Тогда мы получим, что $\vec{g}$ *равна* $\vec{f}$ в некоторой окрестности K. Полиномы $\vec{Q}_l$ сходятся к $\vec{g}$, а, следовательно, к $\vec{f}$ равномерно на K. Правда, функция $\vec{g}$ не разложима и непосредственно применить следствие 3 теоремы 66 невозможно. Легко убедиться, что доказательство этой теоремы проводилось лишь для скалярных функций в связи с наличием векторных мер. Однако она остается справедливой и для векторных функций в случае скалярных мер.

При этих условиях полиномы Q_l обладают гораздо более сильными свойствами сходимости. *Предположим, что на окрестности компакта K функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^m.* Тогда, если α принадлежит классу C^m и имеет носитель в этой окрестности, то $\vec{g}$ принадлежит классу C^m во всем $\mathbb{R}^n$. Тогда *для каждого $p \leqslant m$ производные $D^p\vec{Q}_l$ сходятся к $D^p\vec{f}$ равномерно на K.* Другими словами, *можно осуществить полиномиальную аппроксимацию одновременно и для $\vec{f}$, и для ее производных.* В самом деле, мы имеем простейший случай, когда допустимо дифференцирование под знаком интеграла (см. далее следствие теоремы 115), так что

$$D^p\vec{Q}_l(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^p\vec{g}(x-t)\,P_l(t)\,dt, \tag{IV, 8; 57}$$

и мы пришли к исходной задаче, где вместо $\vec{g}$ стоит $D^p\vec{g}$.

§ 9. ЧАСТНЫЕ СВОЙСТВА МЕР РАДОНА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ $\mathbb{R}$

Свойства, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, используют тот факт, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ не только является локально компактным пространством, но и образует вполне упорядоченное множество. Если a и b — две точки пространства $\overline{\mathbb{R}}$, то через $[a, b[$ мы будем обозначать интервал $a \leqslant x < b$ при $a < b$ и интервал $b < x \leqslant a$ при $b < a$. Точно такой же смысл будут иметь обозначения $]a, b]$, $[a, b]$, $]a, b[$. Следовательно, это будут скорее интервалы в смысле определения, данного на стр. 26, чем интервалы в смысле определения, данного на стр. 183.

Введение символа $\int_a^b d\vec{\mu}$

Определение. Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на интервале $\mathbb{R}_1$ (открытом, полуоткрытом или замкнутом) вещественной прямой $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Предположим, что эта мера имеет в качестве базы μ_0 вещественную меру $\geqslant 0$. Тогда ее можно, в частности, продолжить на характеристические функции компактных интервалов.

Обозначим, если a и b принадлежат $\mathbb{R}_1$, через $\int\limits_a^b d\vec{\mu}$ величину, определенную по формуле

$$\int\limits_a^b d\vec{\mu} = \begin{cases} \int\limits_{[a,\, b[} d\vec{\mu}, & \text{если} \quad a < b, \\ \vec{0}, & \text{если} \quad a = b, \\ -\int\limits_{[b,\, a[} d\vec{\mu}, & \text{если} \quad b < a \text{[1]}. \end{cases} \tag{IV, 9; 1}$$

В частности, если мера $d\vec{\mu}$ записана в виде $\vec{p}(x)dx$, где $\vec{p}$ — локально интегрируема относительно меры dx, то по определению имеем

$$\int\limits_a^b d\vec{\mu} = \begin{cases} \int\limits_{[a,\, b]} \vec{p}(x)\, dx, & \text{если} \quad a \leqslant b, \\ -\int\limits_{[b,\, a]} \vec{p}(x)\, dx, & \text{если} \quad a \geqslant b. \end{cases} \tag{IV, 9; 2}$$

Теорема 81. *Имеет место соотношение Шаля*:

$$\int\limits_a^b d\vec{\mu} + \int\limits_b^c d\vec{\mu} + \int\limits_c^a d\vec{\mu} = \vec{0}. \tag{IV, 9; 3}$$

Доказательство очевидно. Достаточно рассмотреть все возможные случаи.

Неопределенные интегралы

Определение. Говорят, что функция M, определенная на $\mathbb{R}_1$, со значениями в аффинном нормированном полном пространстве E, является *неопределенным интегралом от меры Радона* $\vec{\mu}$, заданной на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ и имеющей вещественную базу $\geqslant 0$, если, каковы бы ни были a и b из $\mathbb{R}_1$, имеет

---

[1]) Будьте внимательны: мера $\vec{\mu}$, возможно, имеет точечные массы, и тогда небезразлично, что брать — полуинтервалы, включающие левый конец, или полуинтервалы, включающие правый конец.

место равенство

$$\overrightarrow{M(b)-M(a)}=\int_a^b d\vec{\mu}. \qquad (\mathrm{IV}, 9; 4)$$

Если $\vec{\mu}$ имеет вид $d\vec{\mu}=\vec{p}d\mu_0$, где μ_0 — некоторая вещественная мера $\geqslant 0$ и $\vec{p}$ — локально μ_0-интегрируемая функция, то говорят, что M есть *неопределенный интеграл от функции $\vec{p}$ по мере* μ_0.

Теорема 82. *Пусть E — полное аффинное нормированное пространство, $\vec{\mu}$ — некоторая мера Радона на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ и базой $\geqslant 0$. Тогда мера $\vec{\mu}$ имеет бесчисленное множество неопределенных интегралов со значениями в $\vec{E}$. Если c — точка $\mathbb{R}_1$, то функция $\vec{M}$: $x \to \int_c^x d\vec{\mu}$ является неопределенным интегралом со значениями в $\vec{E}$, а, добавляя к ней произвольные постоянные элементы из E, можно получить все неопределенные интегралы со значениями в E.*

Доказательство. То, что функция M обладает указанным свойством, вытекает из соотношения Шаля. Кроме того, если две функции со значениями соответственно в $\vec{E}$ и E являются неопределенными интегралами от меры $\vec{\mu}$, то из формулы (IV, 9; 4) следует, что их разность принимает одно и то же значение в произвольных точках a и b пространства $\mathbb{R}_1$, т. е. является постоянной на $\mathbb{R}_1$. Обратно, сумма какого-либо неопределенного интеграла со значениями в $\vec{E}$ и некоторой постоянной из E является неопределенным интегралом со значениями в E.

Пример. Рассмотрим *функцию Хевисайда* — вещественную функцию Y на $\mathbb{R}$, определенную по формуле

$$Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{для} \quad x > 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{IV}, 9; 5)$$

Эта функция является неопределенным интегралом от меры δ: $Y(x)=\int_{-\infty}^x d\delta$ или $\int_a^x d\delta$, где $a \leqslant 0$ — произвольное число.

Замечание. Можно также показать, что разность двух неопределенных интегралов со значениями в E является некоторой постоянной в $\vec{E}$ и что сумма неопределенного интеграла со значениями в E и постоянной из $\vec{E}$ является неопределенным интегралом в E.

Теорема 83. *Каждая функция M со значениями в E, являющаяся неопределенным интегралом от меры Радона $\vec{\mu}$ на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$, непрерывна слева в любой точке $\mathbb{R}_1$. Эта функция непрерывна справа в точке c прямой $\mathbb{R}_1$ тогда и только тогда, когда $\vec{\mu}(\{c\}) = \vec{0}$. Во всяком случае у нее существует предел справа и ее скачек равен $\vec{\mu}(c)$.*

Доказательство. При $h \geqslant 0$ разность $\overrightarrow{M(c) - M(c-h)}$ является мерой $\vec{\mu}([c-h, c[)$ или интегралом относительно $\vec{\mu}$ характеристической функции φ_h этого интервала. Пусть $d\vec{\mu} = \vec{p}\,d\mu_0$, $\mu_0 \geqslant 0$. Тогда $\vec{\mu}([c-h,\ c[) = \int \varphi_h \vec{p}\, d\mu_0$. Если $h > 0$ стремится к 0, то характеристическая функция φ_h сходится просто к функции 0, т. е. к характеристической функции пустого множества. Отсюда следует, что функция $\varphi_h \vec{p}$ просто сходится к $\vec{0}$. При $h \leqslant h_0$ она ограничена по норме функцией $\|\vec{p}\|\varphi_{h_0}$. Так как $\vec{p}$ локально μ_0-интегрируема, то эта функция $\geqslant 0$ и μ_0-интегрируема. Согласно теореме Лебега, распространенной на обобщенные пределы (см. замечание на стр. 541), предыдущие разности сходятся к 0 при h, стремящемся к 0, что доказывает непрерывность функции слева. Если мы теперь будем проводить рассуждения для разностей $\overrightarrow{M(c+h) - M(c)} = \int \psi_h \vec{p}\, d\mu_0$, где ψ_h — характеристическая функция интервала $[c,\ c+h[$, то увидим, что функции ψ_h сходятся к характеристической функции ψ_0 множества $\{c\}$, состоящего из одной точки c. Функции $\vec{p}\psi_h$ будут мажорироваться некоторой интегрируемой фиксированной функцией $\geqslant 0$. Из теоремы Лебега следует, что эти разности при h, стремящемся к 0, сходятся к $\int \psi_0 \vec{p}\, d\mu_0 = \vec{\mu}(\{c\})$. Отсюда вытекает, что непрерывность справа имеет место тогда и только тогда, когда множество $\{c\}$ имеет нулевую меру относительно $\vec{\mu}$. Кроме того, функция M всегда имеет предел справа и $M(c+0) = M(c) + \vec{\mu}(\{c\})$.

Замечание. Пусть a и c — точки $\mathbb{R}_1$, $a < c$. Предыдущие рассуждения означают, что $\vec{\mu}([a, c'[)$ стремится к $\vec{\mu}([a, c[)$ при

c', стремящемся к c по значениям $<c$, и $\vec{\mu}([a, c'[)$ стремится к $\vec{\mu}([a, c]) = \vec{\mu}([a, c[) + \vec{\mu}(\{c\})$, когда c' стремится к c по значениям $>c$. Конечно, $\vec{\mu}([a, c'])$ имеет пределами соответственно $\vec{\mu}([a, c[)$ и $\vec{\mu}([a, c])$.

