Обозначим через $\Gamma(X)$ векторное пространство комплексно-значных борелевских ограниченных функций с компактным носителем на $X$. Пространство $\mathscr{C}(X)$ является векторным подпространством пространства $\Gamma(X)$. Мы не будем вводить топологию на $\Gamma(X)$, но введем некоторое понятие сходимости, которое мы назовем $L$-сходимостью ($L$ — начальная буква фамилии Лебег). (Можно показать, что эта сходимость не соответствует сходимости в топологическом пространстве.)

Последовательность $f_0, f_1, f_2, \ldots$ из $\Gamma(X)$ называется *$L$-сходящейся к $f$*, если при $n$, стремящемся к бесконечности, функции $f_n$ сходятся к $f$, оставаясь в совокупности ограниченными по модулю и сохраняя свой носитель в некотором компакте $K$ множества $X$.

Пусть $\mu$ — мера Радона $\geqslant 0$. Ее лебеговское продолжение позволяет определить некоторую функцию $f\to\int f\,d\mu$, определенную на $\Gamma(X)$, принимающую комплексные значения и обладающую следующими свойствами:

1°) Эта функция линейна.

2°) Если последовательность $f_n$ является $L$-сходящейся к $f$, то $\int f_n\,d\mu$ сходится к $\int f\,d\mu$.

3°) Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество $X$ с компактным замыканием и $\chi_{\mathcal{O}}$ — его характеристическая функция. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такой компакт $K \subset \mathcal{O}$, что для каждой функции $\varphi$ из $\mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, равной 1 в некоторой окрестности компакта $K$ и имеющей носитель в $\mathcal{O}$, имеет место неравенство

$$\left| \int \chi_{\mathcal{O}} \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon.$$

4°) Эта функция положительна в том смысле, что если $f \geqslant 0$, то $\int f \, d\mu \geqslant 0$.

Если $\vec{E}$ является банаховым пространством, то всякое отображение пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, удовлетворяющее трем предыдущим условиям, будет называться *линейным $L$-непрерывным отображением* $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$. Если $\vec{E} = \mathbb{C}$ и выполняется четвертое условие, то отображение будет называться положительным ($\geqslant 0$). Таким образом, продолжение Лебега некоторой меры Радона $\mu \geqslant 0$ определяет линейную $L$-непрерывную форму $\geqslant 0$ на $\Gamma(X)$.

Условие 3°) эквивалентно аналогичному условию $3^\circ_2$): каковы бы ни были компакт $K$ из $X$ и $\varepsilon > 0$, существует такое открытое множество $\mathcal{O} \supset K$, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, равной 1 на некоторой окрестности $K$ и имеющей носитель в $\mathcal{O}$, имеет место неравенство $\left| \int \chi_K \, d\mu - \mu(\varphi) \right| \leqslant \varepsilon$. В самом деле, пусть заданы компакт $K$, число $\varepsilon$ и выполняется условие 3°). Выберем открытую окрестность $\mathcal{U}$ компактного замыкания $K$ и найдем компакт $H$ открытого множества $\mathcal{U} - K$, существование которого утверждается в 3°). Тогда открытое множество $\mathcal{U} - H = \mathcal{O}$ удовлетворяет относительно компакта $K$ условию $3^\circ_2$). Аналогично проводится доказательство обратного утверждения.

Если $X$ метризуемо, то каждое отображение $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, удовлетворяющее условию 2°), автоматически удовлетворяет условию 3°). В самом деле, рассмотрим последовательность компактов $K_n = \{x \in \mathcal{O};\ d(x, \complement\mathcal{O}) \geqslant 1/n\}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $n$ компакты $K_n$ удовлетворяют условию 3°). Если бы это было не так, то для каждого $n$ можно было бы найти функцию $\varphi_n \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, равную 1 на окрестности компакта $K_n$, с носителем в $\mathcal{O}$ и такую, что $\left| \int \chi_{\mathcal{O}} \, d\mu - \int \varphi_n \, d\mu \right| > \varepsilon$. Последовательность $\varphi_n$ сходится к $\chi_{\mathcal{O}}$, а это противоречит условию $L$-непрерывности. Однако если $X$ не метризуемо, то условие 3°), в котором используется своего рода предел несчетного семейства, не будет получаться из свойства 2°), имеющего место только для последовательностей. Условие 3°) вводилось не ради удовольствия усложнять себе жизнь: оно будет нужно в теореме единственности $50_2$.

Для каждого $L$-непрерывного линейного отображения $\vec{\mu}$ пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$ будет удобным через $\vec{\mu}(A)$ обозначать значение $\vec{\mu}$ на характеристической функции некоторой борелевской части $A$ пространства $X$ с компактным замыканием.

