рого и третьего членов, то они могут быть оценены независимо от t, исходя из соотношений (IV, 7; 38). Поэтому для $n \geqslant p = \sup(p', p'')$ и любого $t \in T$ имеет место неравенство (IV, 7; 41), чем и заканчивается доказательство теоремы.

§ 8. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Постановка задачи

Пусть X и Y — локально компактные пространства. Из определения окрестностей непосредственно вытекает, что $X \times Y$ также компактно. Кроме того, если X и Y счетны в бесконечности, то таким же будет пространство $X \times Y$. В самом деле, если H_n составляют некоторую последовательность компактов, дающих в объединении пространство X, а K_n — последовательность компактов, объединение которых равно Y, то $H_n \times K_n$ является последовательностью компактов, объединение которых совпадает с пространством $X \times Y$.

Пусть теперь μ — некоторая мера Радона на X и ν — некоторая мера Радона на Y. Рассмотрим, можно ли, исходя из этих мер, построить новую меру Радона на $X \times Y$. При этом мы ограничимся скалярными мерами Радона[1]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ мера $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, обычно служащая для определения кратных интегралов, является «произведением» мер dx_i, определенных на множителях $\mathbb{R}$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Покажем, что если μ и ν — скалярные меры, то существует мера-произведение или тензорное произведение, которое мы обозначим через $\mu \otimes \nu$, или $\mu_x \otimes \nu_y$, или $d\mu(x) \otimes d\nu(y)$, или $d\mu(x) d\nu(y)$. Интеграл от функции $\vec{f}$, определенной на $X \times Y$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ по отношению к этой мере-произведению называется двойным интегралом и обозначается в обычных символах двойных интегралов:

$$\int \vec{f} \, d(\mu \otimes \nu) = \int\int \vec{f}(x, y) \, d\mu(x) \, d\nu(y)\,^{2}). \qquad \text{(IV, 8; 1)}$$

---

[1]) Для мер со значениями в конечномерных векторных пространствах имеют место аналогичные результаты. Но они не верны для мер со значениями в нормированных бесконечномерных векторных пространствах.

[2]) Обозначение $d\mu(x) d\nu(y)$ для меры-произведения некорректно, поскольку x и y не являются переменными! Напротив, в формуле (IV, 8; 1) это же обозначение вполне корректно, так как x и y фигурируют в ней дважды и могут быть заменены любыми другими символами. Точно так же будет вполне корректным для $\lambda = \mu \otimes \nu$ писать $d\lambda(x, y) = d\mu(x) \otimes d\nu(y)$ или $d\mu(x) d\nu(y)$.

Пусть u и v — функции, принадлежащие соответственно пространствам $\mathscr{C}(X)$ и $\mathscr{C}(Y)$. Рассмотрим теперь функцию φ, определенную на $X \times Y$ по формуле

$$\varphi(x, y) = u(x) \cdot v(y). \tag{IV, 8; 2}$$

Эту функцию обозначают также через $u \otimes v$. Функция $(x, y) \to x \to u(x)$ как композиция двух непрерывных функций непрерывна. Точно так же непрерывна функция $(x, y) \to v(y)$. Поэтому наша функция, являющаяся произведением двух непрерывных функций, также непрерывна. Кроме того, она имеет компактный носитель. Если H и K — носители функций u и v в X и Y соответственно, то ее носитель равен произведению $H \times K$. В самом деле, обозначим через A и B множества точек, в которых u и v отличны от нуля. Тогда $\varphi \neq 0$ в том и только том случае, когда u и $v \neq 0$, т. е. на $A \times B$. Носитель φ есть, следовательно, замыкание $\overline{A \times B}$, которое равно произведению $\bar{A} \times \bar{B}$ замыканий, т. е. произведению $H \times K$.

В этом случае хотелось бы, очевидно, чтобы двойной интеграл выражался в виде

$$\int\int u(x)\, v(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \left(\int u(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int v(y)\, d\nu(y)\right), \tag{IV, 8; 3}$$

т. е. чтобы имело место соотношение

$$(\mu \otimes \nu)(u \otimes v) = \mu(u)\, \nu(v). \tag{IV, 8; 4}$$

Мы сейчас увидим, что этого достаточно для того, чтобы единственным образом определить меру — тензорное произведение $\mu \otimes \nu$.

Существование и единственность тензорного произведения

Теорема 73. *Пусть X и Y — два локально компактных пространства, а μ и ν — меры Радона, вещественные или комплексные, на X и Y соответственно. Тогда существует, и притом единственная, мера Радона λ на $X \times Y$, удовлетворяющая равенству*

$$\lambda(u \otimes v) = \mu(u)\, \nu(v). \tag{IV, 8; 5}$$

Эта мера называется тензорным произведением мер μ и ν и обозначается через $\mu \otimes \nu$.

Доказательство этой теоремы мы проведем в несколько этапов.

Первый этап: единственность тензорного произведения. Пусть H и K — компактные множества из X и Y соответственно. Рассмотрим сначала все «разложимые» функции φ вида

$u \otimes v$, где u принадлежит пространству $\mathscr{C}_H(X)$, а v — пространству $\mathscr{C}_K(Y)$. Рассмотрим теперь все функции φ, являющиеся конечной суммой (но заранее не ограниченной) разложимых функций. Такие функции φ могут быть записаны в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \in I} u_i(x) v_i(y), \qquad u_i \in \mathscr{C}_H(X), \qquad v_i \in \mathscr{C}_K(Y). \qquad (\mathrm{IV}, 8; 6)$$

Множество таких функций образует некоторое векторное подпространство $\Gamma_{H \times K}$ пространства $\mathscr{C}(X \times Y)$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 74 (теорема о плотности). *Пусть H_0 и K_0 — некоторые компакты пространств X и Y соответственно, а H и K — компактные окрестности множеств H_0 и K_0*[1]*). Тогда замыкание векторного подпространства $\Gamma_{H \times K}$ в пространстве $\mathscr{C}_{H \times K}(X \times Y)$ содержит подпространство $\mathscr{C}_{H_0 \times K_0}(X \times Y)$.*

Эта теорема означает, что функция φ, непрерывная на $X \times Y$, с носителем в $H_0 \times K_0$ является равномерным пределом некоторой последовательности функций, каждая из которых может быть записана в виде (IV, 8; 6), где носители функций u_i лежат в H, а носители функций v_i лежат в K.

Доказательство. Ограничимся случаем метрических пространств X и Y. В произведении $X \times Y$ мы введём одну из естественных метрик произведения.

Пусть φ — некоторый элемент пространства $\mathscr{C}_{H_0 \times K_0}(X \times Y)$. Эта функция равномерно непрерывна (см. стр. 633), т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что из неравенств $d(x', x'') \leqslant \eta$, $d(y', y'') \leqslant \eta$ вытекает неравенство $|\varphi(x', y') - \varphi(x'', y'')| \leqslant \varepsilon$. Каждая точка H_0 будет являться центром открытого шара, содержащегося в H, радиус которого можно считать $\leqslant \eta/2$. Множество этих открытых шаров образует покрытие H_0, и, следовательно, из него можно извлечь конечное подпокрытие, образованное из шаров U_i, $i \in I$, радиуса $\leqslant \eta/2$, содержащихся в H. Точно так же можно образовать конечное покрытие K_0 шарами V_j, $j \in J$, с радиусами $\leqslant \eta/2$, целиком лежащими в K. Точка $U_i \times V_j$ образуют некоторое конечное покрытие множества $H_0 \times K_0$, целиком лежащее в $H \times K$.

Если $x' \in U_i$, $x'' \in U_i$, $y' \in V_j$, $y'' \in V_j$, то $d(x', x'') \leqslant \eta$ и $d(y', y'') \leqslant \eta$. Отсюда следует неравенство $|\varphi(x', y') - \varphi(x'', y'')| \leqslant \varepsilon$. Положим $I' = I \cup \{0\}$ и $J' = J \cup \{0\}$ и рассмотрим открытые

---

[1]) Такие окрестности существуют. Смотри примечание на стр. 457.