Следствие 1. *Если функция $\vec{p}$ определена на $\mathbb{R}_1$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ и локально интегрируема относительно меры Лебега dx, то каждый неопределенный интеграл $x \to \int\limits_c^x \vec{p}(t)\,dt$ является непрерывной функцией x.*

В самом деле, относительно меры $\vec{p}dx$ любая точка имеет нулевую меру.

Следствие 2. *Неопределенный интеграл от меры на $\mathbb{R}_1$ является правильной функцией, а, значит, борелевской и, следовательно, измеримой по отношению к любой мере Радона на $\mathbb{R}_1$.*

Тот факт, что эта функция правильная, вытекает непосредственно из теоремы. Поскольку характеристическая функция интервала борелевская, то борелевской будет ступенчатая функция, а, значит, правильная функция, в чем можно убедиться переходом к пределу (теоремы 8 и 23).

Функции с ограниченной вариацией на прямой

Пусть M — отображение некоторой части $\mathbb{R}_1$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в метрическое пространство E. *Полной вариацией* функции M называется точная верхняя грань $V(M) = V(\mathbb{R}_1, M)$ сумм

$$\sum_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} d\left(M(c_i),\ M(c_{i+1})\right) \qquad \text{(IV, 9; 6)}$$

по всевозможным разбиениям Δ множества $\mathbb{R}_1$, т. е. по всевозможным конечным возрастающим последовательностям точек $c_0, c_1, \ldots, c_n$ из $\mathbb{R}_1$. Полная вариация — это некоторое неотрицательное число, конечное или равное $+\infty$. Если $\mathbb{R}_2 \subset \mathbb{R}_1$, то $V(\mathbb{R}_2, M) \leqslant V(\mathbb{R}_1, M)$. Если $V(\mathbb{R}_1, M)$ конечна, то говорят, что функция M имеет *ограниченную вариацию* на $\mathbb{R}_1$ (надо было бы говорить: имеет ограниченную полную вариацию). Чаще всего рассматриваются случаи, когда $\mathbb{R}_1$ — или интервал (ограниченный или нет, открытый, полуоткрытый или замкнутый), или множество $\mathbb{N}$ целых чисел $\geqslant 0$ (см. стр. 142), или множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. *С этого момента мы будем предполагать, что $\mathbb{R}_1$ — интервал.*

Функция, удовлетворяющая условию Липшица на ограниченном интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, имеет ограниченную вариацию

В самом деле, из неравенства $d(M(x''), M(x')) \leqslant k|x''-x'|$ следует, что полная вариация функции M мажорируется числом k, умноженным на длину интервала $\mathbb{R}_1$. В частности, функция M на $\mathbb{R}_1$ со значениями в аффинном нормированном пространстве E, дифференцируемая и имеющая ограниченную производную, на интервале $\mathbb{R}_1$ конечной длины имеет ограниченную вариацию. Эта функция, в силу следствия 2 из теоремы 13 гл. III, удовлетворяет условию Липшица.

Конечно, если N принимает значения в аффинном нормированном пространстве E, а $\vec{M}$ принимает значения в присоединенном векторном пространстве $\vec{E}$ и k — некоторый скаляр, то

$$\begin{aligned} V(N+\vec{M}) &\leqslant V(N)+V(\vec{M}), \\ V(k\vec{M}) &= |k|\,V(\vec{M}). \end{aligned} \qquad (\mathrm{IV}, 9; 6_2)$$

Это говорит о том, что функции с ограниченной вариацией на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ образуют некоторое векторное пространство. Однако функция $\vec{M} \to V(\vec{M})$ не является нормой в этом пространстве. В самом деле, равенство $V(\vec{M})=0$ эквивалентно тому, что $\vec{M}=\mathrm{const}$, но не обязательно $\vec{M} \equiv \vec{0}$.

Заметим, что при замене последовательности c_i конечной последовательностью, *содержащей данную*, сумма (IV, 9; 6) не убывает. Следовательно, при вычислении точной верхней грани можно ограничиться рассмотрением таких разбиений Δ, у которых среди c_i фигурирует конечное число заранее заданных точек.

Теорема 83_2. *Если a, b, c — три заданные точки $\mathbb{R}_1$, $a < b < c$, то полная вариация функции M в $[a, c]$ является суммой полных вариаций этой функции в $[a, b]$ и $[b, c]$:*

$$V([a, c]; M) = V([a, b]; M) + V([b, c]; M)\,[1].$$

В самом деле, левая часть может быть вычислена как точная верхняя грань сумм $\sum_{\Delta}$, соответствующих конечным после-

---

[1]) Можно было бы ожидать, что справедливы соотношения вида

$$V([a, c[; M) = V([a, b[; M) + V([b, c[, M).$$

Однако, это, вообще говоря, не верно. Указанное соотношение справедливо, если M непрерывна слева в точке b, ибо тогда (лемма 2, стр. 689): $V([a, b]; M) = V([a, b[; M)$.

довательностям точек $c_0 = a$, c_1, c_2, ..., $c_n = c$, среди которых находится точка b.

Теорема 84. *Каждая функция ограниченной вариации на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ со значениями в метрическом пространстве E ограничена. Если E полно, то эта функция правильная, а следовательно, борелевская и, значит, она измерима относительно любой меры Радона на $\mathbb{R}_1$.*

Если полная вариация функции M конечна, то для x и y из $\mathbb{R}_1$ она мажорирует число $d(M(x), M(y))$. Следовательно, функция M ограничена. Докажем теперь, что если пространство E полно, то эта функция правильная.

Пусть x_0, x_1, x_2, ... — некоторая последовательность точек $>c$, стремящаяся к c при n, стремящемся к бесконечности. Для упрощения доказательства сходимости последовательности $M(x_0)$, $M(x_1)$, $M(x_2)$, ... к некоторому пределу при неограниченном возрастании n, переставим так члены этой последовательности, чтобы можно было считать последовательность x_n убывающей. Тогда независимо от n сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} d(M(x_i), M(x_{i+1}))$ ограничена полной вариацией M. Значит, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} d(M(x_i), M(x_{i+1})) < +\infty$. Таким образом, для $m \geqslant n+1$ при m и n, стремящихся к $+\infty$, сумма $\sum\limits_{i=n}^{m-1}$ стремится к 0, и тем более стремится к нулю расстояние $d(M(x_n), M(x_m))$. Это означает, что последовательность $M(x_n)$ является последовательностью Коши. Поскольку E полно, эта последовательность сходится. Ее предел не зависит от выбора последовательности x_n. В самом деле, из двух последовательностей $(x'_n)_{n \in N}$, $(x''_n)_{n \in N}$ можно образовать смешанную последовательность x'_0, x''_0, x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., на которой последовательность значений M должна иметь некоторый предел, а потому последовательности $M(x'_n)$ и $M(x''_n)$ также будут иметь тот же предел. Пусть $M(c+0)$ — общий предел этих последовательностей. Тогда $M(x)$ стремится к $M(c+0)$ при x, стремящемся к c по значениям $>c$. В противном случае существовало бы такое число $\varepsilon > 0$, что для каждого $n \geqslant 1$ можно было бы найти число x_n, $c < x_n \leqslant c + 1/n$, для которого выполняется неравенство $d(M(x_n), M(c+0)) > \varepsilon$. Но тогда последовательность x_n стремилась бы к точке c при n, стремящемся к бесконечности по значениям $>c$, а последовательность $M(x_n)$ не стремилась бы к $M(c+0)$, что противоречит ранее полученным результатам.

Точно так же можно показать, что $M(x)$ имеет предел $M(c-0)$, когда x стремится к c по значениям $<c$. Значит, M в точках $\mathbb{R}_1$ правильная.

Замечание. *Обратное утверждение не верно. Правильная и даже непрерывная на интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ функция с вещественными значениями не обязательно имеет ограниченную вариацию.*

Рассмотрим, например, следующую вещественную функцию M на $[0, 1]$: в точках с абсциссой $1/n$, $n \geqslant 1$, $M(1/n) = (-1)^n/n$, в интервалах $[1/(n+1), 1/n]$ она линейна, а в точке $x = 0$ она равна 0. Функция M, очевидно, непрерывна, а ее полная вариация равна $(1+1/2)+(1/2+1/3)+(1/3+1/4)+\ldots = +\infty$.

Теорема 84_2. *Пусть M — отображение $[a, b]$ $(a < b)$ в E ограниченной вариации. Обозначим через $V([a, x]; M)$ полную вариацию сужения функции M на интервал $[a, x]$. Функция $x \to V([a, x]; M)$ возрастает и непрерывна слева (соответственно справа) в точке c тогда и только тогда, когда M непрерывна слева (соответственно справа) в точке c.*

Мы докажем две леммы, из которых вытекает эта теорема.

Лемма 1. *Если M — отображение $[a, c[$ в метрическое пространство E, то при x, стремящемся к c по значениям $<c$, $V([a, x]; M) \leqslant +\infty$ стремится к $V([a, c[; M) \leqslant +\infty$.*

Доказательство леммы 1. Рассматриваемая функция возрастающая, а, следовательно, при x, стремящемся к c по значениям $<c$, она имеет предел $\leqslant V([a, c[; M)$. Однако если V является произвольным числом $< V([a, c[; M)$, то по определению существует такое разбиение Δ интервала $[a, c[$: $c_0 = a \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n < c$, что

$$\sum_{\Delta} \geqslant V. \tag{IV, 9; 7}$$

Тогда тем более для $c_n \leqslant x < c$

$$V([a, x]; M) \geqslant V([a, c_n]; M) \geqslant \sum_{\Delta} \geqslant V, \tag{IV, 9; 8}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если M является отображением $[a, c]$ $(a < c)$ в метрическое пространство E с ограниченной вариацией, то $V([a, c]; M) = V([a, c[; M)$ тогда и только тогда, когда M непрерывна слева в точке c* [1]).

1) Если M не является функцией с ограниченной вариацией на $[a, c]$, то она не имеет ограниченной вариации на $[a, c[$ и выполняется равенство $V([a, c]; M) = V([a, c[; M) = +\infty$ независимо от того, является ли функция M непрерывной слева в точке c или нет.