Теорема $50_2$. *Пусть $\vec{E}$ — банахово пространство. Каждое линейное и $L$-непрерывное отображение пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, равное нулю на векторном подпространстве $\mathscr{C}(X)$, тождественно равно нулю.*

Доказательство. Из условия непрерывности 3°) вытекает, что эта функция заведомо равна нулю на характеристических функциях открытых множеств с компактным замыканием. Поэтому нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{U}$ — топологическое пространство и $\mathscr{F}$ — множество частей $\mathscr{U}$, обладающее следующими свойствами:*

*1°) Устойчивость относительно разности:*

$$\text{если } A\in\mathscr{F},\ B\in\mathscr{F} \text{ и } B\subset A, \text{ то } A-B\in\mathscr{F}.$$

*2°) Устойчивость относительно возрастающего предела: если $A_n$ образуют возрастающую последовательность частей, принадлежащих $\mathscr{F}$, то их объединение принадлежит $\mathscr{F}$.*

*3°) Устойчивость относительно убывающего предела: если $A_n$ образуют убывающую последовательность частей из $\mathscr{F}$, то их пересечение принадлежит $\mathscr{F}$; если $\mathscr{F}$ — наименьшее множество, обладающее свойствами 1°) — 3°), содержащее все открытые части $\mathscr{U}$, то $\mathscr{F}$ является $\sigma$-алгеброй борелевских частей $\mathscr{U}$.*

Докажем эту лемму. Заметим, что предыдущие свойства не позволяют сразу утверждать, что $\mathscr{F}$ представляет собой $\sigma$-алгебру. Мы не знаем, принадлежит ли пересечение $A\cap B$ двух частей из $\mathscr{F}$ множеству $\mathscr{F}$. Если мы это докажем, то тогда сможем утверждать, что $\mathscr{F}$ есть $\sigma$-алгебра. В самом деле, устойчивость относительно пересечения двух частей влечет за собой устойчивость относительно пересечения конечного числа частей, а затем, в силу условия, наложенного на убывающие последовательности, устойчивость относительно счетных пересечений. С другой стороны, из устойчивости относительно разности следует, что дополнение некоторой части из $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$, поскольку $\mathscr{U}$, как открытое множество, принадлежит $\mathscr{F}$. Устойчивость теперь будет иметь место для любых счетных объединений, и, следовательно, $\mathscr{F}$ в действительности представляет собой σ-алгебру.

Рассмотрим теперь для открытой части $\mathcal{O}$ пространства $\mathcal{U}$ множество $\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ всех таких частей $A$ из $\mathcal{U}$, что $A \cap \mathcal{O}$ принадлежит $\mathscr{F}$. Очевидно, это множество частей устойчиво относительно разности, объединения возрастающих последовательностей и пересечения убывающих последовательностей. С другой стороны, это множество содержит все открытые множества, поскольку пересечение двух открытых множеств является открытым множеством, а $\mathscr{F}$ содержит все открытые множества. Поскольку, по предположению, $\mathscr{F}$ является наименьшим множеством частей $\mathcal{U}$, обладающим указанными тремя свойствами, то множество $\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ содержит $\mathscr{F}$. Другими словами, для каждой части $A$ множества $\mathscr{F}$ и каждого открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathcal{U}$ множество $A \cap \mathcal{O}$ принадлежит $\mathscr{F}$. Пусть теперь $A$ — некоторая часть $\mathscr{F}$. Рассмотрим множество $\mathscr{F}_A$ частей $B$ из $\mathcal{U}$, таких, что $A \cap B$ принадлежит $\mathscr{F}$. Это множество является семейством частей, устойчивым относительно разности, объединения возрастающих последовательностей и пересечения убывающих последовательностей. Согласно только что установленному, оно содержит все открытые части $\mathcal{U}$. Кроме того, оно необходимо содержит все семейство $\mathscr{F}$. Отсюда следует, что если $A$ и $B$ принадлежат $\mathscr{F}$, то $A \cap B$ также лежит в $\mathscr{F}$. Это означает, что $\mathscr{F}$ является σ-алгеброй. Поскольку $\mathscr{F}$ содержит все открытые множества, то $\mathscr{F}$ содержит борелевскую σ-алгебру. Однако борелевская σ-алгебра обладает всеми тремя условиями устойчивости, и $\mathscr{F}$ — наименьшее множество частей, обладающих этим свойством. Значит, $\mathscr{F}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй, и лемма 1 доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Множество $\mathfrak{M}$ борелевских частей $A$, содержащихся в открытом множестве $\mathcal{U}$ пространства $X$ с компактным замыканием, для которых $\vec{\mu}(A) = 0$, очевидно, в силу линейности $\vec{\mu}$, устойчиво относительно разности, а в силу $L$-непрерывности $\vec{\mu}$, устойчиво относительно объединения возрастающих последовательностей и пересечения убывающих последовательностей. С другой стороны, согласно только что доказанному перед леммой 1, $\mathfrak{M}$ содержит все открытые части $\mathcal{U}$. Лемма 1 тогда показывает, что $\mathfrak{M}$ содержит все борелевские части $\mathcal{U}$. Обратим внимание на одно небольшое затруднение: у нас нет уверенности в том, что часть $A$ множества $\mathcal{U}$, борелевская относительно $\mathcal{U}$, будет борелевской относительно $X$. По этому поводу мы докажем вторую лемму, распространяющую теоремы 5 и 6 гл. II на борелевские части.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая часть $X$. Всякая часть $A$ множества $\mathcal{U}$, борелевская, в $X$, является борелевской в $\mathcal{U}$, и обратно, если только множество $\mathcal{U}$ само борелевское в $X$.*

