В самом деле, сказать, что на множестве A нулевой μ-меры сосредоточена мера ν, означает сказать, что $\mu(A)=0$ и $\nu(\complement A)=0$.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ МЕРЫ НА ФУНКЦИЮ

Произведение векторной меры на непрерывную скалярную функцию

Пусть $\vec{\mu}$ — мера на локально компактном пространстве X со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$. Пусть, кроме того, p — *непрерывная* скалярная функция на X. *Произведением меры $\vec{\mu}$ на функцию p*, обозначаемым через $p\vec{\mu}$, или $d(p\vec{\mu})$, или $p\overrightarrow{d\mu}$, называется *мера $\vec{\nu}$ на X со значениями в $\vec{E}$*, определяемая по формуле

$$\vec{\nu}(\varphi)=p\vec{\mu}(\varphi)=\vec{\mu}(p\varphi),\qquad \varphi\in\mathscr{C}(X). \qquad \text{(IV, 5; 1)}$$

Эта формула действительно определяет некоторую меру. В самом деле, пусть φ принадлежит множеству $\mathscr{C}(X)$. Поскольку функция p непрерывна, то функция $p\varphi$ также непрерывна, а ее носитель, содержащийся в носителе функции φ, компактен. Поэтому $p\varphi$ также лежит в $\mathscr{C}(X)$, так что правая часть в (IV, 5; 1) имеет смысл. Эта часть линейно зависит от φ, и поэтому $\vec{\nu}$ является линейным отображением $\mathscr{C}(X)$ в $\vec{E}$.

Остается доказать непрерывность этого отображения. Предположим, что носитель φ лежит в компакте K множества X. Тогда справедливо неравенство

$$\|\vec{\nu}(\varphi)\|=\|\vec{\mu}(p\varphi)\|\leqslant\|\vec{\mu}\|_K\sup_{x\in K}|p(x)|\,|||\varphi|||, \qquad \text{(IV, 5; 2)}$$

доказывающее непрерывность функции $\vec{\nu}$ и дающее одновременно оценку

$$\|\vec{\nu}\|_K\leqslant\|\vec{\mu}\|_K\sup_{x\in K}|p(x)|. \qquad \text{(IV, 5; 3)}$$

Это определение показывает также, почему нельзя умножать меру на функцию, не являющуюся непрерывной скалярной функцией. В самом деле, правая часть в (IV, 5; 1) имеет смысл только в том случае, когда $p\varphi$ является непрерывной скалярной функцией с компактным носителем, а это верно лишь тогда, когда p является непрерывной скалярной функцией.

Пример 1. Если $\vec{\mu}$ является мерой $\sum\limits_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}$, то имеет место формула

$$p\left(\sum_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}\right) = \sum_{\nu} \vec{c}_\nu p(a_\nu)\, \delta_{(a_\nu)}. \qquad \text{(IV, 5; 4)}$$

В частности, $p\delta_{(a)} = p(a)\,\delta_{(a)}$.

Пример 2. Пусть $\vec{\mu}$ — мера, обозначавшаяся нами ранее через $\vec{p}\,dx$, и q — непрерывная скалярная функция. Тогда мера $q(\vec{p}\,dx)$ является уже известной мерой $(q\vec{p})dx$. В частности, *если p является непрерывной скалярной функцией, то pdx является мерой-произведением непрерывной скалярной функции p на скалярную меру dx.*

Элементарные свойства

Носитель меры $p\vec{\mu}$, очевидно, содержится в пересечении носителя p и носителя $\vec{\mu}$. Он может быть строго меньше, чем это пересечение. Возьмем, например, в качестве μ вещественную меру Дирака δ на $\mathbb{R}$, а в качестве p функцию x. Тогда, согласно (IV, 5; 4), $x\delta = 0$.

Здесь носителями являются соответственно нуль и вся прямая, и они пересекаются в нуле, в то время как их произведение, будучи равным нулю, имеет пустой носитель.

Отображение $(p, \vec{\mu}) \to p\vec{\mu}$, ставящее в соответствие каждой паре, состоящей из непрерывной скалярной функции и меры со значениями в $\vec{E}$, некоторую меру со значением в $\vec{E}$, является, очевидно, билинейным.

Наконец, имеет место следующее правило ассоциативности: если p и q являются двумя непрерывными скалярными функциями, то

$$p(q\vec{\mu}) = (pq)\,\vec{\mu}. \qquad \text{(IV, 5; 5)}$$

Случай, когда μ — вещественная мера $\geqslant 0$

В том частном случае, когда μ является вещественной мерой Радона $\geqslant 0$, известно значение μ на функциях, не являющихся обязательно непрерывными с компактным носителем. Поэтому в данном случае произведение можно определить в более широком смысле и даже умножать μ на функции с векторными значениями.

Определение. Пусть μ — вещественная мера Радона $\geqslant 0$ на локально компактном, счетном в бесконечности пространстве X. Пусть $\vec{p}$ — функция, определенная μ-почти всюду на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ и локально μ-интегрируемая, т. е. μ-интегрируемая на каждом компакте из X [1]). Тогда *произведением* $\vec{p}\mu$ называется мера $\vec{\nu}$ на X со значениями в $\vec{E}$, определенная по формуле

$$\vec{p}\mu(\varphi) = \int \vec{p}\varphi\, d\mu \in \vec{E}. \qquad \text{(IV, 5; 6)}$$

Покажем, что эта формула определяет некоторую меру на X со значениями в $\vec{E}$. Если φ принадлежит $\mathscr{C}(X)$, то она, в частности, μ-измерима и ограничена, а ее носитель содержится в компакте K пространства X. Так как функция $\vec{p}$, по предположению, интегрируема на K, то функция $\vec{p}\varphi$ (следствие 2 теоремы 23_2) μ-измерима, а верхний интеграл $\int^* \|\vec{p}\varphi\|\, d\mu \leqslant |||\varphi||| \int_K \|\vec{p}\|\, d\mu$ конечен. Отсюда следует, что функция $\vec{p}\varphi$ интегрируема и, следовательно, правая часть соотношения (IV, 5; 6) имеет смысл.

Естественно, что эта правая часть линейно зависит от φ и тем самым определяет некоторое линейное отображение $\mathscr{C}(X)$ в $\vec{E}$. Что же касается непрерывности, то она очевидным образом следует из последнего неравенства, которое, кроме того, означает, что норма меры $\vec{p}\mu$ на компакте K допускает оценку

$$\|\vec{p}\mu\|_K \leqslant \int_K \|\vec{p}\|\, d\mu. \qquad \text{(IV, 5; 7)}$$

Переходя к точной верхней грани по всевозможным компактам K, отсюда получаем:

$$\|\vec{p}\mu\| \leqslant \int \|\vec{p}\|\, d\mu. \qquad \text{(IV, 5; 7}_2\text{)}$$

Можно показать, что неравенство переходит в равенство в том случае, когда $\vec{p}$ принимает скалярные значения или лежит в одномерном векторном пространстве. Однако это, вообще го-

[1]) Функция p локально μ-интегрируема тогда и только тогда, когда она μ-измерима и когда для каждого компакта K из X имеет место неравенство $\int_K^* \|\vec{p}\|\, dx < +\infty$.

воря, не так, если $\vec{p}$ принимает значения в пространстве $\vec{E}$ размерности $\geqslant 2$.

Если p является функцией с комплексными значениями (соответственно вещественными, соответственно вещественными $\geqslant 0$), то же самое будет иметь место и для произведения $p\mu$. Здесь носитель $p\mu$ содержится в пересечении носителей p и μ. Кроме того, мы полностью обосновали теперь применявшееся ранее обозначение $p\,dx$ для некоторых мер на прямой.

Теорема 51. *Пусть μ является вещественной мерой $\geqslant 0$ на локально компактном, счетном в бесконечности пространстве X, p — вещественная функция $\geqslant 0$, локально μ-интегрируемая на X, и $\vec{f}$ — функция, определенная на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Функция $\vec{f}$ $p\mu$-интегрируема тогда и только тогда, когда μ-интегрируема функция $p\vec{f}$. Кроме того,*

$$\int \vec{f}\,d(p\mu) = \int (p\vec{f})\,d\mu\,{}^{1)} \quad \text{или} \quad \int \vec{f}\,(p\,d\mu) = \int (\vec{f}p)\,d\mu. \qquad \text{(IV, 5; 8)}$$

Мы примем эту теорему без доказательства. Ее доказательство основывается на следующем равенстве, относящемся к верхним интегралам: если f — произвольная функция $\geqslant 0$, то

$$\int^* f\,(p\,d\mu) = \int^* (fp)\,d\mu. \qquad \text{(IV, 5; 9)}$$

Эта теорема, очевидно, особенно полезна, и *ею постоянно пользуются на практике, зачастую этого и не замечая.*

В частности, если для функций с вещественными значениями $\geqslant 0$ рассматривается выражение $\int fg\,d\mu$, то безразлично, будем ли мы рассматривать его как интеграл от fg по $d\mu$, или как интеграл от f по мере-произведению $g\,d\mu$, или как интеграл от g по мере $f\,d\mu$. Все это, конечно, при условии, что все эти меры-произведения имеют смысл, т. е. что функции f и g локально μ-интегрируемы.

Следствие. *Если $\vec{p}$ является функцией на X со значениями в $\vec{E}$, q — вещественной локально μ-интегрируемой функцией $\geqslant 0$, то функция $\vec{p}$ локально $q\mu$-интегрируема тогда и только тогда, когда $\vec{p}q$ локально μ-интегрируема и меры-произведения $\vec{p}(q\mu)$ и $(\vec{p}q)\mu$ совпадают.*

---

1) Легко видеть, почему рекомендуется применять обозначение $p\,d\mu$. В соотношении (IV, 5; 8) $d(p\mu)$ совпадает с $p\,d\mu$. Мы уже писали $p\,dx$,

В самом деле, они имеют одно и то же значение на каждой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$. Говорят, что *мера* $\vec{p}\mu$ *имеет плотность* $\vec{p}$ *по отношению к вещественной мере* $\mu \geqslant 0$.

Меры с базой μ. Меры с базой $\geqslant 0$

Говорят, что мера $\vec{\nu}$, определенная на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ является *мерой с базой* μ, где μ — вещественная мера $\geqslant 0$, если она может быть записана в виде $\vec{p}\mu$, где $\vec{p}$ — некоторая локально μ-интегрируемая функция на X со значениями в $\vec{E}$. Говорят, что $\vec{\nu}$ является мерой с базой $\geqslant 0$, если существует такая мера $\mu \geqslant 0$, что $\vec{\nu}$ есть мера с базой μ.

