Так как эти неравенства справедливы при любых M и K, то, переходя к точной верхней грани, можно получить неравенство

$$N_{p'}(h) \leqslant \| u \| \text{ и, следовательно, } h \in \mathscr{L}^{p'}. \qquad \text{(IV, 5; 24)}$$

Теперь линейная форма u и форма $u_{\dot h}$, определенная, исходя из $h \in \mathscr{L}^{p'}$, совпадают на множестве $\mathscr{C}(X)$. Так как множество $\mathscr{C}(X)$ плотно в $\mathscr{L}^p$ (еще раз в силу того, что $p < +\infty$; см. теорему 49), то эти формы совпадают на $\mathscr{L}^p$. Этим доказывается сюръективность, а из неравенств (IV, 5; 20) и (IV, 5; 24) одновременно следует изометричность $\|u_{\dot h}\| = N_{p'}(\dot h)$, чем и заканчивается доказательство позитивных частей теоремы. Что же касается ее негативной части, а именно того, что каждый раз, когда носитель μ содержит бесконечное множество точек, отображение $\dot h \to u_{\dot h}$ не сюръективно и, следовательно, сопряженное к пространству L^∞ не может быть отождествлено с L^1, то эту часть мы примем без доказательства.

Замечание. Пусть теперь $\vec{E}$ — произвольное банахово пространство. Тогда каждый элемент $\overleftarrow{h}$ из $L^{p'}(\overleftarrow{E'})$ определяет на $L^p(\vec{E})$ некоторую линейную непрерывную форму $u_{\overleftarrow{h}}$ по формуле

$$\langle u_{\overleftarrow{h}}, \vec{f} \rangle = \int \langle \overleftarrow{h}, \vec{f} \rangle \, d\mu, \qquad \text{(IV, 5; 25)}$$

и, кроме того, с помощью того же неравенства Гёльдера мы получаем неравенство $\|u_{\overleftarrow{h}}\| \leqslant N_{p'}(\overleftarrow{h})$. Тем самым определено еще одно отображение $\overleftarrow{\dot h} \to u_{\overleftarrow{h}}$ пространства $L^{p'}(\overleftarrow{E'})$ в пространство $(L^p(\vec{E}))'$, сопряженное к пространству $L^p(\vec{E})$.

Можно показать, что если $\vec{E}$ конечномерно и $p < +\infty$, то это отображение является изометрической биекцией, а это позволяет еще раз отождествить пространство, сопряженное к пространству $L^p(\vec{E})$, с пространством $L^{p'}(\overleftarrow{E'})$. Этот факт мы примем без доказательства. Однако без дополнительных условий это утверждение не верно, если $\vec{E}$ окажется бесконечномерным банаховым пространством.

§ 6. ОБРАЗ МЕРЫ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ

Если $\vec{\mu}$ — мера, определенная на локально компактном пространстве X и принимающая значения в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$, и если L — линейное непрерывное отображение $\vec{E}$ в векторное нормированное пространство $\vec{F}$, то, очевидно, можно определить новую меру $L \circ \vec{\mu}$ по формуле

$$(L \circ \vec{\mu})(\varphi) = L(\vec{\mu}(\varphi)). \qquad \text{(IV, 6; 1)}$$

В самом деле, $L \circ \vec{\mu}$ является линейным отображением $\mathscr{C}(X)$ в $\vec{F}$, и если функция φ имеет носитель в компакте K, то имеет место оценка

$$\|(L \circ \vec{\mu})(\varphi)\| \leqslant \|L\| \|\vec{\mu}\|_K \||\varphi\||, \quad \text{откуда} \quad \|L \circ \vec{\mu}\|_K \leqslant \|L\| \|\vec{\mu}\|_K. \qquad \text{(IV, 6; 2)}$$

Эта мера называется *образом меры $\vec{\mu}$ при линейном непрерывном отображении L.*

Однако мы хотим рассмотреть образ другого характера, играющий весьма важную роль в практике. Пусть $\vec{\mu}$ — мера со значениями в $\vec{E}$, определенная на локально компактном пространстве X, и пусть H — отображение X в локально компактное пространство Y. Покажем, что *если H обладает необходимыми свойствами, то существует образ меры, обозначаемый через $H\vec{\mu}$, являющийся мерой на локально компактном пространстве Y со значениями в $\vec{E}$.*

Известно, что если функция φ принадлежит $\mathscr{C}(Y)$, то она имеет прообраз $H^*\varphi$, являющийся функцией на X, определенной по формуле

$$H^*\varphi = \varphi \circ H, \quad \text{или} \quad (H^*\varphi)(x) = \varphi(H(x)). \qquad \text{(IV, 6; 3)}$$

Тем самым мы естественным путем пришли к тому, чтобы определить образ $H\vec{\mu}$ по формуле

$$(H\vec{\mu})(\varphi) = \vec{\mu}(H^*\varphi) = \int \varphi(H(x))\, d\vec{\mu}(x). \qquad \text{(IV, 6; 4)}$$

Однако это определение может иметь смысл только в том случае, когда имеет смысл правая часть равенства (IV, 6; 4) и когда, кроме того, она в самом деле определяет некоторую меру на Y со значениями в $\vec{E}$. Разберем два возможных случая.

