В обозначениях (IV, 6; 17_2) можно написать, что

$$\tau_{\vec{h}}\mu = d\mu(x - \vec{h}), \qquad (IV, 6; 24_2)$$

и тогда (IV, 6; 24) запишется в виде

$$\int \vec{f}(x)\, d\mu(x - \vec{h}) = \int \vec{f}(x + \vec{h})\, d\mu(x). \qquad (IV, 6; 24_3)$$

Возьмем $\vec{X} = \mathbb{R}$. Если $d\mu$ имеет вид $p(x)\,dx$, то с помощью замены переменной $x + h = \xi$ (IV, 6; 24_3) запишется в виде $\int \vec{f}(\xi)\, p(\xi - h)\, d\xi$, так что

$$d\mu(x - h) = p(x - h)\, dx \text{ и } d(x - h) = dx \text{ для } p \equiv 1. \qquad (IV, 6; 24_4)$$

4°) Возьмем теперь в качестве H отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, определяемое гомотетией с центром в начале координат и отношением k. Если $k = 0$, то отображение H постоянно. Этот случай уже был рассмотрен в (IV, 6; 20).

Предположим теперь, что $k \neq 0$. В этом случае H является гомеоморфизмом. По определению, имеет место формула

$$(H\varphi)(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right). \qquad (IV, 6; 25)$$

Здесь формула (IV, 6; 17_2) дает

$$\int \vec{f}(x)\, d\mu\left(\frac{x}{k}\right) = \int \vec{f}(kx)\, d\mu(x). \qquad (IV, 6; 26)$$

Если, в частности, мера μ является мерой $p(x)\,dx$, где функция p локально интегрируема по dx, то, используя общую формулу замены переменной (IV, 9; 72) (которая будет доказана позже), получаем формулу

$$H\mu(\varphi) = \int \varphi(H(x))\, d\mu(x) = \int \varphi(kx)\, p(x)\, dx = \int \varphi(y)\, p\left(\frac{y}{k}\right) \frac{dy}{|k|}, \qquad (IV, 6; 27)$$

откуда

$$d\mu\left(\frac{x}{k}\right) = p\left(\frac{x}{k}\right) \frac{dx}{|k|} \quad \text{и} \quad d\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{dx}{|k|}. \qquad (IV, 6; 28)$$

§ 7. ШИРОКАЯ СХОДИМОСТЬ МЕР РАДОНА

Сходимость по норме. Локальная сходимость по норме

Выясним более тщательно, в каком случае следует говорить, что последовательность мер Радона $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в векторном пространстве $\vec{E}$ сходится к предельной мере $\vec{\mu}$. Можно было бы считать, что сходимость имеет место, если $\|\vec{\mu}_n - \vec{\mu}\|$

сходится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Это — *сходимость по норме.* Но такое определение сходимости не отражает сходимости мер, поскольку норма меры может оказаться бесконечной, и, значит, несмотря на свое название, она не будет настоящей нормой[1]). Естественно дать следующее определение.

Говорят, что последовательность мер $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в $\vec{E}$ *сходится к предельной мере* $\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности, если, каким бы ни был компакт K множества X, последовательность норм $\|\vec{\mu}_n - \vec{\mu}\|_K$ сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности.

Согласно тому, что мы отметили на стр. 149 относительно сходимости, определенной с помощью нормы на пространствах линейных непрерывных отображений одного векторного пространства в другое, это просто означает, что, каким бы ни был компакт K из X, функции $\vec{\mu}_n$ на пространстве $\mathscr{C}(X)$ сходятся к функции $\vec{\mu}$ равномерно относительно единичного шара из $\mathscr{C}_K(X)$. Такая сходимость является *локальной сходимостью по норме.* Говорят, что меры $\vec{\mu}_n$ локально сходятся по норме к мере $\vec{\mu}$.

П р и м е р. Пусть μ — вещественная фиксированная $\geqslant 0$ мера Радона, и пусть $\vec{p}_n$ — последовательность функций со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$, локально μ-интегрируемых, просто μ-почти всюду сходящихся к предельной функции $\vec{p}$ при n, стремящемся к бесконечности, и таких, что имеет место неравенство $\|\vec{p}_n(x)\| \leqslant g(x)$, где g — фиксированная неотрицательная *локально* μ-интегрируемая функция.

Теперь меры-произведения $\vec{p}_n\mu$ будут локально сходиться по норме к мере $\vec{p}\mu$ при n, стремящемся к бесконечности.

В самом деле, пусть K — некоторый компакт X. Тогда имеет место неравенство

$$\|\vec{\mu}_n - \vec{\mu}\|_K \leqslant \int\limits_K \|\vec{p}_n - \vec{p}\| d\mu. \qquad (IV, 7; 1)$$

Нормы $\|p_n - p\|$ сходятся просто μ-почти всюду к 0 и мажорируемы функцией $2g \geqslant 0$, μ-интегрируемой на K. Согласно

[1]) Это обстоятельство уже было отмечено на стр. 154 относительно сходимости последовательности отображений множества E в метрическое пространство F. Однако предыдущее определение можно взять за определение сходимости на подмножествах, образованных мерами с конечной нормой.

теореме Лебега (теорема 35), правая часть сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности.

Несмотря на естественность этого определения, *оно, вообще говоря, слишком жестко.*

Рассмотрим, например, последовательность точек a_n из X, стремящихся к a при n, стремящемся к бесконечности. Было бы естественным надеяться, что меры Дирака $\delta_{(a_n)}$ сходятся к мере Дирака $\delta_{(a)}$ при n, стремящемся к бесконечности. Однако при предыдущем определении сходимости этого не будет. В самом деле, если, например, X компактно и если a_n отличны от a, то, согласно (IV, 2; 7), $\|\delta_{(a_n)}-\delta_{(a)}\|=2$ и, следовательно, эта величина не стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Отсюда вытекает необходимость введения нового определения.

Широкая сходимость

Говорят, что последовательность мер Радона $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в $\vec{E}$ *широко сходится* к предельной мере $\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности, если, какова бы ни была функция φ из $\mathscr{C}(X)$, последовательность векторов $\vec{\mu}_n(\varphi)$ сходится в $\vec{E}$ к вектору $\vec{\mu}(\varphi)$ при n, стремящемся к бесконечности. Если $\vec{E}$ является полем скаляров, то речь идет о сходимости чисел $\mu_n(\varphi)$ к числу $\mu(\varphi)$. Если μ_n вещественны (соответственно $\geqslant 0$), то то же самое будет и для меры μ. Если меры рассматривать как функции на $\mathscr{C}(X)$, то *широкая сходимость является простой сходимостью этих функций* и потому ее часто называют простой сходимостью. Естественно, что локальная сходимость по норме влечет за собой широкую сходимость[1]).

Примеры. 1°) *Если a_n является последовательностью точек из X, сходящейся к a при n, стремящемся к бесконечности, то меры Дирака $\delta_{(a_n)}$ широко сходятся к мере Дирака $\delta_{(a)}$.*

В самом деле, какова бы ни была функция $\varphi\in\mathscr{C}(X)$, функции $\varphi(a_n)$ сходятся к $\varphi(a)$, ибо каждая из функций φ непрерывна.

2°) Предположим, что X — конечномерное аффинное пространство. Тогда для каждого вектора $\vec{h}\in\vec{X}$ можно определить параллельный перенос меры Радона $\tau_{\vec{h}}\vec{\mu}$ (формула (IV, 6; 23)).

[1]) Возникла довольно любопытная ситуация. В § 15 гл. II мы видели, что понятие простой сходимости является слишком слабым, и потому нам пришлось определить равномерную сходимость. Здесь же мы замечаем, что понятие равномерной сходимости является слишком сильным, и мы вынуждены возвратиться к простой сходимости!

Если теперь $\vec{h}_n$ является последовательностью векторов из $\vec{X}$, сходящейся к $\vec{h}$, то перенесенные меры $\tau_{\vec{h}_n}\vec{\mu}$ широко сходятся к перенесенной мере $\tau_{\vec{h}}\vec{\mu}$. В самом деле, согласно определению,

$$\left(\tau_{\vec{h}_n}\vec{\mu}-\tau_{\vec{h}}\vec{\mu}\right)(\varphi)=\int(\varphi(x+\vec{h}_n)-\varphi(x+\vec{h}))\,d\vec{\mu}(x). \qquad (\mathrm{IV},7;2)$$

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что функции $x\to\varphi(x+\vec{h}_n)$ сходятся равномерно к функции $x\to\varphi(x+\vec{h})$. В самом деле, эти функции сохраняют свои носители в фиксированном компакте K. (Пусть K_0 — носитель φ. Он компактен и, следовательно, если на X ввести некоторую норму, K_0 будет содержаться в некотором замкнутом шаре с центром a_0 радиуса R_0. Пусть теперь p — точная верхняя грань всех $\|\vec{h}_n\|$. Тогда носитель $\tau_{-\vec{h}_n}\varphi$ будет содержаться в компактном шаре с центром a_0 радиуса R_0+p.) Следовательно, они сходятся в $\mathscr{C}_K(X)$. Наше утверждение будет вытекать из того, что $\vec{\mu}$ является непрерывной функцией на пространстве $\mathscr{C}_K(X)$.