Теперь можно рассмотреть следующие вопросы:

1°) Сколькими способами может быть выражена одна и та же мера $\vec{\nu}$ в виде $\vec{p}\mu$, где мера μ задана?

2°) Каков характер мер, которые могут выражаться в этом виде, т. е. мер с базой μ?

Теоремы 52—53—54 (Лебега — Никодима и Данфорда — Петтиса)[1]. *Пусть X — локально компактное счетное в бесконечности пространство и μ — некоторая мера Радона $\geqslant 0$ на X.*

1°) *Пусть ν — некоторая другая мера $\geqslant 0$ на X. Если ν имеет базу μ, то каждая μ-измеримая функция и μ-измеримое множество ν-измеримы. Кроме того, каждое множество нулевой μ-меры также имеет нулевую ν-меру. Обратно, если каждая борелевская часть с компактным замыканием и нулевой μ-мерой имеет также нулевую ν-меру, то ν является мерой с базой μ, $\nu = p\mu$, где p — единственная с точностью до значений на множестве нулевой μ-меры функция. (Если $p_1\mu = p_2\mu$, то p_1 и p_2 μ-почти всюду равны.)*

Для того чтобы мера $\nu \geqslant 0$ была мажорируема мерой μ, необходимо и достаточно, чтобы $\nu = p\mu$, где $p \leqslant 1$ μ-почти всюду.

2°) *Каждая мера $\vec{\nu}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ с базой $\geqslant 0$ допускает борелевское продолжение, абсолютно мажорируема и имеет наименьшую абсолютную мажоранту. Если предполагается, что $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$, то для того, чтобы она имела базу μ, необходимо и достаточно, чтобы каждое бо-*

[1]) Мы собрали несколько теорем в одну. Часть 1°) принадлежит Лебегу и Никодиму, часть 2°) является частным случаем более общей теоремы Данфорда и Петтиса.

релевское подмножество с компактным замыканием и нулевой μ*-мерой имело также нулевую* $\vec{\nu}$*-меру. При этих условиях* $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, *где* p *определяется с точностью до изменений на множестве нулевой* μ*-меры. Для того чтобы она была абсолютно мажорируема мерой* μ, *необходимо и достаточно, чтобы* $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$ *и* $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ μ*-почти всюду. При этом для каждой ограниченной борелевской функции* f *с компактным носителем имеет место неравенство*

$$\left\| \int f\,d\vec{\nu} \right\| \leqslant \int |f|\,d\mu. \qquad (\mathrm{IV}, 5; 9_2)$$

Для того чтобы эта функция имела μ *в качестве наименьшей абсолютной мажоранты, необходимо и достаточно, чтобы* $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, *где* $\|\vec{p}\| = 1$ μ*-почти всюду.*

3°) *Если* $\vec{E}$ *конечномерно, то каждая мера* ν *со значениями в* $\vec{E}$ *является мерой с базой* $\geqslant 0$. *В частности, каждая скалярная мера имеет базу* $\geqslant 0$.

4°) *Если* p *и* q *являются вещественными, локально* μ*-интегрируемыми функциями на* X, *то* $p\mu \leqslant q\mu$ *тогда и только тогда, когда* $p \leqslant q$ μ*-почти всюду. Мера* $(\sup(p, q))\mu$ *является точной верхней гранью мер* $p\mu$ *и* $q\mu$. *Если* $\vec{\nu}$ *является мерой с базой* $\geqslant 0$ *и со значениями в* $\vec{E}$, *то для того, чтобы она была абсолютно мажорируема мерой* $q\mu$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$ *и* $\|\vec{p}\| \leqslant q$ μ*-почти всюду.*

Доказательство. А) Предположим сначала, что $\nu \geqslant 0$, $\nu = p\mu$, $p \geqslant 0$ локально μ-интегрируема. Пусть A есть μ-измеримая часть с компактным замыканием. Пусть $\mathcal{O}_n$ — последовательность таких открытых множеств, содержащих множество A, что $\mu(\mathcal{O}_n) \leqslant \mu(A) + 1/n$, и пусть K_n — последовательность таких компактов, содержащихся в A, что $\mu(K_n) \geqslant \mu(A) - 1/n$. Пусть $A^* = \bigcap\limits_n \mathcal{O}_n$ и $A_* = \bigcup\limits_n K_n$. Множества A^* и A_* являются борелевскими, а, значит, измеримыми множествами при любой мере Радона, $A_* \subset A \subset A^*$ и $\mu(A^* - A_*) = 0$. Тогда $\nu(A^* - A_*) = \int\limits_{A^* - A_*} p\,d\mu = 0$. Так как $\nu(A_*) \leqslant \nu_*(A) \leqslant \nu^*(A) \leqslant \nu(A^*)$, то часть A также ν-измерима. Если часть A не имеет компактного замыкания, то такое заключение сохраняется в силу того, что измеримость A эквивалентна измеримости ее пересечений с компактами, при этом если $\mu(A) = 0$, то $\nu(A) = \int\limits_A p\,d\mu = 0$.

Измеримость функций сводится к измеримости множеств. Каждая μ-измеримая функция является ν-измеримой.

Обратно, предположим, что каждое борелевское множество с компактным замыканием и нулевой μ-мерой имеет также нулевую ν-меру. Тогда мы сможем построить некоторую функцию $\rho \geqslant 0$, локально μ-интегрируемую и такую, что $\nu = \rho\mu$. При этом ν будет мерой с базой μ. Если $\nu \leqslant \mu$, то из построения будет видно, что $\rho \leqslant 1$. Первая часть теоремы, однако, еще не будет доказана, поскольку нужно показать, что ρ определяется с точностью до произвольных изменений на множестве нулевой μ-меры.

Построим искомую функцию ρ. Пусть k и n — целые числа $\geqslant 0$. Если мы введем меру $\nu - \frac{k}{2^n}\mu$, то, согласно теореме 50_5, множество X можно представить в виде объединения двух таких непересекающихся борелевских множеств $X^+_{k,n}$ и $X^-_{k,n}$, что на первом мера $\nu - \frac{k}{2^n}\mu$ будет вполне положительной, а на втором — вполне отрицательной. Для $k = 0$ мы положим $X^+_{0,n} = X$ и $X^-_{0,n} = \varnothing$.

Пусть теперь $A_{k,n} = X^+_{k,n} \cap X^-_{k+1,n}$, и пусть $h < k$. Нельзя быть уверенным в том, что $X^-_{h,n} \subset X^-_{k,n}$. Однако если через $N_{h,k,n}$ обозначить борелевское множество $X^-_{h,n} \cap X^+_{k,n}$ точек, принадлежащих первому множеству, но не принадлежащих второму, то это множество будет иметь нулевую μ-меру. В самом деле, для каждой борелевской части B с компактным замыканием данного множества имеют место неравенства

$$\nu(B) \leqslant \frac{h}{2^n}\mu(B) \quad \text{и} \quad \nu(B) \geqslant \frac{k}{2^n}\mu(B),$$

что возможно только в том случае, когда $\mu(B) = 0$, а значит, $\mu_*(N_{h,k,n}) = 0$. Так как это множество борелевское, а значит, μ-измеримо, то $\mu(N_{h,k,n}) = 0$. Если мы обозначим через N_n объединение всех $N_{h,k,n}$, соответствующих всем значениям h, k, $h < k$, то получим некоторое множество нулевой μ-меры. Если x не принадлежит этому исключительному множеству N_n и если $x \in X^-_{h,n}$, то $x \in X^-_{k,n}$ для всех $k \geqslant h$. Отсюда вытекает, что пересечение $A_{h,n}$ и $A_{k,n}$, $h \neq k$, содержится в N_n, а следовательно, имеет нулевую μ-меру. (В самом деле, предположим, например, что $h < k$. Тогда $(A_{h,n} \cap A_{k,n}) \subset (X^-_{h+1,n} \cap X^+_{k,n}) \subset N_n$.)

Объединение всех $A_{k,n}$ при фиксированном n и $k = 0, 1, 2, \ldots$ содержит почти все X. В самом деле, пусть $x \in X$. Предположим сначала, что существует хотя бы одно такое целое число h, что $x \in X^-_{h,n}$. Тогда найдется первое целое h, обладающее этим свойством (поскольку $X^-_{0,n} = \varnothing$, то $h \geqslant 1$). При этом $x \notin X^-_{h-1,n}$

и, следовательно, $x \in X^{+}_{h-1,\,n}$, а потому $x \in A_{h-1,\,n}$. Однако если мы рассмотрим множество M_n точек x, не принадлежащих ни одному из $X^{-}_{k,\,n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то это будет множество точек, принадлежащих всем $X^{+}_{k,\,n}$. Следовательно, для каждой борелевской части B с компактным носителем множества M_n при любом k имеет место неравенство $\nu(B) \geqslant \frac{k}{2^n}\mu(B)$, из которого следует, что $\mu(B) = 0$, так что нижняя μ-мера множества M_n равна нулю. Поскольку это множество борелевское, то его μ-мера также равна нулю. Все это можно подытожить следующим образом: для фиксированного n и $k=0, 1, 2, \ldots$ множества $A_{k,\,n}$, с точностью до множеств нулевой μ-меры, попарно не пересекаются и в объединении дают множество X. Обозначим теперь через p_n функцию, равную $k/2^n$ на множестве $A_{k,\,n}$. Ее невозможно будет определить по этому правилу в точках пересечения двух множеств $A_{k,\,n}$ или в точках, не принадлежащих объединению этих множеств, т. е. на борелевском множестве $N_n \cup M_n$ нулевой μ-меры. Положим на этом множестве, например, $p_n = 0$. Тогда функция p_n будет борелевской. Кроме того, она будет и локально μ-интегрируемой, поскольку для каждого компакта K

$$\int_K^* p_n\,d\mu = \sum_{n \geqslant 0} \int_{K \cap A_{k,\,n}} \frac{k}{2^n}\,d\mu \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \nu(K \cap A_{k,\,n}) \leqslant \nu(K) < +\infty.$$

Таким образом, мы можем полностью определить меру $p_n\mu$. На каждом из множеств $A_{k,\,n}$ имеют место неравенства $p_n\mu \ll \nu \ll (p_n + 1/2^n)\mu$. Эти же неравенства сохраняются на $\bigcup\limits_{k \geqslant 0} A_{k,\,n}$. Множества M_n имеют нулевую μ-меру, а, следовательно, *в силу сделанного предположения относительно* ν *и* μ, *они имеют нулевую* ν*-меру* (это используется только здесь). Значит, неравенства справедливы на M_n и, следовательно, справедливы на всем X.