1-*й случай. H — непрерывное собственное отображение.*

Определение. Непрерывное отображение H локально компактного пространства X в локально компактное пространство Y называется *собственным*, или *непрерывным в бесконечности*, если прообраз каждого компакта из Y при отображении H является некоторым компактом пространства X.

Если X компактно, то каждое непрерывное отображение H пространства X в Y является собственным. Действительно, каждый компакт из Y замкнут, а, следовательно, его прообраз при отображении H замкнут в X, и поскольку X компактно, то он компактен (теоремы 21 и 22 гл. II).

Если X не компактно, то постоянное отображение X в Y не может быть собственным. Ортогональная проекция на одну из координатных осей плоскости $\mathbb{R}^2$ не является собственным отображением.

Теорема 55. *Если X и Y — метрические пространства, в которых все замкнутые шары компактны, то непрерывное отображение H будет собственным тогда и только тогда, когда прообраз каждого ограниченного подмножества Y при отображении H является ограниченным подмножеством пространства X.*

В самом деле, так как отображение H непрерывно, то прообраз замкнутого множества замкнут, и поскольку замкнутые шары компактны, то компакты совпадают с замкнутыми ограниченными множествами[1]).

Следствие. *Если X и Y — такие метрические пространства, в которых замкнутые шары компактны, то непрерывное отображение H пространства X в Y будет собственным тогда и только тогда, когда образ при отображении H каждой неограниченно удаляющейся последовательности точек в X является неограниченно удаляющейся последовательностью точек в Y.*

Говорят, что последовательность точек x_n метрического пространства неограниченно удаляется при n, стремящемся к бесконечности, если расстояние от точек x_n до некоторой фиксированной точки a стремится к $+\infty$. Так как $d(b, x_n) \geqslant d(a, x_n) - d(a, b)$, то в этом случае расстояние x_n до любой другой фиксированной точки b также стремится к $+\infty$.

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что отображение H собственное. Тогда, если последовательность точек x_n неограниченно удаляется на X, то $H(x_n)$ неограниченно удаляется на Y. В противном случае можно было бы найти подпоследовательность, содержащуюся в некотором шаре, т. е. в некоторой ограниченной части Y, и тогда, в силу того что отображение H собственное, соответствующая подпоследовательность x_n должна, в силу теоремы, остаться ограниченной, что противоречит предположению о том, что x_n неограниченно удаляется.

[1]) Компактная часть произвольного метрического пространства замкнута и ограничена. Обратно, в метрическом пространстве, в котором замкнутые шары компактны, замкнутая ограниченная часть содержится в некотором замкнутом шаре, т. е. в некотором компакте, и так как она замкнута, то она компактна. Это — доказательство п. 1°) и 2°а) теоремы 23 гл. II.

2°) Обратно, пусть рассматриваемое свойство выполнено, т. е. пусть отображение H каждую неограниченно удаляющуюся последовательность в X преобразует в неограниченно удаляющуюся последовательность в Y. Тогда отображение H собственное. В самом деле, если B — некоторая ограниченная часть Y, то ее прообраз должен быть ограниченным. В противном случае в нем можно найти неограниченно удаляющуюся последовательность точек, образы которых будут также неограниченно удаляющимися, что противоречит тому, что эти образы лежат в ограниченной части B. Согласно теореме, отображение H собственное.

Пример. Отображения $x \to x^n$ при произвольном целом $n \geqslant 1$ являются собственными отображениями вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя.

Название «непрерывное в бесконечности» для собственного отображения оправдывается доказанным следствием. Если к множеству X добавить «бесконечно удаленную точку» и то же самое сделать для множества Y, а затем отображение H продолжить, полагая, что образом бесконечно удаленной точки в X при отображении H является бесконечно удаленная точка Y, то отображение H будет собственным тогда и только тогда, когда таким способом продолженное отображение будет непрерывным в бесконечно удаленной точке.

Теорема 56. *Если H — собственное отображение локально компактного пространства X в локально компактное пространство Y, то образ каждой замкнутой части пространства X при отображении H является замкнутой частью пространства Y*[1].

Доказательство. Пусть A — замкнутая часть пространства X. Положим $B = H(A)$ и докажем, что B замкнуто. Надо показать, что каждая точка прикосновения $b \in Y$ множества B принадлежит B. Обозначим через β компактный шар с центром в точке b. Поскольку b является точкой прикосновения множества B, то этот шар пересекается с B и, кроме того, b является точкой прикосновения пересечения $\beta \cap B$[2]. Так как отображение H, по предположению, собственное, то прообраз $H^{-1}(\beta)$ является *компактной* частью X. Он пересекается с A по некоторой компактной его части K. Если теперь точка x принадлежит K, то ее образ принадлежит одновременно β и B, а, следовательно, и их пересечению $\beta \cap B$. Обратно, если некоторая точка y принадле-

[1]) Если H непрерывно, то прообраз замкнутого множества замкнут и образ компакта компактен. Если, кроме того, H собственное, то прообраз компакта компактен и образ замкнутого множества есть замкнутое множество.