Доказательство леммы 2. Легко видеть, что $V([a, c[; M) \leqslant V([a, c]; M)$. Предположим сначала, что M непрерывна слева в точке c. Тогда при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что из $c - x \leqslant \eta$, $x < c$, следует неравенство $d(M(c), M(x)) \leqslant \varepsilon/2$. С другой стороны, существует такое разбиение Δ: $c_0 = a, c_1, c_2, \ldots, c_n = c$ отрезка $[a, c]$, что

$$\sum_{\Delta} \geqslant V([a, c]; M) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{IV, 9; 9}$$

Можно предполагать, кроме того, что $c_{n-1} \geqslant c - \eta$ (в противном случае можно пополнить Δ точкой $c - \eta$, отчего сумма $\sum_{\Delta}$ может лишь возрасти). Тогда

$$V([a, c[; M) \geqslant V([a, c_{n-1}]; M) \geqslant \sum_{\Delta} - d(M(c), M(c_{n-1})) \geqslant$$
$$\geqslant \left(V([a, c]; M) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = V([a, c]; M) - \varepsilon. \tag{IV, 9; 10}$$

Так как ε произвольно, то $V([a, c]; M) = V([a, c[; M)$.

Обратно, предположим, что последнее равенство имеет место. Тогда существует такое разбиение Δ интервала $[a, c[$, при котором имеет место соотношение (IV, 9; 7), где $V = V([a, c], M) - \varepsilon$. Поэтому для $c_n \leqslant x < c$ будем иметь

$$V([a, c]; M) - \varepsilon \leqslant \sum_{\Delta} \leqslant \sum_{\Delta} + d(M(x), M(c)) \leqslant V([a, c]; M), \tag{IV, 9; 11}$$

откуда

$$d(M(x), M(c)) \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad c_n \leqslant x < c, \tag{IV, 9; 12}$$

а, значит, функция M непрерывна слева в точке c.

Доказательство теоремы. Мы только что доказали, что функция $x \to V([a, x]; M)$ непрерывна слева в точке c тогда и только тогда, когда функция M непрерывна слева в этой точке. Мы даже нашли в обоих случаях предел $V([a, x]; M)$, когда x стремится к c по значениям $< c$.

Если теперь x стремится к c по значениям $> c$, то $V([x, b]; M)$, как показывает рассуждение, подобное рассуждению, использованному в лемме 1, стремится к $V(]c, b]; M)$. Рассуждая так же, как в лемме 2, можно убедиться, что последнее выражение равно $V([c, b]; M)$ тогда и только тогда, когда функция M непрерывна справа в точке c. Далее, $V([a, x]; M) = V([a, b]; M) - V([x, b]; M)$ стремится к $V([a, c]; M) = V([a, b]; M) - V([c, b]; M)$ тогда и только тогда, когда M непрерывна справа в точке c.

Если $\mathbb{R}_1$ — замкнутый интервал $[a, b]$ и если M непрерывна слева[1]), то, вместо того чтобы выражать полную вариацию M

[1]) Или, естественно, непрерывна справа.

как точную верхнюю грань, ее можно выразить *как предел сумм* (IV, 9; 6), *соответствующих произвольной последовательности* Δ_0, Δ_1, Δ_2, ... *разбиений* $[a, b]$ *с наибольшей длиной интервалов разбиения, стремящейся к нулю, при* n, *стремящемся к бесконечности*:

Теорема 85. *Пусть* M — *отображение замкнутого интервала* $[a, b]$ $(a < b)$ *прямой* $\mathbb{R}$ *в метрическое пространство* E, *всюду непрерывное слева. Тогда, каким бы ни было число* V_1, *строго меньшее полной вариации* $V(M)$ *функции* M *в* $[a, b]$, *найдется число* $\eta > 0$, *обладающее следующим свойством: какова бы ни была конечная возрастающая последовательность* $c_0 = a \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n = b$ *точек* $[a, b]$, *такая, что длины всех интервалов* $[c_i, c_{i+1}]$ *не превосходят* η, *имеет место неравенство*:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(M(c_i), M(c_{i+1})) \geqslant V_1. \qquad \text{(IV, 9; 13)}$$

Доказательство. Пусть V_2 — такое число, что $V_1 < V_2 < V(M)$. В силу определения полной вариации как точной верхней грани, существует такое разбиение Δ_0: $d_0 = a$, $d_1, d_2, \ldots, d_N = b$, что

$$\sum_{\Delta_0} = \sum_{j=0}^{N-1} d(M(d_j), M(d_{j+1})) \geqslant V_2. \qquad \text{(IV, 9; 14)}$$

Выберем теперь η настолько малым, чтобы:

1) $\eta < d_{j+1} - d_j$ для всех j. Тогда, если $c_{i+1} - c_i \leqslant \eta$, то интервал $[c_i, c_{i+1}]$ содержит не более одной точки d_j.

2) Из $d(x, d_j) \leqslant \eta$, $x < d_j$, следует, что $d(M(x), M(d_j)) \leqslant (V_2 - V_1)/2(N-1)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N-1$.

Такой выбор η возможен, так как M непрерывна слева в каждой точке d_j.

Покажем, что такое число η решает поставленную задачу. Пусть Δ: $c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b$ — разбиение $[a, b]$ на части, длины которых не превосходят η. Если к c_i добавить точки d_j, то мы получим новое разбиение Δ', дающее сумму $\sum_{\Delta'}$, не меньшую, чем $\sum_{\Delta}$, т. е. V_2. Но тогда

$$\sum_{\Delta} = \sum_{\Delta'} - \sum_{i, j} (d(M(c_i), M(d_j)) + \\ + d(M(d_j), M(c_{i+1})) - d(M(c_i), M(c_{i+1}))), \qquad \text{(IV, 9; 15)}$$

при этом последняя сумма распространяется на все системы (c_i, d_j, c_{i+1}), такие, что $c_i < d_j < c_{i+1}$.

Имеет место оценка (неравенство треугольника):

$$d(M(d_j), M(c_{i+1})) - d(M(c_i), M(c_{i+1})) \leqslant d(M(c_i), M(d_j)), \qquad \text{(IV, 9; 16)}$$

откуда

$$d(M(c_i),\ M(d_j))+d(M(d_j),\ M(c_{i+1}))-d(M(c_i),\ M(c_{i+1}))\leqslant$$
$$\leqslant 2d(M(c_i),\ M(d_j))\leqslant 2\frac{V_2-V_1}{2(N-1)}. \qquad \text{(IV, 9; 17)}$$

Поэтому

$$\sum_{\Delta}\geqslant\sum_{\Delta'}-2(N-1)\frac{V_2-V_1}{2(N-1)}=\sum_{\Delta'}-(V_2-V_1), \qquad \text{(IV, 9; 18)}$$

и поскольку $\sum\limits_{\Delta'}\geqslant V_2$, то $\sum\limits_{\Delta}\geqslant V_1$.

Следующая теорема позволяет охарактеризовать функции ограниченной вариации со значениями в нормированном конечномерном аффинном пространстве:

Теорема 86. *Пусть E — аффинное нормированное пространство размерности n над полем вещественных чисел с системой координат $0,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$. Для того чтобы функция M на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ со значениями в E имела ограниченную вариацию, необходимо и достаточно, чтобы каждая из ее составляющих имела ограниченную вариацию. Для того чтобы вещественная функция на $\mathbb{R}_1$ имела ограниченную вариацию, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде разности двух возрастающих и ограниченных функций.*

Доказательство. В силу теоремы 12 гл. II, при замене нормы в $\vec{E}$ эквивалентной нормой функция ограниченной вариации остается функцией ограниченной вариации[1]). Введение системы координат в E позволяет отождествить это пространство с пространством $\mathbb{R}^n$, и мы можем заменить норму в $\vec{E}$ эквивалентной нормой (теорема 13 гл. II): $\|(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\|=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|$ на $\mathbb{R}^n$. Если теперь функция M на $\mathbb{R}_1$ представима в виде $M(x)=0+\sum\limits_{j=1}^{n}X_j(x)\vec{e}_j$, то для любого разбиения Δ отрезка $\mathbb{R}_1$ имеем:

$$\|\overrightarrow{M(c_{i+1})-M(c_i)}\|=\sum_{j=1}^{n}|X_j(c_{i+1})-X_j(c_i)|. \qquad \text{(IV, 9; 19)}$$

Следовательно, полная вариация функции M не меньше полной вариации каждой функции X_j и не больше суммы полных

[1]) Значение полной вариации, естественно, изменяется вместе с изменением нормы. Однако если она конечна в одной норме, то она остается конечной и в любой другой эквивалентной норме.

вариаций этих функций[1]). Это означает, что M имеет ограниченную вариацию в том и только в том случае, когда ограничены вариации функций X_j.

Пусть теперь M — вещественная функция на $\mathbb{R}_1$. Если она монотонна, то все разности $M(c_{i+1}) - M(c_i)$, соответствующие некоторому разбиению Δ, имеют один и тот же знак и сумма (IV, 9; 6) при любом разбиении Δ равна $|M(c_n) - M(c_0)|$. Следовательно, если функция M монотонна и ограничена, то она имеет ограниченную вариацию. Поэтому разность двух возрастающих и ограниченных функций является функцией ограниченной вариации. Обратно, пусть M — вещественная функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}_1$. Выберем точку $c \in \mathbb{R}_1$. Для каждой точки x из $\mathbb{R}_1$ обозначим через $V(x)$ величину

$$V(x) = \begin{cases} \text{вариация } M \text{ на } [c,\ x], & \text{если} \quad x > c, \\ 0, & \text{если} \quad x = c, \\ -(\text{вариация } M \text{ на } [x,\ c]), & \text{если} \quad x < c. \end{cases} \qquad \text{(IV, 9; 20)}$$

Очевидно, $V(x)$ является возрастающей и ограниченной функцией $x \in \mathbb{R}_1$. Если $y > x$, то разность $V(y) - V(x)$ будет полной вариацией функции M на интервале $[x,\ y]$, а, следовательно, она не меньше чем $M(y) - M(x)$. Поэтому

$$V(y) - V(x) \geqslant M(y) - M(x),$$

или

$$V(y) - M(y) \geqslant V(x) - M(x), \qquad \text{(IV, 9; 21)}$$

т. е. разность $V - M$ является возрастающей и ограниченной функцией W, а, следовательно, $M = V - W$ будет разностью двух возрастающих и ограниченных функций.