Будем теперь изменять n. Выполнив построение для n, мы его можем использовать для $n+1$, полагая $X^{\pm}_{2k,\,n+1} = X^{\pm}_{k,\,n}$. Это возможно, поскольку на этих множествах должны выполняться одинаковые неравенства

$$\nu - \frac{k}{2^n}\mu = \nu - \frac{2k}{2^{n+1}}\mu \ll 0 \quad \text{или} \quad \gg 0.$$

Множества $A_{2k,\,n+1}$ и $A_{2k+1,\,n+1}$, с точностью до множеств μ-меры нуль, попарно не пересекаются и в объединении дают множество $A_{k,\,n}$. Поэтому μ-почти всюду имеем $p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n + 1/2^n$. Если мы изменим функции p_n, полагая их равными нулю на борелевском множестве нулевой μ-меры $M \cup N$, $M = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} M_n$,

$N=\bigcup\limits_{n\geqslant 0} N_n$, то они будут по-прежнему обладать теми же свойствами, однако всюду будут иметь место неравенства $p_n \leqslant \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n + 1/2^n$. Последовательность функций p_n оказывается возрастающей и имеющей некоторый предел p, где $p_n \leqslant \leqslant p \leqslant p_n + 1/2^n$. Функция p является борелевской и локально μ-интегрируемой, а, значит, определяющей меру $p\mu$. Для каждого φ из $\mathscr{C}(X)$, $\varphi \geqslant 0$, имеем

$$\int p_n\varphi\, d\mu \leqslant \int \varphi\, d\nu \leqslant \int p_n\varphi\, d\mu + \frac{1}{2^n}\int \varphi\, d\mu,$$

$$\int p_n\varphi\, d\mu \leqslant \int p\varphi\, d\mu \leqslant \int p_n\varphi\, d\mu + \frac{1}{2^n}\int \varphi\, d\mu,$$

откуда

$$\left|\int p\varphi\, d\mu - \int \varphi\, d\nu\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\int \varphi\, d\mu.$$

Поскольку n произвольно, левая часть равна нулю. Значит, $p\mu$ и ν совпадают на $\mathscr{C}_+(X)$ и, следовательно, на $\mathscr{C}(X)$, т. е. равны. Это как раз то, что мы хотели доказать. Если, кроме того, $\nu \leqslant \leqslant \mu$, то можно взять $X^-_{2^n,n} = X$ и $X^+_{2^n,n} = \varnothing$, а, значит, $p_n \leqslant 1$ и $p \leqslant 1$.

В) Пусть $\vec{\nu}$ — мера со значениями в пространстве Банаха $\vec{E}$ и с базой $\lambda \geqslant 0$, так что $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$, где $\vec{q}$ локально λ-интегрируема. Эта мера тривиальным образом абсолютно мажорируется мерой $\|\vec{q}\|\,\lambda \geqslant 0$. Согласно теореме 18, она должна иметь наименьшую абсолютную мажоранту. Она также допускает борелевское продолжение, определяемое формулой

$$\int f\, d\vec{\nu} = \int f\vec{q}\, d\lambda. \tag{IV, 5; 9₃}$$

Мы определили некоторое линейное отображение $\Gamma(X)$ в $\vec{E}$, продолжающее отображение, определенное мерой $\vec{\nu}$ на $\mathscr{C}(X)$, поскольку если функция f борелевская, а значит, λ-измерима, то и функция $f\vec{g}$ λ-измерима. Функция $|f|$ ограничена числом $M \geqslant 0$ и имеет компактный носитель K, а функция $\vec{q}$ локально λ-интегрируема, поэтому $\chi_K\vec{q}$ λ-интегрируема. Значит, $\|f\vec{g}\| \leqslant \leqslant M\chi_K\|\vec{q}\|$ имеет конечный верхний λ-интеграл, а, следовательно, $f\vec{q}$ λ-интегрируема. Остается доказать L-непрерывность этого отображения. Предположим, что функции f_n сходятся к f, оставаясь ограниченными по модулю числом M и сохраняя свои носители в компакте K. Функции $f_n\vec{q}$ сходятся к $f\vec{q}$, оставаясь мажорируемыми по норме λ-интегрируемой фиксированной функцией $\chi_K M\|\vec{g}\|$. Из теоремы 35 о сходимости Лебега следует, что тогда $\int f_n\vec{g}\,d\lambda$ сходится к $\int f\vec{q}\,d\lambda$. Однако надо еще проверить условие непрерывности 3°) (см. стр. 579). Итак, пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество с компактным замыканием. Функция $\|\vec{q}\|$ интегрируема на множестве $\mathcal{O}$. Поэтому существует такое число $M \geqslant 0$, что $\int\limits_{\mathcal{O}} (\|\vec{q}\| - \|\vec{q}\|_M)\,d\lambda \leqslant \varepsilon/2$, и существует такой компакт $K \subset \mathcal{O}$, что $\lambda(\mathcal{O} - K) \leqslant \varepsilon/2M$. Компакт K удовлетворяет относительно $\vec{v}$ условию 3°). В самом деле, если $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, равна 1 в некоторой окрестности компакта K и имеет носитель в $\mathcal{O}$, то

$$\|\vec{v}(\varphi) - \vec{v}(\mathcal{O})\| \leqslant \int\limits_{\mathcal{O}-K} \|\vec{q}\|\,d\lambda \leqslant \int\limits_{\mathcal{O}-K} \|\vec{q}\|_M\,d\lambda + \\ + \int\limits_{\mathcal{O}-K} (\|\vec{q}\| - \|\vec{q}\|_M)\,d\lambda \leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Замечание. На стр. 489, 583 мы привели пример не абсолютно мажорируемой и не имеющей борелевского продолжения меры. Вышеизложенное показывает, что она не является мерой с базой $\geqslant 0$. Можно также привести пример абсолютно мажорируемой меры (а, следовательно, имеющей наименьшую абсолютную мажоранту), но не имеющей базы $\geqslant 0$. Оба понятия не эквивалентны, одно из них сильнее, чем другое.

C) Мера вида $\vec{p}\mu$, где μ-почти всюду $\|\vec{p}\| \leqslant 1$, очевидно, абсолютно мажорируема мерой μ. Поэтому нам следует лишь доказать обратное утверждение. При доказательстве мы ограничимся случаем сепарабельного пространства $\vec{E}$. Сначала мы докажем лишь частичное обратное утверждение: если $\vec{v}$ имеет вид $\vec{p}\mu$ и если эта мера абсолютно мажорируема мерой μ, то $\|p\| \leqslant 1$ μ-почти всюду. Предположим, что множество $\{x \in X;\ \|p(x)\| > 1\}$ имеет μ-меру > 0. Так как оно является объединением множеств $A_\varepsilon = \{x \in X;\ \|p(x)\| \geqslant 1 + 2\varepsilon\}$ для $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, то существует такое $\varepsilon > 0$, при котором это множество A_ε имеет μ-меру > 0. Мы будем выбирать $\varepsilon < 1/2$ по причинам, которые выяснятся позже.

Пусть a — некоторая точка единичной сферы S пространства $\vec{E}$, и пусть $B(a, \varepsilon)$ — шар с центром в точке a радиуса ε. Этот шар — замкнутое выпуклое множество. Обозначим через $K(a, \varepsilon)$ объединение шаров, полученных из шара $B(a, \varepsilon)$ путем гомотетии с центром в нуле пространства и с вещественным коэффициентом подобия $\geqslant 1$. Непосредственно видно, что $K(a, \varepsilon)$ также является выпуклым замкнутым множеством. В самом деле, пусть $\alpha\vec{x}$ и $\beta\vec{y}$ — две точки этого множества, где $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$, $\vec{x}$ и $\vec{y}$ лежат в шаре $B(a, x)$. Тогда точку $t\alpha\vec{x} + (1-t)\beta\vec{y}$ можно записать в виде $\gamma(s\vec{x} + (1-s)\vec{y})$, где $\gamma = t\alpha + (1-t)\beta \geqslant 1$, $s = t\alpha/[t\alpha + (1-t)\beta]$, $1 - s = [(1-t)\beta]/[t\alpha + (1-t)\beta]$. Так как $s\vec{x} + (1-s)\vec{y} \in B(a, \varepsilon)$, то рассматриваемая точка лежит в $K(a, \varepsilon)$, а это означает, что множество $K(a, \varepsilon)$ выпукло.

Предположим теперь, что некоторая последовательность точек $k_n\vec{x}_n$ этого выпуклого множества сходится к пределу $\vec{y}$ из $\vec{E}$. Поскольку нормы векторов $\vec{x}_n$ не меньше $1-\varepsilon$, то числа k_n ограничены сверху. Однако они также ограничены снизу числом 1, поэтому из последовательности k_n можно извлечь подпоследовательность (для которой мы сохраним прежнее обозначение k_n), сходящуюся к некоторому пределу $k \geqslant 1$. Но тогда точки $\vec{x}_n$ будут сходиться к пределу $\vec{x} = \vec{y}/k$, принадлежащему замкнутому множеству $B(a, \varepsilon)$. Здесь $\vec{y} = k\vec{x}$, $k \geqslant 1$, $\vec{x} \in B(a, \varepsilon)$, а поэтому $\vec{y}$ принадлежит множеству $K(a, \varepsilon)$, которое тем самым оказывается замкнутым. В силу сепарабельности $\vec{E}$, найдется счетное множество точек a (пусть это будут $a_1, a_2, a_3, \ldots$), таких, что шары $B(a_n, \varepsilon)$ покрывают сферу S[1]). Выпуклые замкнутые множества $K(a_n, \varepsilon)$ покрывают множество всех точек с нормой $\geqslant 1$ из $\vec{E}$, а множества $(1+2\varepsilon)K(a_n, \varepsilon)$ покрывают множество всех точек из $\vec{E}$ с нормой $\geqslant 1+2\varepsilon$.

Множество A_ε является объединением μ-измеримых подмножеств $A_n = A_\varepsilon \cap \vec{p}^{-1}((1+2\varepsilon)K(a_n, \varepsilon))$. По крайней мере одно из них имеет μ-меру > 0. Пусть это будет, например, A_1. Пусть $K_1 \subset A_1$ есть некоторый компакт μ-меры > 0. Поскольку $\vec{p}(K_1) \subset (1+2\varepsilon)K(a_1, \varepsilon)$, то из неравенства выпуклости (следствие 4 теоремы 39) следует, что $\int\limits_{K_1} \vec{p}\, d\mu \in \mu(K_1)(1+2\varepsilon)K(a_1, \varepsilon)$, а, значит, $\left\| \int\limits_{K_1} \vec{p}\, d\mu \right\| \geqslant \mu(K_1)(1+2\varepsilon)(1-\varepsilon) > \mu(K_1)$, поскольку $\mu(K_1) \neq 0$ и $\varepsilon < 1/2$.