покрытия $(U_i)_{i\in I'}$ множества X и $(V_j)_{j\in J'}$ множества Y, где $U_0=\complement H_0$ и $V_0=\complement K_0$. Пусть теперь $(\alpha_i)_{i\in I'}$ и $(\beta_j)_{j\in J'}$ — разложения единицы, соответствующие этим покрытиям (это означает, что X и Y счетны в бесконечности; можно избавиться от этого условия, но мы этого делать не будем). Выберем в каждом из множеств U_i некоторую точку x_i, а в каждом V_j — точку y_j и определим функцию Φ на $X\times Y$ по формуле:

$$\Phi(x, y)=\sum_{i\in I',\, j\in J'}\alpha_i(x)\beta_j(y)\varphi(x_i, y_j). \qquad \text{(IV, 8; 7)}$$

Поскольку при равных нулю i или j функция $\varphi(x_i, y_j)=0$, то вместо $\sum\limits_{i\in I',\, j\in J'}$ можно писать сумму $\sum\limits_{i\in I,\, j\in J}$. Функция Φ имеет вид (IV, 8; 6) относительно множества индексов $I\times J$, где, например, можно считать $u_{ij}(x)=\alpha_i(x)$, $v_{ij}(y)=$ $=\varphi(x_i, y_j)\beta_j(y)$. Тогда для i и j, отличных от 0, функции u_{ij} имеют носитель в H, а функции v_{ij} — в K. Заметим, что произведения $\alpha_i\otimes\beta_j$, $(i, j)\in I'\times J'$, образуют некоторое разложение единицы для $X\times Y$, подчиненное покрытию его множествами $U_i\times V_j$, $(i, j)\in I'\times J'$. Поэтому имеет место равенство $\varphi(x, y)=\sum\limits_{i,j}\alpha_i(x)\beta_j(y)\varphi(x, y)$, где суммирование может относиться как $I\times J$, так и к $I'\times J'$. Поэтому

$$|\Phi(x, y)-\varphi(x, y)|\leqslant\sum_{i,j}\alpha_i(x)\beta_j(y)|\varphi(x_i, y_j)-\varphi(x, y)|. \qquad \text{(IV, 8; 8)}$$

Члены правой части отличны от нуля только тогда, когда $i\neq 0$, $j\neq 0$, $(x, y)\in U_i\times V_j$. Но тогда $|\varphi(x_i, y_j)-\varphi(x, y)|\leqslant\varepsilon$ и, следовательно, правая часть не превосходит $\sum\limits_{i,j}\alpha_i(x)\beta_j(y)\varepsilon=$ $=\varepsilon$; доказательство теоремы закончено.

Следствие. *Если меры μ и ν заданы на X и Y, то существует только одна мера λ, удовлетворяющая условиям теоремы* 73.

В самом деле, для функции $\varphi\in\mathscr{C}_{H_0\times K_0}(X\times Y)$ существует последовательность функций $\psi_n\in\mathscr{C}_{H\times K}(X\times Y)$ вида (IV, 8; 6), сходящаяся равномерно к φ при n, стремящемся к бесконечности. Поэтому, если мера λ существует, $\lambda(\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(\varphi_n)$. Однако в этом случае, в силу равенства (IV, 8; 5), известно ее значение на разложимых функциях $u\otimes v$, а, следовательно, после суммирования — на всех функциях ψ_n; предыдущий переход к пределу говорит о том, что $\lambda(\varphi)$ определена для любой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X \times Y)$, чем полностью доказывается единственность тензорного произведения[1]).

Создавшаяся ситуация подобна, очевидно, ситуации, имевшей место в теореме 49 гл. II (о продолжении линейных непрерывных функций, определенных на плотных подмножествах). Однако в данном случае имеется небольшая трудность, заключающаяся в том, что мы не рассматривали $\mathscr{C}(X \times Y)$ как топологическое пространство. Это обстоятельство вынуждает нас провести прямое доказательство следствия.

Второй этап: существование тензорного произведения.

Теорема 75. *Пусть φ — некоторая функция из $\mathscr{C}(X \times Y)$. Тогда для каждого фиксированного $x \in X$ можно вычислить интеграл*

$$\psi(x) = \int \varphi(x, y)\, d\nu(y). \qquad \text{(IV, 8; 9)}$$

Функция ψ: $x \to \psi(x)$ непрерывна и имеет компактный носитель в X. Следовательно, можно вычислить

$$\lambda(\varphi) = \int \psi(x)\, d\mu(x) = \int \left[\int \varphi(x, y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x). \qquad \text{(IV, 8; 10)}$$

Линейная форма $\varphi \to \lambda(\varphi)$ является мерой Радона на $X \times Y$, удовлетворяющей соотношению (IV, 8; 5).

Доказательство. Обозначим через H и K проекции носителя φ на пространства X и Y соответственно. Эти множества, как непрерывные образы некоторого компакта, сами компактны. Тогда носитель частной функции φ_x: $y \to \varphi(x, y)$ при любом x лежит в K. Впрочем, $\varphi_x \equiv 0$, если $x \notin H$. В теореме 66 мы видели, что при x, стремящемся к a, частная функция φ_x стремится к частной функции φ_a равномерно на компакте K (а, значит, равномерно на Y, поскольку ее носитель всегда лежит в K) и, следовательно, φ_x стремится к φ_a в нормированном векторном пространстве $\mathscr{C}_K(Y)$. Из определения меры ν как линейной формы на $\mathscr{C}(Y)$, сужение которой на $\mathscr{C}_K(Y)$ непрерывно, следует, что $\psi(x) = \int \varphi_x d\nu$ сходится к $\psi(a) = \int \varphi_a d\nu$, т. е. что функция ψ непрерывна на X. Так как при $x \notin H$, $\varphi_x \equiv 0$, а, значит $\psi(x) = 0$, носитель этой функции лежит в H. Следовательно, она принадлежит пространству $\mathscr{C}(X)$, и мы можем вычислить $\mu(\psi)$, а потому имеет смысл выражение (IV, 8; 10). Очевидно, эта функция линейно зависит от φ.

[1]) Независимо от нахождения тензорного произведения мы доказали большее: две меры λ_1 и λ_2 на $X \times Y$, принимающие одно и то же значение на каждой функции φ из $\mathscr{C}(X \times Y)$ вида $u \otimes v$, $u \in \mathscr{C}(X)$, $v \in \mathscr{C}(Y)$, принимают одно и то же значение для любой функции $\varphi \in \mathscr{C}(X, Y)$, т. е. равны между собой.

Если φ сохраняет носитель в фиксированном компакте $H \times K$, то ψ сохраняет носитель в H и удовлетворяет неравенству

$$|\psi(x)| \leqslant |||\varphi||| \, \|\nu\|_K. \qquad \text{(IV, 8; 11)}$$

Отсюда вытекает оценка

$$|\lambda(\varphi)| \leqslant \|\mu\|_H |||\psi||| \leqslant \|\mu\|_H \|\nu\|_K |||\varphi|||. \qquad \text{(IV, 8; 12)}$$

Мы видели, что λ является мерой на $X \times Y$ и, кроме того, имеет место неравенство

$$\|\lambda\|_{H \times K} \leqslant \|\mu\|_H \|\nu\|_K. \qquad \text{(IV, 8; 13)}$$

Остается лишь убедиться в том, что λ удовлетворяет соотношению (IV, 8; 5). Если мы положим $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$, то получим, что $\psi(x) = u(x) \int v(y)\,d\nu(y) = u(x)\nu(v)$, а, следовательно, $\lambda(\varphi) = \nu(v) \int u(x)\,d\mu(x) = \mu(u)\nu(v)$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Если заданы μ и ν, то найдется хотя бы одна мера λ, удовлетворяющая условиям теоремы* 73.

Таким образом, теорема 73 установлена путем доказательства двух не зависящих друг от друга утверждений — существования и единственности.

Замечание. Можно было бы начать с того, чтобы зафиксировать y и вычислить интеграл

$$\theta(y) = \int \varphi(x, y)\,d\mu(x). \qquad \text{(IV, 8; 14)}$$

Полученная функция θ была бы непрерывной функцией с компактным носителем в Y, и можно было бы вычислить

$$\lambda(\varphi) = \int \theta(y)\,d\nu(y) = \int \left[\int \varphi(x, y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y). \qquad \text{(IV, 8; 15)}$$

Таким путем можно определить другую меру Радона λ, удовлетворяющую соотношению (IV, 8; 5). Из единственности, доказанной в следствии теоремы 74, следует, что мы получим тот же результат. Поэтому имеет место соотношение

$$\int \left[\int \varphi(x, y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \left[\int \varphi(x, y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y). \qquad \text{(IV, 8; 16)}$$

Последнее равенство составляет содержание теоремы о перестановке знаков интегрирования.

Примеры тензорных произведений

Если a является точкой X, а b — некоторой точкой Y, то между соответствующими мерами Дирака имеет место следующее очевидное соотношение:

$$\delta_{(a)} \otimes \delta_{(b)} = \delta_{(a, b)} \quad \text{или} \quad d\delta_{(a)}(x)\,d\delta_{(b)}(y) = d\delta_{(a, b)}(x, y), \qquad \text{(IV, 8; 17)}$$

вытекающее из того, что его правая часть удовлетворяет равенству (IV, 8; 5).