[2]) Напомним, что b является точкой прикосновения множества, если каждый шар с центром в точке b пересекается с этим множеством.

жит пересечению $\beta \cap B$, то она принадлежит B и, следовательно, является образом по крайней мере одной точки $x_0 \in A$, а поскольку она принадлежит β, то $x_0 \in H^{-1}(\beta)$ т. е. $x_0 \in K$. Таким образом, образ $H(K)$ совпадает с пересечением $\beta \cap B$. Так как отображение H непрерывно, а K компактно, то отсюда следует, что множество $\beta \cap B$ компактно, а, следовательно, замкнуто. Значит, точка b, являющаяся его точкой прикосновения, принадлежит этому множеству и тем самым принадлежит множеству B, что и требовалось доказать.

Собственные непрерывные отображения дадут нам пример отображений, при которых образ $H\vec{\mu}$ имеет смысл.

Теорема 57. *Если X и Y — локально компактные пространства, $\vec{E}$ — нормированное векторное пространство, $\vec{\mu}$ — некоторая мера на X со значениями в $\vec{E}$ и носителем A и если H является непрерывным отображением X в Y, сужение которого на A есть собственное отображение A в Y, то формула* (IV, 6; 4) *определяет $H\vec{\mu}$ как некоторую меру на Y, называемую образом $\vec{\mu}$ при отображении H.*

Эти условия, естественно, будут выполнены, если отображение H является непрерывным и собственным отображением X в Y или если отображение H непрерывно и $\vec{\mu}$ имеет компактный носитель.

Доказательство. Пусть φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(Y)$ с компактным носителем K. Ее прообраз $H^*\varphi = \varphi \circ H$ непрерывен как композиция двух непрерывных отображений. Выясним, каким будет носитель этого отображения. Пусть Ω — множество таких точек y, что $\varphi(y) \neq 0$. Согласно определению носителя функции φ, замыкание $\overline{\Omega} = K$. Множество точек x, в которых функция $H^*\varphi$ отлична от нуля, является прообразом $H^{-1}(\Omega)$. Поскольку прообраз $H^{-1}(K)$ замкнут и содержит $H^{-1}(\Omega)$, носитель $H^*\varphi$, очевидно, содержится в $H^{-1}(K)$. Естественно, этот прообраз $H^{-1}(K)$ не обязательно компактен. Он был бы компактным, если бы отображение H пространства X в пространство Y было бы собственным, но это предположение несколько ограничительно. Мы будем предполагать, что только сужение H на A является собственным. Это означает, что пересечение $H^{-1}(K)$ и A является компактной частью A. Но тогда, как мы видели в теореме 16, можно придать смысл выражению $\vec{\mu}(H^*\varphi)$, поскольку $H^*\varphi$ — непрерывная скалярная функция и поскольку пересечение носителя $\vec{\mu}$ и носителя $H^*\varphi$ компактно. Теперь видно, что выражение, стоящее справа в (IV, 6; 4), имеет определенный смысл и линейно зависит от φ. Если φ сохраняет свой носитель в фиксированном компакте K пространства Y и равномерно сходится к 0, то $H^*\varphi$ сохраняет свой носитель в замкнутом фиксированном множестве $H^{-1}(K)$, пересечение которого с A компактно, и сходится равномерно к 0. Из теоремы 16 следует, что $\vec{\mu}(H^*\varphi)$ также сходится к 0. Этим доказывается, что правая часть соотношения (IV, 6; 4) определяет некоторую меру на Y со значениями на $\vec{E}$ и, следовательно, $H\vec{\mu}$ существует[1]).

Теорема 58. 1°) *В условиях теоремы 57 относительно норм имеет место неравенство*:

$$\|H\vec{\mu}\| \leqslant \|\vec{\mu}\| \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 6; 5)}$$

2°) *Если мера μ комплексна (соответственно вещественна, соответственно вещественна $\geqslant 0$), то такой же будет и мера $H\mu$.*

3°) *Носитель $H\vec{\mu}$ содержится в образе носителя $\vec{\mu}$ при отображении H.*

4°) *Если носители мер $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$ лежат в таком замкнутом множестве A, что сужение H на A является собственным, то*

$$\begin{gathered} H(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2) = H\vec{\mu}_1 + H\vec{\mu}_2, \\ H(k\vec{\mu}) = k(H\vec{\mu}), \end{gathered} \qquad \text{(IV, 6; 6)}$$

иначе говоря, отображение $\vec{\mu} \to H\vec{\mu}$ линейно[2]).

Доказательство. 1°) Предположим, что функция $\varphi \in \mathscr{C}(Y)$ такова, что $|\varphi| \leqslant 1$. Тогда также $|H^*\varphi| \leqslant 1$. В силу (IV, 2; 33$_2$), отсюда получаем неравенство

$$\|H\vec{\mu}(\varphi)\| = \|\vec{\mu}(H^*\varphi)\| \leqslant \|\vec{\mu}\|, \qquad \text{(IV, 6; 7)}$$

из которого следует неравенство (IV, 6; 5).