В самом деле, рассмотрим все части $B$ множества $X$, пересечения которых с $\mathcal{U}$ и $\complement\mathcal{U}$ являются борелевскими множествами в топологических пространствах $\mathcal{U}$ и $\complement\mathcal{U}$. Очевидно, они образуют некоторую $\sigma$-алгебру частей $X$. Так как эта $\sigma$-алгебра содержит все открытые множества $X$ (поскольку они пересекаются с $\mathcal{U}$ по открытым множествам в $\mathcal{U}$), то она содержит все борелевские части $X$. Отсюда вытекает, что каждая часть $B$ множества $X$, борелевская в $X$ и содержащаяся в $\mathcal{U}$, борелевская в $\mathcal{U}$.

Рассмотрим теперь множество частей $C$ множества $\mathcal{U}$, являющихся борелевскими, если их рассматривать в $X$. Непосредственно видно, что *если $\mathcal{U}$ является борелевским в $X$*, то это множество является $\sigma$-алгеброй частей $\mathcal{U}$. (Все свойства, необходимые для образования $\sigma$-алгебры, выполняются очевидным образом, кроме, быть может, свойства, относящегося к дополнению. Однако если часть $A \subset \mathcal{U}$ борелевская в $X$, то часть $\complement_{\mathcal{U}} A = \mathcal{U} - A = X - \complement\mathcal{U} - A$ будет борелевской в $X$, если только часть $\complement\mathcal{U}$ борелевская в $X$, т. е. если часть $\mathcal{U}$ борелевская в $X$.) Поскольку оно содержит все открытые части из $\mathcal{U}$ (ибо открытая часть $\mathcal{U}$, будучи пересечением $\mathcal{U}$ с некоторой открытой частью $X$, является борелевским множеством в $X$, поскольку $\mathcal{U}$ и открытая часть борелевские в $X$), то оно содержит все борелевские части $\mathcal{U}$. Следовательно, если $C$ является частью $\mathcal{U}$, борелевской в $\mathcal{U}$, то она будет борелевской в $X$, что и утверждается в лемме 2.

В силу этой второй леммы мы теперь знаем, что функция $\vec{\mu}$ равна нулю на всех борелевских частях $X$ с компактным замыканием (т. е. на всех их характеристических функциях). Доказательство будет закончено с помощью последней леммы.

Лемма 3. *Линейное $L$-непрерывное отображение $\vec{\mu}$ пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, равное нулю на характеристических функциях множеств, является нулевым. Линейная $L$-непрерывная форма ($\vec{E} = \mathbb{C}$) на $\Gamma(X)$, неотрицательная на характеристических функциях множеств, неотрицательна.*

Функция $\vec{\mu}$ равна нулю (соответственно $\geqslant 0$) на всех борелевских этажных функциях (соответственно этажных $\geqslant 0$) с компактным носителем из $\Gamma(X)$.

Согласно замечанию, следующему за теоремой $23_2$, каждая борелевская функция на $X$ с компактным носителем является равномерным пределом некоторой последовательности ограниченных в совокупности борелевских этажных функций с носителем в фиксированном компакте и $\geqslant 0$, если она $\geqslant 0$. Применение $L$-непрерывности показывает, что $\vec{\mu}$ равна нулю на всем $\Gamma(X)$ (соответственно $\geqslant 0$ на $\Gamma_+(X)$).

Следствие 1. *Если два линейных $L$-непрерывных отображения $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$ пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$ совпадают на $\mathscr{C}(X)$ или на характеристических функциях множеств, то они совпадают всюду.*

Следствие 2. *Если $\mu$ является линейной $L$-непрерывной формой на $\Gamma(X)$ и если, кроме того, она положительна на $\mathscr{C}_+(X)$ или на характеристических функциях множеств, то эта функция положительна на $\Gamma_+(X)$ и является продолжением Лебега в $\Gamma(X)$ некоторой меры Радона $\geqslant 0$.*

Положительность на характеристических функциях, в силу леммы 3, влечет за собой положительность на $\Gamma_+(X)$, а, значит, на $\mathscr{C}_+(X)$. Поэтому при обоих предположениях имеет место положительность на $\mathscr{C}_+(X)$.

Если рассматривать $\mu$ как линейную форму на $\mathscr{C}(X)$, то из $L$-непрерывности вытекает, что она непрерывна на каждом $\mathscr{C}_K(X)$, т. е. что она является некоторой мерой Радона, и, следовательно, мера Радона $\geqslant 0$. Эта линейная форма и продолжение Лебега этой положительной меры являются линейными $L$-непрерывными формами на $\Gamma(X)$, совпадающими на $\mathscr{C}(X)$, а, следовательно, на $\Gamma(X)$.