---

[1]) Всякое подмножество S метрического сепарабельного пространства E само сепарабельно. В самом деле, пусть последовательность точек b_n плотна в E. Выберем a_n в S так, чтобы $d(a_n, b_n) \leqslant d(b_n, s) + 1/n$. Тогда последовательность точек a_n будет плотной в S.

Однако это невозможно, так как мера $\vec{p}\mu$ предполагалась абсолютно мажорируемой мерой μ. Таким образом, для каждой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$ имеем $\left\| \int \varphi \vec{p}\, d\mu \right\| \leqslant \mu(\varphi)$. Условие 3_2°) L-непрерывности (см. стр. 579) означает, что $\left\| \int \chi_{K_1} \vec{p}\, d\mu \right\| \leqslant$ $\leqslant \mu(K_1)$ для каждого компакта K_1. Таким образом, если мера $\vec{p}\mu$ абсолютно мажорируема мерой μ, то $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ почти всюду.

D) Из предыдущего, в частности, вытекает, что если мера $\vec{p}\mu$ равна нулю, то, каково бы ни было вещественное число $k > 0$, мера $k\vec{p}\mu$ абсолютно мажорируется мерой μ, а, следовательно, величина $k\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду мажорируема числом 1, т. е. норма $\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду мажорируема числом $1/k$. Устремляя теперь k к бесконечности, можно убедиться в том, что норма $\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду равна нулю. Следовательно, если $\vec{p}_1\mu$ и $\vec{p}_2\mu$ представляют одну и ту же меру, то функции $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ μ-почти всюду равны. Это доказывает единственность, фигурирующую в утверждениях 1°) и 2°) теоремы. Таким образом, п. 1°) теоремы полностью доказан.

E) Предположим теперь, что $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$ имеет меру μ в качестве наименьшей абсолютной мажоранты. Тогда $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ μ-почти всюду. Однако мера $\vec{p}\mu$ всегда абсолютно мажорируема величиной $\|\vec{p}\|\mu \leqslant \mu$. Поэтому, если мера μ является наименьшей абсолютной мажорантой, то $\|\vec{p}\|\mu = \mu$, а, значит, норма $\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду равна 1. Обратно, предположим, что $\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду равна 1. Тогда мера $\vec{p}\mu$ абсолютно мажорируема мерой μ. Покажем, что мера μ является наименьшей абсолютной мажорантой.

В самом деле, пусть наименьшей абсолютной мажорантой является мера λ. Тогда $\lambda \leqslant \mu$. Предположим, что $\lambda < \mu$. Тогда найдутся такое число ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, и такое борелевское множество A с компактным замыканием, что $\mu(A) > (1+2\varepsilon)\lambda(A)$. (В самом деле, если для каждого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\mu(A) \leqslant (1+2\varepsilon)\lambda(A)$, то, согласно следствию 2 теоремы 50_2, $\mu \leqslant (1+2\varepsilon)\lambda$. Из последнего неравенства следует, что $\mu \leqslant \lambda$, что противоречит предположению.) Однако $\|\vec{p}\| = 1$ и единичная сфера из $\vec{E}$, которая по предположению сепарабельна, покрыта счетным множеством (замкнутых и выпуклых) шаров

$B(a_n, \varepsilon)$. Поэтому хотя бы для одного из множеств $A_{\dot n} = A \cap \vec{p}^{-1}(B(a_{\dot n}, \varepsilon))$, например для $\dot n = 1$, $\mu(A_{\dot n}) > (1+2\varepsilon)\lambda(A_{\dot n})$. Теперь можно найти такой компакт $K_1 \subset A_1$, что $\mu(K_1) > (1+2\varepsilon)\lambda(K_1)$. Так как на K_1 функция $\vec{p}$ принимает значения в выпуклом замкнутом множестве $B(a_1, \varepsilon)$, то имеет место соотношение выпуклости $\int_{K_1} \vec{p}\, d\mu \in \mu(K_1) B(a_1, \varepsilon)$, или

$$\left\| \int_{K_1} \vec{p}\, d\mu \right\| \geqslant (1-\varepsilon)\mu(K_1) > (1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)\lambda(K_1) \geqslant \lambda(K_1),$$

т. е. $\left\| \int_{K_1} \vec{p}\, d\mu \right\| > \lambda(K_1)$, что противоречит, как мы уже видели, предположению, согласно которому $\vec{p}\mu$ абсолютно мажорируема мерой λ. Следовательно, $\vec{p}\mu$ имеет меру μ в качестве наименьшей абсолютной мажоранты тогда и только тогда, когда $\|\vec{p}\|$ μ-почти всюду равна 1.

Пусть теперь $\vec{p}\mu$ (где $\vec{p}$ локально μ-интегрируема) есть некоторая мера. Ее можно записать в виде

$$\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}(\|\vec{p}\|\mu), \quad \text{где} \quad \left\| \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} \right\| = 1\ ^{1)}.$$

Ее наименьшей абсолютной мажорантой является мера $\|\vec{p}\|\mu$.

F) Пусть $\vec{\nu}$ — мера с базой $\geqslant 0$, абсолютно мажорируемая мерой μ. Если мы знаем, что $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, то из C) следует, что $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ μ-почти всюду. Покажем, что $\vec{\nu}$ является мерой с базой μ. Она имеет базу $\geqslant 0$, а, следовательно, $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$. Мы только что видели, что ее наименьшей абсолютной мажорантой является мера $\|\vec{q}\|\lambda$. Поскольку она абсолютно мажорируема мерой μ, то $\|\vec{q}\|\lambda \leqslant \mu$. Согласно A), мы можем теперь утверждать, что $\|\vec{q}\|\lambda = g\mu$, $0 \leqslant g \leqslant 1$. Отсюда

$$\vec{\nu} = \vec{q}\lambda = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}(\|\vec{q}\|\lambda) = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} g\mu = \vec{p}\mu,$$

[1] $\vec{p}/\|\vec{p}\|$ не определена в точках, где $\vec{p} = \vec{0}$. Однако такие точки образуют множество точек, $\|\vec{p}\|\mu$-мера которых равна нулю. Мы можем значения $\vec{p}/\|\vec{p}\|$ на этом множестве выбирать произвольно, но норма при этом должна быть равной 1, для того, чтобы эта норма была всюду равной 1.

что полностью доказывает наше утверждение. Точно так же, если мера $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$ и имеет меру μ в качестве наименьшей абсолютной мажоранты, то для нее мера μ, в частности, является абсолютной мажорантой, а, значит, она имеет вид $\vec{p}\mu$ и тогда, согласно E), получаем, что $\|p\| \doteq 1$ μ-почти всюду. Мы нашли следующее необходимое и достаточное условие того, чтобы мера $\vec{\nu}$ с базой $\geqslant 0$ была абсолютно мажорируема мерой μ (соответственно того, чтобы мера $\vec{\nu}$ имела μ в качестве наименьшей абсолютной мажоранты): $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, где $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ (соответственно $= 1$) μ-почти всюду.

Неравенство (IV, 5; 9_2), справедливое по предположению, когда функция f взята из $\mathscr{C}(X)$ (и уже использованное в два приема при доказательстве в случае, когда f являлась характеристической функцией некоторого компакта), теперь очевидным образом верно для любой функции f из $\Gamma(X)$, поскольку $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, где $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ μ-почти всюду, и имеет место равенство (IV, 5; 9_3).

G) Если мера $\vec{\nu}$ имеет базой меру μ, то каждое борелевское множество с компактным замыканием нулевой μ-меры также имеет нулевую $\vec{\nu}$-меру. Докажем обратное, предполагая, что $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$. Положим $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$, где $\|\vec{q}\| \equiv 1$, что возможно, если в качестве λ взята наименьшая абсолютная мажоранта.

Пусть A — борелевское множество с компактным замыканием и нулевой μ-мерой. Тогда это множество, как и все его борелевские подмножества, имеет нулевую $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$-меру, а, следовательно, мера $\chi_A \vec{q}\lambda$, равная нулю на всех борелевских множествах с компактным замыканием, является нулевой мерой. Отсюда вытекает, что функция $\chi_A \vec{q}$, а, значит, и ее норма χ_A λ-почти всюду равны нулю. Иначе говоря, множество A имеет λ-меру, равную нулю. Согласно A), мера λ имеет базу μ, а, значит, такую же базу имеет $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$.

Нами полностью теперь доказаны п. 1°) и 2°) теоремы.

H) Множество мер на X со значениями в $\vec{E}$ и базой $\geqslant 0$ является некоторым векторным пространством. В самом деле, если меры $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ имеют базы λ_1 и λ_2, $\vec{\nu}_1 = \vec{q}_1\lambda_1$, $\vec{\nu}_2 = \vec{q}_2\lambda_2$, то меры λ_1 и λ_2 обе мажорируемы мерой $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, а, следовательно, $\lambda_1 = g_1\lambda$, $\lambda_2 = g_2\lambda$, где функции g_1 и g_2 заключены между 0 и 1. Отсюда следует, что мера $\vec{\nu}_1 \dotplus \vec{\nu}_2 = (\vec{q}_1 g_1 \dotplus \vec{q}_2 g_2)\lambda$ имеет базу

$\geqslant 0$. Точно так же, если мера $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$ и k — скаляр, то мера $k\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$. Всякая вещественная мера, являясь разностью двух мер $\geqslant 0$, будет мерой с базой $\geqslant 0$ (точнее, мера ν имеет базой меру $|\nu|$, являющуюся ее наименьшей абсолютной мажорантой). Каждая комплексная мера $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ имеет базу $\geqslant 0$. Если теперь пространство $\vec{E}$ конечномерно и если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис в $\vec{E}$, то $\vec{\nu} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \nu_i$, где ν_i — скалярные меры с базой $\geqslant 0$. Но тогда меры $\vec{e}_i\nu_i$, а вместе с ними и мера $\vec{\nu}$ будут иметь базы $\geqslant 0$. Итак, доказан п. 3°) теоремы.

I) Утверждение 4°) теоремы теперь тривиально. Пусть p — вещественная локально μ-интегрируемая функция. Известно, что $|p\mu|$ является наименьшей абсолютной мажорантой функции $p\mu$ (см. сказанное после теоремы 18). Кроме того, из окончания п. E) следует, что $|p|\mu$ является этой наименьшей абсолютной мажорантой. Поэтому $|p\mu| = |p|\mu$. Но тогда

$$(p\mu)^+ = \frac{|p\mu| + p\mu}{2} = \frac{|p| + p}{2}\mu = p^+\mu$$

и аналогично $(p\mu)^- = p^-\mu$.