Докажем поэтому, что имеет место равномерная сходимость. Так как *функция φ непрерывна и имеет компактный носитель, то она равномерно непрерывна.* В самом деле, пусть, как было сказано выше, $B_0(a_0,R_0)$ — некоторый шар, содержащий носитель K_0 функции φ. Функция φ на компакте $B(a_0,R_0+1)$ равномерно непрерывна (теорема 31 гл. II). Следовательно, при заданном $\varepsilon>0$ найдется такое η, $0<\eta\leqslant 1$, что из неравенства $\|x'-x''\|\leqslant\eta$ вытекает неравенство $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant\varepsilon$ для любых x' и x'' из $B(a_0,R_0+1)$. Если x' и x'' одновременно не лежат в предыдущем шаре и удовлетворяют неравенству $\|x'-x''\|\leqslant\eta$, то они лежат вне шара $B(a_0,R_0)$ и тем более вне носителя K_0 функции φ. Поэтому $\varphi(x')=\varphi(x'')=0$, так что окончательно во всех случаях имеет место неравенство $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant\varepsilon$, означающее, что функция φ равномерно непрерывна на X.

Если теперь $\|\vec{h}_n-\vec{h}\|\leqslant\eta$, то для любой точки $x\in E$ справедливо неравенство $|\varphi(x+\vec{h}_n)-\varphi(x+\vec{h})|\leqslant\varepsilon$, из которого вытекает равномерная сходимость $\tau_{-\vec{h}_n}\varphi$ к $\tau_{-\vec{h}}\varphi$ при $\vec{h}_n$, стремящемся к $\vec{h}$; мы тем самым доказали, что $\tau_{\vec{h}_n}\vec{\mu}$ широко сходится к $\tau_{\vec{h}}\mu$, когда $\vec{h}_n$ стремится к $\vec{h}$.

3°) Если в предыдущем примере μ является мерой $\geqslant 0$ (или, более общо, с базой $\geqslant 0$), то доказательство становится еще проще. В самом деле, равномерная сходимость функции $\varphi(x+\vec{h}_n)$ к $\varphi(x+\vec{h})$ не является необходимой. Имеет место простая сходимость; функции $\varphi(x+\vec{h}_n)$ ограничены по модулю числом $|||\varphi|||$ и сохраняют свой носитель в фиксированном компакте. Поэтому результат вытекает из теоремы 34 Лебега. Полученный результат можно обобщить следующим образом:

Пусть H_n — последовательность непрерывных отображений X в Y, просто сходящихся при n, стремящемся к бесконечности, к некоторому непрерывному отображению H. Пусть μ — некоторая мера $\geqslant 0$ на X с конечной нормой[1]*. Тогда образы мер $H_n\mu$ широко сходятся к образу меры H_μ.*

В самом деле, для $H_n\mu$, $H\mu$ и $\varphi \in \mathscr{C}(Y)$ имеет место формула (IV, 6; 4). При n, стремящемся к бесконечности, $\varphi(H_n(x))$ сходится просто к $\varphi(H(x))$ и при этом по-прежнему остается ограниченной постоянной $|||\varphi|||$. Эта постоянная интегрируема, поскольку μ имеет конечную норму. Результат вытекает из теоремы 35 Лебега.

4°) Если $X=[a, b]$ — ограниченный интервал $\mathbb{R}$, то мера

$$\mu_n=\frac{1}{n+1}\left(\delta_{(a)}+\delta_{\left(a+\frac{b-a}{n}\right)}+\ldots+\delta_{\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}+\ldots+\delta_{(b)}\right) \qquad \text{(IV, 7; 3)}$$

при n, стремящемся к бесконечности, широко сходится к мере $dx/(b-a)$. В самом деле, если φ принадлежит $\mathscr{C}([a, b])$, то имеет место формула о среднем (IV, 1; 40), доказывающая наше утверждение.

Функции, μ-интегрируемые по Риману

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\vec{\mu}_n$ — последовательность мер Радона, широко сходящихся к предельной мере $\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности. Можно ли тогда утверждать, что $\int \varphi\, d\vec{\mu}_n$ сходится к $\int \varphi\, d\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности, для таких функций φ, которые не принадлежат $\mathscr{C}(X)$? Ясно, что это неверно при произвольной функции φ. Рассмотрим, например, снова последовательность точек a_n из X, сходящихся к a, при n, стремящемся к бесконечности. Мы видели, что $\delta_{(a_n)}$ широко сходится к $\delta_{(a)}$. Если теперь φ — некоторая функция,

[1]) Для простоты мы предположим, что μ имеет конечную норму. Можно было бы исходить из других предположений типа «собственных отображений».

разрывная в точке a, то, очевидно, $\varphi(a_n)$ не будет, вообще говоря, сходиться к $\varphi(a)$, что и является контрпримером для предыдущего предположения.

Следовательно, нужно рассматривать особые функции φ. Мы ограничимся случаем вещественных мер $\geqslant 0$.

Определение. Пусть μ — вещественная мера Радона $\geqslant 0$ на X и f — вещественная функция $\geqslant 0$ на X, ограниченная и имеющая компактный носитель. *Верхним интегралом Римана* функции f относительно меры μ, $\int^{*R} f\,d\mu$, называется точная нижняя грань мер $\mu(\varphi)$ по всевозможным функциям $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, мажорирующим функцию f.

На первый взгляд это определение кажется странным, так как оно не соответствует определению верхнего интеграла Римана относительно dx, которое было дано в § 1. Однако легко показать, что когда мера μ является мерой dx на $\mathbb{R}$, то оба определения совпадают. Обозначим через $\int^{*R_1}$ и $\int^{*R_2}$ верхние интегралы Римана в смысле § 1 и в смысле введенного определения при $\mu = dx$. Пусть φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(X)$, мажорирующая функцию f. Так как любая функция из $\mathscr{C}(X)$ интегрируема по Риману в смысле § 1, то $\int^{*R_1} f\,dx \leqslant \int^{*R_1} \varphi\,dx = \mu(\varphi)$, откуда, переходя к точной нижней грани по всевозможным функциям φ, получаем неравенство $\int^{*R_1} f\,dx \leqslant \int^{*R_2} f\,dx$. С другой стороны, можно найти такую ступенчатую функцию с компактным носителем $g \geqslant 0$, что $\int^{*R_1} f\,dx \geqslant \int g\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$. Функция g имеет вид $\sum_{i=1}^{N} g_i \chi_{|a_i, b_i|}$, где g_i постоянны и $|a_i, b_i|$ суть N интервалов из $\mathbb{R}$. Положим $M = \max_{i=1}^{N} g_i$, $a' = a - \varepsilon/4MN$, $b' = b + \varepsilon/4MN$ и обозначим через φ_i функцию, равную 1 на $[a_i, b_i]$, 0 на $]-\infty, a'_i]$ и $[b'_i, +\infty[$ и аффинную в каждом из интервалов $[a'_i, a_i]$, $[b_i, b'_i]$. Обозначим через φ функцию $\sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i$. Тогда, с одной стороны, $f \leqslant \varphi$, а, с другой стороны, справедливо неравенство

$$\int g\,dx \geqslant \int \varphi\,dx - \frac{\varepsilon}{4MN} \cdot M \cdot 2N = \int \varphi\,dx - \frac{\varepsilon}{2},$$

из которого вытекает неравенство

$$\int^{*R_1} f\,dx \geqslant \int \varphi\,dx - \varepsilon \geqslant \int^{*R_2} f\,dx - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то полученные соотношения показывают, что оба понятия верхнего интеграла Римана совпадают. В соответствии с тем, что мы видели в примере для dx (стр. 532), верхний интеграл Римана, который всегда не меньше верхнего интеграла Лебега, вообще говоря, строго больше его. Если μ — мера Радона на вещественной прямой $\mathbb{R}$, отличная от dx то имеется две возможности для определения верхнего интеграла Римана: одна — с помощью функций из $\mathscr{C}(X)$ и другая — с помощью ступенчатых функций с компактным носителем. В § 1 у нас не было другого выбора, ибо мы знали лишь интегралы от ступенчатых функций и не были знакомы с интегралами от непрерывной функции с компактным носителем. Только после введения в § 1 понятия интеграла Римана dx стала мерой Радона на $\mathbb{R}$. Напротив, для произвольной меры Радона μ на $\mathbb{R}$ мы можем выбирать одну из двух возможностей. Эти два определения, вообще говоря, не совпадают. Если, например, мы будем рассматривать меру μ на $\mathbb{R}$ как сумму меры dx и меры δ и если в качестве функции f возьмем характеристическую функцию интервала $]0, 1]$, являющуюся ступенчатой функцией, то получим равенство $\int^{*R_1} f\,d\mu = \int f\,d\mu = 1$. Если же взять произвольную функцию $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, мажорирующую функцию f, то получим: $\varphi(0) \geqslant 1$ и $\int \varphi\,d\mu \geqslant 2$, а, следовательно, $\int^{*R_2} f\,d\mu \geqslant 2$ или на самом деле $= 2$.

Однако совершенно ясно, что наиболее интересным определением в общем случае будет определение, использующее функции из $\mathscr{C}(X)$. Это объясняется не столько тем, что лишь это определение позволяет иметь дело с произвольным локально компактным пространством X, а не только с прямой $\mathbb{R}$, сколько наличием ряда важных свойств этого интеграла, о которых речь будет идти позже.