Следствие. *Пусть $|a, b|$ — некоторый интервал прямой $\mathbb{R}$. Если функция M на $|a, b|$ вещественна, ограничена и кусочно монотонна, то она имеет на $|a, b|$ ограниченную вариацию.*

Говорят, что M кусочно монотонна, если интервал $|a,\ b|$ является объединением конечного числа таких интервалов $|a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{n-1}, a_n|$, $a_0 = a$, $a_n = b$, что в каждом из интервалов $]a_i,\ a_{i+1}[$ эта функция монотонна (все обычно используемые функции кусочно монотонны для ограниченного интервала $|a,\ b|$). Предполагая теперь, например, что $|a,\ b| =$

---

[1]) Если снова воспользоваться тем фактом, что сумма (IV, 9; 6) при замене последовательности c_i на содержащую ее последовательность может лишь возрасти, то легко убедиться в том, что вариация функции M в точности равна сумме вариаций функций X_j.

$=]a, b[$, можем записать:

$$V(|a, b|; M) = V(|a_0, a_1]; M) + V([a_1, a_2]; M) + \ldots + V([a_{n-1}, a_n|; M) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} |M(a_{i+1} - 0) - M(a_i + 0)| + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (|M(a_i) - M(a_i - 0)| + |M(a_i + 0) - M(a_i)|). \quad \text{(IV, 9; 22)}$$

Функции ограниченной вариации и неопределенные интегралы

Функции ограниченной вариации были введены по той причине, что для них имеются простые соотношения, связанные с неопределенными интегралами от мер Радона. Будем говорить, что некоторая функция на $\mathbb{R}_1$ со значениями в E имеет *локально ограниченную* вариацию, если ее сужение на каждый компактный интервал $[a, b]$ из $\mathbb{R}_1$ имеет ограниченную вариацию.

Теорема 87. *Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ и базой $\lambda \geqslant 0$: $\vec{\mu} = \vec{p}\lambda$. Тогда каждый неопределенный интеграл M от меры $\vec{\mu}$ является функцией с локально ограниченной вариацией и эта функция имеет ограниченную вариацию на каждом таком интервале (открытом, полуоткрытом или замкнутом) $|a, b|$ из $\mathbb{R}_1$, на котором $\vec{p}$ λ-интегрируема. Для каждого интервала $|a, b|$ из $\mathbb{R}_1$, $a < b$, имеет место равенство*

$$V(|a, b|; M) = \int_{|a, b[} \|\vec{p}\| d\lambda \leqslant +\infty. \quad \text{(IV, 9; 23)}$$

Все утверждения теоремы вытекают из (IV, 9; 23). Если $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторое разбиение Δ интервала $|a, b|$, то

$$\sum_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M(c_{i+1}) - M(c_i)}\| = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{c_i}^{c_{i+1}} \vec{p}\, d\lambda \right\| \leqslant \int_{|a, b[} \|\vec{p}\| d\lambda. \quad \text{(IV, 9; 24)}$$

Переходя в суммах $\sum_{\Delta}$ к точной верхней грани, получаем неравенство

$$V(|a, b|; M) \leqslant \int_{|a, b[} \|\vec{p}\| d\lambda. \quad \text{(IV, 9; 24}_2\text{)}$$

Мы доказали соотношение (IV, 9; 23) со знаком $\leqslant$ вместо знака $=$. Докажем сначала, что знак равенства имеет место, если $\vec{p}$ непрерывна на $\mathbb{R}_1$ и если $[a, b]$ является замкнутым, а, следовательно, компактным интервалом в $\mathbb{R}_1$. В самом деле, положим $\Lambda = \int\limits_a^b d\lambda$. Функция $\vec{p}$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что из $|x' - x''| \leqslant \eta$ следует $\|\vec{p}(x') - \vec{p}(x'')\| \leqslant \varepsilon/2\Lambda$.

Пусть теперь Δ — некоторое разбиение интервала $[a, b]$: $c_0 = a$, $c_n = b$, максимальная из длин интервалов в котором $\leqslant \eta$. Тогда для $c_i \leqslant x \leqslant c_{i+1}$ имеем

$$\left| \|\vec{p}(x)\| - \|\vec{p}(c_i)\| \right| \leqslant \|\vec{p}(x) - \vec{p}(c_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\Lambda}. \quad \text{(IV, 9; 25)}$$

Теперь можно установить следующие соотношения:

$$\overrightarrow{M(c_{i+1}) - M(c_i)} = \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} \vec{p}(x)\, d\lambda(x) = \vec{p}(c_i) \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda + \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} (\vec{p}(x) - \vec{p}(c_i))\, d\lambda(x), \quad \text{(IV, 9; 26)}$$

$$\|\overrightarrow{M(c_{i+1}) - M(c_i)}\| \geqslant \|\vec{p}(c_i)\| \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda - \frac{\varepsilon}{2\Lambda} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda.$$

Однако

$$\|\vec{p}(c_i)\| \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda \geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} \|\vec{p}(x)\|\, d\lambda(x) - \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} \|\vec{p}(x) - \vec{p}(c_i)\|\, d\lambda(x) \geqslant \geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} \|\vec{p}\|\, d\lambda - \frac{\varepsilon}{2\Lambda} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda. \quad \text{(IV, 9; 27)}$$

Окончательно,

$$\|\overrightarrow{M(c_{i+1}) - M(c_i)}\| \geqslant \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} \|\vec{p}\|\, d\lambda - \frac{\varepsilon}{\Lambda} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} d\lambda. \quad \text{(IV, 9; 28)}$$

Отсюда получаем

$$V([a, b]; M) \geqslant \sum_{\Delta} \geqslant \int\limits_a^b \|\vec{p}\|\, d\lambda - \frac{\varepsilon}{\Lambda} \int\limits_a^b d\lambda \geqslant \int\limits_a^b \|\vec{p}\|\, d\lambda - \varepsilon. \quad \text{(IV, 9; 29)}$$

Так как ε произвольно, то $V([a, b]; M) \geqslant \int_a^b \|\vec{p}\|\,d\lambda$, что вместе с (IV, 9; 24_2) дает (IV, 9; 23). Если теперь $\vec{p}$ — произвольная функция и $[a, b]$, как всегда, компактен, то функция $\vec{p}$ λ-интегрируема на $[a, b]$. Следовательно, согласно теореме 32, при заданном $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\vec{q}$, что

$$\int_a^b \|\vec{p} - \vec{q}\|\,d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{IV, 9; 30}$$

Пусть N — неопределенный интеграл от меры $\vec{q}\lambda$ с базой λ. Тогда

$$V([a, b]; M) \geqslant V([a, b]; N) - V([a, b]; \overrightarrow{M - N}). \tag{IV, 9; 31}$$

Так как функция $\vec{q}$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$V([a, b]; N) = \int_a^b \|\vec{q}\|\,d\lambda. \tag{IV, 9; 32}$$

Согласно (IV, 9; 24_2), можно написать неравенство

$$V([a, b]; \overrightarrow{M - N}) \leqslant \int_a^b \|\vec{p} - \vec{q}\|\,d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{IV, 9; 33}$$

Следовательно,

$$V([a, b]; M) \geqslant \int_a^b \|\vec{q}\|\,d\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^b \|\vec{p}\|\,d\lambda - \int_a^b \|\vec{p} - \vec{q}\|\,d\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \int_a^b \|\vec{p}\|\,d\lambda - \varepsilon. \tag{IV, 9; 34}$$

Отсюда, поскольку ε произвольно, вытекает (IV, 9; 23). Если же функция $\vec{p}$ произвольна, а отрезок $|a, b|$ не обязательно замкнут, то формула сохранится после перехода к пределу. Например, если $]a, b[$ является открытым интервалом, то согласно лемме 1 к теореме 84_2, $V(]a, b[; M)$ является пределом $V([a', b']; M)$, когда a' стремится к a по значениям $> a$, а b' стремится к b по значениям $< b$, и, согласно теореме 36 Фату, $\int_{]a, b[} \|\vec{p}\|\,d\lambda$ является пределом интеграла $\int_{[a', b'[} \|\vec{p}\|\,d\lambda$.

Следствие. *Если $\vec{p}$ — некоторая функция на $\mathbb{R}_1$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$, локально dx-интегрируемая, то неопределенный интеграл M: $x \to \int\limits_c^x \overrightarrow{p(t)}\, dt$ есть непрерывная функция ограниченной вариации на каждом замкнутом интервале $[a, b]$ из $\mathbb{R}_1$. Ее полная вариация на интервале $|a, b|$ $(a < b)$ (открытом, полуоткрытом или замкнутом) из $\mathbb{R}_1$ определяется по формуле*

$$V(|a, b|; M) = \int\limits_{|a, b|} \|\overrightarrow{p(t)}\|\, dt. \qquad \text{(IV, 9; 35)}$$

Если $\vec{E}$ конечномерно, то имеет место обратное утверждение.

Теорема 88. *Пусть M — функция, непрерывная слева и имеющая локально ограниченную вариацию на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в конечномерном аффинном нормированном пространстве E. Тогда M является неопределенным интегралом от некоторой меры $\vec{\mu}$ на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ и с базой $\geqslant 0$. Эта мера определяется единственным образом, если $\mathbb{R}_1$ не имеет наибольшей точки или если предполагается, что $\vec{\mu}$ не содержит массу в этой точке. Кроме того, для каждого интервала $|a, b|$ из $\mathbb{R}_1$, $a < b$, имеем:*

$$\int\limits_a^b d|\vec{\mu}| = |\vec{\mu}|([a, b[) = V([a, b[; M) = V([a, b]; M), \qquad \text{(IV, 9; 36)}$$

где $|\vec{\mu}|$ — наименьшая абсолютная мажоранта меры $\vec{\mu}$. Мера $\vec{\mu}$ имеет конечную норму на $\mathbb{R}_1$ тогда и только тогда, когда M имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}_1$.

Если L является вещественной возрастающей непрерывной слева функцией на $\mathbb{R}_1$, то она будет неопределенным интегралом от некоторой меры $\lambda \geqslant 0$. Если для каждой пары точек x', x'' из $\mathbb{R}_1$, $x' \leqslant x''$, имеет место неравенство

$$\|\overrightarrow{M(x'') - M(x')}\| \leqslant L(x'') - L(x'), \qquad \text{(IV, 9; 37)}$$

то, когда $\mathbb{R}_1$ не имеет наибольшей точки или когда $\vec{\mu}$ не имеет массы в наибольшей точке, мера $\vec{\mu}$ абсолютно мажорируется мерой $\lambda \geqslant 0$.