2°) Очевидно.

3°) Пусть A — носитель $\vec{\mu}$ в X, и пусть B — его образ $H(A)$. По теореме 56 множество B замкнуто. Пусть теперь φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(Y)$, носитель которой K не имеет общих точек с B. Тогда носитель функции $H^*\varphi$, который содержится в прообразе $H^{-1}(K)$ носителя K функции φ при отображении H, не может пересечься с A. Следовательно, $\vec{\mu}(H^*\varphi) = 0$, а, зна-

---

[1]) Примеры мы приведем позже на стр. 628. Однако полезно посмотреть их сейчас.

[2]) Заметим, что отображение H непрерывно и собственно, но не обладает свойством линейности, а локально компактные пространства X и Y не являются векторными. Однако, несмотря на это, отображение $\vec{\mu} \to H\vec{\mu}$ линейно!

чит, и $(H\vec{\mu})\varphi = 0$. Другими словами, мера $H\vec{\mu}$ равна нулю в дополнении к B, а ее носитель лежит в B. Этот носитель может оказаться строго меньше B. Тем не менее легко показать, что *если мера* μ *вещественна и* $\geqslant 0$, *то носитель меры* $H\mu$ *в точности равен* B[1]).

4°) Очевидно.

2-й случай. Мера μ *вещественна и* $\geqslant 0$.

Теорема 59. *Пусть* X *и* Y — *локально компактные пространства, счетные в бесконечности,* μ — *вещественная мера* $\geqslant 0$ *на* X *и* H — *такое* μ-*измеримое отображение* X *в* Y, *что прообраз при этом отображении каждого компакта из* Y *имеет конечную меру относительно* μ. *Тогда формула* (IV, 6; 4) *определяет* $H\mu$ *как некоторую меру* $\geqslant 0$ *на* Y. *Кроме того, если* K *является некоторым компактом из* Y, *то имеет место оценка*

$$\| H\mu \|_K \leqslant \int\limits_{H^{-1}(K)} d\mu, \quad \textit{откуда} \quad \| H\mu \| \leqslant \| \mu \|. \tag{IV, 6; 8}$$

Мы будем говорить, что отображение H μ-*собственное,* если оно удовлетворяет предыдущим условиям. Эти условия всегда выполняются, если H измеримо, а μ имеет конечную норму.

Доказательство. Последнее утверждение очевидно: если отображение H измеримо и мера μ имеет конечную норму, т. е. $\mu(X) < +\infty$, то для каждого компакта K множество $H^{-1}(K)$ измеримо и имеет конечную меру.

Пусть теперь задана некоторая функция $\varphi \in \mathscr{C}(Y)$. Согласно теореме 22, ее прообраз $H^*\varphi = \varphi \circ H$ является комплексной μ-измеримой функцией на X. Эта функция ограничена величиной $|||\varphi|||$. Поскольку множество точек, в которых эта функция $\neq 0$, очевидно, содержится в прообразе носителя K функции φ при отображении H и, значит, в измеримом множестве конечной меры относительно μ, то $\int^* |(H^*\varphi)|\, d\mu$ конечен. Из теоремы 39 теперь вытекает, что $H^*\varphi$ μ-интегрируема. Поэтому можно придать смысл правой части равенства (IV, 6; 4). Эта правая часть линейно зависит от φ и $\geqslant 0$, если $\varphi \geqslant 0$.

С другой стороны, если φ имеет носитель в K, то $|||H^*\varphi|||$ равна $|||\varphi|||$, и имеет место оценка

$$|(H\mu)(\varphi)| \leqslant |||\varphi||| \int\limits_{H^{-1}(K)} d\mu, \tag{IV, 6; 9}$$

[1]) Это вытекает из следствия 1 теоремы 60. В самом деле, пусть $B_1 \subset B$ является носителем меры $H\mu$. Если $B_1 \neq B$, то $\complement B_1$ является открытым множеством $H\mu$-меры нуль, пересекающимся с B. Следовательно, $H^{-1}(\complement B_1)$ будет открытым множеством нулевой μ-меры, пересекающимся с носителем A меры μ, что невозможно.

из которой следует, что $H\mu$ непрерывна на $\mathscr{C}_K(Y)$ и, значит, является некоторой мерой, и что имеет место неравенство (IV, 6; 8).

Теорема 60. *Пусть в условиях теоремы* 59 $\vec{f}$ — *некоторое отображение пространства* Y *в банахово пространство* $\vec{F}$. *Для того чтобы отображение* $\vec{f}$ *было* $H\mu$-*интегрируемым (соответственно* $H\mu$-*измеримым), необходимо и достаточно, чтобы прообраз* $H^*\vec{f} = \vec{f} \circ H$ *был* μ-*интегрируемой функцией на* X *со значениями в* $\vec{F}$ *(соответственно* μ-*измеримой), и тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int \vec{f} d(H\mu) = \int (H^*\vec{f})\, d\mu = \int \vec{f}(H(x))\, d\mu(x). \qquad \text{(IV, 6; 10)}$$

Эту теорему мы примем без доказательства, в котором следовало бы воспользоваться равенством

$$\int^* f d(H\mu) = \int^* (H^*f)\, d\mu \leqslant +\infty, \qquad \text{(IV, 6; 11)}$$

справедливым для вещественных функций $\geqslant 0$.