Если $\vec{f}$ — ограниченная функция с компактным носителем со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то говорят, что эта функция μ-интегрируема по Риману, если она обладает аппроксимирующей последовательностью *относительно верхнего интеграла Римана*, образованной из непрерывных разложимых функций с компактным носителем: $\vec{f}_n \in \mathscr{C}(X) \otimes \vec{F}$ (см. рассуждения перед следствием 8 теоремы 11), и $\int^{*R} \|\vec{f} - \vec{f}_n\|\,d\mu$ сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Теперь можно определить интеграл Римана от функции $\vec{f}$. Функции $\vec{f}_n$ образуют аппроксимирующую последовательность для $\vec{f}$ в смысле интегрирования по Лебегу. Поэтому $\vec{f}$ интегрируема по Лебегу и ее интеграл Римана совпадает с ее интегралом Лебега.

Каждая непрерывная функция с компактным носителем интегрируема по Риману, поскольку (см. следствие 8 теоремы 11) она является равномерным пределом разложимых функций с носителем в фиксированном компакте. На вещественной прямой $\mathbb{R}$ правильная функция не обязательно интегрируема по Риману в противоположность тому, что утверждалось в следствии 2 теоремы 8 для $\mu = dx$: при $\mu = dx + \delta$ характеристическая функция интервала $]0, 1]$ не может быть интегрируема по Риману, так как в противном случае ее верхний интеграл Римана, равный 2, совпал бы с интегралом Римана, или, что то же самое, с интегралом Лебега, равным 1.

Теоремы 1 и 6 остаются справедливыми вместе с сопровождающими их замечаниями, а следствия (кроме того, что относится к интегралам от характеристических функций интервалов) справедливы при замене ступенчатых функций непрерывными разложимыми функциями. Заметим, что так же, как и в § 1, в смысле Римана интегрируются только ограниченные функции с компактным носителем.

Теорема 62. *Пусть μ_n — последовательность вещественных мер Радона $\geqslant 0$ на X, широко сходящаяся к пределу μ при n, стремящемся к бесконечности. Пусть $\vec{f}$ — ограниченная с компактным носителем функция, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$, измеримая по каждой из мер μ_n и интегрируемая по Риману относительно меры μ. Тогда $\int \vec{f}\, d\mu_n$ сходится к $\int \vec{f}\, d\mu$.*

Доказательство. Прежде всего, $\vec{f}$ интегрируема по Лебегу по всем μ_n и μ. Согласно замечанию 2°) на стр. 424 (где ступенчатые функции заменены непрерывными разложимыми функциями), можно найти непрерывную с компактным носителем разложимую функцию $\vec{g}$ со значениями в $\vec{F}$ и вещественную $\geqslant 0$ непрерывную функцию h с компактным носителем, такие, что $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant h$ и $\mu(h) \leqslant \varepsilon/8$. Поскольку μ_n широко сходятся к μ, можно найти такое целое число p, что для $n \geqslant p$ имеет место неравенство $|\mu_n(h) - \mu(h)| \leqslant \varepsilon/8$, а, следовательно, $\mu_n(h) \leqslant \varepsilon/4$.

С другой стороны, из равенства $\int \vec{g}\, d\nu = \sum_{i=1}^{N} \int \vec{g}_i \varphi_i\, d\nu = \sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i \nu(\varphi)$

следует, что сходимость μ_n к μ при любой непрерывной разложимой функции $\vec{g}$ с компактным носителем влечет за собой сходимость $\int \vec{g}\,d\mu_n$ к $\int \vec{g}\,d\mu$, и потому существует такое целое q, что для всех $n \geqslant q$ имеет место неравенство

$$\left\| \int \vec{g}\,d\mu_n - \int \vec{g}\,d\mu \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для $n \geqslant \max(p, q)$ непосредственно следует неравенство

$$\left\| \int \vec{f}\,d\mu_n - \int \vec{f}\,d\mu \right\| \leqslant \int \|\vec{f} - \vec{g}\|\,d\mu_n + \left\| \int \vec{g}\,d\mu_n - \int \vec{g}\,d\mu \right\| + \\ + \int \|\vec{g} - \vec{f}\|\,d\mu \leqslant \mu_n(h) + \frac{\varepsilon}{2} + \mu(h) \leqslant \varepsilon,$$

из которого следует утверждение теоремы.

Замечание. Эта теорема очень интересна: относительно функции $\vec{f}$ требуется всего лишь ее μ-интегрируемость по Риману *по предельной мере* μ и не делается никаких аналогичных предположений относительно интегрируемости по μ_n (конечно, предполагается, что $\vec{f}$ μ_n-измерима, а, следовательно, μ_n-интегрируема по Лебегу).

Теорема 63. *Для того чтобы ограниченная с компактным носителем функция $\vec{f}$, определенная на X, со значениями в $\vec{F}$ была μ-интегрируемой по Риману, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело μ-меру Лебега, равную нулю.*

Доказательство. 1°) Предположим, что $\vec{f}$ μ-интегрируема по Риману, и пусть $\vec{g}$ и h — функции, определенные так же, как в теореме 62: $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant h$, $\mu(h) \leqslant \varepsilon$. Назовем колебанием функции $\vec{f}$ на окрестности $\mathscr{V}$ точки a величину $\omega(\vec{f}; \mathscr{V}) = \sup\limits_{x, y \in \mathscr{V}} \|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\|$. Колебанием функции $\vec{f}$ в точке a назовем число $\omega(\vec{f}; a) = \inf\limits_{\mathscr{V}} \omega(\vec{f}; \mathscr{V})$, где inf берется по всевозможным окрестностям $\mathscr{V}$ точки a[1]). Функция $\vec{f}$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю. Так как функция $\vec{g}$ непрерывна, то имеет место неравенство $\omega(\vec{f}; a) \leqslant \omega(\vec{g}; a) + \omega(\vec{f} - \vec{g}; a) = \omega(\vec{f} - \vec{g}; a)$. В каждой

[1]) Это определение совпадает с частным определением колебания, данным на стр. 196 для правильных функций.

окрестности $\mathscr{V}$ точки a имеет место неравенство

$$\|(\vec{f}(x)-\vec{g}(x))-(\vec{f}(y)-\vec{g}(y))\| \leqslant h(x)+h(y).$$

Поскольку функция h непрерывна, то мы получаем отсюда, что $\omega(\vec{f}-\vec{g};\ a) \leqslant 2h(a)$.

Обозначим теперь через A_α множество $\{x \in X;\ \omega(\vec{f}, x) \geqslant \alpha\}$, $\alpha > 0$. Это множество содержится в множестве $\{x \in X;\ h(x) \geqslant \alpha/2\}$. Так как $\mu(h) \leqslant \varepsilon$, то его внешняя μ-мера мажорируется числом $2\varepsilon/\alpha$. Поскольку это справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то μ-мера равна нулю. Так как этот результат имеет место при любом α, то множество тех точек, в которых колебание функции $\vec{f}$ больше 0, т. е. множество точек разрыва функции $\vec{f}$, имеет нулевую μ-меру.

2°) Обратно, предположим, что множество точек разрыва функции $\vec{f}$ имеет μ-меру, равную нулю. Покажем сначала, что отсюда будет следовать μ-измеримость функции $\vec{f}$ (и, следовательно, поскольку она ограничена и имеет компактный носитель, μ-интегрируемость в смысле Лебега). Действительно, она очевидным образом удовлетворяет критерию Лузина (следствие из теоремы 33): если K — произвольный компакт и если множество A точек разрыва функции $\vec{f}$ имеет μ-меру, равную нулю, то можно найти такое открытое множество $\mathcal{O}$, содержащее A, μ-меры $\leqslant \delta$, что для $K_\delta = K \cap \complement\mathcal{O}$ имеет место неравенство $\mu(K-K_\delta) \leqslant \delta$. В каждой точке K_δ функция $\vec{f}$ непрерывна на X и, следовательно, тем более непрерывно ее сужение на K_δ.

Поскольку функция $\vec{f}$ μ-интегрируема по Лебегу, то, согласно теореме 32, существует такая разложимая непрерывная функция $\vec{g}$ с компактным носителем, что $\|\vec{f}-\vec{g}\| = h$, где $\int h\,d\mu \leqslant \varepsilon/2$. Обозначим через h^* «верхнюю функцию», присоединенную к h, т. е. функцию, определенную следующим образом: для каждой окрестности $\mathscr{V}$ точки a в X полагают $h^*(\mathscr{V}) = \sup\limits_{x \in \mathscr{V}} h(x)$, а затем полагают $h^*(a) = \inf\limits_{\mathscr{V}} h^*(\mathscr{V})$. Легко видеть, что h^* полунепрерывна сверху. В самом деле, каждая точка a имеет такую открытую окрестность $\mathscr{V}$, что $h^*(\mathscr{V}) \leqslant h^*(a)+\varepsilon$, и поэтому для каждой точки $x \in \mathscr{V}$ имеют место неравенства $h^*(x) \leqslant h^*(\mathscr{V}) \leqslant h^*(a)+\varepsilon$. Впрочем, h^* совпадает с h в каждой точке, где h непрерывна, т. е. μ-почти всюду. Поэтому $\int h\,d\mu = \int h^*\,d\mu$.