Легко видеть, почему следует предполагать функцию M непрерывной слева — этого требует теорема 83. Лемма 2 к теореме 84_2 обеспечивает равенство двух последних членов в соотношении (IV, 9; 36).

Обычно меру, для которой функция M является неопределенным интегралом, обозначают не через $\vec{\mu}$ или $\overrightarrow{d\mu}$, а через $\overrightarrow{dM}$ и говорят при этом, что эта мера является производной мерой для функции M.

Мы увидим, что в силу следствия 1 теоремы 89 для функции M, принадлежащей классу C^1, эта мера равна $\overrightarrow{M'}(x)\,dx$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что если M есть неопределенный интеграл от некоторой меры $\vec{\mu}$ на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ и интервал $\mathbb{R}_1$ не имеет наибольшей точки, то мера $\vec{\mu}$ единственна.

В самом деле, мы знаем выражение $\vec{\mu}([a, b[)$ для полуоткрытых интервалов $[a, b[$ интервала $\mathbb{R}_1$. Если $[a, b]$ — замкнутый интервал из $\mathbb{R}_1$ и b не является наибольшей точкой $\mathbb{R}_1$, то $\vec{\mu}([a, b])$ есть предел значений $\vec{\mu}([a, b'[)$ при b', стремящемся к b по значениям $>b$ (замечание, следующее за теоремой 83), а, значит, меру $\vec{\mu}([a, b])$ также можно считать известной. Точно так же мера $\vec{\mu}(]a, b[)$ может быть определена как предел чисел $\vec{\mu}([a', b[)$, когда a' стремится к a по значениям $>a$. Наконец, $\vec{\mu}(]a, b])$ является пределом $\vec{\mu}([a', b])$ при a', стремящемся к a по значениям $>a$. Если $\mathbb{R}_1$ не имеет наибольшей точки, то мера $\vec{\mu}(\varphi)$ будет известна для каждой ступенчатой функции φ с компактным носителем. Поскольку любая функция φ из $\mathscr{C}(\mathbb{R}_1)$ является равномерным пределом таких функций, имеющих носители в некотором фиксированном компакте из $\mathbb{R}_1$, то $\vec{\mu}(\varphi)$ известна для каждой функции φ из $\mathscr{C}(\mathbb{R}_1)$, а, следовательно, $\vec{\mu}$ определяется в рассматриваемом случае единственным образом. Проведенное рассуждение, очевидно, не годится для случая, когда $\mathbb{R}_1$ имеет наибольшую точку b_0. В этом случае к $\vec{\mu}$ можно добавить произвольную массу, расположенную в точке b_0. Это не изменит неопределенные интегралы, в определение которых входят только открытые справа интервалы вида $[a, b[$ из $\mathbb{R}_1$. Напротив, если $\vec{\mu}$ определяет в точке b_0 некоторую массу $\vec{\mu}(\{b_0\}) \neq \vec{0}$, то ее можно удалить, т. е. из μ вычесть меру $\vec{\mu}(\{b_0\})\,\delta_{(b_0)}$ и получить новую меру без массы в b_0, для которой функция M является неопределенным интегралом. Такая мера без точки b_0 уже будет единственной.

Покажем теперь, что каждая функция M со значениями в конечномерном пространстве E, имеющая локально ограниченную вариацию, есть неопределенный интеграл от некоторой меры.

В самом деле, пусть $0, (\vec{e}_i)_{i \in I}$ — некоторая система координат пространства E относительно поля $\mathbb{R}$. Тогда $M = 0 + \sum_{i \in I} M_i \vec{e}_i$, где каждая из функций M_i вещественна, непрерывна слева и имеет локально ограниченную вариацию. Если мы докажем, что она является неопределенным интегралом от некоторой вещественной меры μ_i, то M будет неопределенным интегралом от меры $\vec{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i$. Поэтому нам достаточно ограничиться вещественными функциями.

Вещественная функция M, непрерывная слева и имеющая локально ограниченную вариацию, способом, изложенным в теореме 86, может быть выражена в виде разности двух возрастающих функций: $M = V - (V - M)$. Функции V и $V - M$ непрерывны слева (теорема 84_2). Если каждая из функций V и $V - M$ является неопределенным интегралом от некоторой меры $\geqslant 0$, то M будет неопределенным интегралом от некоторой вещественной меры. Таким образом, задача свелась к доказательству того, что всякая вещественная возрастающая непрерывная слева функция на $\mathbb{R}_1$ есть неопределенный интеграл от некоторой меры $\geqslant 0$.

Пусть M — такая функция. Если M непрерывна и строго возрастает, то утверждение очевидно, ибо тогда M является гомеоморфизмом $x \to y = M(x)$ интервала $\mathbb{R}_1$ на некоторый интервал $\mathbb{R}_2$ из $\mathbb{R}$ (теорема 37 гл. II). Пусть M^{-1} — обратный гомеоморфизм. Обозначим через μ образ при отображении M^{-1} меры Лебега dy из $\mathbb{R}_2$. Пусть теперь $[a, b[$ — некоторый интервал из $\mathbb{R}_1$ и $[\alpha, \beta[= [M(a), M(b)[$ — его образ в $\mathbb{R}_2$ при отображении M. Тогда, согласно следствию 1 из теоремы 60, получим, что $\mu([a, b[) = (M^{-1}(dy))([a, b[) = dy([M(a), M(b)[) = M(b) - M(a)$, а, следовательно, M действительно является неопределенным интегралом для меры μ.

Пусть теперь M — возрастающая функция (не обязательно строго), не обязательно непрерывная. Пусть a_i — ее точки разрыва (их счетное множество), и пусть c_i — ее скачки. Для каждого интервала $[a, b]$ из $\mathbb{R}_1$ имеем: $\sum_{a_i \in [a, b[} c_i \leqslant M(b) - M(a)$. Рассмотрим меру Радона $\lambda = \sum_i c_i \delta_{(a_i)}$. Эта мера имеет неопределенный интеграл L (теорема 82). Интеграл L имеет точки разрыва a_i и скачки c_i в этих точках (теорема 83). Из предыдущего следует, что $M(b) - M(a) \geqslant \sum_{a_i \in [a, b[} c_i = L(b) - L(a)$, поэтому $M - L$ также возрастающая функция, но теперь уже непрерывная. Далее, функция $M - L + \varepsilon x$ строго возрастает и непрерывна. Значит, она является неопределенным интегралом от некоторой меры Радона μ_ε, а тогда M является неопределенным интегралом от меры $\mu = \mu_\varepsilon + \lambda - \varepsilon dx$. Сразу не видно, что мера $\mu \geqslant 0$, но мера $\mu + \varepsilon dx \geqslant 0$. Поскольку μ не зависит от способа ее вычисления (единственность была доказана выше), т. е. от выбора ε, то $\mu \geqslant 0$.

Предположим теперь, что существует такая возрастающая вещественная функция L на $\mathbb{R}_1$, для которой имеет место равенство (IV, 9; 37). Пусть $\vec{\mu}$ и λ — меры, имеющие функции M и L своими неопределенными интегралами. На каждом полуоткрытом интервале $[a, b[$ выполняется неравенство $\|\vec{\mu}([a, b[)\| \leqslant \lambda([a, b[)$. Если $\mathbb{R}_1$ не имеет наибольшей точки или если $\vec{\mu}$ не имеет массы в наибольшей точке, то переходом к пределу, как это делалось ранее, можно убедиться, что последнее неравенство остается верным для интервалов других типов. Если $\varphi \geqslant 0$ — ступенчатая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}_1$, то $\|\vec{\mu}(\varphi)\| \leqslant \lambda(\varphi)$. Переходом к пределу можно установить то же неравенство для любой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{C}(\mathbb{R}_1)$, а это означает, что $\vec{\mu}$ абсолютно мажорируется мерой λ. Заметим, наконец, что если $\lambda \geqslant 0$ есть база для $\vec{\mu}$, $\vec{\mu} = \vec{p}\lambda$, то, согласно теореме 54, $|\vec{\mu}|$ является мерой $\|\vec{p}\| d\lambda$ и тогда соотношение (IV, 9; 36) эквивалентно соотношению (IV, 9; 23).

Мера $\vec{\mu}$ имеет конечную норму на $\mathbb{R}_1$ тогда и только тогда, когда $|\vec{\mu}|$ имеет конечную норму. [В любом случае $\|\vec{\mu}\| \leqslant \| |\vec{\mu}| \|$. Мы видели, что в случае, когда размерность E не меньше 2, равенство, вообще говоря, места не имеет (см. теорему 15). Поэтому из неравенства $\|\vec{\mu}\| < +\infty$ неравенство $\| |\vec{\mu}| \| < +\infty$ непосредственно не вытекает. Однако в случае, когда пространство E конечномерно, это будет именно так. Пусть $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ — некоторый базис в $\vec{E}$ над полем $\mathbb{R}$, $\vec{\mu} = \sum_{i \in I} \vec{e}_i \mu_i$. Тогда $\sum_{i \in I} \|\vec{e}_i\| |\mu_i|$ является абсолютной мажорантой меры $\vec{\mu}$ (стр. 488). Если $\vec{\mu}$ имеет конечную норму, то такими же будут меры μ_i, а, значит, и $|\mu_i|$, имеющие ту же норму (теорема 18). Если некоторая абсолютная мажоранта меры $\vec{\mu}$ имеет конечную норму, то такой же будет наименьшая абсолютная мажоранта. То есть она имеет конечную норму тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbb{R}_1} d|\vec{\mu}| < +\infty$, или тогда и только тогда, когда M имеет ограниченную вариацию на всем $\mathbb{R}_1$.