Легко получается

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 59 *и* B — *некоторая часть* Y. *Часть* B $H\mu$-*измерима тогда и только тогда, когда* μ-*измерим ее прообраз* $H^{-1}(B)$, *и в этом случае имеет место равенство*

$$H\mu(B) = \mu(H^{-1}(B)) \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 6; 12)}$$

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$\| H\mu \| = \| \mu \| \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 6; 13)}$$

Для доказательства достаточно применить следствие 1 к множеству $B = Y$.

Теорема 61 (о транзитивности образов мер). *Пусть* X, Y, Z — *три локально компактных пространства,* H — *отображение* X *в* Y, K — *отображение* Y *в* Z *и* $\vec{\mu}$ — *мера на* X *со значением в* $\vec{E}$.

1°) *Если* H *и* K *непрерывны и если сужение сложного отображения* $K \circ H$ *пространства* X *в* Z *на носитель* $\vec{\mu}$ *является собственным, то* $K(H\vec{\mu})$ *и* $(K \circ H)\vec{\mu}$, *согласно теореме* 57, *имеют смысл и равны между собой.*

2°) *Если мера* μ *вещественна и* $\geqslant 0$, X, Y, Z *счетны в бесконечности и, в условиях теоремы* 59, *существует* $K(H\mu)$, *то, в силу этой теоремы, существует* $(K \circ H)$ (μ) *и имеет место тождество* $K(H\mu) = (K \circ H)\mu$.

Доказательство. 1-*й случай.* Пусть A — носитель меры $\vec{\mu}$ и $B = H(A)$. Пусть C' — компактная часть множества Z. Тогда образ пересечения $H^{-1}(K^{-1}(C')) \cap A$ при отображении H равен пересечению $K^{-1}(C') \cap B$. Так как $K \circ H$ по условию является собственным на A, то первое из этих множеств компактно. Тогда второе множество также компактно, поскольку оно является образом компакта при непрерывном отображении, а это означает, что сужение K на B является собственным.

Пусть теперь B' — компактная часть пространства Y и C' — ее образ при отображении K. Тогда пересечение $H^{-1}(B') \cap A$ содержится в пересечении $H^{-1}(K^{-1}(C')) \cap A$, которое по предположению компактно. Таким образом, прообраз каждого компакта из Y при сужении H на A является замкнутым множеством, содержащимся в некотором компакте X и, значит, является компактом. Это говорит о том, что *H является собственным отображением на носителе A меры* $\vec{\mu}$. Теперь мера $H\vec{\mu}$ имеет смысл, а ее носитель лежит в B (теорема 58, 3°). Следовательно, K, будучи собственным на B, является собственным на этом носителе. Согласно теореме 57, $K(H\vec{\mu})$ имеет смысл. Пусть теперь φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(Z)$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered}((K \circ H)\vec{\mu})(\varphi) = \int \varphi(K(H(x)))\, d\vec{\mu}(x),\\ (K(H\vec{\mu}))(\varphi) = \int \varphi(K(y))\, d(H\vec{\mu}(y)) = \int \varphi(K(H(x)))\, d\vec{\mu}(x),\end{gathered} \qquad \text{(IV, 6; 14)}$$

откуда $(K \circ H)\vec{\mu} = K(H\vec{\mu})$.

2-*й случай*: $\mu \geqslant 0$. Пусть теперь отображение H μ-собственное, а отображение K $(H\mu)$-собственное. Пусть C' — замкнутое подмножество Z. Так как отображение K $H\mu$-измеримо, то прообраз $K^{-1}(C')$ является $H\mu$-измеримым. Но тогда, согласно следствию 1 теоремы 60, в силу того, что H является μ-собственным, его прообраз $H^{-1}(K^{-1}(C'))$ необходимо μ-измерим, а это означает, что $K \circ H$ есть μ-измеримое отображение.

Кроме того, если C' компактно и отображение K $H\mu$-собственное, то $K^{-1}(C')$ имеет конечную $H\mu$-меру. Отсюда в силу того, что H μ-собственное, вытекает, что $H^{-1}(K^{-1}(C'))$ имеет конечную μ-меру. Это доказывает, что $K \circ H$ является μ-собственным. Пусть теперь φ — некоторый элемент $C(Z)$.

По определению $(K \circ H)\mu$, имеем

$$((K \circ H)\mu)(\varphi) = \int \varphi(K(H(x)))\, d\mu(x). \qquad \text{(IV, 6; 15)}$$

Согласно теореме 60, это выражение можно записать в виде

$$\int \varphi(K(y))\, d(H\mu(y)) \quad \text{или} \quad (K(H\mu))(\varphi), \qquad \text{(IV, 6; 16)}$$

чем и доказывается равенство $(K \circ H)\mu = K(H\mu)$.