Пусть теперь $\vec{\mu}$ — некоторая мера Радона на $X$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Говорят, что $\vec{\mu}$ *допускает борелевское продолжение*, если существует линейное $L$-непрерывное отображение пространства $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, совпадающее с $\vec{\mu}$ на $\mathscr{C}(X)$. Из теоремы $50_2$ вытекает, что если такое продолжение существует, то оно единственно.

Легко видеть, что *такое продолжение существует не всегда*. В самом деле, имеется по крайней мере одно необходимое условие продолжения: если последовательность функций из $\mathscr{C}(X)$ $L$-сходится к 0, то последовательность $\vec{\mu}(\varphi_n)$ должна сходиться к 0 в $\vec{E}$. Возьмем, к примеру, «тождественную меру», определенную на стр. 489, не допускающую абсолютной мажоранты: $X$ — компакт, $\vec{E} = \mathscr{C}(X)$, $\mu(\varphi) = \varphi$ $[\varphi \in \mathscr{C}(X), \vec{\mu}(\varphi) \in \vec{E} = \mathscr{C}(X)]$. Здесь $L$-сходимость последовательности $\varphi_n$ к 0 не влечет за собой, очевидно, сходимости $\vec{\mu}(\varphi_n)$ в $\vec{E}$, т. е. равномерной сходимости $\varphi_n$. $\Big($Пример: $X = [0, 1]$, $\varphi_n(x) = 0$ для $x = 0$ и $x \geqslant 1/n$, $\varphi_n(x) = 1$ для $x = 1/(2n)$ и $\varphi_n$ аффинна в каждом из интервалов $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$.$\Big)$

Теорема $50_3$. *Множество $\mathscr{M}(X; \vec{E})$ мер Радона, определенных на $X$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$, допускающих борелевское продолжение, является векторным пространством, а отображение $(\vec{\mu}, f) \to \int f\, d\vec{\mu}$ является билинейным отображением множества $\mathscr{M}(X; \vec{E}) \times \Gamma(X)$ в $\vec{E}$. Если $\vec{E}$ конечномерно, то каждая мера со значениями в $\vec{E}$ допускает борелевское продолжение.*

Доказательство. Если $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ являются двумя мерами, допускающими борелевское продолжение, то $\vec{\mu} + \vec{\nu}$, а также $k\vec{\mu}$ при скалярном $k$ допускают борелевское продолжение. В самом деле, достаточно определить это продолжение по формулам

$$\int f\, d(\vec{\mu} + \vec{\nu}) = \int f\, d\vec{\mu} + \int f\, d\vec{\nu} \quad \text{и} \quad \int f\, d(k\vec{\mu}) = k \int f\, d\vec{\mu},$$

как тем самым будут определены линейные $L$-непрерывные отображения $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, совпадающие соответственно с $\vec{\mu} + \vec{\nu}$ и $k\mu$ на $\mathscr{C}(X)$. Одновременно доказывается, что $\mathscr{M}(X; \vec{E})$ является некоторым векторным пространством и что рассматриваемое отображение билинейно. По теории Лебега $\mathscr{M}(X; \mathbb{C})$ содержит меры Радона $\geqslant 0$, а, следовательно, вещественные меры как разности неотрицательных мер (теорема 18), а значит, и комплексные меры ($\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где $\mu_1$ и $\mu_2$ вещественны). Если теперь $\mu$ является скалярной мерой и $\vec{e}$ — элемент из $\vec{E}$, то мера $\mu e$, заданная формулой $(\mu\vec{e})(\varphi) = \vec{e}\mu(\varphi)$, допускает продолжение, определенное по формуле $\int f\, d(\mu\vec{e}) = \vec{e} \int f\, d\mu$. Если пространство $\vec{E}$ конечномерно и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторый его базис, то каждая мера $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E}$ запишется в виде $\vec{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i$ а, следовательно, она продолжима.

Теорема $50_4$. *Пусть $\mu$ — вещественная мера на $X$. Формулы, доказанные в теореме 18 для $\mu^+$, $\mu^-$ и $|\mu|$, сохраняются для борелевских продолжений:*

$$\begin{aligned} &\int f\, d\mu^+ = \sup_{\substack{g \in \Gamma(X) \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \int g\, d\mu \quad \textit{для} \quad f \in \Gamma(X), \quad f \geqslant 0, \\ &\int f\, d|\mu| = \sup_{\substack{g \in \Gamma(X) \\ |g| \leqslant f}} \int g\, d\mu \quad \textit{для} \quad f \in \Gamma(X), \quad f \geqslant 0. \end{aligned} \tag{IV, 4; 63}$$

*Для каждой борелевской части $A$ множества $X$ с компактным замыканием имеют место равенства*

$$\mu^{+}(A)=\sup_{B\subset A}\mu(B),\qquad \mu^{-}(A)=\sup_{B\subset A}(-\mu(B)).\quad \text{(IV, 4; 64)}$$