Следствие. *Для того чтобы функция M на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ со значениями в аффинном нормированном конечномерном пространстве E удовлетворяла условию Липшица с коэффициентом Липшица, равным k, необходимо и достаточно, чтобы она была неопределенным интегралом по отношению к мере Лебега от некоторой функции $\vec{p}$ на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$ с нормой, всюду мажорируемой числом k.*

Доказательство. Если, для $x' \leqslant x''$, $M(x'') - M(x') = \int\limits_{x'}^{x''} \vec{p}(x)\,dx$, $\|\vec{p}(x)\| \leqslant k$, то $\|\overrightarrow{M(x'') - M(x')}\| \leqslant k(x'' - x')$. Обратно, если имеет место последнее неравенство, то имеет место неравенство (IV, 9; 37) при $L(x) = kx$. Следовательно, M является неопределенным интегралом некоторой меры $\vec{\mu}$, которую можно считать не имеющей массы в наибольшей точке интервала $\mathbb{R}_1$ (если такая точка существует). Очевидно, $\vec{\mu}$ абсолютно мажорируется мерой $k\,dx$. Поэтому из теоремы 53 Данфорда — Петтиса следует, что $d\vec{\mu} = \vec{p}\,dx$, где $\|\vec{p}\| \leqslant k$ на $\mathbb{R}_1$.

Длина пути в метрическом пространстве

Согласно определению, данному на стр. 90, путем в метрическом пространстве E называется *непрерывное* отображение M отрезка $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ в метрическое пространство E.

Длиной этого пути называется полная вариация $V(M)$ функции M, $0 \leqslant V(M) \leqslant +\infty$. Путь имеет конечную длину тогда и только тогда, когда функция M имеет ограниченную вариацию. Если E является конечномерным аффинным пространством, снабженным некоторой системой координат, то путь будет иметь конечную длину тогда и только тогда, когда составляющие функции M имеют ограниченную вариацию.

Предположим, в частности, что E является аффинным нормированным пространством. Пусть $t \to A + t\overrightarrow{(B - A)}$ [1]) есть «прямолинейный» путь, концы которого A и B соответствуют значениям $t = 0$ и $t = 1$ соответственно. Для каждого разбие-

---

[1]) При изучении путей и их длин мы будем чаще пользоваться обозначением переменной через t или u вместо x. Именно так обычно поступают в аналитической геометрии при параметрическом задании кривых.

ния Δ интервала $[0, 1]$ имеем равенство $\|\overrightarrow{M(c_{i+1}) - M(c_i)}\| = (c_{i+1} - c_i)\|\overrightarrow{B - A}\|$, откуда $\sum\limits_{\Delta} = \|\overrightarrow{B - A}\|$ и, значит, длина прямолинейного пути, как это и следовало ожидать, равна $\|\overrightarrow{B - A}\|$. Если теперь рассмотреть произвольный путь M и разбиение Δ: $c_0 = a$, c_1, c_2, ..., $c_n = b$ интервала $[a, b]$, то величина $\sum\limits_{\Delta}$, определенная по формуле (IV, 9; 6), соответствующая этому пути, является длиной ломаной, вписанной в этот путь, с вершинами $M(c_0)$, $M(c_1)$, ..., $M(c_n)$. Полная вариация или длина пути определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в этот путь.

(Если E — произвольное метрическое пространство, то мы будем иногда пользоваться понятием точной верхней грани длин вписанных ломаных, когда, строго говоря, нельзя использовать понятие ломаной, а расстояние $d(M(C_i), M(C_{i+1}))$ можно определить, не проводя отрезка прямой, соединяющей эти точки.)

Рассмотрим два *эквивалентных*[1]) пути в E. Это означает, что мы имеем два отображения M и N двух отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ прямой $\mathbb{R}$ в E, и предполагаем, что существует такой гомеоморфизм ξ отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, что $N = M \circ \xi$. В этом случае, очевидно, оба пути имеют одну и ту же длину.

Функция, которая каждому пути ставит в соответствие его *длину*, является функцией, определенной на всевозможных путях в E со значениями в $[0, +\infty]$ и обладающей двумя следующими очевидными свойствами:

1°) Каким бы ни был путь с началом в точке A и концом в точке B пространства E, его длина не меньше, чем расстояние $d(A, B)$, соответствующее простейшему разбиению $c_0 = a$, $c_1 = b$. В случае аффинного нормированного пространства это означает, что прямая является кратчайшим путем, соединяющим две точки[2]).

2°) Если путь составлен последовательно из двух путей, то его длина равна сумме их длин[3]).

[1]) В том же смысле, в каком эквивалентны параметрические многообразия; см. стр. 352.

[2]) Однако она не обязательно будет единственной, обеспечивающей кратчайший путь. В некоторых нормированных аффинных пространствах можно взять систему из трех точек A, B, C, не расположенных на одной прямой и таких, что $\|\overrightarrow{C - A}\| = \|\overrightarrow{B - A}\| + \|\overrightarrow{C - B}\|$.

[3]) Следует обратить внимание на особый характер этой аддитивности. Если, например, при t, изменяющемся в $[a, b]$, $M(t)$ описывает сначала отрезок $[A, C]$, а затем отрезок $[C, A]$ так что $M(a) = M(b) = A$, то длина будет равна, конечно, $2\|\overrightarrow{C - A}\|$, а не 0.

Уточним, о чем же здесь идет речь.

Пусть M_1 — некоторый путь, т. е. непрерывное отображение отрезка $[a, b]$, $a < b$, в E. Пусть M_2 — другой путь, т. е. отображение отрезка $[b, c]$, $b < c$, в E. Предположим еще, что $M_1(b) = M_2(b) = B$. Тогда M_1 и M_2, очевидно, определят непрерывное отображение M отрезка $[a, c]$ в E:

$$M(t) = \begin{cases} M_1(t) & \text{для} \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ M_2(t) & \text{для} \quad b \leqslant t \leqslant c, \end{cases} \qquad (\text{IV}, 9; 37_2)$$

которое задает путь, называемый путем, составленным из первых двух путей. Утверждение 2°) тогда вытекает из (IV, 9; 6_3).

Функция длины является наименьшей функцией, определенной на путях из E, принимающей неотрицательные значения и обладающей двумя указанными свойствами.

В самом деле, если некоторая функция обладает двумя этими свойствами, то длина пути будет, очевидно, $\geqslant 0$ длины любой из вписанных ломаных, а, значит, и их точной верхней грани, т. е. той длины пути, которую мы только что определили.

Из теоремы 85 следует, что длина пути может быть определена как предел длин последовательности вписанных ломаных, а не обязательно как их точная верхняя грань.

Пусть $\mathbb{R}_1$ — некоторый не обязательно замкнутый интервал прямой $\mathbb{R}$, а M — непрерывная функция на $\mathbb{R}_1$ со значениями в метрическом пространстве E. Говорят, что эта функция определяет некоторый несобственный путь. Говорят, что этот несобственный путь *спрямляем*, если для каждого компактного интервала $[a, b]$ из $\mathbb{R}_1$ сужение $M_{[a, b]}$ функции M на $[a, b]$ [1]) определяет путь конечной длины (сам несобственный путь может иметь бесконечную длину; это только означает, что функция M имеет локально ограниченную вариацию).

Пусть теперь c — некоторая точка $\mathbb{R}_1$. Каждой точке t из $\mathbb{R}_1$ можно поставить в соответствие вещественное число $s(t)$, определенное следующим образом: если $t \geqslant c$, то $s(t)$ равно длине дуги $M_{[c, t]}$; если $t < c$, то $s(t)$ равно числу, противоположному длине дуги $M_{[t, c]}$. Таким образом на $\mathbb{R}_1$ задается функция s: $t \to s(t)$ с вещественными значениями (уже определявшаяся в формуле (IV, 9; 20)), непрерывная (теорема 84_2),

[1]) На стр. 16 сужение функции f, заданной на E, на часть A этого множества мы обозначали через f_A. Иногда в этом случае используется также обозначение $f|A$. Тогда рассмотренная выше дуга является путем, определенным суженным отображением $M_{[a, b]}$, или $M|[a, b]$.

возрастающая и в общем случае строго возрастающая. Функция $s(t)$ называется *криволинейной абсциссой относительно* $t \in \mathbb{R}_1$, когда точка c берется за начало отсчета оси абсцисс[1]). Если функция s строго возрастает, то она определяет гомеоморфизм интервала $\mathbb{R}_1$ на некоторый интервал $\mathbb{R}_2$ вещественной прямой (теорема 37 гл. II). Так как при этом функция $s \to t(s)$ обратима, то можно взять s в качестве параметра и таким образом определить новую параметризацию несобственного пути, эквивалентную исходной параметризации. Различные параметризации, полученные при изменении c или при изменении знаков $+$ и $-$ в определении s, эквивалентны. Их называют *натуральными параметризациями* (они зависят, очевидно, не только от топологии, но и от метрики пространства E). Если функция s не является строго возрастающей, она не определяет эквивалентной параметризации пути. Однако если число s_0 задано и существует бесконечное множество значений t, для которых $s(t) = s_0$, то эти значения образуют некоторый интервал из $\mathbb{R}_1$, на котором M постоянна, так что соответствующие значения $M(t)$ совпадают с одной и той же точкой P_0 из E. Следовательно, если положить $P_0 = M_0(s_0)$, то можно убедиться в том, что на некотором интервале $\mathbb{R}_2$ прямой $\mathbb{R}$ существует такая функция M_0, что $M(t) = M_0(s(t))$. Функция M_0 непрерывна и даже обладает свойством Липшица, ибо образ интервала $[s', s'']$ при отображении M_0 имеет длину, равную $|s'' - s'|$, а, следовательно,

$$\| \overrightarrow{M_0(s'') - M_0(s')} \| \leqslant | s'' - s' |. \qquad (IV, 9; 37_3)$$

Эта функция не определяет эквивалентного пути, поскольку s не является инъекцией и потому не будет гомеоморфизмом $\mathbb{R}_1$ на $\mathbb{R}_2$. Мы видим, что параметризация M_0 сохраняет «интересные» свойства параметризации M (и даже практически представляет больший интерес, чем параметризация M), и потому мы продолжаем называть ее натуральной параметризацией несобственного пути. (Допуская вольность речи, отмеченную на стр. 16 и состоящую в том, что даже после замены переменных для функции сохраняется прежнее обозначение, вместо $M_0(s)$ часто пишут $M(s)$, говоря, что это та же функция, выраженная через переменную s вместо переменной t.)

Возрастающая функция s на $\mathbb{R}_1$ является неопределенным интегралом от некоторой меры Радона $\geqslant 0$ на $\mathbb{R}_1$ (теорема 88), по отношению к которой весь интервал $[t', t'']$ из $[a, b]$ имеет в качестве меры длину $|s'' - s'|$ пути $M_{[t', t'']}$. Обычно эту

[1]) Криволинейную абсциссу точки P нельзя, вообще говоря, обозначать через $P = M(t)$, поскольку одна и та же точка P из E может быть образом при отображении M нескольких точек t отрезка $[a, b]$ («кратные точки» пути).