Пусть k — произвольная непрерывная интегрируемая функция, мажорирующая функцию h^* (например, $k \in \mathscr{C}(X)$). Тогда $k-h^*$ полунепрерывна снизу, $\geqslant 0$ и, значит, борелевская. Она мажорируется функцией k и поэтому интегрируема. Согласно теореме 39_2, $\int (k - h^*)\,d\mu$ является точной верхней гранью для мер $\mu(\psi)$, $\psi \in \mathscr{C}(X)$, $0 \leqslant \psi \leqslant k - h^*$, а, значит, $\int h^*\,d\mu$ является точной нижней гранью мер $\mu(k - \psi) = \mu(\varphi)$ для всех непрерывных интегрируемых функций $\varphi \geqslant 0$, мажорирующих h^* (в пространстве функций $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, если функция k взята также в $\mathscr{C}(X)$). Таким образом, можно найти такую функцию $\varphi \in \mathscr{C}(X)$, $\varphi \geqslant h^* \geqslant h$, что $\mu(\varphi) \leqslant \int h^*\,d\mu + \varepsilon/2 = \int h\,d\mu + \varepsilon/2 \leqslant \leqslant \varepsilon$. Но тогда $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varphi$, где $\mu(\varphi) \leqslant \varepsilon$. Поскольку это справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то функция $\vec{f}$ μ-интегрируема по Риману.

Следствие 1. *Для того чтобы часть A множества X с компактным замыканием имела μ-интегрируемую по Риману характеристическую функцию, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела μ-меру (Лебега), равную нулю.*

Доказательство. Так как в окрестности каждой внутренней точки части A характеристическая функция постоянна и равна 1, а в окрестности каждой внешней точки этой части она постоянна и равна 0, то множество точек разрыва характеристической функции множества A является совокупностью граничных точек этого множества.

Следствие 2. *Если меры $\mu_n \geqslant 0$ на X и широко сходятся к μ при n, стремящемся к бесконечности, и если A есть часть X с компактным замыканием, измеримая для всех μ_n, граница которой $\dot{A}$ имеет нулевую меру для предельной меры μ, то $\mu_n(A)$ сходятся к $\mu(A)$.*

Следствие 3. *Если меры Радона μ_n на $\mathbb{R}$ при n, стремящемся к бесконечности, широко сходятся к мере dx и если ограниченная с компактным носителем функция φ измерима при всех μ_n и интегрируема по Риману относительно dx, то $\int \varphi\,d\mu_n$ сходится к $\int \varphi\,dx$.*

На прямой $\mathbb{R}$ имеет место теорема, обратная к предыдущим теоремам, которая представляет и самостоятельный интерес:

Теорема 64. *Пусть μ_n — меры Радона $\geqslant 0$ на прямой $\mathbb{R}$. Если для каждого ограниченного интервала $[a, b]$, такого, что $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, при n, стремящемся к бесконечности, $\mu_n([a, b])$ сходятся к $\mu([a, b])$, то меры μ_n широко сходятся к мере μ.*

Читателю предлагается доказать эту теорему в качестве упражнения.

Широкая сходимость и равномерная сходимость

Рассмотрим теперь задачи другого характера. Предположим, что меры $\vec{\mu}_n$ широко сходятся к некоторому пределу $\vec{\mu}$. Выясним, можно ли для функций φ найти такие множества $\mathscr{A}$ функций φ, чтобы $\vec{\mu}_n(\varphi)$ сходились к $\vec{\mu}(\varphi)$ равномерно на $\mathscr{A}$.

Как мы видели ранее, такая равномерная сходимость не может иметь места, если $\mathscr{A}$ является единичным шаром из $\mathscr{C}_K(X)$. Значит, нужны множества меньшие, чем единичный шар.

Здесь мы воспользуемся следующей общей теоремой функционального анализа:

Теорема 65 (Банаха — Штейнгауза). *Пусть u_n — линейные непрерывные отображения банахова пространства $\vec{E}$ в векторное нормированное пространство $\vec{F}$. Если функции u_n, определенные на $\vec{E}$, со значениями в $\vec{F}$ при n, стремящемся к бесконечности, просто сходятся к некоторой предельной функции u, то нормы $\|u_n\|$ ограничены некоторым фиксированным числом M, функция u линейна и непрерывна, а последовательность u_n сходится к u равномерно на каждой компактной части $\mathscr{A}$ пространства $\vec{E}$.*

Доказательство. Здесь существенным является тот факт, что $\vec{E}$ банахово, т. е. полно. Без этого предположения все результаты становятся неверными. Рассматриваемая теорема — одна из редких теорем, в которых *исходное пространство* надо считать полным. Теорема Банаха — Штейнгауза является одной из наиболее глубоких и плодотворных теорем современного анализа.

Докажем сначала, что нормы функций u_n ограничены одним и тем же числом $M \geqslant 0$, но для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма (теорема Бэра)[1]. *Пусть E — полное метрическое пространство, и пусть $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ — последовательность открытых множеств, плотных в E. Тогда их пересечение $A = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathcal{O}_n$ (которое теперь не должно быть открытым) также плотно в E.*

[1]) Мы ее назвали леммой, хотя это одна из наиболее важных теорем анализа, значение которой далеко выходит за те границы, которыми мы ограничили здесь ее применение.

Доказательство леммы. Пусть Ω — произвольное открытое множество из E. Нам надо доказать, что $\Omega \cap A$ не пусто. Поскольку множество $\mathcal{O}_0$ плотно, то существует по крайней мере одна точка пересечения $\Omega \cap \mathcal{O}_0$. Поскольку последнее множество открыто, существует даже некоторый замкнутый шар $B_0 = B(a_0, \delta_0)$, полностью содержащийся в $\Omega \cap \mathcal{O}_0$. Повторим теперь эту операцию, заменив $\mathcal{O}_0$ на $\mathcal{O}_1$ и Ω на открытый шар $\overset{\circ}{B}_0$. Тогда найдется некоторый замкнутый шар $B_1 = B(a_1, \delta_1)$, полностью лежащий в $\overset{\circ}{B}_0 \cap \mathcal{O}_1$. При этом мы выберем $\delta_1 \leqslant 1$. Продолжая так далее, мы сможем построить последовательность точек a_n и последовательность чисел $\delta \leqslant 1/n$, такие, чтобы каждый замкнутый шар $B_n = B(a_n, \delta_n)$ содержался в открытом шаре $\overset{\circ}{B}_{n-1} = \overset{\circ}{B}_{n-1}(a_{n-1}, \delta_{n-1})$ и в $\mathcal{O}_n$. Все эти замкнутые шары лежат в Ω.

Последовательность центров шаров a_n является последовательностью Коши. В самом деле, все точки a_{n+p} при $p \geqslant 0$ содержатся в замкнутом шаре B_n и поэтому $d(a_{n+p}, a_n) \leqslant 1/n$. Поскольку пространство E предполагалось полным, последовательность точек a_n сходится к некоторой предельной точке a. Так как все точки a_{n+p} при $p \geqslant 0$ содержатся в шаре B_n, то точка a заведомо лежит в B_n, а, следовательно, и в $\Omega \cap \mathcal{O}_n$. Поскольку это верно для любого n, то $a \in \Omega \cap A$, чем и заканчивается доказательство леммы.

Часто оказывается удобным пользоваться этой леммой, применяя переход к дополнениям. Дополнение к открытому множеству замкнуто, а дополнение к плотному множеству, внешность которого пуста, является множеством с пустой внутренностью. Поэтому имеет место такое утверждение:

Пусть E — полное метрическое пространство и F_n — последовательность замкнутых множеств с пустой внутренностью. Тогда объединение $F = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} F_n$ (которое не обязано быть замкнутым) имеет пустую внутренность (в частности, $F \neq E$).

Совершенно ясно, что неполное метрическое пространство этим свойством не обладает. Например, поле Q рациональных чисел с обычной метрикой является объединением счетного числа множеств, сводящихся к одной точке: каждая точка замкнута в Q и имеет пустую внутренность.

Докажем теперь первую часть теоремы, а именно ограниченность норм $\| u_n \|$. Обозначим через F_k множество точек $x \in E$, в которых все $\|\overrightarrow{u_n(x)}\|$ не превосходят k. Так как функция u_n непрерывна, то множество $F_{n,k} = \{x \in E;\ \|\overrightarrow{u_n(x)}\| \leqslant k\}$ замкнуто, а, следовательно, $F_k = \bigcap\limits_n F_{n,k}$ также замкнуто. Объединение множеств F_k при $k = 0, 1, 2, \ldots$ дает все пространство E. В самом деле, для каждой точки $x \in E$ по предположению функции $\overrightarrow{u_n(x)}$ имеют предел, а, значит, их значения ограничены, т. е. существует такое целое число k (зависящее от x), что все $\|\overrightarrow{u_n(x)}\| \leqslant k$ и, значит, $x \in F_k$. Поскольку E — полное метрическое пространство (банахово), то согласно лемме Бэра внутренность всех F_k не может быть пустой. Значит, существует такое k, при котором F_k имеет непустую внутренность, а, следовательно, имеется некоторый шар $B(a, \rho)$, содержащийся в F_k. Теперь для $\|x\| \leqslant \rho$ и для любого n имеем $\|\overrightarrow{u_n(x)}\| \leqslant$ $\leqslant \|\overrightarrow{u_n(x+a)}\| + \|\overrightarrow{u_n(a)}\| \leqslant 2k$, а, следовательно, $\|u_n\| \leqslant 2k/\rho$, чем и завершается доказательство нашего утверждения. (Заметим, что в этом результате вовсе не требуется, чтобы функции u_n сходились. Надо лишь, чтобы для каждого $x \in E$ нормы $\|\overrightarrow{u_n(x)}\|$ были ограниченными некоторой константой, которая, вообще говоря, произвольно зависит от x. Однако из предыдущего доказательства следует, что $\|u_n\|$ ограничены, т. е. существует такое число M, что эта константа для $\|\overrightarrow{u_n(x)}\|$ будет $\leqslant M\,\|x\|$.)