Доказательство. Во всех случаях ясно, что левая часть не меньше правой. Поэтому достаточно установить неравенства обратного смысла. Прежде всего, если $\mathcal{O}$ является открытым множеством с компактным замыканием, то существует такая функция $\varphi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{O}$, что $\mu^{+}(\varphi)\geqslant\mu^{+}(\mathcal{O})-\varepsilon/2$. Согласно формуле (IV, 2; 41), существует такая функция $\psi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\psi\leqslant\varphi\leqslant\chi_{\mathcal{O}}$, что $\mu(\psi)\geqslant\mu^{+}(\varphi)-\varepsilon/2$. Мы имеем, таким образом, неравенство $\mu(\psi)\geqslant\mu^{+}(\mathcal{O})-\varepsilon$, которое доказывает первую формулу в случае, когда $f$ является характеристической функцией некоторого открытого множества (и тогда, очевидно, можно даже ограничиться функцией $g$ из $\mathscr{C}(X)$)[1].

Пусть теперь $A$ является произвольным борелевским множеством с компактным замыканием и характеристической функцией $\chi_A$. Пусть $\mathcal{O}$ — такое открытое множество, что $|\mu|(\mathcal{O}-A)\leqslant\varepsilon/2$. Пусть $\psi$ — функция, определенная предыдущим способом относительно открытого множества $\mathcal{O}$ и такая, что $\mu(\psi)\geqslant\mu^{+}(\mathcal{O})-\varepsilon/2$, а, значит, $\geqslant\mu^{+}(A)-\varepsilon/2$. Рассмотрим теперь функцию (разрывную) $g=\psi\chi_A$, $0\leqslant g\leqslant\chi_A$. Из неравенства

$$\int\psi\chi_A\,d\mu=\mu(\psi)-\int\psi\chi_{\mathcal{O}-A}\,d\mu\geqslant\mu(\psi)-|\mu|(\mathcal{O}-A)\geqslant\mu(\psi)-\varepsilon/2\geqslant$$

$\geqslant\mu^{+}(A)-\varepsilon$ вытекает первая формула для случая, когда $f$ представляет собой характеристическую функцию множества $A$. Используя соответствующие линейные комбинации, легко убедиться, что эта формула верна для любой этажной борелевской функции $f\geqslant 0$ с компактным носителем.

Пусть, наконец, $f\geqslant 0$ — произвольная функция из $\Gamma(X)$, $M$ — ее точная верхняя грань и $K$ — ее носитель. Эта функция является равномерным пределом последовательности этажных борелевских неотрицательных функций с носителем в $K$, ограниченных числом $M$. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно определить такую этажную борелевскую неотрицательную функцию $h$ с носителем в $K$ и ограниченную числом $M$, что $|f-h|\leqslant\delta=\varepsilon/(4\mu^{+}(K))$. Если мы положим $k=(h-\delta)^{+}$, то получим $0\leqslant k\leqslant f$ и $f-k\leqslant 2\delta$. Отсюда $\int k\,d\mu^{+}\geqslant\int f\,d\mu^{+}-2\delta\mu^{+}(K)=$

$=\int f\,d\mu^{+}-\varepsilon/2.$

---

[1]) Если $f$ полунепрерывна снизу, то можно ограничиться непрерывной функцией $g$, но только не тогда, когда $f$ произвольна, даже если уже $\mu\geqslant 0$ (см. замечание после теоремы $39_2$).

Только что мы видели, что существует такая функция $g \in \Gamma(X)$, $0 \leqslant g \leqslant k$, а, значит, $\leqslant f$, удовлетворяющая соотношению $\int g\,d\mu \geqslant \int k\,d\mu^+ - \varepsilon/2$ и, следовательно, $\geqslant \int f\,d\mu^+ - \varepsilon$. Первая формула (IV, 4; 63) полностью доказана. Вторая формула (IV, 4; 63) доказывается точно так же. Остается доказать соотношения (IV, 4; 64).

Пусть $A$ — борелевская часть множества $X$ с компактным замыканием. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольные числа $\delta$, $\eta > 0$. Позже мы установим, что они зависят от $\varepsilon$. Согласно (IV, 4; 63), можно найти такую функцию $g \in \Gamma(X)$, $0 \leqslant g \leqslant \chi_A$, что $\mu^+(A) \geqslant \int g\,d\mu \geqslant \mu^+(A) - \delta$. Отсюда вытекает, что $\mu^+(A) \geqslant$ $\geqslant \int g\,d\mu^+ \geqslant \mu^+(A) - \delta$, а, следовательно, $\int g\,d\mu^- = \int g\,d\mu^+ -$ $- \int g\,d\mu \leqslant \delta$.