Если теперь функции p и q вещественны и локально μ-интегрируемы, то

$$\sup(p\mu, q\mu) = p\mu + ((q-p)\mu)^+ = (p + (q-p)^+)\mu = (\sup(p, q))\mu$$

и аналогично $\inf(p\mu, q\mu) = (\inf(p, q))\mu$. В частности, неравенство $p\mu \leqslant q\mu$ означает, что точной верхней гранью мер $p\mu$ и $q\mu$ является мера $q\mu$, а, следовательно, $\sup(p, q) = q$ μ-почти всюду или $p \leqslant q$ μ-почти всюду ($p\mu \geqslant 0$ эквивалентно: $p \geqslant 0$ μ-почти всюду).

Наконец, пусть значения $\vec{p}$ лежат в $\vec{E}$, а значения q вещественны и $\geqslant 0$, и пусть мера $\vec{p}\mu$ абсолютно мажорируема мерой $q\mu$. Тогда, так как, согласно E), ее наименьшей абсолютной мажорантой является $\|\vec{p}\|\mu$, то $\|\vec{p}\|\mu \leqslant q\mu$, а, следовательно, $\|\vec{p}\| \leqslant q$ μ-почти всюду. Однако если мера $\vec{\nu}$ со значениями в $\vec{E}$ и базой $\geqslant 0$ абсолютно мажорируема мерой $q\mu$, то, согласно F), мера $\vec{\nu}$ имеет базой меру $q\mu$, а, следовательно, и меру μ. Это означает, что $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$ и тогда $\|\vec{p}\| \leqslant q$ μ-почти всюду. Этим заканчивается доказательство утверждения 4°) и, значит, всей теоремы.

Замечание 1. Во всех условиях, относящихся к мере $\vec{\nu}$ со значениями в $\vec{E}$, предполагалось, что $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$ (например, если мера $\vec{\nu}$ *с базой* $\geqslant 0$ абсолютно мажорируема мерой μ, то $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$, $\|\vec{p}\| \leqslant 1$ μ-почти всюду). Контрпримеры показывают, что это условие неизбежно, за исключением, конечно, случая, когда пространство $\vec{E}$ конечномерно, так как тогда любая мера со значениями в $\vec{E}$ имеет базу $\geqslant 0$. Общая теорема Данфорда — Петтиса дает широкий класс пространств $\vec{E}$, для которых нет необходимости предполагать $\vec{\nu}$ имеющей базу $\geqslant 0$.

Замечание 2. Физики часто интерпретируют меру Дирака δ на прямой так, чтобы ее можно было записать в виде $\delta(x)\,dx$, т. е. в виде произведения dx на некоторую функцию. Мы теперь видим, что такая запись невозможна. В самом деле, начало координат является множеством меры нуль для dx, а не для δ. Поэтому δ не будет мерой с базой dx.

Следствие 1. *Пусть μ и ν — две меры $\geqslant 0$ на X. Тогда существуют наибольшая мера ν_1 с базой μ, мажорируемая мерой ν и определяемая по формуле*

$$\nu_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf(\nu, n\mu)), \qquad (IV, 5; 9_4)$$

и μ-сингулярная[1]) *наибольшая мера ν_2, мажорируемая мерой ν. Мера ν может быть записана в виде $\nu = \nu_1 + \nu_2$, и это единственное представление ν в виде суммы двух мер $\geqslant 0$, таких, что первая мера имеет базой меру μ, а вторая μ-сингулярна. Кроме того, ν_1 и ν_2 — дизъюнктные меры.*

Доказательство. Прежде всего, $\inf(\nu, n\mu)$ мажорируем мерой $n\mu$ и поэтому, согласно п. 1°) теоремы, имеет вид $p_n\mu$, $p_n \leqslant n$ μ-почти всюду. При возрастании n так определенные меры возрастают; поэтому $p_n\mu \leqslant p_{n+1}\mu$ или $p_n \leqslant p_{n+1}$ μ-почти всюду. Последовательность функций p_n с точностью до множеств μ-меры нуль оказывается возрастающей. Пусть p — ее предел, определенный μ-почти всюду. Так как p_n μ-измеримы, то функция p также μ-измерима. С другой стороны, для каждого борелевского множества A с компактным замыканием $\int_A p_n\,d\mu \leqslant \leqslant \nu(A)$ и, следовательно, по теореме 36 Фату, $\int_A^* p\,d\mu \leqslant \nu(A)$, а, значит, функция p локально μ-интегрируема и определяет некоторую меру $p\mu = \nu_1 \geqslant 0$ с базой μ, мажорируемую мерой ν.

---

[1]) См. стр. 589. Это означает, что ν_2 сосредоточена на некотором множестве μ-меры нуль или что ν_2 и μ дизъюнктнь

Для каждой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X)$ имеет место соотношение (Фату или Лебега) $\int \varphi p\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi p_n\, d\mu$, а, значит, $= \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi p_n\, d\mu$. В силу формулы (IV, 2; 41_6), отсюда вытекает, что мера ν_1 является точной верхней гранью для мер $p_n\mu$, а, значит, удовлетворяет формуле (IV, 5; 9_4). Если произвольная мера $\lambda \geqslant 0$ мажорируема мерой ν и имеет базой меру μ, то она имеет вид $q\mu$. Если $q_n = \inf(q, n)$, то из п. 4°) теоремы следует, что $\inf(\lambda, n\mu) = \inf(q\mu, n\mu) = q_n\mu$. Однако из неравенства $\lambda \leqslant \leqslant \nu$ следует, что $q_n\mu = \inf(\lambda, n\mu) \leqslant \inf(\nu, n\mu) \leqslant \nu_1$. Кроме того, из неравенства $q_n\mu \leqslant \nu_1$, или $\int \varphi q_n\, d\mu \leqslant \nu_1(\varphi)$, имеющего место при любой функции $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, согласно теоремам Фату и Лебега, получаем неравенство $\int \varphi q\, d\mu \leqslant \nu_1(\varphi)$, или $\lambda = q\mu \leqslant \leqslant \nu_1$. Значит, ν_1 является наибольшей мерой $\geqslant 0$, мажорируемой мерой ν и имеющей базой меру μ.

Мера $\nu_2 = \nu - \nu_1$ теперь $\geqslant 0$ и мажорируема мерой ν. Эта мера μ-сингулярная. В самом деле, если положить $\theta = = \inf(\nu_2, \mu) \geqslant 0$, то мы увидим, что $\nu_1 + \theta$ мажорируема мерой $\nu_1 + \nu_2 = \nu$ и имеет базой меру μ, поскольку $\theta \leqslant \mu$. Таким образом, $\nu_1 + \theta = \nu_1$ и $\theta = 0$, а, значит, ν_2 и μ дизъюнктны. Согласно следствию теоремы 50_5, существует некоторое множество нулевой ν_2-меры, на котором сосредоточена мера μ. Однако на этом же множестве также сосредоточена мера $p\mu$, а, значит, меры ν_2 и $p\mu = \nu_1$ также дизъюнктны (более общо, это рассуждение показывает, что если две неотрицательные меры λ_1 и λ_2 дизъюнктны, то две меры с базами соответственно λ_1 и λ_2 также дизъюнктны). Пусть теперь λ — некоторая мера $\geqslant 0$, мажорируемая мерой ν и дизъюнктная с мерой μ. Как мы только что видели, она является дизъюнктной с мерой ν_1. Из $\inf(\lambda, \nu_1) = 0$ вытекает, что $\sup(\lambda, \nu_1) = \lambda + \nu_1$. Однако меры λ и ν_1 мажорируемы мерой ν, а, значит, это также можно сказать о мере $\sup(\lambda, \nu_1)$, или, что равносильно, мере $\lambda + \nu_1$. Поэтому $\lambda \leqslant \nu - - \nu_1 = \nu_2$ и, значит, ν_2 является наибольшей мерой $\geqslant 0$, мажорируемой мерой ν и дизъюнктной с мерой μ.

Теперь легко видеть, что $\nu = \nu_1 + \nu_2$ является единственным представлением меры ν в виде суммы двух мер $\geqslant 0$ соответственно с базой μ и μ-сингулярной. В самом деле, если $\nu = \theta_1 + + \theta_2$ является таким разложением, то, согласно максимальному свойству мер ν_1 и ν_2, имеем $\theta_2 \leqslant \nu_2$, а, следовательно, $\theta_1 \geqslant \nu_1$. Так как одновременно $\theta_1 \leqslant \nu_1$, то $\theta_1 = \nu_1$ и $\theta_2 = \nu_2$.

Пусть теперь $\vec{\nu}$ — векторная мера с базой $\geqslant 0$. Мы будем говорить, что $\vec{\nu}$ сосредоточена на части A множества X, если $\complement A$

имеет нулевую меру для наименьшей абсолютной мажоранты $|\vec{\nu}|$. Тогда $\vec{\nu}$ будет называться μ-сингулярной или дизъюнктной с мерой μ, если она сосредоточена на некотором множестве нулевой μ-меры.

Следствие 2. *Пусть μ — некоторая мера $\geqslant 0$ на X, а $\vec{\nu}$ — векторная мера с базой $\geqslant 0$. Эта мера допускает единственное разложение $\vec{\nu} = \vec{\nu}_1 + \vec{\nu}_2$, где $\vec{\nu}_1$ имеет базой меру μ, а $\vec{\nu}_2$ μ-сингулярна. Кроме того, разложение, соответствующее наименьшей абсолютной мажоранте $|\vec{\nu}|$, имеет вид $|\vec{\nu}| = |\vec{\nu}_1| + |\vec{\nu}_2|$.*

Доказательство. Так как мера $\vec{\nu}$ имеет базу $\geqslant 0$, то можно записать $\vec{\nu} = \vec{q}\lambda$. Пусть $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ — такое разложение λ относительно μ, что λ_1 имеет базой меру μ, а λ_2 μ-сингулярна (следствие 1). Поскольку λ_1 и λ_2 не превосходят λ и функция $\vec{q}$ локально λ-интегрируема, то она заведомо локально λ_1-интегрируема и локально λ_2-интегрируема, при этом $\vec{q}\lambda = \vec{q}\lambda_1 + \vec{q}\lambda_2$. Однако мера λ_1, а, значит, и мера $\vec{q}\lambda_1$ имеют базой меру μ. Мера $\vec{\lambda}_2$ дизъюнктна с мерой μ, а, значит, такой же будет и мера $\vec{q}\lambda_2$, как это мы видели при доказательстве предыдущего следствия. Тем самым мы получили разложение требуемого вида. Поскольку $|\vec{\nu}| = \|\vec{q}\|\lambda$, $|\vec{\nu}_1| = \|\vec{q}\|\lambda_1$ и $|\vec{\nu}_2| = \|\vec{q}\|\lambda_2$, то очевидным образом получаем, что $|\vec{\nu}| = |\vec{\nu}_1| + |\vec{\nu}_2|$. Что же касается единственности, то она сводится к следующему: если $\vec{\nu}_1 + \vec{\nu}_2 = 0$, где $\vec{\nu}_1$ имеет базой меру μ, а $\vec{\nu}_2$ μ-сингулярна, то $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ суть нули. Но это действительно так. Если A является множеством нулевой μ-меры, на котором сосредоточена мера ν_2, то, поскольку $|\vec{\nu}_1|$ имеет базой меру μ, множество A имеет нулевую $|\vec{\nu}_1|$-меру. Так как мера $\vec{\nu}_2$ сосредоточена на множестве A, то множество $\complement A$ также имеет нулевую $|\vec{\nu}_1| = |\vec{\nu}_2|$-меру. Значит, X является множеством нулевой $|\vec{\nu}_1|$-меры, а, следовательно, $\vec{\nu}_1 = \vec{0}$ и $\vec{\nu}_2 = \vec{0}$.