Замечание. Условия применимости обоих случаев являются *крайне различными*. В первом случае указанное условие предполагалось выполненным для $K \circ H$, а не последовательно для H и для K, тогда как во втором случае условия предполагались выполненными последовательно для H и для K, но не для $K \circ H$. Легко доказать, что условия такого рода не могут быть переставлены. Например, в первом случае может случиться, что H непрерывно и является собственным на носителе $\vec{\mu}$, K непрерывно и является собственным на носителе $H\vec{\mu}$, и тем не менее $K \circ H$ не является собственным на носителе $\vec{\mu}$[1]. Во втором случае вполне может оказаться, что $K \circ H$ $\vec{\mu}$-измеримо, хотя H не является μ-измеримым[2].

Случай, когда H является гомеоморфизмом X на Y

Если отображение H — гомеоморфизм, то оно, очевидно, удовлетворяет всем условиям, позволяющим определить $H\vec{\mu}$ для меры $\vec{\mu}$, определенной на X. В этом случае существует обратное отображение H^{-1}, которое также является некоторым гомеоморфизмом. При этом, согласно теореме 61, $H^{-1}(H\vec{\mu}) = (H^{-1} \circ H)\vec{\mu} = \vec{\mu}$. Впрочем, в этом случае, полагая $H^*\vec{\nu} = H^{-1}\vec{\nu}$, можно также определить прообраз при отображении H меры $\vec{\nu}$, определенной на Y, и образ функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ при этом отображении, если положить $H\varphi = (H^{-1})^*\varphi = \varphi \circ H^{-1}$. Для каждой меры $\vec{\mu}$ на X и для каждой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &(H\varphi)(y) = \varphi(H^{-1}(y)); \quad H\varphi(H(x)) = \varphi(x); \quad x \in X, \ y \in Y; \\ &H\vec{\mu}(\psi) = \vec{\mu}(H^{-1}(\psi)); \quad H\vec{\mu}(H\varphi) = \vec{\mu}(\varphi); \quad \varphi \in \mathscr{C}(X), \ \psi \in \mathscr{C}(Y). \end{aligned} \tag{IV, 6; 17}$$

Интеграл от $H\vec{f}$ по $H\mu$ равен интегралу от $\vec{f}$ по μ, а мера множества $H(A)$ (если $A \subset X$) по отношению к $H\mu$ равна мере множества A по отношению к μ.

---

[1] Пусть, например, $X = Y = Z = \mathbb{R}$. В качестве собственного отображения H возьмем $x \to x^2$. Мера μ равна xdx. Тогда $H\mu(\varphi) = \int \varphi(x^2)xdx = 0$, а, следовательно, $H\mu = 0$. Если отображение K постоянно, то оно собственное на носителе меры $H\mu$ (который пуст). Однако $K \circ H$ постоянно на $\mathbb{R}$ и, следовательно, не собственное.

[2] Если в качестве H взять не μ-измеримое отображение, а в качестве K — постоянное отображение, то $K \circ H$ будет постоянным отображением, а, значит, μ-измеримым!

Так как $\varphi(H^{-1}(y))$ является функцией $H\varphi$, то первая из формул (IV, 6; 17) побуждает использовать обозначение $d\mu(H^{-1}(y))$ для образа $H\mu$. При этом формула (IV, 6; 10) запишется в очень удобной форме:

$$\int \vec{f}(y)\,d\mu(H^{-1}(y)) = \int \vec{f}(H(x))\,d\mu(x), \qquad \text{(IV; 6; 17}_2\text{)}$$

как бы полученной «заменой переменной $y = H(x)$».

Кроме того, если $d\mu$ имеет вид $p\,d\lambda$, $d\mu(x) = p(x)d\lambda(x)$, то

$$d\mu(H^{-1}(y)) = p(H^{-1}(y))\,d\lambda(H^{-1}(y)). \qquad \text{(IV, 6; 17}_3\text{)}$$

В самом деле, для $\varphi \in \mathscr{C}(Y)$ имеем:

$$\int \varphi(y)\,d\mu(H^{-1}(y)) = \int \varphi(H(x))\,d\mu(x) = \int \varphi(H(x))\,p(x)\,d\lambda(x) =$$
$$= \int \varphi(H(x))\,p(H^{-1}(H(x)))\,d\lambda(x) = \int \varphi(y)\left[p(H^{-1}(y))\,d\lambda(H^{-1}(y))\right].$$
$$\text{(IV, 6; 17}_4\text{)}$$