меру на $\mathbb{R}_1$ обозначают через ds (когда переходят к натуральному параметрическому представлению, она становится настоящей мерой Лебега ds). Заметим, что ds является мерой на $\mathbb{R}_1$, а не на образе пути. Эту меру называют *мерой длин* на пути.

Из самого определения s (формула (IV, 9; 20)) и теоремы 88 (формула (IV, 9; 36)) вытекает, что если E является аффинным нормированным конечномерным пространством, то ds есть наименьшая абсолютная мажоранта меры $\overrightarrow{dM}$. Из теоремы 54 Данфорда — Петтиса следует, что можно написать $\overrightarrow{dM}=\vec{p}ds$, $\|\vec{p}\|=1$ ds-почти всюду.

Если E является локально компактным пространством, счетным в бесконечности, и если отображение M является ds-собственным, то существует образ предыдущей меры — мера Радона $\geqslant 0$ на E, носитель которой содержится в замыкании образа пути. Зачастую, несмотря на путаницу, к которой могут привести неточные обозначения, вместо $M(ds)$ пишут ds.

Если $\vec{f}$ является функцией, определенной на E, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то можно говорить о *криволинейном интеграле* $\int \vec{f}\,ds$, полагая его по определению равным $\int\limits_{\mathbb{R}} \vec{f}(M(t))\,d(s(t))$. Согласно теореме 60, этот интеграл является интегралом от функции $\vec{f}$ по отношению к образу меры $M(ds)$, если он существует [1]).

Теорема 88_2. *Образ спрямляемого несобственного пути в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет нулевую меру по отношению к мере $dx=dx_1\otimes dx_2\otimes\ldots\otimes dx_n$.*

Доказательство. Поскольку путь спрямляем, то для доказательства этой теоремы можно заменить его путем $M_0: s\to M_0(s)$, соответствующим натуральной параметризации, ибо образы путей M и M_0 совпадают.

Пусть $[a, b]$ — некоторый интервал из $\mathbb{R}_2$. Пусть Δ — такое разбиение $[a,\ b]: c_0=a,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l=b$, что длина наибольшего из отрезков $\leqslant\eta$. Пусть c_i' — середина $[c_i, c_{i+1}]$. Поскольку длина любой дуги не меньше длины хорды, соединяющей ее

---

[1]) Обозначение $\int \vec{f}\,ds$ неполно, так как в него не входит M. Лучше будет писать $\int\limits_{(M)} \vec{f}\,ds$ — интеграл относительно пути, определяемого отображением M.

23 Зак. 1339

концы, то расстояния от точек $M(t)$, $t \in [c_i, c_{i+1}]$, до $M(c'_i)$ мажорируются длинами дуг $M_{[c'_i, t]}$, т. е. числами $(c_{i+1} - c_i)/2$. Тогда образ пути $M_{[c_i, c_{i+1}]}$ содержится в кубе с центром $M(c'_i)$ со сторонами длины $c_{i+1} - c_i$, параллельными осям. Объемная мера этого образа мажорируется, как нетрудно видеть, числом $(c_{i+1} - c_i)^n \leqslant \eta^{n-1}(c_{i+1} - c_i)$. Объемная же мера отрезка $[a, b]$ мажорируется величиной $\eta^{n-1}(b - a)$. Так как η произвольно, то объем этого образа равен нулю. Поскольку множество $\mathbb{R}_2$ является счетным объединением интервалов вида $[a, b]$, то его образ также имеет объем, равный нулю.

Замечание. Не надо думать, что этот результат будет верен в случае неспрямляемого пути. См. по этому поводу замечание к следствию 1 теоремы 102_2.

Неопределенный интеграл и первообразная

Теорема 89. *Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на интервале $\mathbb{R}_1$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$, локально интегрируемая по мере Лебега. Тогда неопределенный интеграл F от функции $\vec{f}$ по dx со значениями в аффинном нормированном пространстве E с присоединенным векторным пространством $\vec{E}$ имеет $\vec{f}(c)$ в качестве производной (соответственно производной слева или производной справа) в каждой точке c, в которой функция $\vec{f}$ непрерывна (соответственно непрерывна слева или непрерывна справа).*

Доказательство. Докажем, например, дифференцируемость F в случае, когда функция f непрерывна.

Имеем

$$\frac{\overrightarrow{F(c+h) - F(c)}}{h} - \vec{f}(c) = \frac{1}{h}\int\limits_{c}^{c+h} (\vec{f}(x) - \vec{f}(c))\, dx, \qquad (IV, 9; 38)$$

откуда вытекает оценка

$$\left\| \frac{\overrightarrow{F(c+h) - F(c)}}{h} - \vec{f}(c) \right\| \leqslant \sup_{|x-c| \leqslant h} \| \vec{f}(x) - \vec{f}(c) \|. \qquad (IV, 9; 38_2)$$

В силу предположения о непрерывности, правая часть стремится к нулю при h, стремящемся к нулю, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Пусть $\vec{f}$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}_1$ со значениями в $\vec{E}$. Тогда неопределенные интегралы от $\vec{f}$ до dx со* *значениями в E и первообразные функции $\vec{f}$ со значениями в $\vec{E}$, т. е. функции, имеющие $\vec{f}$ в качестве производной, совпадают. Каждая функция на $\mathbb{R}_1$ со значениями в E класса C^1 является неопределенным интегралом от своей производной функции по отношению к мере Лебега dx.*

Доказательство. Теорема говорит о том, что любой неопределенный интеграл является некоторой первообразной. Так как разность между двумя первообразными есть некоторая постоянная из $\vec{E}$ (теорема 22 гл. III), то каждая первообразная отличается от неопределенного интеграла на постоянную, а, значит, также является неопределенным интегралом (теорема 82).

Замечания. 1°) Известно, что в основе интегрального исчисления лежит вычисление первообразных. Если F — некоторая первообразная функции $\vec{f}$, то

$$\overrightarrow{F(b)-F(a)}=\int_a^b \vec{f}(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 9; 38}_3\text{)}$$

2°) Пусть $\vec{F}$ — функция двух переменных: $(x, y) \to \int_x^y \vec{f}(t)\,dt$, а функция $\vec{f}$ всюду непрерывна. Тогда $\vec{F}$ имеет, очевидно, полную производную, определяемую в дифференциальных обозначениях по формуле

$$d\vec{F}=(F'(x, y))\cdot d(x, y)=\vec{f}(y)\,dy-\vec{f}(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 9; 39)}$$

В самом деле, согласно соотношению Шаля,

$$\vec{F}(x, y)=\int_a^y \vec{f}(t)\,dt-\int_a^x \vec{f}(t)\,dt, \qquad \text{(IV, 9; 40)}$$

причем эти интегралы (один, являющийся лишь функцией x, другой — лишь функцией y) имеют в качестве производных функции $\vec{f}(x)$ и $\vec{f}(y)$.

3°) Дифференцируемая функция, производная которой не является всюду непрерывной функцией, не обязательно будет неопределенным интегралом от своей производной, которая, впрочем, не обязательно локально интегрируема по мере Лебега.

23*

4°) Следствие связывает два довольно разных понятия. Первообразная связана с производной. Отыскание первообразной обобщается следующим образом. Пусть E и F — аффинные нормированные пространства и Ω — открытое множество из E. Пусть $\vec{f}$ — некоторая непрерывная функция на Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Отыскивается функция на Ω со значениями в F, допускающая $\vec{f}$ в качестве производной. Неопределенный интеграл связан с понятием меры Радона. Можно говорить о неопределенных интегралах от некоторой меры $\vec{\mu}$ или от некоторой функции $\vec{f}$ по отношению к мере $\lambda \geqslant 0$. Здесь сравниваются первообразные от $\vec{f}$ и неопределенные интегралы от $\vec{f}$ по отношению к мере dx.

Следствие 2. *Пусть M — отображение класса C^1 интервала $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ в аффинное нормированное пространство E. Это отображение определяет некоторый спрямляемый путь, и на каждом интервале $|a, b|$ из $\mathbb{R}_1$, $a \leqslant b$, длина дуги $M_{|a,b|}$ вычисляется по формуле*

$$s(b) - s(a) = \int_{|a,b|} \|\overrightarrow{M'}(t)\|\, dt. \qquad \text{(IV, 9; 40}_2\text{)}$$

В самом деле, согласно следствию 1, функция M является неопределенным интегралом от $\overrightarrow{M'}(t)\,dt$. Следовательно, эта функция имеет локально ограниченную вариацию (теорема 87), а, значит, определяет некоторый спрямляемый путь. Согласно (IV, 9; 23) или (IV, 9; 35), длина пути $M_{|a,b|}$, или полная вариация M на $|a, b|$, равна (IV, 9; 40_2).

Теорема 89_2. *Если функция M, определенная на $\mathbb{R}_1$, со значениями в аффинном нормированном пространстве E принадлежит классу C^1, то функция криволинейная абсцисса s также принадлежит классу C^1. В каждой точке t_0, где $\overrightarrow{M'}(t_0) \neq \vec{0}$, путь имеет касательную и единичный вектор этой касательной задается формулой $\overrightarrow{M'(t_0)}/\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|$. В окрестности точки t_0 функция M_0 является функцией класса C^1 криволинейной абсциссы s, и имеет место равенство*

$$\frac{\overrightarrow{M'(t_0)}}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|} = \left(\frac{\overrightarrow{dM_0}}{ds}\right)_{s=s_0}, \qquad \text{(IV, 9; 40}_3\text{)}$$

определяющее единичный вектор касательной.

Кроме того, если две точки t' и t'' стремятся к точке t_0, то дуга, соединяющая точки $M(t')$ и $M(t'')$, имеет длину, эквивалентную длине стягивающей ее хорды.