Следствие 3. *Пусть $\vec{\nu}$ — мера с базой $\geqslant 0$ и μ — мера $\geqslant 0$. Для того чтобы мера $\vec{\nu}$ имела базой меру μ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого компакта K и любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta(K, \varepsilon) = \delta > 0$, что для любого борелевского множества $A \subset K$, такого, что $\mu(A) \leqslant \delta$, имело место неравенство $\|\vec{\nu}(A)\| \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала мера $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$. Поскольку функция $\vec{p}$ интегрируема на K, то существует такое число $M \geqslant 0$, что $\int\limits_K (\|\vec{p}\| - \|\vec{p}\|_M)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, где $\|\vec{p}\|_M = \inf(\|\vec{p}\|, M)$ (теорема 35 Лебега, примененная к разности $\|\vec{p}\| - \|\vec{p}\|_M$ при M, стремящемся к $+\infty$). Теперь достаточно положить $\delta = \varepsilon/2M$. В самом деле, если $\mu(A) \leqslant \delta$, то

$$\|\vec{\nu}(A)\| = \left\|\int\limits_A \vec{p}\, d\mu\right\| \leqslant \int\limits_A \|\vec{p}\|\, d\mu =$$
$$= \int\limits_A \|\vec{p}\|_M\, d\mu + \int\limits_A (\|\vec{p}\| - \|\vec{p}\|_M)\, d\mu \leqslant M\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Обратно, предположим, что имеет место указанное свойство. Тогда каждое борелевское множество с компактным замыканием нулевой μ-меры имеет также нулевую $\vec{\nu}$-меру и, согласно теореме Лебега — Никодима, $\vec{\nu}$ имеет базой меру μ.

Следствие 4. *Пусть заданы мера $\vec{\nu}$ с базой $\geqslant 0$ и мера $\mu \geqslant 0$. Для того чтобы мера $\vec{\nu}$ имела базой меру μ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества $\mathcal{O}$ с компактным замыканием и любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое число $\eta(\mathcal{O}, \varepsilon) = \eta > 0$, что для функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ с носителем в $\mathcal{O}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, из $\mu(\varphi) \leqslant \eta$ вытекает неравенство $\|\vec{\nu}(\varphi)\| \leqslant \varepsilon$*[1].

Смысл следствия заключается в том, что оно дает возможность выяснить, имеет ли мера $\vec{\nu}$ базой меру μ, не используя продолжение Лебега. Обе меры рассматриваются только как функции, определенные на $\mathscr{C}_+(X)$.

Доказательство. Предположим, что $\vec{\nu} = \vec{p}\mu$. Пусть δ и M — числа, определенные так же, как и в предыдущем следствии, относительно множества $\bar{\mathcal{O}}$ и числа ε: $\int\limits_{\bar{\mathcal{O}}} (\|\vec{p}\| - \|\vec{p}\|_M)\, d\mu \leqslant \varepsilon/2$ и $\delta = \varepsilon/2M$. Если теперь функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеет носитель в $\mathcal{O}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, и если $\mu(\varphi) \leqslant \delta$, то

$$\|\vec{\nu}(\varphi)\| \leqslant \int \varphi \|\vec{p}\|\, d\mu =$$
$$= \int \|\vec{p}\|_M \varphi\, d\mu + \int (\|\vec{p}\| - \|\vec{p}\|_M) \varphi\, d\mu \leqslant M\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[1]) Внимание! Это неравенство не имеет места, если не предполагать, что $\varphi \leqslant 1$.

Число $\eta=\delta$ обладает требуемыми свойствами относительно $\mathcal{O}$ и ε.

Обратно, предположим, что мера $\vec{\nu}$ с базой $\geqslant 0$ обладает свойством, сформулированным в условии следствия. Пусть сначала $\nu\geqslant 0$. Выберем такое множество A с компактным замыканием, что $\mu(A)=0$, и пусть $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество с компактным замыканием, содержащее A. Каждому $\varepsilon>0$, согласно предположению, соответствует некоторое число $\eta=\eta(\mathcal{O},\varepsilon)$, обладающее указанными свойствами. Выберем такое открытое множество $\mathcal{A}$, что $A\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{O}$ и $\mu(\mathcal{A})\leqslant\eta$. Для каждой функции $\varphi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, с носителем в $\mathcal{A}$ имеют место неравенства $\mu(\varphi)\leqslant\mu(\mathcal{A})\leqslant\eta$, а, значит, $\nu(\varphi)\leqslant\varepsilon$. Переходя к точной верхней грани по всем φ, получаем $\nu(\mathcal{A})\leqslant\varepsilon$ и, следовательно, $\nu^*(A)\leqslant\varepsilon$. Так как ε произвольно, отсюда следует, что $\nu^*(A)=0$. Значит, каждое борелевское множество с компактным замыканием нулевой μ-меры имеет также нулевую ν-меру. Теорема Лебега — Никодима говорит, что в этом случае мера ν имеет базой меру μ.

Пусть теперь мера ν вещественна. Пусть $\eta=\eta(\mathcal{O},\varepsilon)$ — число, соответствующее, согласно предположению, множеству $\mathcal{O}$ и числу ε. Если функция $\varphi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, имеет носитель в $\mathcal{O}$ и $\mu(\varphi)\leqslant\eta$, то для каждой функции $\psi\in\mathscr{C}(X)$, $0\leqslant\psi\leqslant\varphi$, имеет место неравенство $\mu(\psi)\leqslant\eta$, а, значит $|\nu(\psi)|\leqslant\varepsilon$. Переходя к точной верхней грани по всем ψ (формула (IV, 2; 41)), получим $\nu^+(\varphi)\leqslant\varepsilon$. Точно так же проверяется справедливость неравенства $\nu^-(\varphi)\leqslant\varepsilon$. Таким образом ν^+ и ν^- обладают свойствами, указанными в условии следствия, и $\geqslant 0$. Значит, они, а вместе с ними и мера ν, имеют базой меру μ.

Пусть теперь $\vec{\nu}$ — мера со значениями в конечномерном пространстве $\vec{E}$. Пусть $(\vec{e}_i)$, $i=1, 2, \ldots, N$, — некоторый базис $\vec{E}$ над полем $\mathbb{R}$. Тогда $\vec{\nu}=\sum\limits_{i=1}^{N}\nu_i\vec{e}_i$.

Отображение «i-я координата» является $\mathbb{R}$-линейным, непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\mathbb{R}$. Значит, существует такое ε', что из $\|\nu(\varphi)\|\leqslant\varepsilon'$ следует $|\nu_i(\varphi)|\leqslant\varepsilon$. Если теперь $\eta=\eta(\mathcal{O},\varepsilon')$ — число, соответствующее по лемме $\vec{\nu}$, $\mathcal{O}$ и ε', то из неравенства $\mu(\varphi)\leqslant\eta$ будет следовать неравенство $\|\vec{\nu}(\varphi)\|\leqslant\varepsilon'$, а, значит, $|\nu_i(\varphi)|\leqslant\varepsilon$. Поэтому каждая мера ν_i имеет базой меру μ, и, следовательно, такую же базу имеет мера $\vec{\nu}$.

Мы здесь не приводим доказательства для случая произвольного банахового пространства $\overleftarrow{E}$.

20 Зак. 1339

Применение к продолжению меры с векторными значениями

До настоящего времени мы определяли интегралы $\int f\,d\mu$, где f не является функцией из $\mathscr{C}(X)$ только тогда, когда μ—вещественная мера $\geqslant 0$ или когда f — борелевская ограниченная функция с компактным носителем (стр. 578). Теперь можно дать определение для более общих случаев. Пусть $\vec{\mu}$ — некоторая мера на X со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Предположим, что она имеет базу $\geqslant 0$, т. е. что ее можно представить в виде $\vec{p}\mu_0$, где μ_0 — вещественная мера $\geqslant 0$ и $\vec{p}$ — локально μ_0-интегрируемая функция со значениями в $\vec{E}$. Попытаемся дать следующее определение.

Скалярная функция f, определенная на X, $\vec{\mu}$-интегрируема тогда и только тогда, когда μ_0-интегрируема функция $\vec{p}f$, и тогда, *по определению,*

$$\int f\,d\vec{\mu} = \int (\vec{p}f)\,d\mu_0. \qquad \text{(IV, 5; 10)}$$

Точно так же, если μ является скалярной мерой, то она может быть записана хотя бы одним способом в виде $p\mu_0$, где μ_0— мера $\geqslant 0$, p — определенная на X вещественнозначная локально μ_0-интегрируемая функция. Теперь можно сказать, что *функция $\vec{f}$, определенная на X со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, μ-интегрируема тогда и только тогда, когда μ_0-интегрируема функция $p\vec{f}$, и положить*

$$\int \vec{f}\,d\mu = \int (p\vec{f})\,d\mu_0. \qquad \text{(IV, 5; 11)}$$

Точно так же можно определить операцию, обобщающую две предыдущие. Пусть $\vec{\mu}$ — некоторая мера на X со значениями в $\vec{E}$, выражаемая в виде $\vec{p}\mu_0$, где μ_0 — мера $\geqslant 0$ и $\vec{p}$ — локально μ_0-интегрируемая функция, определенная на X, со значениями в $\vec{E}$. Пусть $\vec{f}$ — некоторая функция, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$, и пусть B — билинейное непрерывное отображение $\vec{E}\times F$ в банахово пространство $\vec{G}$. Посмотрим, какой смысл следует придать выражению $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$.