Пусть теперь μ является мерой $\sum_i c_i\delta_{(a_i)}$, а ν — мерой $\sum_j d_j\delta_{(b_j)}$. Тогда имеет место формула

$$\sum_i c_i\delta_{(a_i)} \otimes \sum_j d_j\delta_{(b_j)} = \sum_{i,j} c_i d_j \delta_{(a_i,\, b_j)}. \qquad \text{(IV, 8; 18)}$$

Элементарные свойства

Легко видеть, что отображение $(\mu, \nu) \to \mu \otimes \nu$ пространства $\mathscr{C}'(X) \times \mathscr{C}'(Y)$ в пространство $\mathscr{C}'(X \times Y)$ является *билинейным отображением* [1]), т. е. имеют место равенства:

$$(\mu_1 + \mu_2) \otimes (\nu_1 + \nu_2) = \mu_1 \otimes \nu_1 + \mu_1 \otimes \nu_2 + \mu_2 \otimes \nu_1 + \mu_2 \otimes \nu_2, \qquad \text{(IV, 8; 19)}$$

$$h\mu \otimes k\nu = hk(\mu \otimes \nu), \quad \text{где } h \text{ и } k \text{ — скаляры.}$$

Очевидно также, что если μ и ν вещественны, то функция $\mu \otimes \nu$ также вещественна и что, если μ и $\nu \geqslant 0$, то и $\mu \otimes \nu \geqslant 0$. В самом деле, для того чтобы проверить неравенство, $(\mu \otimes \nu)(\varphi) \geqslant 0$, достаточно при $\varphi \geqslant 0$ провести вычисления теоремы 75.

Наконец, соотношение (IV, 8; 13) показывает, что если μ и ν имеют конечные нормы, то конечную норму будет иметь произведение $\mu \otimes \nu$, и при этом

$$\|\mu \otimes \nu\| \leqslant \|\mu\| \|\nu\|. \qquad \text{(IV, 8; 19}_2\text{)}$$

Носитель меры $\mu \otimes \nu$

Теорема 76. *Если A — носитель меры μ, а B — носитель меры ν, то носитель меры $\mu \otimes \nu$ есть множество $A \times B$.*

Доказательство. 1°) Так как мера μ равна нулю в $\complement A$, то в открытом множестве $\complement A \times Y$ произведение $\mu \otimes \nu$ равно нулю. Точно так же мера $\mu \otimes \nu$ равна нулю в $X \times \complement B$, ибо ν обращается в нуль в $\complement B$. Значит, мера $\mu \otimes \nu$ равна нулю в объединении этих двух открытых множеств (теорема 13). Это объединение равно дополнению множества $A \times B$. Значит, носитель меры $\mu \otimes \nu$ лежит в $A \times B$.

2°) Пусть теперь (a, b) — произвольная точка множества $A \times B$, и пусть $\mathscr{A}$ (соответственно $\mathscr{B}$) является некоторой открытой окрестностью точки a в X (соответственно точки b

[1]) Этим и объясняется название — тензорное *произведение*.

в Y). Согласно свойству носителя (теорема 14), найдется такая функция $u \in \mathscr{C}(X)$ с носителем в $\mathscr{A}$, что $\mu(u) \neq 0$. Точно так же найдется такая функция $v \in \mathscr{C}(Y)$ с носителем в $\mathscr{B}$, что $\nu(v) \neq 0$. Если теперь мы положим $\varphi(x, y) = u(x) v(y)$, то получим $(\mu \otimes \nu)(\varphi) = \mu(u)\nu(v) \neq 0$. Этим доказано, что не существует такой окрестности точки (a, b), в которой мера $\mu \otimes \nu$ была бы равна нулю, и что, следовательно, точка (a, b) принадлежит носителю меры $\mu \otimes \nu$. Значит, этот носитель совпадает с $A \times B$.

Вычисление двойного интеграла путем двух последовательных простых интегрирований

В теореме 75 предлагается способ вычисления двойного интеграла с помощью двух последовательных простых интегрирований. Однако эта теорема применима лишь в том случае, когда рассматривается интеграл от функции φ, принадлежащей пространству $\mathscr{C}(X \times Y)$. Для μ и $\nu \geqslant 0$ имеет место значительно более общая теорема.

Теорема 77. (Фубини — Лебега). *Предположим, что X и Y — локально компактные пространства, счетные в бесконечности. Пусть μ и ν — меры $\geqslant 0$ на X и Y соответственно. Пусть $\vec{F}$ — некоторое пространство Банаха, а $\vec{f}$ — функция, определенная на $X \times Y$ со значениями в $\vec{F}$ и интегрируемая (соответственно измеримая) относительно $\mu \otimes \nu$. Тогда для фиксированного $x \in X$ частная функция $\vec{f}_x : y \to \vec{f}(x, y)$ не всегда интегрируема (соответственно измерима) относительно ν, однако она интегрируема (соответственно измерима) относительно ν по крайней мере для μ-почти всех значений x из X. Можно также для μ-почти всех значений x определить*[1]

$$\vec{g}(x) = \int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y) \in \vec{F}. \tag{IV, 8; 20}$$

Функция $\vec{g} : x \to \vec{g}(x)$, определенная μ-почти всюду на X, со значениями в $\vec{F}$ будет μ-интегрируемой, и имеет место формула

$$\int \int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int \vec{g}(x)\, d\mu(x) = \int \left[\int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x). \tag{IV, 8; 21}$$

[1] Мы предполагаем теперь, что функция $\vec{f}$ интегрируема. Дальнейшие рассуждения больше не связаны со случаем «соответственно измерима».

Эту формулу обычно пишут в виде

$$\int\int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int d\mu(x) \int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y). \quad \text{(IV, 8; 22)}$$

Это обозначение несколько необычно. Чтобы не писать скобок, мы записываем $\int \vec{g}(x)\, d\mu(x)$ в виде $\int d\mu(x)\, \vec{g}(x)$. К этим часто применяемым обозначениям следует привыкнуть.

Доказательство. Докажем сначала такое утверждение:

Лемма 1. *Пусть f — функция $\geqslant 0$ (с конечными или бесконечными значениями), полунепрерывная снизу на $X \times Y$. Тогда имеет место формула*

$$\int^* d\mu(x) \int^* f(x, y)\, d\nu(y) = \int\int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y). \quad \text{(IV, 8; 22}_2\text{)}$$

Рассмотрим множество $\mathscr{C}_+(X \times Y; f)$ всех функций $\geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X \times Y)$, ограничивающих снизу функцию f. Функции этого множества обладают свойством возрастания в смысле теоремы 39_4. Кроме того, верхняя огибающая этих функций равна f. [В самом деле, эта огибающая, очевидно, $\leqslant f$. Однако если $a \in X$, то найдется такая открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки a, что $f(\mathscr{V}) \geqslant (f(a) - \varepsilon)^+ = \max(f(a) - \varepsilon, 0)$. Значит, существует некоторая компактная окрестность $\mathscr{W}$ точки a в $\mathscr{V}$, а потому, согласно следствию 1 из теоремы 11, существует непрерывная функция ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, с носителем в $\mathscr{V}$, равная 1 в $\mathscr{W}$. Имеем: $0 \leqslant (f(a) - \varepsilon)^+ \psi \leqslant f$ (это справедливо в $\mathscr{V}$, а вне $\mathscr{V}$ обе функции равны нулю). Эта функция в точке a принимает значение $(f(a) - \varepsilon)^+$. Следовательно, точная верхняя грань величин $\varphi(a)$ по всевозможным функциям φ из $\mathscr{C}_+(X \times Y)$, мажорируемым функцией f, равна $f(a)$.] К множеству $\mathscr{C}_+(X \times Y; f)$ можно применить теорему 39_4. Это снова, впрочем, дает теорему 39_2, а именно:

$$\int\int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \sup_{\varphi \in \mathscr{C}_+(X \times Y;\, f)} (\mu \otimes \nu)(\varphi).$$

Рассмотрим, кроме того, множество соответствующих частных функций $\varphi_x : y \to \varphi(x, y)$. Это множество является множеством непрерывных функций $\geqslant 0$, удовлетворяющих условию возрастания теоремы 50_4, а его верхней огибающей является функция $f_x : y \to f(x, y)$. Из теоремы следует, что

$$\int^* f(x, y)\, d\nu(y) = \sup_{\varphi \in \mathscr{C}_+(X \times Y;\, f)} \int \varphi(x, y)\, d\nu(y).$$

Однако для каждой функции φ функция $J_\varphi : x \to \int \varphi(x, y)\, d\nu(y)$ непрерывна, $\geqslant 0$ и имеет компактный носитель на X (теорема 75). Значит, верхняя огибающая таких функций J_φ, т. е. функция F: $x \to \int^* f(x, y)\, d\nu(y)$, является полунепрерывной снизу функцией $\geqslant 0$. Так как J_φ и J_ψ мажорируемы функцией $J_{\varphi+\psi}$, а, значит, $\sup(J_\varphi, J_\psi) \leqslant J_{\varphi+\psi}$, то множество J_φ удовлетворяет условию возрастания теоремы 39_4. Значит, можно снова применить эту теорему и тогда

$$\int^* d\mu(x) \int^* f(x, y)\ (y) d\nu = \sup_{\varphi \in \mathscr{C}_+(X \times Y;\, f)} \int d\mu(x) \int \varphi(x, y)\, d\nu(y) =$$

$$= \sup_{\varphi \in \mathscr{C}_+(X \times Y;\, f)} (\mu \otimes \nu)(\varphi)^{1)} = \int \int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y),$$

чем и доказывается лемма 1.