Очевидно, функция u линейна. В самом деле, так как $u_n(\vec{x}+\vec{y}) = u_n(\vec{x}) + u_n(\vec{y})$, то переходом к пределу получаем, что $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$. Точно так же проверяется, что $u(k\vec{x}) = ku(\vec{x})$. Из неравенства $\|u_n(\vec{x})\| \leqslant M\,\|\vec{x}\|$ переходом к пределу можно получить неравенство $\|u(\vec{x})\| \leqslant M\,\|\vec{x}\|$, из которого следует, что функция u непрерывна и ее норма $\leqslant M$.

Пусть теперь $\mathscr{A}$ — некоторый компакт пространства $\vec{E}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется конечное число открытых шаров с центрами в множестве $\mathscr{A}$ радиуса $\varepsilon/3M$, покрывающих $\mathscr{A}$ (в силу определения компактного множества). Пусть $(\vec{a}_i)_{i \in I}$ — центры этих шаров. Согласно предположению о простой сходимости, для каждого из этих центров $\vec{a}_i$ можно найти такое целое число p_i, что при $n \geqslant p_i$ имеет место неравенство

$$\|u_n(\vec{a}_i) - u(\vec{a}_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV, 7; 16)}$$

Если теперь через p обозначить наибольшее из чисел p_i, то можно убедиться, что для $n \geqslant p$ и $\vec{X}$, находящихся от $\vec{a}_i$ на расстоянии $< \varepsilon/3M$, имеет место неравенство

$$\|u_n(\vec{x}) - u(\vec{x})\| \leqslant \|u_n(\vec{x}) - u_n(\vec{a}_i)\| + \|u_n(\vec{a}_i) - u(\vec{a}_i)\| + \\ + \|u(\vec{a}_i) - u(\vec{x})\| \leqslant M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \quad \text{(IV, 7; 17)}$$

Однако так как каждая точка $\mathscr{A}$ находится на расстоянии $< \varepsilon/3M$ от одной из точек $\vec{a}_i$, то окончательно для любой точки $\vec{x} \in \mathscr{A}$ и $n \geqslant p$ получаем неравенство $\|u_n(\vec{x}) - u(\vec{x})\| \leqslant \varepsilon$. Значит, u_n сходится к u равномерно на множестве $\mathscr{A}$, и этим заканчивается доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Пусть меры $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$ при n, стремящемся к бесконечности, широко сходятся к некоторой мере $\vec{\mu}$. Тогда для каждого компакта K нормы $\|\vec{\mu}_n\|_K$ равномерно ограничены. Если $\mathscr{A}$ — некоторый компакт пространства $\mathscr{C}_K(X)$, то $\vec{\mu}_n(\varphi)$ сходятся к $\vec{\mu}(\varphi)$ равномерно по φ в $\mathscr{A}$* [1].

Так как $\mathscr{C}_K(X)$ — банахово пространство (см. стр. 447), то это следствие непосредственно вытекает из сформулированной теоремы.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\vec{\mu}_n$ — меры, широко сходящиеся к мере $\vec{\mu}$, и φ_n — функции из $\mathscr{C}(X)$, равномерно сходящиеся к некоторой функции φ и сохраняющие свои носители в одном и том же компакте K. Тогда $\vec{\mu}_n(\varphi_n)$ сходятся к $\vec{\mu}(\varphi)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 нормы $\|\vec{\mu}_n\|_K$ ограничены одним и тем же числом $M \geqslant 0$. С другой стороны, φ_n сходятся в $\mathscr{C}_K(X)$ к φ. Далее,

$$\vec{\mu}_n(\varphi_n) - \vec{\mu}(\varphi) = \vec{\mu}_n(\varphi_n - \varphi) + (\vec{\mu}_n(\varphi) - \vec{\mu}(\varphi)). \quad \text{(IV, 7; 17}_2\text{)}$$

В силу условия широкой сходимости второй член правой части сходится к $\vec{0}$. Так как норма первого члена мажорируется величиной $M\,|||\,\varphi_n - \varphi\,|||$, то он также стремится к нулю, чем и заканчивается доказательство следствия.

---

[1] Вообще говоря, $\mathscr{C}_K(X)$ — бесконечномерное пространство. Его единичный шар не компактен, и поэтому в качестве $\mathscr{A}$ нельзя брать единичный шар, как мы это уже отмечали ранее.

Компактные подмножества пространства $\mathscr{C}_K(X)$

Для того чтобы иметь возможность применить следствие 1, нам надо уметь определять компактные множества в пространствах $\mathscr{C}_K(X)$. В дальнейшем мы займемся общим изучением компактов, а сейчас ограничимся частными случаями этих множеств.

Теорема 66. *Пусть A, B, C — три топологических пространства, A — компактное, а C — метрическое. Пусть f — непрерывное отображение $A \times B$ в C. Тогда для каждого $y \in B$ можно определить частное отображение f_y: $x \to f(x, y)$ множества A в C, $f_y \in (C^A)_{cb}$.*

Если y сходится к b в пространстве B, то частная функция f_y сходится к частной функции f_b равномерно на A. Кроме того, отображение $y \to f_y$, которое каждому элементу $y \in B$ ставит в соответствие частную функцию f_y, является непрерывным отображением B в $(C^A)_{cb}$.

Доказательство. Зафиксируем точку b в B и зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Какова бы ни была точка a, функция f непрерывна в точке (a, b). Следовательно, существует такая открытая окрестность $\mathscr{U}_a$ точки a и такая окрестность $\mathscr{V}_a$ точки b в множествах A и B соответственно, что для $x \in \mathscr{U}_a$ и $y \in \mathscr{V}_a$ имеет место неравенство

$$d(f(x, y), f(a, b)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(IV, 7; 18)}$$

Тем более, выполняется неравенство

$$d(f(x, b), f(a, b)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(IV, 7; 19)}$$

Отсюда можно вывести неравенство, имеющее место для $x \in \mathscr{U}_a$, $y \in \mathscr{V}_a$:

$$d(f(x, y), f(x, b)) \leqslant d(f(x, y), f(a, b)) + d(f(a, b), f(x, b)) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(IV, 7; 20)}$$

Когда точка a меняется, окрестности $\mathscr{U}_a$ образуют открытое покрытие *компакта* A. Следовательно, можно выбрать конечное покрытие $(\mathscr{U}_{a_i})_{i \in I}$ множества A. Этим окрестностям $\mathscr{U}_{a_i}$ соответствуют окрестности $\mathscr{V}_{a_i}$. Обозначим через $\mathscr{V}$ пересечение всех $\mathscr{V}_{a_i}$. Множество $\mathscr{V}$ является некоторой окрестностью точки b в B. Тогда для x из $\mathscr{U}_{a_i}$ и y из $\mathscr{V}$ имеет место неравенство (IV, 7; 20). Поскольку окрестности $\mathscr{U}_{a_i}$ образуют покрытие A, предыдущее неравенство имеет место для каждого $x \in A$ и каждого $y \in \mathscr{V}$, что можно записать так: $d(f_y, f_b) \leqslant \varepsilon$ для $y \in \mathscr{V}$, а это соотношение доказывает теорему.

Замечание. Если оба пространства A и B метрические и компактные, то доказательство становится значительно проще. В самом деле, в этом случае, согласно теореме 31 гл. II, функция f равномерно непрерывна. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\eta > 0$, что из неравенств $d(x', x'') \leqslant \eta$, $d(y', y'') \leqslant \leqslant \eta$ следует $d(f(x', y'), f(x'', y'')) \leqslant \varepsilon$. В частности, из $d(y, b) \leqslant \leqslant \eta$ при любом x следует неравенство $d(f(x, y), f(x, b)) \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $d(f_y, f_b) \leqslant \varepsilon$, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Пусть A и B — компактные пространства, C — метрическое пространство и f — непрерывное отображение $A \times B$ в C. Тогда множество частных отображений f_y из A в C, когда y пробегает пространство B, является компактным подмножеством пространства $(C^A)_{cb}$.*

В самом деле, мы имеем здесь образ компакта B при непрерывном отображении $y \to f_y$.

Следствие 2. *Пусть X — локально компактное пространство, T — компактное пространство. Пусть φ — функция с вещественными или комплексными значениями, непрерывная на $X \times T$. Тогда, каким бы ни был элемент $t \in T$, существует частное отображение φ_t, являющееся вещественной или комплексной функцией, непрерывной на X. Предположим, что, когда t пробегает T, функция φ_t имеет носитель в одном и том же компакте K пространства X. Тогда, если t пробегает T, множество функций φ_t образует компактную часть пространства $\mathscr{C}_K(X)$.*

Для доказательства достаточно применить следствие 1 к $f = \varphi$, $A = K$, $B = T$, $C = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Следствие 3. *Предположим, что выполнены условия следствия 2. Пусть $\vec{\mu}_n$ — меры Радона на X со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{E}$, широко сходящиеся к предельной мере $\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности. Тогда интегралы $\int \varphi(x, t)\, d\vec{\mu}_n(x)$ при n, стремящемся к бесконечности, сходятся к $\int \varphi(x, t)\, d\vec{\mu}(x)$ равномерно по t в пространстве T.*

Широкая сходимость последовательности мер к мере Дирака

Теорема 67. *Пусть μ_n — последовательность мер $\geqslant 0$ на локально компактном пространстве X. Предположим, что в каждой компактной окрестности $\mathscr{V}$ точки $a \in X$ последовательность интегралов $\int_{\mathscr{V}} d\mu_n$ сходится к 1 при n, стремящемся* *к бесконечности. Тогда меры* μ_n *широко сходятся к мере Дирака* $\delta_{(a)}$.