Если $\vec{f}$ есть $\vec{\mu}$-этажная функция, т. е. функция, представимая в виде $\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i \varphi_{X_i}$, где $\vec{f}_i$ — некоторые постоянные, а φ_{X_i} — характеристические функции μ-измеримых множеств X_i конечной $\vec{\mu}$-меры (т. е. таких, что $\vec{\mu}(X_i)=\int \varphi_{X_i}\, d\vec{\mu}$ имеет смысл, согласно (IV, 5; 10)), то можно будет положить

$$\int B(d\vec{\mu}, \vec{f}) = \sum_i B(\vec{\mu}(X_i), \vec{f}_i). \qquad \text{(IV, 5; 12)}$$

Теперь для произвольной функции $\vec{f}$ можно утверждать, что $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$ *имеет смысл тогда и только тогда, когда функция* $B(\vec{p}, \vec{f}) : x \to B(\vec{p}(x), \vec{f}(x))$ μ_0-*интегрируема, и положить*

$$\int B(d\vec{\mu}, \vec{f}) = \int B(\vec{p}, \vec{f})\, d\mu_0. \qquad \text{(IV, 5; 13)}$$

Эти определения оправданы в силу следующих двух соображений. Во-первых, если мера μ сама $\geqslant 0$, то из теоремы 51 следует, что новое определение (IV, 5; 11) совпадает со старым; во-вторых, имеет место

Теорема 54_2. *Если меру $\vec{\mu}$ можно представить в виде $\vec{p}_1\mu_1$ и в виде $\vec{p}_2\mu_2$, где обе меры $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$ и где $\vec{p}_1$ (соответственно $\vec{p}_2$) локально μ_1-интегрируема (соответственно μ_2-интегрируема); то оба интеграла вида $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$, определенные по формуле* (IV, 5; 13), *совпадают. Другими словами,* $\int B(\vec{p}_2, \vec{f})\, d\mu_1$ *имеет смысл тогда и только тогда, когда имеет смысл* $\int B(\vec{p}_2, \vec{f})\, d\mu_2$, *и значения этих интегралов совпадают.*

В самом деле, обозначим через θ меру-сумму $\mu_1+\mu_2$. Тогда $\mu_1 \leqslant \theta$ и, согласно теореме 53, найдется такая вещественная функция $g_1 \geqslant 0$, что мера μ_1 будет равна $g_1\theta$. Теперь, согласно следствию теоремы 51, мера $\vec{p}_1\mu_1 = \vec{p}_1(g_1\theta)$ равна мере $(\vec{p}_1 g_1)\theta$.

Затем, согласно (IV, 5; 13), интеграл $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$ имеет смысл относительно представления $\vec{\mu}$ в виде $\vec{p}_1\mu_1$ тогда и только тогда, когда имеет смысл $\int B(\vec{p}_1, \vec{f})\, d\mu_1$, а, согласно теореме 51, последнее выражение имеет смысл тогда и только тогда, когда имеет смысл $\int (B(\vec{p}_1, \vec{f})\, g_1)\, d\theta = \int B(\vec{p}_1 g_1, \vec{f})\, d\theta$ и выполняется равенство

$$\int B(d\vec{\mu}, \vec{f}) = \int B(\vec{p}_1 g_1, \vec{f})\, d\theta. \qquad \text{(IV, 5; 14)}$$

Если теперь левую часть определить исходя из представления $\vec{\mu}$ в виде $\vec{p}_2\mu_2$, $\mu_2 = g_2\theta$, то мы получим:

$$\int B(d\vec{\mu}, \vec{f}) = \int B(\vec{p}_2 g_2, \vec{f})\, d\theta. \qquad \text{(IV, 5; 15)}$$

Однако, поскольку $(\vec{p}_1 g_1)\theta$ и $(\vec{p}_2 g_2)\theta$ представляют одну и ту же меру $\vec{\mu}$, то из теоремы 52 вытекает, что $\vec{p}_1 g_1$ и $\vec{p}_2 g_2$ равны θ-почти всюду, так что два значения, полученные для $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$, существуют одновременно и одинаковы.

Таким образом мы можем продолжать векторную меру $\vec{\mu}$ каждый раз, когда она имеет базу $\geqslant 0$.

Следствие. *Пусть $\vec{E}$ — векторное конечномерное пространство, $\vec{\mu}$ — некоторая мера на X со значениями в $\vec{E}$ конечной нормы и $\vec{f}$ — непрерывная и ограниченная функция, определенная на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда для билинейного непрерывного отображения B из $\vec{E} \times \vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$ интеграл $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$ имеет смысл.*

Доказательство. Согласно теореме 54, $\vec{\mu} = \vec{q}\mu_0$, где $\mu_0 = |\vec{\mu}|$ имеет конечную норму и $\|\vec{q}\| = 1$. Тогда отображение $B(\vec{q}, \vec{f})$ μ_0-измеримо (следствие 3 теоремы 23_2) и ограничено, а, значит, μ_0-интегрируемо, ибо μ_0 имеет конечную норму (следствие 2 теоремы 39).

Применение к интегрируемости функции по нескольким мерам

Теорема 54_3. *Пусть μ и ν — две меры $\geqslant 0$ на X. Если функция $\vec{f}$, определенная на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ одновременно интегрируема по μ и ν, то она интегрируема по $\mu + \nu$, и при этом*

$$\int \vec{f}\, d(\mu + \nu) = \int \vec{f}\, d\mu + \int \vec{f}\, d\nu. \qquad \text{(IV, 5; 16)}$$

В самом деле, по теореме 53, $\mu = p(\mu + \nu)$ и $\nu = q(\mu + \nu)$, где p и q $(\mu + \nu)$-измеримы и мажорируются числом 1. Кроме того, $\mu + \nu = (p + q)(\mu + \nu)$ и поэтому, согласно теореме 52, $p + q$ $(\mu + \nu)$-почти всюду равна 1. Поскольку функция $\vec{f}$ μ-интегрируема, то, в силу теоремы 51, функция $\vec{f}p$ $(\mu + \nu)$-интегрируема и, кроме того,

$$\int \vec{f}\, d\mu = \int \vec{f} p\, d(\mu + \nu). \qquad \text{(IV, 5; 17)}$$

Точно так же проверяется, что функция $\vec{f}q$ $(\mu+\nu)$-интегрируема и

$$\int \vec{f}\, d\nu = \int \vec{f} q\, d(\mu + \nu). \qquad \text{(IV, 5; 18)}$$

Следовательно, $(\mu+\nu)$-интегрируема функция $\vec{f}(p+q)$, а поскольку $p+q=1$ $(\mu+\nu)$-почти всюду, то $(\mu+\nu)$-интегрируемой будет сама функция $\vec{f}$; складывая равенства (IV, 5; 17) и (IV, 5; 18), мы получим (IV, 5; 16).

Пример. Пусть $\vec{E}$ — евклидово конечномерное пространство над $\mathbb{R}$ и $(\vec{X}\,|\,\vec{Y})$ — скалярное произведение в $\vec{E}$, являющееся билинейной непрерывной формой. Если $\vec{\mu}$ — некоторая мера на X со значениями в $\vec{E}$ и $\vec{f}$ — функция на X со значениями в $\vec{E}$, то можно придать определенный смысл выражению $\int (d\vec{\mu}\,|\,\vec{f})$ и считать его равным вещественному числу. В самом деле, по отношению к ортонормированному базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i \quad \text{и} \quad \vec{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i \vec{e}_i.$$

Если при этом

$$\sum_{i=1}^{n} \int f_i\, d\mu_i$$

имеет смысл, то можно говорить, что интеграл $\int (d\vec{\mu}\,|\,\vec{f})$ также имеет смысл и равен той же величине. Можно также утверждать, что $\int (d\vec{\mu}\,|\,\vec{f})$ имеет смысл, если $\vec{\mu}$ имеет конечную норму, а борелевская функция $\vec{f}$ ограничена.

Замечание. Мы предполагали, что B является билинейным отображением, определенным на $\vec{E} \times \vec{F}$, и обозначали его через $B(\vec{X}, \vec{Y})$, $\vec{X} \in \vec{E}$, $\vec{Y} \in \vec{F}$. Соответствующим образом обозначается интеграл $\int B(d\vec{\mu}, \vec{f})$ для $\vec{\mu}$ со значениями в $\vec{E}$ и $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$. Если B обозначается другими символами, то аналогично надо обозначать и интеграл. Мы учли это в случае скалярного произведения, которое мы обозначили через $(\vec{X}\,|\,\vec{Y})$, и соответствующим образом обозначили интеграл $\int (d\vec{\mu} \mid \vec{f})$. Можно было бы то же самое скалярное произведение обозначить через $(\vec{Y}|\vec{X})$, и тогда тот же интеграл записать в виде $\int (\vec{f} \mid d\vec{\mu})$. Предположим теперь, что $\vec{E} = \vec{F} = \mathbb{R}^3$, и пусть B является векторным произведением, т. е. билинейным непрерывным отображением $(X, Y) \to X \wedge Y$ пространства $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Тогда $(\vec{X}, \vec{Y}) \to \vec{Y} \wedge \vec{X}$ является противоположным билинейным отображением. В этом случае мы получим два противоположных вектора: $\int d\vec{\mu} \wedge \vec{f}$ и $\int \vec{f} \wedge d\vec{\mu}$. В физике постоянно приходится встречаться с интегралами такого типа.

Сопряженность пространств L^p и $L^{p'}$

Пусть X — локально компактное пространство, снабженное мерой Радона $\mu \geqslant 0$. В дальнейшем пространство $L^p(X, \mu)$ мы будем кратко обозначать через L^p. Точно так же, как в следствии 1 теоремы 46, для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ положим $p' = p/(p-1)$, так что $1/p + 1/p' = 1$. Пусть $\dot{h} \in L^{p'}$ (через $\dot{h}$ мы обозначаем класс эквивалентности, т. е. множество функций $h \in L^{p'}$, попарно почти всюду равных между собой). Этот элемент определяет по формуле

$$\langle u_{\dot{h}}, \dot{f} \rangle = \int_X h(x) f(x)\, d\mu(x), \qquad f \in \dot{f}, \tag{IV, 5; 19}$$

некоторую линейную непрерывную форму на L^p. В самом деле, согласно следствию 1 теоремы 46, правая часть имеет смысл, так что $u_{\dot{h}}$ является линейной формой на L^p. Непрерывность этой формы вытекает из неравенства Гёльдера, причем

$$\|u_{\dot{h}}\| = \frac{\sup |\langle u_{\dot{h}}, \dot{f} \rangle|}{N_p(\dot{f})} \leqslant N_{p'}(\dot{h}). \tag{IV, 5; 20}$$

Отображение $\dot{h} \to u_{\dot{h}}$ является теперь линейным отображением пространства $L^{p'}$ в пространство $(L^p)'$, сопряженное к пространству L^p.