Лемма 2. *Пусть $f \geqslant 0$ — произвольная функция на $X \times Y$. Тогда*

$$\int^* d\mu(x) \int^* f(x, y)\, d\nu(y) \leqslant \int \int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)^{2)}. \qquad (IV, 8; 23)$$

В самом деле, пусть $g \geqslant f$ и полунепрерывна снизу. В силу леммы 1,

$$\int^* d\mu(x) \int^* f(x, y)\, d\nu(y) \leqslant \int^* d\mu(x) \int^* g(x, y)\, d\nu(y) =$$

$$= \int \int^* g(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Переходя, согласно теореме 50_3, в последнем члене к точной нижней грани при переменной функции g, получим $\int \int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$, откуда и вытекает (IV, 8; 23).

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть $\vec{f}$ — некоторая $(\mu \otimes \nu)$-интегрируемая функция на $X \times Y$ со значениями в $\vec{F}$. Эта функция имеет аппроксимирующую последовательность, образованную непрерывными разложимыми функциями $\vec{f}_n$ с компактными носителями вида $\sum\limits_i g_{in}\varphi_{in}$, $\varphi_{in} \in$

[1] В силу теоремы 75.

[2] Результат леммы 1 может навести на мысль, что полунепрерывные снизу функции занимают весьма привилегированное положение среди неотрицательных функций в том смысле, что для них имеет место равенство вместо неравенства. Теорема 78 покажет, что равенство имеет место и для всех $(\mu \otimes \nu)$-измеримых функций $\geqslant 0$ на $X \times Y$, в частности, для всех борелевских функций, а всякая полунепрерывная функция борелевская.

$\in \mathscr{C}(X \times Y)$. Для такой функции теорема Фубини — Лебега очевидна. Она сводится к случаю функции из $\mathscr{C}(X \times Y)$, а это в силу теоремы 75 является следствием определения тензорного произведения.

Величины $\int^* d\mu(x) \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\nu(y) \leqslant \int \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\mu(x) d\nu(y)$ (лемма 2) сходятся к 0. Но тогда в силу теоремы 38 можно выбрать такую подпоследовательность, которую мы будем по-прежнему обозначать через $\vec{f}_n$, для которой $\int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\nu(y)$ сходится к 0 для $d\mu$-почти всех x из X. Значит, существует такое множество A из X нулевой μ-меры, что для $x \notin A$ эта сходимость имеет место. Функция $(\vec{f}_n)_x$: $y \to \vec{f}_n(x, y)$ непрерывна, разложима, имеет компактный носитель и ν-интегрируема. Поэтому, для каждого $x \in A$, f_x ν-интегрируема и $(\vec{f}_n)_x$ образуют аппроксимирующую последовательность:

$$\vec{g}(x) = \int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int \vec{f}_n(x, y)\, d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \vec{g}_n(x).$$

Каждая из функций $\vec{g}_n$ непрерывна, разложима и имеет компактный носитель (теорема 75), а, следовательно, μ-интегрируема и $\int \vec{g}_n\, d\mu = \int\int \vec{f}_n\, d(\mu \otimes \nu)$. Функция $\vec{g}$ определена μ-почти всюду и

$$\int^* \|\vec{g} - \vec{g}_n\| d\mu \leqslant \int^* d\mu(x) \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\nu(y) \leqslant \int \int^* \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d(\mu \otimes \nu)$$

стремится к нулю. Следовательно, $\vec{g}$ μ-интегрируема, а $\vec{g}_n$ образуют аппроксимирующую последовательность:

$$\int d\mu(x) \int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y) = \int \vec{g}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \vec{g}_n\, d\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int\int \vec{f}_n\, d(\mu \otimes \nu) = \int\int \vec{f}\, d(\mu \otimes \nu).$$

Теорема доказана.

Замечания. 1°) Естественно, что можно было бы идти в обратном порядке и получить формулу

$$\int\int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int d\nu(y) \int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x). \qquad \text{(IV, 8; 24)}$$

Отсюда, в частности, вытекает следующее: *если заранее известно, что функция $\vec{f}$ интегрируема по* $\mu \otimes \nu$, то можно написать формулу изменения порядка интегрирования

$$\int d\mu(x) \int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y) = \int d\nu(y) \int \vec{f}(x, y)\, d\mu(x). \qquad \text{(IV, 8; 25)}$$

Z 2°) Если $\vec{f}$ не интегрируема по $\mu \otimes \nu$, то может случиться, что одна часть в равенстве (IV, 8; 25) имеет смысл, а другая — нет. Может даже случиться, что обе части имеют смысл, но значения их не совпадают.

Рассмотрим, например, на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ пространства $\mathbb{R}^2$ меру-произведение $dx \otimes dy$ и вещественную функцию f, определенную по формуле

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{для} \quad (x, y) \neq (0, 0). \qquad \text{(IV, 8; 26)}$$

Мы не затрудняем себя определением $f(0, 0)$, поскольку при любом фиксированном x эта функция может быть не определена лишь при *одном* значении y и, наоборот, при любом фиксированном y — лишь при *одном* значении x. Однако множество, состоящее из одной точки, имеет меру нуль относительно dx или dy.

Покажем, что выражение

$$\int\limits_{[0, 1]} dx \int\limits_{[0, 1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \qquad \text{(IV, 8; 27)}$$

имеет смысл и что оно равно $\pi/4$.

В самом деле, для фиксированного $x \neq 0$ первообразной по y для непрерывной функции $y \to \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ является функция $y \to \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Поэтому для $x \neq 0$ имеем:

$$\int\limits_{[0, 1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \frac{1}{x^2 + 1}. \qquad \text{(IV, 8; 28)}$$

Для того чтобы применить формулу (IV, 8; 27), нет необходимости вычислять интеграл при $x = 0$, ибо множество $\{0\}$ имеет нулевую меру относительно dx. Окончательно получаем

$$\int\limits_{[0, 1]} dx \int\limits_{[0, 1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}. \qquad \text{(IV, 8; 29)}$$

Если теперь мы попытаемся вычислить этот интеграл в обратном порядке

$$\int\limits_{[0, 1]} dy \int\limits_{[0, 1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx, \qquad \text{(IV, 8; 30)}$$

то, переобозначая переменные интегрирования x и y через y и x, придем к интегралу

$$\int\limits_{[0,1]} dx \int\limits_{[0,1]} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy, \qquad \text{(IV, 8; 31)}$$

противоположному интегралу (IV, 8; 27) и, следовательно, равному $-\pi/4$. Таким образом, хотя оба интеграла (IV, 8; 27) и (IV, 8; 30) имеют смысл, их значения не совпадают. Это означает, что теорема Фубини в этом случае не применима, а, следовательно, функция f не интегрируема относительно меры-произведения $dx \otimes dy$. С помощью методов, которые будут подробно изложены позже, в этом можно убедиться непосредственно, выполнив предварительно замену переменных перехода к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (формула (IV, 9; 92)), а затем применив следствие 4 из теоремы 108 при $\alpha = 2$.

Z 3°) *Нельзя надеяться на то, что $\vec{f}_x$ будет интегрируемой по y для всех значений x.*

В самом деле, если мы вернемся к примеру с мерами dx и dy на $\mathbb{R}$, то увидим, что $\vec{f}$ можно изменить на прямой $x = a$, параллельной оси y, не изменяя ее интегрируемости по отношению к мере $dx \otimes dy$, поскольку прямая $x = a$ является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^2$.

Это позволяет нам в качестве функции $y \to f(a, y)$ брать *произвольную функцию* от y, которая не обязана быть интегрируемой по y относительно dy. Однако *это обстоятельство не играет никакой роли в том вопросе, который нас интересует.* Как только мы узнали, что функция $\vec{g}$ определена для μ-почти всех значений x и интегрируема относительно μ, нам этого достаточно для того, чтобы вычислить двойной интеграл путем двух последовательных простых интегрирований. В этом даже состоит некоторое удобство, которым надо еще уметь пользоваться: если для некоторых исключительных значений x, образующих множество μ-меры нуль, интеграл $\int \vec{f}(x, y)\, d\nu(y)$ или не существует, или сложен для вычисления, нет никакой необходимости заниматься им в этих точках.