Перед началом доказательства заметим, что в нашем предположении подразумевается, что, каким бы ни был компакт K пространства X, *не содержащий* a, $\int\limits_K d\mu_n$ сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности.

В самом деле, дополнение к K является некоторым открытым множеством X, т. е. некоторым локально компактным пространством[1]). Пусть теперь $\mathscr{V}$ — компактная окрестность точки a в этом пространстве, т. е. компактная окрестность точки a в X, не имеющая общих точек с K.

Тогда, с одной стороны, $\int\limits_{\mathscr{V}} d\mu_n$ сходится к 1, а с другой — $\int\limits_{\mathscr{V}\cup K} d\mu_n$ сходится к 1 и, значит, $\int\limits_K d\mu_n$ сходится к 0.

Условия теоремы означают, что общая масса на конечном расстоянии стремится к 1 и стремится сконцентрироваться в точке a.

Доказательство. Пусть φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(X)$ с компактным носителем K. В силу непрерывности φ, при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество, содержащее a, что для любой точки x из этого множества имеет место неравенство $|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \varepsilon/4$. Если $\mathscr{V}$ — компактная окрестность точки a в этом открытом множестве, то это неравенство тем более сохраняется на $\mathscr{V}$. Разложим теперь разность $\int \varphi\, d\mu_n - \varphi(a)$ в сумму трех членов, а именно:

$$\int \varphi\, d\mu_n - \varphi(a) = \int\limits_{\complement\mathscr{V}} \varphi\, d\mu_n + \int\limits_{\mathscr{V}} (\varphi(x) - \varphi(a))\, d\mu_n(x) + \\ + \varphi(a)\left[\int\limits_{\mathscr{V}} d\mu_n - 1\right]. \qquad \text{(IV, 7; 21)}$$

Последовательно оценим сверху модули этих трех членов.

1°) Первое слагаемое правой части стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. В самом деле, поскольку φ имеет носитель в K, интеграл на $\complement\mathscr{V}$ в действительности является интегралом на пересечении $K \cap \complement\mathscr{V}$. Поэтому он мажорируется числом $|||\varphi||| \int\limits_A d\mu_n$, где A — замыкание $K \cap \complement\mathscr{V}$. Так как это множество замкнуто и содержится в компакте K, то множество A компактно. С другой стороны, поскольку множество

[1]) Смотри примечания на стр. 453 и на стр. 475.

A содержится в $\complement\mathscr{V}$ и a не является точкой прикосновения множества A, то множество A не содержит точки a.

Согласно замечанию, предшествовавшему доказательству, $\int\limits_A d\mu_n$ сходится к 0.

2°) Рассмотрим теперь третье слагаемое. По условию, величина, заключенная в квадратные скобки, стремится к 0, и, следовательно, третье слагаемое также сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Значит, существует такое целое число p', что при $n \geqslant p'$ сумма абсолютных величин первого и третьего слагаемых не превосходит $\varepsilon/2$.

3°) Рассмотрим, наконец, второе слагаемое. Согласно выбору $\mathscr{V}$, оно мажорируется величиной $\frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{\mathscr{V}} d\mu_n$. Последний интеграл стремится к 1 при n, стремящемся к бесконечности. Следовательно, существует такое целое число p'', что этот интеграл для $n \geqslant p''$ не больше 2. Но тогда для $n \geqslant p''$ второе слагаемое не превосходит по модулю $\varepsilon/2$. Если теперь через p обозначить наибольшее из целых чисел p' и p'', то мы увидим, что для $n \geqslant p$ будет иметь место неравенство $\left|\int \varphi\, d\mu_n - \varphi(a)\right| \leqslant \varepsilon$, и теорема доказана.

Пример 1. Пусть μ_n — последовательность мер $\geqslant 0$, полная масса которых $\int d\mu_n$ сходится к 1 и носитель которых равномерно сходится к точке a. Под этим мы понимаем следующее: какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ точки a, носитель меры μ_n для достаточно больших n содержится в $\mathscr{V}$. Тогда меры μ_n широко сходятся к $\delta_{(a)}$ при n, стремящемся к бесконечности. Это очевидно, так как условия теоремы выполняются.

Пример 1_2. Как частный случай рассмотрим последовательность функций $p_n \geqslant 0$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$, интегрируемых относительно меры dx и таких, что $\int p_n(x)\,dx$ сходится к 1 при n, стремящемся к бесконечности, причем носитель функции p_n равномерно сходится к точке a. Тогда меры $p_n\,dx$ широко сходятся к мере $\delta_{(a)}$.

Этот пример дает новую интерпретацию некоторых случаев, для которых не применима теорема о сходимости Лебега.

Рассмотрим, например, следующую последовательность функций p_n на $\mathbb{R}$:

$$p_n(x) = \begin{cases} n & \text{для} \quad 0 < x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{IV, 7; 22}$$

Эти функции всюду сходятся к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Однако они не мажорируются никакой функцией $\geqslant 0$, локально интегрируемой по мере dx (см. формулу (IV, 4; 11)). Следовательно, теорема Лебега здесь не применима, и лучшим доказательством этого факта служит то, что все интегралы $\int p_n\,dx$ равны 1 и, следовательно, не стремятся к 0.

Если теперь φ принадлежит $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, то $\int \varphi p_n\,dx$ не сходится к 0. Мы отмечали этот результат в связи с теоремой Лебега. Теперь дадим ему другое истолкование: из сказанного в примере 1_2 вытекает, что *меры $p_n\,dx$ широко сходятся не к мере* 0, *а к мере* δ.

Интеграл $\int p_n\varphi\,dx$ сходится к $\varphi(0)$. Такое явление встречается довольно часто. Когда функции p_n просто сходятся почти всюду к предельной функции p, но таким образом, что нет сходимости интегралов, то это часто означает [1]), что меры $p_n\,dx$ сходятся к сумме меры $p\,dx$ и меры, представляющей некоторые точечные массы.

Пример 2. Пусть f — некоторая функция $\geqslant 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, интегрируемая по мере $dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$ с $\int f\,dx = 1$. Если для вещественного $k \neq 0$ положить

$$\mu_k = |k|^n f(kx)\,dx, \qquad \text{(IV, 7; 23)}$$

то μ_k будет образом $f dx$ при гомотетии $x \to x/k$ (см. формулу (IV, 6; 28) для $n = 1$, а затем теорему 102 для произвольного n). Меры μ_k широко сходятся к мере Дирака δ при k, стремящемся к бесконечности. Это можно увидеть, применив теорему 67, или непосредственно, используя замену переменных. Для $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\mu_k(\varphi) = \int \varphi(x) f(kx) |k|^n\,dx. \qquad \text{(IV, 7; 24)}$$

Производя замену переменных $kx = \xi$, получаем (см. далее теорему 102):

$$\mu_k(\varphi) = \int \varphi\left(\frac{\xi}{k}\right) f(\xi)\,d\xi. \qquad \text{(IV, 7; 25)}$$

При k, стремящемся к бесконечности, ξ/k стремится к 0. Так как функция φ непрерывна, то при этом $\varphi(\xi/k)$ сходится просто к $\varphi(0)$, а, следовательно, функция $\xi \to \varphi(\xi/k) f(\xi)$ сходится просто к $\varphi(0) f(\xi)$. Поскольку она остается ограниченной

[1]) Конечно, не всегда! Если вместо n, как в (IV, 7; 22), мы возьмем n^α, как в (IV, 4; 11), при $\alpha > 1$, то ничего подобного не получится.

неотрицательной функцией $|||\varphi||| f(\xi)$, интегрируемой по $d\xi$, то из теоремы 35 Лебега следует, что $\mu_k(\varphi)$ при k, стремящемся к бесконечности, стремится к $\varphi(0)\int f(\xi)\,d\xi=\varphi(0)$, откуда следует требуемое заключение.

Имеется и более прямое доказательство. Мы видим, что $\int f\,dx$ есть мера $\geqslant 0$, имеющая полную массу, равную 1. Гомотетия с центром в 0 и отношением $1/k$ при k, стремящемся к бесконечности, стягивает все массы к началу координат. Пример 3°) на стр. 634 теперь дает самое короткое доказательство: гомотетия H_k с отношением $1/k$ при k, стремящемся к бесконечности, сходится к гомотетии H с нулевым отношением, т. е. к постоянному отображению $x\to 0$, а, следовательно, $H_k\mu$ сходится к $H\mu$. Поскольку масса μ равна $+1$, то, согласно примеру 1°) на стр. 628, $H\mu=\delta$.

Вот два часто используемых примера.

а) Функция f на $\mathbb{R}$ определена формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \qquad \text{(IV, 7; 26)}$$

Она полностью удовлетворяет требуемым условиям, поскольку, как мы увидим позже, интеграл от f равен 1.

Последовательность мер $\sqrt{n}\,f(\sqrt{n}\,x)\,dx$:

$$\mu_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{nx^2}{2}}\sqrt{n}\,dx \qquad \text{(IV, 7; 27)}$$

широко сходится к δ при n, стремящемся к бесконечности.