Обозначим через $B$ борелевское множество точек $x$, в которых $g(x) \geqslant \eta$. Так как функция $\eta\chi_B$ заключена между 0 и $g$, то $\eta\mu^-(B) = \int \eta\chi_B\,d\mu^- \leqslant \int g\,d\mu^- \leqslant \delta$, а, значит $\mu^-(B) \leqslant \delta/\eta$. Если теперь рассмотреть функцию $k$, равную 1 на $B$, $\eta$ на $A - B$ и 0 на $\complement A$, то она будет заключена между $g$ и $\chi_A$; поэтому будут иметь место соотношения $\mu^+(B) + \eta\mu^+(A - B) = \int k\,d\mu^+ \geqslant$ $\geqslant \int g\,d\mu^+ \geqslant \mu^+(A) - \delta$ и, следовательно, $\mu^+(B) \geqslant \mu^+(A) - \delta -$ $- \eta\mu^+(A - B) \geqslant \mu^+(A) - \delta - \eta\mu^+(A)$.

Окончательно получаем:

$$\mu(B) = \mu^+(B) - \mu^-(B) \geqslant (\mu^+(A) - \delta - \eta\mu^+(A)) - \frac{\delta}{\eta}.$$

Множество $B$ зависит от выбора $\delta$ и $\eta$. Однако если мы выберем $\delta$, $\eta$ так, чтобы $\delta + \eta\mu^+(A) + \delta/\eta \leqslant \varepsilon$, то получим такое борелевское множество $B \subset A$, что $\mu(B) \geqslant \mu^+(A) - \varepsilon$, и формула (IV, 4; 64) будет доказанной. Такой выбор $\delta$, $\eta$ возможен. Надо *сначала* взять $\eta = \varepsilon/(2\mu^+(A))$, т. е. $\eta\mu^+(A) = \varepsilon/2$, а *затем* взять $\delta$ так, чтобы $\delta(1 + 1/\eta) = \varepsilon/2$, или $\delta = \varepsilon/[2(1 + 1/\eta)]$. Таким образом, теорема $50_4$ полностью доказана.

В дальнейшем окажется полезным следующее понятие.

Пусть $\mu$ — некоторая вещественная мера. Говорят, что она *вполне положительна* (соответственно *вполне отрицательна, вполне нулевая*) на некоторой части $A$ множества $X$, если для каждой борелевской части $B$ множества $A$ с компактным замыканием имеет место неравенство $\mu(B) \geqslant 0$ (соответственно $\leqslant 0$, $= 0$).

Тот факт, что $\mu$ вполне положительна (соответственно отрицательна) на $A$, записывается в виде: $\mu(A) \gg 0$ (соответственно $\mu(A) \ll 0$). Если $\mu$ вполне положительна на $A$, то она заведомо вполне положительна на любой части $A$. Если $\mu$ вполне положительна на счетном множестве борелевских частей, то она вполне положительна на их объединении $A$. (В самом деле, если $B \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, то $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, где $B_n$ — непересекающиеся борелевские множества и $B_n \subset A_n$: $B_0 = B \cap A_0$, $B_1 = B \cap A_1 \cap \complement A_0, \ldots, B_n = B \cap A_n \cap \complement A_{n-1} \cap \ldots \cap \complement A_0$. Теперь $\mu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \geqslant 0$.)

Для того чтобы $\mu(A)$ было $\gg 0$, необходимо и достаточно, чтобы $A$ имело для $\mu^-$ нижнюю меру, равную нулю.

В самом деле, пусть $A$ имеет для $\mu^-$ нулевую нижнюю меру. Для каждого борелевского множества $B \subset A$ с компактным замыканием будет справедливо равенство $\mu^-(B) = 0$, а, следовательно $\mu(B) = \mu^+(B) \geqslant 0$, и значит, $\mu$ вполне положительна на $A$. Обратно, предположим, что $\mu(A) \gg 0$. Тогда $\mu(K) \gg 0$ для каждого компактного подмножества $K \subset A$. Из формулы (IV, 4; 64), примененной к $K$ и $\mu^-$, получаем $\mu^-(K) = \sup_{B \subset K} (-\mu(B)) = 0$, а, следовательно, $\mu_*^-(A)$.

Теорема $50_5$. *Если $\mu$ является вещественной мерой на локально компактном счетном в бесконечности пространстве $X$, то это пространство можно представить в виде объединения двух борелевских дополнительных множеств $X^+$ и $X^-$, таких, что мера $\mu$ будет вполне положительной на $X^+$ и вполне отрицательной на $X^-$.*

Доказательство. Пусть $K$ — некоторый компакт $X$. В предыдущей теореме мы видели, что $\mu^+(K) = \sup_{A \subset K} \mu(A)$. Значит, можно определить последовательность таких борелевских частей пространства $X$, содержащихся в $K$: $A_0, A_1, A_2, \ldots$, что $\mu(A_n) \geqslant \mu^+(K) - 1/2^n$.