4°) Теорему Фубини можно сравнить с теоремой суммирования по блокам в безусловно сходящихся рядах (теорема 59 гл. II). В этой теореме точно так же *мы должны сначала предположить, что ряд безусловно сходится* для того, чтобы иметь затем возможность суммировать его блоками. Мы видели, что существует, однако, случай, когда не нужно знать заранее, сходится ли ряд безусловно, а именно случай, когда члены ряда вещественны и $\geqslant 0$. То же самое имеет место и здесь, как это видно из следующей теоремы и ее следствия 1.

Теорема 78 (Фубини — Фату). *Пусть X, Y — локально компактные пространства, счетные в бесконечности. Пусть f — некоторая функция $\geqslant 0$ (с конечными или бесконечными значениями), определенная на $X \times Y$ и $(\mu \otimes \nu)$-измеримая на нем. Тогда имеет место такое равенство:*

$$0 \leqslant \int^* d\mu(x) \int^* f(x, y)\, d\nu(y) = \int\int^* f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leqslant +\infty. \tag{IV, 8; 32}$$

Доказательство. Поскольку функция f $(\mu \otimes \nu)$-измерима, она является пределом некоторой возрастающей последовательности измеримых ограниченных функций $f_n \geqslant 0$ с компактным носителем (например, функций $f_{M,K}$, указанных на стр. 521). Для каждой функции f_n, согласно теореме Фубини — Лебега (теорема 77),

$$\int d\mu(x) \int f_n(x, y)\, d\nu(y) = \int\int f_n(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y),$$

где второй интеграл левой части равенства, $\int f_n(x, y)\, d\nu(y)$, имеет смысл для μ-почти всех значений x. То же самое равенство будет иметь место, если везде вместо интегралов $\int$ взять имеющие смысл интегралы $\int^*$ (с конечными значениями или нет). Теперь остается устремить n к бесконечности и применить два раза слева и один раз справа теорему 36 Фату.

Замечание. Можно утверждать несколько больше. Пусть A_n — множество нулевой μ-меры точек x, для которых функция $(f_n)_x$ не является ν-интегрируемой. Пусть $A = \bigcup_n A_n$; A также имеет μ-меру, равную нулю. Для $x \notin A$ все функции $(f_n)_x$ ν-измеримы, а, следовательно, измерим их предел f_x. Таким образом, частная функция f_x ν-измерима для μ-почти всех значений x (см. обобщение следствия 4).

Кроме того, $g_n(x) = \int f_n(x, y)\, d\nu(y)$ и $g(x) = \int^* f(x, y)\, d\nu(y)$ определены на $\complement A_n$ и μ-измеримы. Следовательно, g определена на $\complement A$ и μ-измерима.

Однако мы видели, что для измеримой функции $\geqslant 0$ вместо $\int^*$ можно писать $\int$, если даже она принимает бесконечные значения (замечание 2 после следствия 3 теоремы 39). В наших условиях для $(\mu \otimes \nu)$-измеримой функции $f \geqslant 0$ можно написать такие соотношения:

$$0 \leqslant \int d\mu(x) \int f(x, y)\, d\nu(y) = \int\int f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leqslant +\infty. \tag{IV, 8; 33}$$

Здесь второй интеграл в левой части равенства имеет смысл для μ-почти всех значений x как интеграл (конечный или бесконечный) от ν-измеримой функции $f_x \geqslant 0$. Первый интеграл левой части (конечный или бесконечный) является интегралом от функции $g \geqslant 0$, определенной μ-почти всюду и μ-измеримой. Двойной интеграл в правой части является интегралом от $(\mu \otimes \nu)$-измеримой функции $f \geqslant 0$.

Следствие 1. *Пусть X и Y — локально компактные пространства, счетные в бесконечности, μ и ν — меры Радона $\geqslant 0$ на X и Y соответственно, f — вещественная функция $\geqslant 0$, измеримая относительно меры $\mu \otimes \nu$. Пусть для μ-почти всех значений x частная функция $f_x: y \to f(x, y)$ интегрируема по ν, а функция g, определенная для μ-почти всех значений x по формуле*

$$g(x) = \int f(x, y)\, d\nu(y), \tag{IV, 8; 33$_2$}$$

интегрируема по μ. Тогда функция f интегрируема по $\mu \otimes \nu$ и имеет место равенство (IV, 8; 22).

Доказательство очевидно. Условия теоремы означают, что левая часть равенства (IV, 8; 33$_2$) конечна, а, следовательно, будет конечной и его правая часть. Поскольку функция f $\mu \otimes \nu$-измерима и ее верхний интеграл конечен, то, согласно теореме 39, она интегрируема.

Следствие 2. *Если функция $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ определена на пространстве $X \times Y$ и $(\mu \otimes \nu)$-измерима на нем, а хотя бы один из трех интегралов*

$$\int\int^* \|\vec{f}(x, y)\|\, d\mu(x)\, d\nu(y), \qquad \int^* d\mu(x) \int^* \|\vec{f}(x, y)\|\, d\nu(y),$$
$$\int^* d\nu(y) \int^* \|\vec{f}(x, y)\|\, d\mu(x) \tag{IV, 8; 34}$$

конечен, то функция $\vec{f}$ интегрируема относительно $\mu \otimes \nu$ и имеют место формулы (IV, 8; 22) *и* (IV, 8; 24).

В самом деле, поскольку функция $\|\vec{f}\|$ измерима, то можно применить теорему Фубини — Фату в предыдущем виде, и тогда тот факт, что один из трех рассматриваемых интегралов конечен, будет означать, что конечны все три рассматриваемых интеграла, а, следовательно, в частности, конечен интеграл $\int\int^* \|\vec{f}(x, y)\| d(\mu \otimes \nu)$. Из теоремы 39 вытекает, что если функция $\vec{f}$ $(\mu \otimes \nu)$-измерима, то она и $(\mu \otimes \nu)$-интегрируема. Мы попадаем тем самым в условия применимости теоремы Фубини — Лебега.

Замечание. Естественно, что теорему Фубини можно применить к интегралам вида $\int\int_A \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$, где A является $(\mu \otimes \nu)$-измеримым подмножеством пространства $X \times Y$, лишь бы только функция $\vec{f}$ была интегрируемой на множестве A или была на нем $(\mu \otimes \nu)$-измерима и $\geqslant 0$. Поскольку это утверждение сводится к вычислению интеграла $\int\int \vec{\tilde{f}}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$, где $\vec{\tilde{f}}$ — функция, равная функции $\vec{f}$ на A и $\vec{0}$ вне A, то новой теоремы мы не получаем. Пусть $A(a)$ при $a \in X$ — это сечение множества A вертикалью с абсциссой a, т. е. множество точек $y \in Y$, таких, что $(a, y) \in A$. Тогда

$$\int\int_A \vec{f}(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_X d\mu(x) \int_{A(X)} \vec{f}(x, y)\, d\nu(y). \qquad (\text{IV}, 8; 35)$$

В частности, если $f = 1$ на A, то

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int \nu(A(x))\, d\mu(x), \qquad (\text{IV}, 8; 35_2)$$

где $\nu(A(x))$ является ν-мерой сечения $A(x)$, определенной для μ-почти всех x (конечной или бесконечной).

Следствие 3. *Пусть A есть $(\mu \otimes \nu)$-измеримая часть пространства $X \times Y$. Для того чтобы она имела нулевую $(\mu \otimes \nu)$-меру, необходимо и достаточно, чтобы для μ-почти каждого значения x ее сечение $A(x)$ имело ν-меру, равную нулю.*

В самом деле, $\int \nu(A(x))\, d\mu(x)$, согласно теореме 26, равен нулю тогда и только тогда, когда подинтегральная функция μ-почти всюду равна нулю.

Замечание. В этой формулировке *существенно* предположение, что A $(\mu \otimes \nu)$-измеримо. Можно (с помощью аксиомы Цермело) доказать существование такого подмножества A из $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которое с каждой из прямых $x = \text{const}$ пересекается в единственной точке, но $(dx \otimes dy)$-мера которого не равна нулю (потому что оно не $(dx \otimes dy)$-измеримо).

Следствие 4. *Пусть f — функция со значениями в метризуемом сепарабельном пространстве F. Если f $(\mu \otimes \nu)$-измерима, то для μ-почти всех значений $x \in X$ частная функция $f_x: y \to f(x, y)$ является ν-измеримой.*

Доказательство. Пусть A — борелевская часть пространства $X \times Y$. Тогда для каждой точки $x \in X$ сечение $A(x)$ борелевское. В самом деле, части $X \times Y$, сечения которых для данного x борелевские, очевидно, образуют σ-алгебру, содержащую все открытые множества из $X \times Y$, и, следовательно, все борелевские множества.

Если теперь f — борелевская функция на $X \times Y$, то все ее частные функции f_x борелевские. В самом деле, если $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество из F, то $f_x^{-1}(\mathcal{O}) = (f^{-1}(\mathcal{O}))(x)$ является борелевским множеством как сечение, проходящее через точку x борелевского множества $f^{-1}(\mathcal{O})$.