На рис. 18 изображены графики двух из этих колоколообразных кривых, представляющих плотности мер μ_n по отношению к мере Лебега, т. е. функции $\sqrt{n}\,f(\sqrt{n}\,x)$.

Можно также взять

$$f(x)=e^{-\pi x^2},\qquad \sqrt{n}\,f(\sqrt{n}\,x)=\sqrt{n}\,e^{-n\pi x^2}. \qquad \text{(IV, 7; 28)}$$

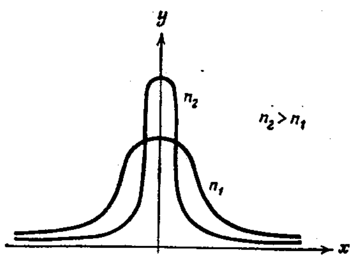

Рис. 18.

b) Функция f задана формулой

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \quad (IV, 7; 29)$$

Ее интеграл, очевидно, равен 1, и потому меры

$$\mu_n=\frac{n\,dx}{\pi(1+n^2x^2)} \quad (IV, 7; 30)$$

при n, стремящемся к бесконечности, широко сходятся к мере δ.

Замечание. Эти свойства были бы невозможными без введения понятия широкой сходимости: если K — компактный интервал $[-A, A]$, то, согласно сказанному относительно формулы (IV, 2; 16),

$$\|\mu_k-\delta\|_K=\|f(kx)|k|^n\,dx-\delta\|_K \quad \textit{равно} \quad \int\limits_K f(kx)|k|^n\,dx+1$$

и стремится к 2 при k, стремящемся к бесконечности. Локальная сходимость по норме отсутствует!

Теорема 68. *Существует такая последовательность полиномов $P_n \geqslant 0$ вещественной переменной, что меры $P_n dx$ широко сходятся к δ при n, стремящемся к бесконечности.*

Эта теорема имеет большое значение. Из нее в дальнейшем будет получена теорема 80_2 Вейерштрасса (о приближении непрерывных функций полиномами).

Доказательство. Пусть e_n — последовательность положительных чисел, стремящихся к $+\infty$ при n, стремящемся к бесконечности. Положим

$$P_n(x)=\frac{e_n}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{e_n^2x^2}{2n}\right)^n. \quad (IV, 7; 31)$$

Для четного n эта величина, очевидно, $\geqslant 0$.

Покажем, что $P_n dx$ широко сходятся к δ при n, стремящемся к бесконечности, если только числа $e_n/\sqrt{n}$ стремятся к нулю. Для этого можно было бы использовать теорему 67, но доказательство также просто можно провести и непосредственно. Пусть $\varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Тогда

$$(P_n\,dx)(\varphi)=\int\frac{e_n}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{e_n^2x^2}{2n}\right)^n\varphi(x)\,dx. \quad (IV, 7; 32)$$

Пусть $[-A, A]$ — интервал, содержащий носитель функции φ. Последний интеграл фактически вычисляется на $[-A, A]$.

Выполним замену переменных $e_n x = \xi$. Тогда

$$(P_n\,dx)(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(1 - \frac{\xi^2}{2n}\right)^n \varphi\left(\frac{\xi}{e_n}\right) d\xi, \qquad \text{(IV, 7; 33)}$$

где интеграл в действительности вычисляется на $[-e_n A, +e_n A]$.

Для фиксированного ξ при n, стремящемся к бесконечности, функция $\varphi(\xi/e_n)$, в силу ее непрерывности в начале координат, стремится к $\varphi(0)$. Переменная $(1-\xi^2/2n)^n$ стремится при этом к $e^{-\xi^2/2}$. Поэтому интегрируемая функция сходится просто к функции $\varphi(0)e^{-\xi^2/2}$. Если применима теорема 35 Лебега, то правая часть равенства (IV, 7; 33) сходится к $\frac{\varphi(0)}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\xi^2/2}\,d\xi = \varphi(0)$, и тогда теорема будет доказана.

Найдем оценку сверху для подинтегральной функции. Для $0 \leqslant u < 1$ из разложения логарифма в ряд следует, что $\ln(1-u) \leqslant -u$, откуда $1-u \leqslant e^{-n}$ и, значит, $(1-\xi^2/2n)^n \leqslant e^{-\xi^2/2}$ при $\xi^2/2n < 1$.

Подинтегральная функция равна $\varphi(\xi/e_n)(1-\xi^2/2n)^n$, а, значит, для $|\xi| \leqslant e_n A$ мажорируема величиной $|||\varphi|||.(1-\xi^2/2n)^n$ и равна нулю для $|\xi| > e_n A$. Для $|\xi| \leqslant e_n A$ имеем: $\xi^2/2n \leqslant$ $\leqslant (A^2/2)\cdot(e_n^2/n)$. Поскольку $e_n/\sqrt{n}$ стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности, существует такое целое число p, что $(A^2/2)\cdot(e_n^2/n) < 1$ при $n \geqslant p$.

Теперь для $n \geqslant p$ имеет место неравенство

$$\left|\left(1 - \frac{\xi^2}{2n}\right)^n \varphi\left(\frac{\xi}{e_n}\right)\right| \leqslant |||\varphi|||\, e^{-\xi^2/2}, \qquad \text{(IV, 7; 34)}$$

правая часть которого интегрируема. Значит, применима теорема Лебега и потому $P_n dx$ действительно сходятся к δ.

Узкая сходимость последовательности мер конечной нормы

Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на X со значениями в векторном нормированном конечномерном пространстве $\vec{E}$, имеющая *конечную норму.*

Согласно следствию из теоремы 54_2 в этом случае для каждой скалярной непрерывной и ограниченной функции φ на X можно определить $\int \varphi\, d\vec{\mu}$. Тем самым мы пришли к следующему определению, играющему фундаментальную роль в теории вероятностей:

Определение. Говорят, что последовательность мер $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в конечномерном векторном нормированном пространстве $\vec{E}$, имеющих конечную норму[1]), *узко сходится к мере* $\vec{\mu}$ с конечной нормой, если, какова бы ни была скалярная непрерывная и ограниченная функция φ на X при n, стремящемся к бесконечности, интеграл $\int \varphi d\vec{\mu}_n$ сходится к $\int \varphi d\vec{\mu}$.

Естественно, что узкая сходимость влечет за собой широкую сходимость. Однако узкая сходимость слабее сходимости по норме, которая означает, что $\|\vec{\mu}_n - \vec{\mu}\|$ сходится к нулю и, следовательно, $\int \varphi d\vec{\mu}_n$ сходится к $\int \varphi d\vec{\mu}$ равномерно, если функция φ остается ограниченной по норме на X.

Если меры $\vec{\mu}_n$ узко сходятся к мере $\vec{\mu}$, то, полагая $\varphi \equiv 1$, получаем, что $\int d\vec{\mu}_n$ сходится к $\int d\vec{\mu}$. В частности, если меры μ_n и μ неотрицательны, то $\|\mu_n\|$ сходится к $\|\mu\|$.

Теорема 69. *Если меры $\vec{\mu}_n$ на X со значениями в конечномерном векторном нормированном пространстве $\vec{E}$ сходятся узко к мере $\vec{\mu}$ при n, стремящемся к бесконечности, то нормы $\|\vec{\mu}_n\|$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Каждая мера $\vec{\mu}_n$ определяет некоторое линейное непрерывное отображение u_n пространства $(\mathbb{K}^X)_{cb}$ скалярных непрерывных ограниченных функций на X в пространство $\vec{E}$, а именно: $\varphi \to \int \varphi d\vec{\mu}_n$.

Из определения $\|\vec{\mu}_n\|$, как точной верхней грани норм $\|\vec{\mu}_n(\varphi)\|$ при $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ и $|||\varphi||| \leqslant 1$, следует, что $\|u_n\| \geqslant \|\vec{\mu}_n\|$[2]). Так как $(\mathbb{K}^X)_{cb}$ является банаховым пространством (следствие 3 теоремы 65 гл. II), то из теоремы Банаха — Штейнгауза следует, что u_n ограничены и тем более ограничены $\|\vec{\mu}_n\|$. Теорема доказана.

Пусть μ — некоторая неотрицательная мера с *конечной нормой*. Будем называть *верхним интегралом Римана по мере* μ от ограниченной функции $f \geqslant 0$ (с произвольным носителем) точную нижнюю грань интегралов от непрерывных функций $\geqslant 0$, мажорирующих эту функцию. Если функция f имеет компактный носитель, то мы возвращаемся к определению,

---

[1]) Мы говорим, что нормы «конечны», а не ограничены. В теореме 69 мы увидим, что это условие влечет за собой ограниченность $\|\vec{\mu}_n\|$ в их совокупности.

[2]) Можно даже доказать, что $\|u_n\| = \|\vec{\mu}_n\|$.

данному на стр. 635. В самом деле, если непрерывная ограниченная функция g мажорирует функцию f и если $\alpha \geqslant 0$ является непрерывной функцией с компактным носителем, равной 1 в некоторой окрестности носителя f, то αg по-прежнему мажорирует функцию f и $\int^{*R} f\,d\mu \leqslant \int \alpha g\,d\mu \leqslant \int g\,d\mu$.

Непрерывную ограниченную функцию, определенную на X, со значениями в $\vec{F}$ будем называть *разложимой*, если ее можно представить в виде конечной суммы $\sum_{i=1}^{N} \vec{g}_i\varphi_i$, где $\vec{g}_i$ — векторы из $\vec{F}$, а φ_i — скалярные непрерывные ограниченные функции. Говорят, что функция $\vec{f}$ на X со значениями в $\vec{F}$ *μ-интегрируема по Риману*, если она имеет аппроксимирующую (в смысле верхнего интеграла Римана) последовательность непрерывных ограниченных разложимых функций.