Обобщение теоремы 59 на случай, когда μ не $\geqslant 0$

Методы, рассмотренные в предыдущем пункте, позволяют с помощью теоремы 59 определить $H\mu$ даже в том случае, когда мера $\vec{\mu}$ векторная, лишь бы только она имела базу $\geqslant 0$. В самом деле, перед теоремой 54_2 мы выяснили, что следует понимать под $\vec{\mu}$-интегрируемой скалярной функцией f, не принадлежащей $\mathscr{C}(X)$. Говорят, что $H\vec{\mu}$ существует, если, какова бы ни была функция $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, функция $H^*\varphi$ $\vec{\mu}$-интегрируема, а если φ равномерно сходится к 0 и сохраняет при этом носитель в фиксированном компакте, то интеграл $\int (H^*\varphi)\,d\vec{\mu}$ сходится к 0. В этом случае полагают по определению

$$H\vec{\mu}(\varphi) = \int (H^*\varphi)\,d\vec{\mu} = \int \varphi(H(x))\,d\vec{\mu}(x). \qquad \text{(IV, 6; 18)}$$

Это произойдет, в частности, тогда, когда $\vec{\mu}$ имеет конечную норму, $\vec{E}$ конечномерно и H непрерывно, так как, в силу непрерывности и ограниченности $H^*\varphi$, можно воспользоваться следствием теоремы 54_2. Согласно теореме 54, $\vec{\mu} = \vec{q}\mu_0$, где мера $\mu_0 \geqslant 0$, имеет конечную норму и $\|\vec{q}\| = 1$. При этом имеет место неравенство

$$\left\| \int (H^*\varphi)\,\vec{q}\,d\mu_0 \right\| \leqslant \|\mu_0\|\,|||\varphi|||, \qquad \text{(IV, 6; 18}_2\text{)}$$

показывающее, что $\| H\vec{\mu} \| \leqslant \| \mu_0 \| = \| \, |\vec{\mu}| \, \|$. В действительности можно даже доказать, что $\| H\vec{\mu} \| \leqslant \| \vec{\mu} \|$.

Различные примеры образов мер

1°) *Предположим, что H — постоянное отображение X в Y. Образ X при этом отображении — это некоторая точка $b \in Y$.* Здесь

$$H^*\varphi(x) = \varphi(H(x)) = \varphi(b), \qquad \text{(IV, 6; 19)}$$

и, следовательно,

$$(H\vec{\mu})(\varphi) = \left(\int d\vec{\mu}\right)\varphi(b), \quad \text{или} \quad H\vec{\mu} = \left(\int d\vec{\mu}\right)\delta_{(b)}. \qquad \text{(IV, 6; 20)}$$

Образ меры $\vec{\mu}$ является точечной массой в точке b, равной полной массе меры $\vec{\mu}$, $\int d\vec{\mu}$. Такой же результат ожидается и интуитивно: H переносит X целиком в точку b; следовательно, это отображение переносит в точку b всю массу.

Этот результат предполагает, что рассмотрение ведется в сформулированных выше условиях, т. е. X компактно, например, или мера μ вещественна, $\geqslant 0$ и имеет конечную норму. Здесь очень хорошо видно, почему надо рассматривать ограничения на H. Если, например, H — постоянное отображение вещественной прямой $X = \mathbb{R}$ в Y и если $d\mu = dx$ есть мера Лебега пространства $\mathbb{R}$, то отображение H не является μ-собственным. Если бы существовала мера $H\mu$, то она должна была бы иметь массу $+\infty$ в точке $b = H(\mathbb{R})$, что невозможно, ибо точка, будучи компактным подмножеством, не может иметь бесконечную меру.

2°) Предположим, что $\vec{\mu}$ — это линейная комбинация мер Дирака, а именно $\vec{\mu} = \sum\limits_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{(a_\nu)}$. В этом случае мера $H\vec{\mu}$, если она определена, задается равенством

$$H\vec{\mu} = \sum_{\nu} \vec{c}_\nu \delta_{H(a_\nu)} \quad \text{и, в частности,} \quad H\delta_{(a)} = \delta_{(H(a))}. \qquad \text{(IV, 6; 21)}$$

Этот пример показывает конкретный физический смысл образа меры. Если мера $\vec{\mu}$ составлена из некоторого числа масс, расположенных в некоторых точках, то ее образ получается «переносом» этих масс в соответствующие точки с помощью преобразования H. Априори ясно, что операция (IV, 6; 21) существует для меры, образованной из суммы конечного числа точечных масс. Смысл изложенного в этом пункте заключается в том, чтобы показать, что перенос меры при отображении H является операцией, возможной в значительно более общих случаях[1]).

3°) Предположим теперь, что X — аффинное конечномерное пространство, и пусть $\vec{h}$ — некоторый вектор из присоединенного векторного пространства $\vec{X}$. Возьмем в качестве преобразования H параллельный перенос $\tau_{\vec{h}}$, определяемый вектором $\vec{h}$ с помощью формулы $x \to x + \vec{h}$. Это преобразование является гомеоморфизмом (и, следовательно, к нему можно применить различные формулы (IV, 6; 17)). Образ функции φ, определенной на X, задается по формуле

$$\tau_{\vec{h}}\varphi(x) = \varphi\left(\tau_{-\vec{h}}x\right) = \varphi(x - \vec{h})\,^{2)}. \qquad (IV, 6; 22)$$