Если теперь f $(\mu \otimes \nu)$-измерима, то существует борелевская функция g, равная всюду функции f, кроме точек некоторого множества A $(\mu \otimes \nu)$-меры нуль (см. замечание после теоремы 23_2). Сечение $A(x)$ для μ-почти всех значений x имеет ν-меру, равную нулю (следствие 3), и f_x совпадает с борелевской функцией g_x всюду, кроме множества $A(x)$, а, значит, эта функция ν-измерима.

Случай, когда интегрируемая функция является произведением функции от x и функции от y

Теорема 79. *Пусть μ и ν — меры $\geqslant 0$ на локально компактных пространствах, счетных в бесконечности. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на X, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, а $\vec{g}$ — функция, определенная на Y, со значениями в банаховом пространстве $\vec{G}$, и пусть B — непрерывное билинейное отображение $\vec{F} \times \vec{G}$ в банахово пространство $\vec{H}$.*

Если $\vec{f}$ μ-интегрируема (соответственно μ-измерима) и $\vec{g}$ ν-интегрируема (соответственно ν-измерима), то функция $B(\vec{f}, \vec{g})$: $(x, y) \to B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))$ является $(\mu \otimes \nu)$-интегрируемой (соответственно $(\mu \otimes \nu)$-измеримой) [1] *и имеет место формула*

$$\int\int B(\vec{f}, \vec{g})\, d(\mu \otimes \nu) = B\left(\int \vec{f} d\mu, \int \vec{g} d\nu\right). \quad (\text{IV}, 8; 36)$$

[1] В противоположность тому, что было сделано в теоремах Фубини, для получения измеримости по отношению к $\mu \otimes \nu$ здесь исходят из измеримости относительно μ и ν.

Обратно, если $\vec{F}$, $\vec{G}$ и $\vec{H}$ — скалярные поля, B — обычное произведение, а функция fg $(\mu \otimes \nu)$-интегрируема и ни одна из двух функций f и g не равна почти всюду нулю, то функция f μ-интегрируема, а функция g ν-интегрируема.

Прежде чем проводить доказательство, заметим, что если $\vec{F} = \vec{G} = \vec{H}$ является скалярным полем и B есть обычное произведение, то (IV, 8; 36) записывается в виде

$$\int\int f(x)\, g(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \left(\int f(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int g(y)\, d\nu(y)\right). \quad \text{(IV, 8; 37)}$$

Этот результат непосредственно из определения (IV, 8; 4) *меры $\mu \otimes \nu$ не вытекает, ибо f и g не являются непрерывными функциями с компактным носителем.*

Доказательство. Докажем сначала обратное утверждение. Предположим, что fg интегрируема относительно $\mu \otimes \nu$. Тогда из теоремы Фубини — Лебега следует, что для μ-почти всех значений x функция $y \to f(x) g(y)$ является ν-интегрируемой. Поскольку мы предположили, что f не является почти всюду равной нулю, найдется хотя бы одно значение x, для которого функция $y \to f(x) g(y)$ будет ν-интегрируемой и $f(x) \neq 0$. Отсюда следует, что функция g ν-интегрируема. Точно так же можно показать, что функция f μ-интегрируема [1]).

Для доказательства прямого утверждения нам понадобится

Лемма. *Если часть A множества X имеет нулевую меру относительно μ, то множество $A \times Y$ имеет меру, равную нулю, относительно $\mu \otimes \nu$.*

Эта лемма важна потому, что при $\mu(A) = 0$ мера $\nu(Y)$ может, вообще говоря, быть бесконечной. Мы уже видели, что в плоскости $\mathbb{R}^2$ прямая, параллельная одной из координатных осей, имеет нулевую меру по мере $dxdy$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть K — некоторый компакт пространства Y. Он имеет конечную меру и существует такое открытое множество $\mathcal{O}' \supset K$ из Y, что $\nu(\mathcal{O}') \leqslant \nu(K) + 1$. Тогда найдется такое открытое множество $\mathcal{O} \supset A$ из X, что $\mu(\mathcal{O}) \leqslant \varepsilon / (\nu(K) + 1)$. Так как множество $\mathcal{O} \times \mathcal{O}'$ открыто в $X \times Y$, то *оно* $(\mu \otimes \nu)$-*измеримо*, и мы можем к его характеристической функции применить формулу (IV, 8; 33), которая даст равенство

$$(\mu \otimes \nu)(\mathcal{O} \times \mathcal{O}') = \mu(\mathcal{O})\, \nu(\mathcal{O}') \leqslant \varepsilon. \quad \text{(IV, 8; 38)}$$

[1]) За исключением рассмотренного частного случая этот результат, вообще говоря, не верен. Он, например, очевидным образом не верен для $B \equiv 0$. Точно так же, если $f \equiv 0$, то функция $f(x) g(y) \equiv 0$ и, следовательно, $(\mu \otimes \nu)$-интегрируема, хотя отсюда вывести ν-интегрируемость функции g невозможно.

Значит, $(\mu\otimes\nu)^*(A\times K)\leqslant\varepsilon$. Так как ε произвольно, то $(\mu\otimes\nu)(A\times K)=0$. Однако Y является объединением возрастающей последовательности компактов K_n; поэтому $A\times Y$, как объединение последовательности множеств $A\times K_n$ $(\mu\otimes\nu)$-меры, равной нулю, имеет $(\mu\otimes\nu)$-меру, равную нулю.

Окончание доказательства прямого утверждения теоремы

Сначала докажем, что функция $B(\vec{f},\vec{g})$ является $(\mu\otimes\nu)$-измеримой.

Поскольку $\vec{f}$ (соответственно $\vec{g}$) измерима, то, согласно теореме 32, для $\vec{f}$ (соответственно $\vec{g}$) найдется аппроксимирующая последовательность, образованная непрерывными функциями, из которой, в силу теоремы 38, можно извлечь подпоследовательность $\vec{f}_n$ (соответственно $\vec{g}_n$), μ(соответственно ν)-почти всюду сходящуюся к f, т. е. сходящуюся к $\vec{f}$ (соответственно $\vec{g}$) на множестве A (соответственно B), дополнение которого имеет μ-меру (соответственно ν-меру), равную нулю. Функция $B(\vec{f}_n,\vec{g}_n)$ непрерывна и сходится к $B(\vec{f},\vec{g})$ на множестве $A\times B$, дополнение которого $\complement(A\times B)=(\complement A\times Y)\cup(X\times\complement B)$, согласно лемме, имеет меру нуль. Значит, по теореме 23, функция $B(\vec{f},\vec{g})$ измерима. Для того чтобы доказать ее интегрируемость, достаточно показать, что верхний интеграл от ее нормы конечен. Этот интеграл допускает оценку

$$\int\int^*\|B(\vec{f},\vec{g})\|\,d(\mu\otimes\nu)\leqslant\|B\|\int\int^*\|\vec{f}(x)\|\,\|\vec{g}(y)\|\,d\mu(x)\,d\nu(y). \tag{IV, 8; 39}$$

Аналогично, функция $(x,y)\to\|\vec{f}(x)\|\,\|\vec{g}(y)\|$ $(\mu\otimes\nu)$-измерима, и, поскольку она $\geqslant 0$, к ней можно применить теорему Фубини — Фату. Эта теорема $\left(\text{при }\int^*=\int\right)$ дает

$$\int\int\|\vec{f}(x)\|\,\|\vec{g}(y)\|\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int d\mu(x)\int\|\vec{f}(x)\|\,\|\vec{g}(y)\|\,d\nu(y). \tag{IV, 8; 40}$$

Поскольку $\vec{g}$ по условию ν-интегрируема, последний интеграл конечен и равен $\|\vec{f}(x)\|\int\|\vec{g}(y)\|\,d\nu(y)$. Следовательно, искомый верхний интеграл равен $\left(\int\|\vec{f}\|\,d\mu\right)\left(\int\|\vec{g}\|\,d\nu\right)<+\infty$ и, значит, функция $B(\vec{f},\vec{g})$ является $(\mu\otimes\nu)$-интегрируемой.