Теорема 69_2. *Если μ_n образуют последовательность мер $\geqslant 0$ с конечными нормами, узко сходящихся к некоторой мере μ с конечной нормой при n, стремящемся к бесконечности, и если φ является вещественной или комплексной функцией, определенной на X, ограниченной, измеримой относительно всех μ_n и μ-интегрируемой по Риману, то $\int \varphi\,d\mu_n$ сходится к $\int \varphi\,d\mu$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 62.

Теорема 70. *Ограниченная функция $\vec{f}$, определенная на X и принимающая значения в $\vec{F}$, μ-интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет μ-меру (Лебега), равную нулю.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 63.

Следствие 1. *Для того чтобы часть A множества X имела характеристическую функцию, μ-интегрируемую по Риману, необходимо и достаточно, чтобы ее граница $\dot{A}$ имела μ-меру (Лебега), равную нулю.*

Следствие 2. *Если меры $\mu_n \geqslant 0$ с конечными нормами узко сходятся к некоторой мере μ с конечной нормой и если A — часть X, измеримая по всем μ_n, граница которой имеет μ-меру, равную нулю, то $\mu_n(A)$ сходятся к $\mu(A)$ при n, стремящемся к бесконечности.*

Сходимость широкая и сходимость узкая

Теорема 71. *Для того чтобы последовательность мер $\mu_n \geqslant 0$ на X с конечными нормами сходилась узко к некоторой мере $\mu \geqslant 0$ с конечной нормой, необходимо и достаточно, чтобы* *эти нормы сходились к μ широко и чтобы $\|\mu_n\| = \int d\mu_n$ сходились к $\|\mu\| = \int d\mu$.*

Доказательство. Условие это, очевидно, необходимо, поэтому остается доказать лишь его достаточность.

Пусть φ — непрерывная ограниченная функция на X и $M = \|\!|\varphi|\!\|$. Зададим $\varepsilon > 0$. Согласно определению нормы меры μ, существует такая непрерывная функция α с компактным носителем, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, что

$$\int \alpha\, d\mu \geqslant \int d\mu - \frac{\varepsilon}{4M}. \qquad \text{(IV, 7; 36)}$$

Поскольку меры μ_n сходятся широко к μ при n, стремящемся к бесконечности, $\int \alpha\, d\mu_n$ сходится к $\int \alpha\, d\mu$. Так как, по предположению, $\int d\mu_n$ сходится к $\int d\mu$, найдется такое целое число p', что для $n \geqslant p'$

$$\int \alpha\, d\mu_n \geqslant \int d\mu_n - \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad \text{(IV, 7; 37)}$$

или

$$\int (1-\alpha)\, d\mu_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{и} \quad \int (1-\alpha)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}. \qquad \text{(IV, 7; 38)}$$

Теперь для функции $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ имеем следующее разложение:

$$\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi) = (\mu_n(\alpha\varphi) - \mu(\alpha\varphi)) + \mu_n((1-\alpha)\varphi) - \mu((1-\alpha)\varphi). \qquad \text{(IV, 7; 39)}$$

В силу предположения о широкой сходимости, первый член правой части сходится к 0. Значит, найдется такое целое число p'', что для всех $n \geqslant p''$ будет иметь место неравенство

$$|\mu_n(\alpha\varphi) - \mu(\alpha\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV, 7; 40)}$$

В силу неравенства (IV, 7; 38) для двух других членов при $n \geqslant p = \sup(p', p'')$ имеет место неравенство:

$$|\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} + M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon, \qquad \text{(IV, 7; 41)}$$

чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Если мы вернемся к примерам 1, 1_2 и 2 широкой сходимости к δ (стр. 648—649), то увидим, что в этом случае имеет место и узкая сходимость. То же самое можно сказать относительно примеров 1°), 3°), 4°) на стр. 632—634.

Если теперь мы снова вернемся к теореме 68, то уверенности в узкой сходимости у нас уже не будет, поскольку, если P_n — полиномы $\geqslant 0$, то $\int P_n(x)\,dx = +\infty$, откуда не следует, что нормы мер конечны.

Если a_n составляют последовательность неограниченно удаляющихся точек из X (когда X — метрическое пространство; см. определение в следствии из теоремы 55), то $\delta_{(a_n)}$ широко сходятся к 0, ибо при $\varphi \in \mathscr{C}(X)$ для достаточно больших значений n точки a_n находятся вне носителя функции φ (компактного, а потому ограниченного), и, следовательно, $\varphi(a_n) = 0$. Однако, так как $\|\delta_{(a_n)}\| = 1$, то $\delta_{(a_n)}$ не сходится узко к 0. Этот факт дает нам физическое истолкование узкой сходимости. Широкая сходимость учитывает лишь происходящее на конечном расстоянии. Последовательность мер $\mu_n \geqslant 0$ может сходиться широко к некоторой мере μ, и, однако, это не мешает значительной части масс μ_n «потеряться» в бесконечности. Узкая сходимость, напротив, мешает этому, поскольку $\|\mu_n\|$ стремится к $\|\mu\|$.

Теорема 72. *Пусть X — локально компактное пространство и T — некоторое компактное пространство. Пусть φ — скалярная непрерывная и ограниченная функция на $X \times T$. Пусть, кроме того, задана последовательность μ_n мер Радона $\geqslant 0$ на X с конечными нормами, узко сходящаяся при n, стремящемся к бесконечности, к некоторой предельной мере μ.*

Тогда интегралы $\int \varphi(x, t)\,d\mu_n$ сходятся к интегралу $\int \varphi(x, t)\,d\mu$ равномерно, когда t пробегает компакт T.

Доказательство. Теорема естественным образом обобщает следствие 3 теоремы 66 на случай узкой сходимости.

Положим $M = \sup\limits_{x,t} |\varphi(x, t)|$. Если вернуться к обозначениям, принятым в доказательстве теоремы 71, то можно найти функцию α, зависящую от числа M и удовлетворяющую соотношению (IV, 7; 36), а следовательно, и (IV, 7; 38) для $n \geqslant p'$. Произведем теперь разложение (IV, 7; 39) относительно частной функции φ_t: $x \to \varphi(x, t)$. Первый член $\mu_n(\alpha\varphi_t)$ стремится к $\mu(\alpha\varphi_t)$ равномерно относительно t из T. В самом деле, поскольку мы имеем непрерывную скалярную функцию $(x, t) \to \alpha(x)\varphi(x, t)$ и для любого t функция $x \to \alpha(x)\varphi(x, t)$, определенная на X, имеет носитель в фиксированном компакте, а именно в носителе α, то мы находимся на этот раз в условиях следствия 3 теоремы 66. Следовательно, можно независимо от t определить p'' так, чтобы при $n \geqslant p''$ относительно φ_t имело место неравенство (IV, 7; 40). Что же касается второго и третьего членов, то они могут быть оценены независимо от t, исходя из соотношений (IV, 7; 38). Поэтому для $n \geqslant p = \sup(p', p'')$ и любого $t \in T$ имеет место неравенство (IV, 7; 41), чем и заканчивается доказательство теоремы.

§ 8. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Постановка задачи

Пусть X и Y — локально компактные пространства. Из определения окрестностей непосредственно вытекает, что $X \times Y$ также компактно. Кроме того, если X и Y счетны в бесконечности, то таким же будет пространство $X \times Y$. В самом деле, если H_n составляют некоторую последовательность компактов, дающих в объединении пространство X, а K_n — последовательность компактов, объединение которых равно Y, то $H_n \times K_n$ является последовательностью компактов, объединение которых совпадает с пространством $X \times Y$.

Пусть теперь μ — некоторая мера Радона на X и ν — некоторая мера Радона на Y. Рассмотрим, можно ли, исходя из этих мер, построить новую меру Радона на $X \times Y$. При этом мы ограничимся скалярными мерами Радона[1]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ мера $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, обычно служащая для определения кратных интегралов, является «произведением» мер dx_i, определенных на множителях $\mathbb{R}$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Покажем, что если μ и ν — скалярные меры, то существует мера-произведение или тензорное произведение, которое мы обозначим через $\mu \otimes \nu$, или $\mu_x \otimes \nu_y$, или $d\mu(x) \otimes d\nu(y)$, или $d\mu(x) d\nu(y)$. Интеграл от функции $\vec{f}$, определенной на $X \times Y$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ по отношению к этой мере-произведению называется двойным интегралом и обозначается в обычных символах двойных интегралов:

$$\int \vec{f}\, d(\mu \otimes \nu) = \int \int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\, ^{2}). \qquad \text{(IV, 8; 1)}$$

---

[1]) Для мер со значениями в конечномерных векторных пространствах имеют место аналогичные результаты. Но они не верны для мер со значениями в нормированных бесконечномерных векторных пространствах.

[2]) Обозначение $d\mu(x) d\nu(y)$ для меры-произведения некорректно, поскольку x и y не являются переменными! Напротив, в формуле (IV, 8; 1) это же обозначение вполне корректно, так как x и y фигурируют в ней дважды и могут быть заменены любыми другими символами. Точно так же будет вполне корректным для $\lambda = \mu \otimes \nu$ писать $d\lambda(x, y) = d\mu(x) \otimes d\nu(y)$ или $d\mu(x) d\nu(y)$.