Теорема 54_4. *Определенное выше отображение $\dot{h} \to u_{\dot{h}}$ является при $1 \leqslant p < +\infty$ изометрической биекцией $L^{p'}$ на $(L^p)'$. Если же $p = +\infty$, то оно является изометрической инъекцией $L^{p'}$ в $(L^p)'$, которое не может быть сюръекцией, если носитель μ содержит бесконечное множество точек.*

Перед доказательством теоремы уточним ее смысл: изометрия означает, что $\|u_{\dot{h}}\| = N_{p'}(\dot{h})$, или также, что $\dot{h} \to u_{\dot{h}}$ является инъекцией, поскольку $u_{\dot h} = 0$ тогда и только тогда, когда $\dot h = 0$. С другой стороны, когда мы говорим, что при $p < +\infty$ имеет место сюръекция, то мы этим хотим сказать, что каждая линейная непрерывная форма на L^p может быть выражена (единственным образом) в виде $u_{\dot h}$, где $\dot h \in L^{p'}$. Поэтому при $p < +\infty$ можно отождествить пространство $(L^p)'$, сопряженное к пространству L^p, с пространством $L^{p'}$. Однако L^1 является, вообще говоря, только некоторым подпространством пространства, сопряженного к пространству L^∞. (Следует иметь в виду, что сопряженным к L^1 является пространство L^∞, однако пространство, сопряженное к L^∞, не совпадает с пространством L^1.)

Доказательство. Докажем, что при $p = +\infty$ отображение $\dot h \to u_{\dot h}$ изометрично (а, следовательно, инъективно). Обозначим через f функцию $\bar h/|h|$ (давая ей, например, значение 1 там, где $h = 0$). Очевидно, $f \in \mathscr{L}^\infty$ и $|f| \equiv 1$. Из неравенств

$$\|u_{\dot h}\| \geqslant \frac{\langle u_{\dot h}, \dot f\rangle}{N_\infty(\dot f)} = \frac{\int h \frac{\bar h}{|h|}\, d\mu}{1} \geqslant \int |h|\, d\mu = N_1(\dot h)$$

вытекает, что $\|u_{\dot h}\| \geqslant N_1(\dot h)$, а, следовательно, $\|u_{\dot h}\| = N_1(\dot h)$, чем и доказывается изометричность в случае $p = +\infty$. Можно было бы провести то же самое рассуждение для $p < +\infty$, но мы в этом случае будем одновременно доказывать и изометричность, и сюръективность. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, и пусть u — непрерывная линейная форма на L^p. Тогда

$$|\langle u, \dot f\rangle| \leqslant \|u\| N_p(f). \tag{IV, 5; 21}$$

Продолжим линейную форму u на пространство $\mathscr{L}^p$, полагая ее равной нулю на всех μ-почти всюду равных нулю функциях. Тогда она будет определять линейную форму на $\mathscr{C}(X)$, очевидно, непрерывную на каждом $\mathscr{C}_K(X)$, где K — компакт из X. Действительно, если φ сходится к нулю в $\mathscr{C}_K(X)$, то она тем более сходится к нулю в $\mathscr{L}^p$. Значит, форма u определяет некоторую меру Радона ν на X.

Если $p = 1$, $p' = +\infty$, то

$$|\nu(\varphi)| = |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant \|u\| N_1(\varphi) = \|u\| \mu(|\varphi|). \tag{IV, 5; 22}$$

Отсюда следует, что мера ν абсолютно мажорируема мерой $\|u\|\mu$. Согласно теореме 52—53—54, существует μ-измеримая функция h, $|h| \leqslant \|u\|$, а, следовательно, $N_\infty(h) \leqslant \|u\|$, такая, что $\nu = h\mu$. Если $1 < p < +\infty$, то для того, чтобы показать, что мера ν имеет базой меру μ, можно применить теорему 52 Лебега — Никодима. Мера ν допускает, как мы это отмечали на стр. 584, борелевское продолжение в $\Gamma(X)$. В свою очередь форма u продолжима на $\mathscr{L}^p$ и $\Gamma(X) \subset \mathscr{L}^p$. Естественно выяснить, является ли продолжение ν на $\Gamma(X)$ сужением u на $\Gamma(X)$. Для этого достаточно доказать, что сужение u на $\Gamma(X)$, являющееся непрерывным в топологии, определяемой пространством $\mathscr{L}^p$, будет также L-непрерывным. Прежде всего, очевидно, что если некоторая последовательность функций $f_n \in \Gamma(X)$ сходится просто к 0, оставаясь ограниченной и сохраняя свой носитель в фиксированном компакте, то она сходится к 0 в $\mathscr{L}^p$ (частная теорема Лебега 34). Так как форма u непрерывна в $\mathscr{L}^p$, то $\langle u, f_n \rangle$ сходится к 0. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество из X с компактным замыканием, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда можно найти такой компакт K, что $\mu(\mathcal{O} - K) \leqslant (\varepsilon/\|u\|)^p$. (*Здесь существенно то, что $p < +\infty$.*) При этих условиях для каждой функции φ из $\mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, равной 1 на некоторой окрестности компакта K и имеющей носитель в $\mathcal{O}$, имеют место неравенства

$$|\langle u, \chi_{\mathcal{O}} \rangle - \langle u, \varphi \rangle| \leqslant \|u\| N_p(\chi_{\mathcal{O}} - \varphi) \leqslant \|u\| N_p(\chi_{\mathcal{O}-K}) = \\ = \|u\| (\mu(\mathcal{O} - K))^{1/p} \leqslant \varepsilon,$$

из которых следует L-непрерывность u на $\Gamma(X)$ и, следовательно, совпадение u и борелевского продолжения ν на $\Gamma(X)$. Но тогда, если A является борелевским множеством с компактным замыканием и μ-мерой, равной нулю, то его характеристическая функция μ-почти всюду равна нулю и значение u на этой характеристической функции равно нулю. Но тогда также $\nu(A) = 0$. Согласно теореме Лебега — Никодима (теорема 52), ν является мерой с базой μ. Значит, существует такая локально μ-интегрируемая функция h, что $\nu = h\mu$.

Пусть M — некоторое число $\geqslant 0$ и K — компакт пространства X. Обозначим через $h_{M,K}$ функцию, определенную так, как на стр. 521: при $h \geqslant 0$ она равна h в каждой точке K, в которой $|h(x)| \leqslant M$, и равна 0 во всех остальных точках.

Пусть теперь f — функция $|h_{M,K}|^{p'-2}\, \bar{h}_{M,K}$, равная нулю там, где $h_{M,K} = 0$. Ее модуль равен $|h_{M,K}|^{p'-1}$ и $hf = |h_{M,K}|^{p'}$. Мы видели, что каждая измеримая функция μ-почти всюду равна некоторой борелевской функции. Поэтому можно, изменяя при необходимости функцию f на множестве нулевой μ-меры, предполагать ее борелевской и, поскольку $|f| \leqslant M^{p-1}$, принадлежащей $\Gamma(X)$. Теперь имеем неравенства

$$\|u\| \geqslant \frac{|\langle u, f \rangle|}{N_p(f)} = \frac{\left|\int fh\,d\mu\right|}{N_p(f)} = \frac{\int |h_{M,K}|^{p'}\,d\mu}{\left(\int |h_{M,K}|^{(p'-1)p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} = \\ = \left(\int |h_{M,K}|^{p'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = N_{p'}(h_{M,K}). \qquad \text{(IV, 5; 23)}$$

Так как эти неравенства справедливы при любых M и K, то, переходя к точной верхней грани, можно получить неравенство

$$N_{p'}(h) \leqslant \| u \| \text{ и, следовательно, } h \in \mathscr{L}^{p'}. \qquad \text{(IV, 5; 24)}$$

Теперь линейная форма u и форма $u_{\dot{h}}$, определенная, исходя из $h \in \mathscr{L}^{p'}$, совпадают на множестве $\mathscr{C}(X)$. Так как множество $\mathscr{C}(X)$ плотно в $\mathscr{L}^p$ (еще раз в силу того, что $p < +\infty$; см. теорему 49), то эти формы совпадают на $\mathscr{L}^p$. Этим доказывается сюръективность, а из неравенств (IV, 5; 20) и (IV, 5; 24) одновременно следует изометричность $\|u_{\dot{h}}\| = N_{p'}(\dot{h})$, чем и заканчивается доказательство позитивных частей теоремы. Что же касается ее негативной части, а именно того, что каждый раз, когда носитель μ содержит бесконечное множество точек, отображение $\dot{h} \to u_{\dot{h}}$ не сюръективно и, следовательно, сопряженное к пространству L^∞ не может быть отождествлено с L^1, то эту часть мы примем без доказательства.

Замечание. Пусть теперь $\vec{E}$ — произвольное банахово пространство. Тогда каждый элемент $\overleftarrow{h}$ из $L^{p'}(\overleftarrow{E}')$ определяет на $L^p(\vec{E})$ некоторую линейную непрерывную форму $u_{\overleftarrow{h}}$ по формуле

$$\langle u_{\overleftarrow{h}}, \vec{f} \rangle = \int \langle \overleftarrow{h}, \vec{f} \rangle \, d\mu, \qquad \text{(IV, 5; 25)}$$

и, кроме того, с помощью того же неравенства Гёльдера мы получаем неравенство $\|u_{\overleftarrow{h}}\| \leqslant N_{p'}(\overleftarrow{h})$. Тем самым определено еще одно отображение $\dot{\overleftarrow{h}} \to u_{\overleftarrow{h}}$ пространства $L^{p'}(\overleftarrow{E}')$ в пространство $(L^p(\vec{E}))'$, сопряженное к пространству $L^p(\vec{E})$.

Можно показать, что если $\vec{E}$ конечномерно и $p < +\infty$, то это отображение является изометрической биекцией, а это позволяет еще раз отождествить пространство, сопряженное к пространству $L^p(\vec{E})$, с пространством $L^{p'}(\overleftarrow{E}')$. Этот факт мы примем без доказательства. Однако без дополнительных условий это утверждение не верно, если $\vec{E}$ окажется бесконечномерным банаховым пространством.

§ 6. ОБРАЗ МЕРЫ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ

Если $\vec{\mu}$ — мера, определенная на локально компактном пространстве X и принимающая значения в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$, и если L — линейное непрерывное