К ней можно теперь применить теорему Фубини — Лебега и записать, что

$$\int\int B(\vec{f}, \vec{g})\,d(\mu\otimes\nu)=\int d\mu(x)\int B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))\,d\nu(y). \qquad \text{(IV, 8; 41)}$$

Функция $\vec{g}$ ν-интегрируема и для фиксированного x отображение $\vec{g}\to B(\vec{f}(x), \vec{g})$ из $\vec{G}$ в $\vec{H}$ линейно и непрерывно. Теорема 45 (о перестановочности интеграла и линейно непрерывного отображения) дает равенство

$$\int B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))\,d\nu(y)=B\left(\vec{f}(x), \int \vec{g}\,d\nu\right), \qquad \text{(VI, 8; 42)}$$

откуда

$$\int\int B(\vec{f}, \vec{g})\,d(\mu\otimes\nu)=\int B\left(\vec{f}(x), \int \vec{g}\,d\nu\right)d\mu(x). \qquad \text{(IV, 8; 43)}$$

Так как $\vec{f}$ μ-интегрируема, а $\vec{f}\to B\left(\vec{f}, \int \vec{g}\,d\nu\right)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{H}$, то та же теорема 45 дает

$$\int B\left(\vec{f}(x), \int \vec{g}\,d\nu\right)d\mu(x)=B\left(\int \vec{f}\,d\mu, \int \vec{g}\,d\nu\right), \qquad \text{(IV, 8; 44)}$$

чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Если $\vec{F}=\vec{G}=\vec{H}$ — скалярные поля и B представляет собой обычное произведение, то конец доказательства упрощается. Достаточно доказать, что функция $(x, y)\to f(x)g(y)$ интегрируема, и тогда сразу можно будет написать равенства

$$\int\int f(x)\,g(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int d\mu(x)\int f(x)\,g(y)\,d\nu(y)=$$
$$=\int f(x)\,d\mu(x)\int g(y)\,d\nu(y). \qquad \text{(IV, 8; 44}_2\text{)}$$

Следствие 1. *Пусть A и B — части множеств X и Y соответственно. Если они соответственно μ-измеримы и ν-измеримы и имеют конечные или бесконечные меры, то множество $A\times B$ является $(\mu\otimes\nu)$-измеримым, а его мера равна произведению мер*

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)\leqslant+\infty, \qquad \text{(IV, 8; 45)}$$

где произведение считается равным нулю, если один из множителей равен нулю, даже если другой равен $+\infty$.

В частности, $(\mu\otimes\nu)(X\times Y)=\mu(X)\nu(Y)$.

Обратно, если множество $A \times B$ измеримо относительно $(\mu \otimes \nu)$ и ни одно из этих двух множеств не имеет нулевой меры, то A μ-измеримо, а B ν-измеримо.

Следствие 2. *Пусть μ и ν — меры $\geqslant 0$ на X и Y, и пусть p и q — комплексные функции, определенные соответственно на X и Y и такие, что функция p локально μ-интегрируема, а функция q локально ν-интегрируема. Тогда функция $p \otimes q$: $(x, y) \to p(x) q(y)$ локально $(\mu \otimes \nu)$-интегрируема и мера $(p \otimes q)(\mu \otimes \nu)$ совпадает с мерой $p\mu \otimes q\nu$.*

Локальная $(\mu \otimes \nu)$-интегрируемость вытекает из теоремы. Равенство произведения тензорных произведений $(p \otimes q)(\mu \otimes \nu)$ и тензорного произведения двух произведений $p\mu \otimes q\nu$ вытекает из того, что эти две меры принимают одно и то же значение на каждой функции φ из $\mathscr{C}(X \times Y)$ вида $u \otimes v$, где $u \in \mathscr{C}(X)$ и $v \in \mathscr{C}(Y)$, а именно значение $\left(\int pu d\mu\right)\left(\int qv\, d\nu\right)$ (см. примечание на стр. 661).

Обобщение на произвольные кратные интегралы

Пусть X, Y, Z — три локально компактных пространства, снабженных скалярными мерами λ, μ, ν. Тогда с помощью теоремы, аналогичной теореме 73, можно сразу определить меру на $X \times Y \times Z$ как тензорное произведение мер $\lambda \otimes \mu \otimes \nu$. На этот раз для $u \in \mathscr{C}(X)$, $v \in \mathscr{C}(Y)$, $w \in \mathscr{C}(Z)$ следует положить

$$(\lambda \otimes \mu \otimes \nu)(u \otimes v \otimes w) = \lambda(u) \mu(v) \nu(w). \qquad \text{(IV, 8; 46)}$$

Интегралы относительно $\lambda \otimes \mu \otimes \nu$ тройные. Точно так же определяются интегралы произвольной конечной кратности.

Можно также определить сначала меру $\lambda \otimes \mu$ на $X \times Y$, затем меру $(\lambda \otimes \mu) \otimes \nu$ на множестве $(X \times Y) \times Z$, совпадающем с множеством $X \times Y \times Z$. С помощью формул (IV, 8; 46) и (IV, 8; 4) легко убедиться, что обе меры $\lambda \otimes \mu \otimes \nu$ и $(\lambda \otimes \mu) \otimes \nu$ совпадают на $X \times Y \times Z$. Тем самым доказана *ассоциативность тензорного произведения*. Естественно, что метод вычислений, изложенный в теореме 75, сохраняет свою силу и при λ, μ, $\nu \geqslant 0$ имеет место теорема Фубини, обобщающая теоремы 77 и 78. Пусть, например, надо вычислить интеграл

$$\int \int \int \vec{f}(x, y, z)\, d\lambda(x)\, d\mu(y)\, d\nu(z), \qquad \text{(IV, 8; 47)}$$

если заранее известно, что функция $\vec{f}$ интегрируема относительно $\lambda \otimes \mu \otimes \nu$ или что она измерима и $\geqslant 0$.

Можно было бы, например, сначала вычислить двойной интеграл, а затем простой интеграл по формуле

$$\int d\mu(y) \int\int \vec{f}(x, y, z)\, d\lambda(x)\, d\nu(z), \tag{IV, 8; 48}$$

где двойной интеграл имеет смысл для μ-почти всех значений y.

Можно было бы сначала вычислить простой интеграл, а затем двойной по формуле

$$\int\int d\mu(y)\, d\nu(z) \int \vec{f}(x, y, z)\, d\lambda(x), \tag{IV, 8; 49}$$

где простой интеграл имеет смысл для $(\mu\otimes\nu)$-почти всех значений (y, z).

Можно было бы вычислить последовательно три простых интеграла по формуле

$$\int d\mu(y) \int d\lambda(x) \int \vec{f}(x, y, z)\, d\nu(z), \tag{IV, 8; 50}$$

где интеграл по $d\nu(z)$ имеет смысл для $(\lambda\otimes\mu)$-почти всех значений (x, y), следующий интеграл по $d\lambda(x)$ имеет смысл для μ-почти всех значений y.

Все три полученных интеграла совпадают.

Этот метод часто применяется для вычисления объемов. Предположим, например, что все три пространства X, Y, Z представляют собой вещественную прямую $\mathbb{R}$ и что $d\lambda = d\mu = d\nu$ являются мерами Лебега. Тогда мера-произведение $dx\, dy\, dz$ является мерой объемов в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть теперь A — измеримая часть пространства $\mathbb{R}^3$; предположим, что нам надо вычислить ее объем, т. е. интеграл $\int\limits_A dx \otimes dy \otimes dz$. Согласно формуле (IV, 8; 35), в рамках теоремы Фубини — Фату этот интеграл может быть вычислен, например, по формуле

$$\int S(z)\, dz \leqslant +\infty, \tag{IV, 8; 51}$$

где через $S(z)$ обозначена площадь сечения $A(z)$ множества A плоскостью, перпендикулярной оси z, т. е. двойной интеграл

$$\int\int\limits_{A(z)} dx\, dy \leqslant +\infty. \tag{IV, 8; 52}$$

Эта площадь может быть также вычислена с помощью формулы

$$\int\int l(x, y)\, dx\, dy \leqslant +\infty, \tag{IV, 8; 53}$$

где через $l(x, y)$ обозначена «длина» сечения множества A прямой, параллельной оси z с координатами x, y, т. е. интеграл

$$\int\limits_{A(x,\, y)} dz \leqslant +\infty. \qquad \text{(IV, 8; 54)}$$

Пусть рассматривается пространство $\mathbb{R}^n$, являющееся произведением n экземпляров пространства $\mathbb{R}$. Если через dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$ обозначены канонические меры (т. е. меры Лебега) на пространствах-сомножителях[1]), то $dx_1 \otimes dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_n$ будет мерой, определенной на $\mathbb{R}^n$. Эту меру называют *канонической*, или *мерой Лебега*, на $\mathbb{R}^n$ и обозначают через dx или $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Широкая сходимость тензорных произведений

Теорема 80. *Если при n, стремящемся к бесконечности, последовательность мер μ_n на X широко сходится к мере μ, а последовательность мер ν_n на Y широко сходится к мере ν, то последовательность мер $\mu_n \otimes \nu_n$ при n, стремящемся к бесконечности, широко сходится к мере $\mu \otimes \nu$.*

Доказательство. Пусть φ — некоторый элемент пространства $\mathscr{C}(X \times Y)$. Воспользуемся методом вычислений, изложенным в теореме 75. Величины $\int \varphi(x, y)\, d\nu_n(y)$ сходятся к $\int \varphi(x, y)\, d\nu(y)$ для всех x, в силу предположения о широкой сходимости.