Образ меры $\vec{\mu}$ на X при переносе $\vec{h}$ является мерой, определяемой по формуле

$$\left(\tau_{\vec{h}}\vec{\mu}\right)(\varphi) = \mu\left(\overset{*}{\tau}_{\vec{h}}\varphi\right) = \mu\left(\tau_{-\vec{h}}\varphi\right) = \int \varphi(x + \vec{h})\, d\vec{\mu}(x). \qquad (IV, 6; 23)$$

Согласно теореме 60, в случае, когда мера μ вещественна и $\geqslant 0$, функция $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ является $\tau_{\vec{h}}\mu$-интегрируемой тогда и только тогда, когда функция $\tau_{\vec{h}}\vec{f}: x \to \vec{f}(x + \vec{h})$ является μ-интегрируемой, и тогда имеет место равенство

$$\int \vec{f} d\left(\tau_{\vec{h}}\mu\right) = \int \vec{f}(x + \vec{h})\, d\mu(x). \qquad (IV, 6; 24)$$

---

[1]) Отождествим каждую точку $a \in X$ с мерой $\delta_{(a)}$. Отождествим также X с некоторой частью множества $\mathscr{C}'(X)$, а Y отождествим с некоторой частью множества $\mathscr{C}'(Y)$. Тогда отображение H: $x \to H(x)$ станет отображением $\delta_{(x)} \to \delta_{H(x)}$, и отображение $\mu \to H\mu$ есть *линейное продолжение* отображения H в некоторое отображение $\mathscr{C}'(X)$ (или некоторой его части) в $\mathscr{C}'(Y)$.

[2]) К этим формулам надо привыкнуть: параллельный перенос φ, определяемый вектором $\vec{h}$, задается формулой $x \to \varphi(x - \vec{h})$. Предположим, что X — вещественная прямая $\mathbb{R}$, и построим график функции $y = \varphi(x)$. Перенести функцию φ означает перенести график φ параллельно оси x. Значение $\tau_{\vec{h}}\varphi$ в точке x является значением φ в точке $\tau_{-\vec{h}}x = x - \vec{h}$.

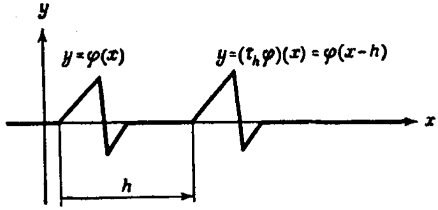

Рис. 17.

В обозначениях (IV, 6; 17_2) можно написать, что

$$\tau_{\vec{h}}\mu = d\mu(x - \vec{h}), \qquad (\text{IV}, 6; 24_2)$$

и тогда (IV, 6; 24) запишется в виде

$$\int \vec{f}(x)\, d\mu(x - \vec{h}) = \int \vec{f}(x + \vec{h})\, d\mu(x). \qquad (\text{IV}, 6; 24_3)$$

Возьмем $\vec{X} = \mathbb{R}$. Если $d\mu$ имеет вид $p(x)\,dx$, то с помощью замены переменной $x + h = \xi$ (IV, 6; 24_3) запишется в виде $\int \vec{f}(\xi)\, p(\xi - h)\, d\xi$, так что

$$d\mu(x - h) = p(x - h)\, dx \text{ и } d(x - h) = dx \text{ для } p \equiv 1. \qquad (\text{IV}, 6; 24_4)$$

4°) Возьмем теперь в качестве H отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, определяемое гомотетией с центром в начале координат и отношением k. Если $k = 0$, то отображение H постоянно. Этот случай уже был рассмотрен в (IV, 6; 20).

Предположим теперь, что $k \neq 0$. В этом случае H является гомеоморфизмом. По определению, имеет место формула

$$(H\varphi)(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right). \qquad (\text{IV}, 6; 25)$$

Здесь формула (IV, 6; 17_2) дает

$$\int \vec{f}(x)\, d\mu\left(\frac{x}{k}\right) = \int \vec{f}(kx)\, d\mu(x). \qquad (\text{IV}, 6; 26)$$

Если, в частности, мера μ является мерой $p(x)\,dx$, где функция p локально интегрируема по dx, то, используя общую формулу замены переменной (IV, 9; 72) (которая будет доказана позже), получаем формулу

$$H\mu(\varphi) = \int \varphi(H(x))\, d\mu(x) = \int \varphi(kx)\, p(x)\, dx = \int \varphi(y)\, p\left(\frac{y}{k}\right) \frac{dy}{|k|}, \qquad (\text{IV}, 6; 27)$$

откуда

$$d\mu\left(\frac{x}{k}\right) = p\left(\frac{x}{k}\right)\frac{dx}{|k|} \quad \text{и} \quad d\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{dx}{|k|}. \qquad (\text{IV}, 6; 28)$$

§ 7. ШИРОКАЯ СХОДИМОСТЬ МЕР РАДОНА

Сходимость по норме. Локальная сходимость по норме

Выясним более тщательно, в каком случае следует говорить, что последовательность мер Радона $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в векторном пространстве $\vec{E}$ сходится к предельной мере $\vec{\mu}$. Можно было бы считать, что сходимость имеет место, если $\|\vec{\mu}_n - \vec{\mu}\|$