Положим теперь $B_n = \bigcup_{p \geqslant n} A_p$. Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &\mu^+(A_n) \geqslant \mu^+(K) - \frac{1}{2^n}, \quad \text{а следовательно,} \\ &\qquad\qquad \mu^+(B_n) = \mu^+(K); \\ &\mu^-(A_n) = \mu^+(A_n) - \mu(A_n) \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \text{поэтому} \\ &\qquad\qquad \mu^-(B_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 4; 65)}$$

Если мы через $K^+$ обозначим пересечение $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} B_n$ и через $K^-$ — множество $K - K^+$, то сразу получим равенства

$$\begin{aligned} &\mu^+(K^+) = \mu^+(K), && \mu^-(K^+) = 0, \\ &\mu^+(K^-) = 0, && \mu^-(K^-) = \mu^-(K). \end{aligned} \qquad \text{(IV, 4; 66)}$$

Тем самым мы определили две искомые части для компакта $K$. Пусть теперь $K_0, K_1, K_2, \ldots$ — возрастающая последовательность компактов, объединение которых равно $X$. Для каждого из $K_n$ по предыдущему способу можно определить части $K_n^+$ и $K_n^-$. Положим теперь $X^+ = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} K_n^+$ и $X'^- = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} K_n^-$. Поскольку мера $\mu$ вполне положительна на $K_n^+$, то она вполне положительна на их объединении $X^+$, а поскольку она вполне отрицательна на $K_n^-$, то она вполне отрицательна на $X'^-$.

Нельзя быть уверенным, что пересечение $X^+$ и $X'^-$ равно нулю. Однако если это пересечение обозначить через $Y$, то мера $\mu$ на $Y$ будет одновременно вполне положительной и вполне отрицательной, т. е. будет вполне нулевой. Заменяя затем $X^+$ и $X'^-$ на $X^+$ и $X^- = X'^- - Y$, получим множества, удовлетворяющие условиям теоремы.

Замечание. Интересно выяснить степень неопределенности только что найденной системы множеств $X^+$, $X^-$. Пусть $Y^+$, $Y^-$ — другое решение этой же задачи. Множество $X^+ \cap Y^-$ точек, принадлежащих $X^+$ и не принадлежащих $Y^+$, или множество $X^- \cap Y^+$ элементов, принадлежащих $Y^+$ и не принадлежащих $X^+$, являются частями $X$, на которых $\mu$ одновременно вполне положительна и вполне отрицательна, т. е. вполне нулевая. Можно сказать, в некотором смысле, что $X^+$ и $Y^+$ отличаются на некоторое множество вполне нулевой меры по $\mu$, т. е. нулевой меры для $|\mu|$. То же самое имеет место для $X^-$ и $Y^-$. Обратно, совершенно очевидно, что если изменить $X^+$ и $X^-$ на множества, на которых $\mu$ вполне нулевая, то их свойства не изменятся.

Следствие. *Для того чтобы две меры $\mu, \nu \geqslant 0$ были дизъюнктными (т. е. такими, что $\inf(\mu, \nu) = 0$), необходимо и достаточно, чтобы можно было представить $X$ в виде объединения таких двух множеств $X_\mu$ и $X_\nu$, что $\nu(X_\mu) = 0$ и $\mu(X_\nu) = 0$, и тогда их можно выбрать борелевскими и дополнительными друг к другу.*

Доказательство. Предположим, что указанное представление возможно. Тогда для каждой меры $\lambda \geqslant 0$, мажорируемой одновременно мерами $\mu$ и $\nu$, справедливы неравенства $\lambda(X_\mu) \leqslant \nu(X_\mu) = 0$ и $\lambda(X_\nu) \leqslant \mu(X_\nu) = 0$, т. е. $\lambda(X) = 0$, а, значит, $\lambda = 0$. Так как $\inf(\mu, \nu) \geqslant 0$, то этот $\inf = 0$, и меры $\mu$ и $\nu$ — дизъюнктны. Обратно, пусть $\mu$ и $\nu$ — дизъюнктные меры. Положим $\lambda = \mu - \nu$. Из $\inf(\mu, \nu) = 0$ следует, что $\sup(\mu, \nu) = \mu + \nu$ (см. стр. 481). Но тогда $\lambda^+ = \sup(\mu - \nu, 0) = \sup(\mu, \nu) - \nu = \mu + \nu - \nu = \mu$ и точно так же $\lambda^- = \nu$. Нужный результат получается, если положить $X_\mu = X^+$ и $X_\nu = X^-$, где оба множества борелевские и дополнительные друг другу.