Кроме того, согласно следствию 3 теоремы 66, эта сходимость равномерна относительно точек x, принадлежащих некоторому компакту. Если через $H \times K$ обозначить произведение компактов, содержащее носитель функции φ, то все эти интегралы будут равны нулю для $x \notin H$. Иначе говоря, функции ψ_n, определенные в доказательстве теоремы 75, при n, стремящемся к бесконечности, сходятся к функции ψ равномерно на H с сохранением носителей в H. Теперь, учитывая следствие 2 теоремы 65, мы получаем, что $\mu_n(\psi_n)$ сходятся к $\mu(\psi)$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Существует такая последовательность P_l полиномов $\geqslant 0$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, что меры $P_l dx$ (где $dx = dx_1 \otimes dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_n$) широко сходятся к δ при l, стремящемся к $+\infty$.*

[1]) Обозначение не корректно (см. примечание на стр. 443). Все пространства-сомножители одни и те же. Следовательно, это всюду одна и та же мера! Нужно было написать $1(x_1)dx_1$, $1(x_2)dx_2, \ldots, 1(x_n)dx_n$, что и в самом деле дает одну и ту же меру.

Доказательство. В теореме 68 мы видели, что существует такая последовательность полиномов $Q_l \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, для которой меры $Q_l(x)dx$ при l, стремящемся к бесконечности, широко сходятся к мере $\delta = d\delta(x)$. Теперь полиномы $P_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_l(x_1) Q_l(x_2) \ldots Q_l(x_n)$ неотрицательны и, по теореме 80, мера $Q_l(x_1)dx_1 \otimes Q_l(x_2)dx_2 \otimes \ldots \otimes Q_l(x_n)dx_n$ при l, стремящемся к бесконечности, стремится к мере $d\delta(x_1) \otimes \otimes d\delta(x_2) \otimes \ldots \otimes d\delta(x_n) = d\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 80_2 (теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации). *Пусть K — компакт пространства $\mathbb{R}^n$ и $\vec{f}$ — непрерывная функция на K со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда, каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти такой полином $\vec{Q}$, определенный на $\mathbb{R}^n$, со значениями в $\vec{F}$, что $\max\limits_{x \in K} \|\vec{f}(x) - \vec{Q}(x)\| \leqslant \varepsilon$. Или иначе: существует такая последовательность полиномов $\vec{Q}_k$, которая сходится к функции $\vec{f}$ равномерно на K при k, стремящемся к бесконечности.*

Доказательство. Формула $\vec{g} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{f}_N(a_i)\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{g}_i\alpha_i$, $\alpha_i \in C(\mathbb{R}^n)$, использованная в следствии 8 из теоремы 11 (о разложении единицы), дает сначала некоторую непрерывную разложимую функцию $\vec{g}$ на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем и такую, что $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon/2$ на K[1]).

Пусть теперь P_l — последовательность таких полиномов, что их меры, согласно предыдущему следствию, широко сходятся к δ. Положим

$$\vec{Q}_l(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\int \vec{g}(x-t)P_l(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_l(x-t)\vec{g}(t)\,dt =$$

$$= \int\!\!\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots} \int \vec{g}(x_1 - t_1, x_2 - t_2, \ldots, x_n - t_n) \times$$

$$\times P_l(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n. \qquad (IV, 8; 55)$$

Все рассматриваемые величины имеют смысл, поскольку они представляют собой интегралы от непрерывных функций с компактным носителем.

---

[1]) В условии следствия 8 функция $\vec{f}$ предполагалась определенной на всем X (здесь $\mathbb{R}^n$) и имела компактный носитель. Но это не имело смысла, так как рассматриваются лишь значения $\vec{f}$ на K.

Докажем, что последовательность величин $\vec{Q}_l$ равномерно сходится к $\vec{g}$ на K и что они представляют собой некоторые полиномы. Тогда среди них можно будет найти один такой полином $\vec{Q}_l$, что $\|\vec{Q}_l - \vec{g}\| \leqslant \varepsilon/2$ на K, и теорема будет доказанной.

Прежде всего, имеем: $P_l = \sum\limits_p c_p x^p$ (в обозначениях, принятых на стр. 266, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ и $x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$, для простоты мы убрали стрелки). Отсюда

$$(x-t)^p = \sum_{q \leqslant p} \binom{p}{q} x^q (-t)^{p-q},$$

$$P_l(x-t) = \sum_{\substack{p,\,q \\ q \leqslant p}} c_p \binom{p}{q} x^q (-t)^{p-q}, \tag{IV, 8; 56}$$

$$\vec{Q}_l(x) = \sum_{\substack{p,\,q \\ q \leqslant p}} c_p \binom{p}{q} x^q \int_{\mathbb{R}^n} (-t)^{p-q} \vec{g}(t)\, dt = \sum_q d_q x^q,$$

а, следовательно, $\vec{Q}_l$ является полиномом.

Докажем теперь равномерную сходимость. Так как $\vec{g}$ разложима: $\vec{g} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{g}_i \alpha_i$, то вопрос непосредственно сводится к доказательству того, что каждый интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha_i(x-t) P_l(t)\, dt$ сходится к $\alpha_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha_i(x-t)\, d\delta(t)$ равномерно относительно x в K.

Но $(x, t) \to \alpha_i(x-t)$ является непрерывной функцией на $K \times \mathbb{R}^n$. Когда x пробегает компакт K, частная функция $t \to \alpha_i(x-t)$ сохраняет носитель в некотором фиксированном компакте $\mathbb{R}^n$, а именно в векторной сумме $K - T_i$, где T_i является носителем α_i. Мы оказываемся в условиях применимости следствия 3 теоремы 66 с изменением ролей переменных x и t, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Существуют другие методы доказательства теоремы Вейерштрасса, но это доказательство позволяет получить некоторые гораздо более сильные результаты.

Предположим, что $\vec{f}$ определена и непрерывна не только на K, но и на всем $\mathbb{R}^n$. Тогда для построения функции $\vec{g}$ *с компактным носителем*, близкой к $\vec{f}$ на K, имеется значительно более простой способ: возьмем $\vec{g} = \alpha \vec{f}$, где α — непрерывная функция, или даже класса C^∞, с компактным носителем, равная 1 в некоторой окрестности компакта K (следствие 1 теоремы 11).

Тогда мы получим, что $\vec{g}$ *равна* $\vec{f}$ в некоторой окрестности K. Полиномы $\vec{Q}_l$ сходятся к $\vec{g}$, а, следовательно, к $\vec{f}$ равномерно на K. Правда, функция $\vec{g}$ не разложима и непосредственно применить следствие 3 теоремы 66 невозможно. Легко убедиться, что доказательство этой теоремы проводилось лишь для скалярных функций в связи с наличием векторных мер. Однако она остается справедливой и для векторных функций в случае скалярных мер.

При этих условиях полиномы Q_l обладают гораздо более сильными свойствами сходимости. *Предположим, что на окрестности компакта K функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^m.* Тогда, если α принадлежит классу C^m и имеет носитель в этой окрестности, то $\vec{g}$ принадлежит классу C^m во всем $\mathbb{R}^n$. Тогда *для каждого $p \leqslant m$ производные $D^p\vec{Q}_l$ сходятся к $D^p\vec{f}$ равномерно на K.* Другими словами, *можно осуществить полиномиальную аппроксимацию одновременно и для $\vec{f}$, и для ее производных.* В самом деле, мы имеем простейший случай, когда допустимо дифференцирование под знаком интеграла (см. далее следствие теоремы 115), так что

$$D^p\vec{Q}_l(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^p\vec{g}(x-t)\,P_l(t)\,dt, \tag{IV, 8; 57}$$

и мы пришли к исходной задаче, где вместо $\vec{g}$ стоит $D^p\vec{g}$.

§ 9. ЧАСТНЫЕ СВОЙСТВА МЕР РАДОНА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ $\mathbb{R}$

Свойства, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, используют тот факт, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ не только является локально компактным пространством, но и образует вполне упорядоченное множество. Если a и b — две точки пространства $\overline{\mathbb{R}}$, то через $[a, b[$ мы будем обозначать интервал $a \leqslant x < b$ при $a < b$ и интервал $b < x \leqslant a$ при $b < a$. Точно такой же смысл будут иметь обозначения $]a, b]$, $[a, b]$, $]a, b[$. Следовательно, это будут скорее интервалы в смысле определения, данного на стр. 26, чем интервалы в смысле определения, данного на стр. 183.

Введение символа $\int_a^b d\vec{\mu}$

Определение. Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на интервале $\mathbb{R}_1$ (открытом, полуоткрытом или замкнутом) вещественной пря-