Замечание. Говорят, что некоторая *мера* $\mu \geqslant 0$ *сосредоточена на части* $A$ *пространства* $X$, если $\complement A$ имеет $\mu$-меру, равную нулю. Это определение не имеет прямой связи с носителем. *Носитель является наименьшим замкнутым множеством, на котором сосредоточена мера* $\mu$. Однако часть $A$ не обязательно замкнута. Например, если $a_\nu$ являются рациональными числами из $\mathbb{R}$ и если ряд $\sum\limits_\nu c_\nu$, $c_\nu > 0$, сходится, то мера $\sum\limits_\nu c_\nu \delta_{(a_\nu)}$ сосредоточена на $\mathbb{Q}$, но ее носителем является $\mathbb{R}$. Впрочем, не существует наименьшего множества, на котором сосредоточена мера $\mu$, кроме случая атомических мер (стр. 468), ибо из $A$ всегда можно удалить произвольное множество нулевой $\mu$-меры. Например, меру $dx$ на $\mathbb{R}$ можно считать сосредоточенной на множестве иррациональных чисел. Теперь предыдущее следствие может быть записано в следующем виде:

*Для того чтобы меры* $\mu$ *и* $\nu$ $(\geqslant 0)$ *были дизъюнктными, необходимо и достаточно, чтобы существовало два непересекающихся множества из* $X$, *на которых сосредоточены соответственно меры* $\mu$ *и* $\nu$: на дополнении $\complement X_\mu$ сосредоточена мера $\nu$, а на дополнении $\complement X_\nu$ сосредоточена мера $\mu$ (т. е. если $X_\mu$ и $X_\nu$ — дополнительные множества, то на $X_\mu$ сосредоточена мера $\mu$, а на $X_\nu$ сосредоточена мера $\nu$).

Например, если $\mu$ является некоторой атомической мерой $\geqslant 0$ на $X$ (т. е. имеет вид $\sum c_\nu \delta_{(a_\nu)}$, где $\sum\limits_{a_\nu \in K} c_\nu < +\infty$ для каждого компакта $K$; здесь $a_\nu$ образуют бесконечное счетное множество на $K$, а, значит, и на объединении $X$ счетного множества компактов) и если $\nu$ является некоторой рассеянной мерой (т. е. такой, для которой каждая точка, а, значит, и всякое счетное множество, имеет нулевую меру), то меры $\mu$ и $\nu$ являются дизъюнктными, поскольку они сосредоточены соответственно на множестве точек $a_\nu$ и его дополнении.

Можно также дать следующее эквивалентное условие, которое выглядит асимметричным.

*Для того чтобы меры* $\mu$ *и* $\nu$ $(\geqslant 0)$ *были дизъюнктными, необходимо и достаточно, чтобы мера* $\nu$ *была* $\mu$*-сингулярной, т. е. сосредоточенной на множестве,* $\mu$*-мера которого равна нулю.*

В самом деле, сказать, что на множестве $A$ нулевой $\mu$-меры сосредоточена мера $\nu$, означает сказать, что $\mu(A)=0$ и $\nu(\complement A)=0$.

## § 5. УМНОЖЕНИЕ МЕРЫ НА ФУНКЦИЮ

### Произведение векторной меры на непрерывную скалярную функцию

Пусть $\vec{\mu}$ — мера на локально компактном пространстве $X$ со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$. Пусть, кроме того, $p$ — *непрерывная* скалярная функция на $X$. *Произведением меры* $\vec{\mu}$ *на функцию* $p$, обозначаемым через $p\vec{\mu}$, или $d(p\vec{\mu})$, или $p\overrightarrow{d\mu}$, называется *мера* $\vec{\nu}$ *на* $X$ *со значениями в* $\vec{E}$, определяемая по формуле

$$\vec{\nu}(\varphi)=p\vec{\mu}(\varphi)=\vec{\mu}(p\varphi), \qquad \varphi\in\mathscr{C}(X). \qquad (IV, 5; 1)$$

Эта формула действительно определяет некоторую меру. В самом деле, пусть $\varphi$ принадлежит множеству $\mathscr{C}(X)$. Поскольку функция $p$ непрерывна, то функция $p\varphi$ также непрерывна, а ее носитель, содержащийся в носителе функции $\varphi$, компактен. Поэтому $p\varphi$ также лежит в $\mathscr{C}(X)$, так что правая часть в (IV, 5; 1) имеет смысл. Эта часть линейно зависит от $\varphi$, и поэтому $\vec{\nu}$ является линейным отображением $\mathscr{C}(X)$ в $\vec{E}$.

Остается доказать непрерывность этого отображения. Предположим, что носитель $\varphi$ лежит в компакте $K$ множества $X$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\vec{\nu}(\varphi)\|=\|\vec{\mu}(p\varphi)\|\leqslant\|\vec{\mu}\|_K\sup_{x\in K}|p(x)|\,|||\varphi|||, \qquad (IV, 5; 2)$$

доказывающее непрерывность функции $\vec{\nu}$ и дающее одновременно оценку

$$\|\vec{\nu}\|_K\leqslant\|\vec{\mu}\|_K\sup_{x\in K}|p(x)|. \qquad (IV, 5; 3)$$

Это определение показывает также, почему нельзя умножать меру на функцию, не являющуюся непрерывной скалярной функцией. В самом деле, правая часть в (IV, 5; 1) имеет смысл только в том случае, когда $p\varphi$ является непрерывной скалярной функцией с компактным носителем, а это верно лишь тогда, когда $p$ является непрерывной скалярной функцией.