Доказательство. Так как, согласно следствию 2 теоремы 89, s представляет собой неопределенный интеграл от непрерывной функции $t \to \|\overrightarrow{M'(t)}\|$, то s является функцией t класса C^1. Если теперь эта производная в точке t_0 отлична от нуля, то из теоремы о неявных функциях (теорема 29 гл. III) следует, что в некоторой окрестности точки t_0 можно выразить t как функцию s класса C^1. Производную этой функции в точке t_0 можно вычислить по формуле

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s=s_0} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_0}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|}. \qquad \text{(IV, 9; } 40_4)$$

Отсюда вытекает, что функция $M_0(s)$, которая может быть вычислена без каких либо предположений о ее дифференцируемости, дифференцируема по s в точках s, близких к $s(t_0)$, и ее производная задается формулой

$$\left(\frac{\overrightarrow{dM_0}}{ds}\right)_{s=s_0} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\overrightarrow{M'(t_0)}}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|}. \qquad \text{(IV, 9; } 40_5)$$

В условии теоремы говорилось о касательной к пути в точке. *Это вовсе не касательная к множеству образа пути в смысле определения, данного на стр.* 218, ибо одна и та же точка, например $M(t_0)$, может быть также образом при отображении M бесконечного множества других точек $t \neq t_0$, соответствующих различным «ветвям кривой», проходящим через ту же точку, и рассмотрение только лишь производной M в точке t_0 не может дать *никаких сведений* относительно касательной в этой точке. *Касательной к пути* в точке t_0 мы называем предел, если он существует, прямой, соединяющей точки $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$ при $\Delta t \neq 0$, стремящемся к 0. Если существует производная $\neq \vec{0}$, то *можно утверждать, что каждая касательная существует и что $\overrightarrow{M'(t_0)}$ является вектором этой касательной*[1].

Поскольку здесь $\overrightarrow{dM_0}/ds$ есть вектор с нормой 1, то он определяет единичный вектор касательной. Говорят также, что этот вектор является единичным вектором полукасательной, соответствующей «возрастающему направлению t», поскольку эта полукасательная является пределом полупрямой с началом в точке $M(t)$, проходящей через $M(t + \Delta t)$ при Δt, стремящемся к 0 по значениям >0.

[1]) Точно так же можно определить контингенцию в точке некоторого параметрического многообразия класса C^1, не имеющую ничего общего с контингенцией образа параметрического многообразия.

Пусть теперь t' и t'' — два числа, стремящихся к t_0. Соответствующие значения s' и s'' криволинейной абсциссы стремятся к s_0. По формуле о конечных приращениях (следствие 1 теоремы 13 гл. III) можно записать:

$$\overrightarrow{M_0(s'') - M_0(s')} = \overrightarrow{M_0'(s_0)}(s'' - s') + \vec{\omega}\,|s'' - s'|, \qquad \text{(IV, 9; 40}_6\text{)}$$

где

$$\|\vec{\omega}\| \leqslant \sup_{\theta \in [s', s'']} \|\overrightarrow{M_0'(\theta)} - \overrightarrow{M_0'(s_0)}\|.$$

Так как $\|\overrightarrow{M'(s_0)}\| = 1$, то мы получаем отсюда

$$|\,\|\overrightarrow{M_0(s'') - M_0(s')}\| - |s'' - s'|\,| \leqslant \|\overrightarrow{M_0(s'') - M_0(s')} - \\ - \overrightarrow{M_0'(s_0)}(s'' - s')\| \leqslant \|\vec{\omega}\|\,|s'' - s'|. \qquad \text{(IV, 9; 40}_7\text{)}$$

Непрерывность производной $\overrightarrow{dM_0}/ds$ обеспечивает стремление к нулю нормы $\|\vec{\omega}\|$ при s' и s'', стремящихся к s_0; тем самым полностью доказана эквивалентность длины дуги $|s'' - s'|$ и длины хорды $\|\overrightarrow{M_0(s'') - M_0(s')}\|$.

Естественно, что теорема 89 дает *достаточное* условие для того, чтобы неопределенный интеграл F функции $\vec{f}$ был дифференцируемым. Он может иметь производные даже в тех точках, где $\vec{f}$ разрывна. Впрочем, иногда случается, что функция $\vec{f}$, локально интегрируемая по мере dx, является разрывной во всех точках прямой, как в примере, построенном на стр. 532. Тем не менее, функция F для некоторых значений x необходимо имеет $\vec{f}(x)$ в качестве производной, как это видно из следующей теоремы, доказанной Лебегом (мы примем ее без доказательства в силу его сложности).

Теорема 90. *Если $\vec{f}$ является функцией, определенной на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ и локально интегрируемой по мере Лебега dx, то каждый неопределенный интеграл F от функции $\vec{f}$ относительно dx имеет $\vec{f}(x)$ в качестве производной для dx-почти всех значений x.*

Конечно большего, чем *dx-почти всюду*, ожидать не приходится, поскольку F не изменяется, если менять $\vec{f}$ на множестве меры нуль.

Следствие 1. *Каждая функция F на $\mathbb{R}_1$ со значениями в аффинном нормированном пространстве E, имеющая всюду производную, ограниченную по норме числом k, удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом Липшица k. Каждая функция F на $\mathbb{R}_1$ со значениями в конечномерном пространстве E, удовлетворяющая условию Липшица с коэффициентом k, имеет dx-почти всюду производную с нормой $\leqslant k$.*

Первая часть является следствием 2 теоремы 13 гл. III, а вторая вытекает из теоремы 90 и следствия теоремы 88.

Замечание. Обе части следствия не будут в точности обратными друг к другу. Если известно, что некоторая функция F удовлетворяет условию Липшица, то отсюда еще не следует, что она имеет *всюду* производную (пример: $x \to |x|$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 1, но не имеет производной в начале координат). Если известно лишь, что некоторая функция F имеет dx-почти всюду производную с нормой $\leqslant k$, то она не обязательно будет удовлетворять условию Липшица и даже не обязательно будет непрерывной (функция Хевисайда (формула (IV, 9; 5)) имеет dx-почти всюду производную, равную нулю).

Следствие 2. *Пусть $t \to M(t)$ — спрямляемый путь некоторого конечномерного аффинного нормированного пространства E, ds — мера Радона и криволинейная абсцисса s является неопределенным интегралом от ds. Тогда этот путь ds-почти всюду имеет касательную.*

Здесь снова мы говорим «касательная к пути» вместо «касательная к образу пути».

Доказательство. Рассмотрим натуральное параметрическое представление кривой $s \to M_0(s)$. На стр. 705 мы видели, что $\overrightarrow{dM_0} = \vec{p}\, ds$, $\|\vec{p}\| = 1$ ds-почти всюду. Согласно теореме Лебега 90, M_0 имеет ds-почти всюду функцию $\vec{p}$ в качестве производной. На стр. 709 мы видели, что в каждой точке, где существует производная $\neq 0$, имеется касательная к пути. Следовательно, путь ds-почти всюду имеет касательную с единичным вектором $\vec{p}$.

Последовательные первообразные непрерывной функции на прямой

Пусть, как и прежде, $\mathbb{R}_1$ — некоторый интервал прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\vec{f}$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$. Мы видели уже, как интегрирование позволяет находить первообразную функции $\vec{f}$.

Покажем теперь, как последовательные первообразные функции $\vec{f}$, требующие a priori нескольких последовательных интегрирований, *могут быть вычислены с помощью одного интегрирования.*

Теорема 91. *Если $\vec{f}$ является непрерывным отображением некоторого интервала $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$ в банахово пространство $\vec{E}$, то существует, и притом единственная, m-я первообразная $\vec{F}_m$ отображения $\vec{f}$, обращающаяся в нуль вместе со своими последовательными производными до $(m-1)$-го порядка включительно в некоторой точке $x = c$ из $\mathbb{R}_1$, и эта производная задается интегралом*

$$\vec{F}_m(x) = \int_c^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} \vec{f}(\xi)\, d\xi \text{ [1]}. \qquad (IV, 9; 41)$$

Доказательство. Единственность первообразной порядка m, удовлетворяющей заданным условиям, очевидна. В самом деле, согласно теореме 22 гл. III, разность между двумя первообразными порядка m является некоторым полиномом степени $\leqslant m-1$. Однако, если требовать, чтобы первообразные вместе с их производными до $(m-1)$-го порядка обращались в нуль в точке c, то эти полиномы вместе с производными до $(m-1)$-го порядка должны равняться нулю в точке c и, следовательно, в силу формулы Тейлора для полиномов, должны быть тождественно равны нулю. Нам остается лишь доказать, что формула (IV, 9; 41) действительно определяет некоторую первообразную порядка m, удовлетворяющую условиям теоремы.

Теорема очевидна для $m = 1$. Предположим, что она верна относительно первообразной порядка $m-1$, и докажем ее справедливость относительно первообразных порядка $m \geqslant 2$. Иначе говоря, предположим, что функция

$$\vec{F}_{m-1}(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!} \vec{f}(\xi)\, d\xi \qquad (IV, 9; 42)$$

есть первообразная $(m-1)$-го порядка функции $\vec{f}$, обращающаяся в нуль вместе со своими производными порядков

[1]) Эта формула требует большого внимания; ξ является переменной интегрирования, а x, не являющаяся переменной интегрирования, фигурирует одновременно в $\int^x$ и под знаком интеграла!

$\leqslant m-2$ в точке c. Тогда существует первообразная $\vec{F}_m$ порядка m от $\vec{f}$, обращающаяся в нуль вместе с производными порядков до $m-1$ в точке c, и эта первообразная вычисляется по формуле

$$\vec{F}_m(x)=\int_c^x \vec{F}_{m-1}(t)\,dt=\int_c^x dt\int_c^t \frac{(t-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}\vec{f}(\xi)\,d\xi. \qquad \text{(IV, 9; 43)}$$

Предположим сначала, что $x > c$. Тогда два последовательных интегрирования можно заменить одним интегралом:

$$\iint_A \frac{(t-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}\vec{f}(\xi)\,dt\,d\xi, \qquad \text{(IV, 9; 44)}$$

где через A обозначено множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, определяемое неравенствами $c \leqslant \xi \leqslant t \leqslant x$ [1]), $x \in \mathbb{R}_1$. В самом деле, последний интеграл имеет смысл, поскольку речь идет о некоторой непрерывной функции, определенной на компакте, а тогда теорема Фубини показывает, что выражение (IV, 9; 43) равно (IV, 9; 44).

Полученный двойной интеграл можно вычислить, начиная интегрирование по t, а затем интегрируя по ξ, другими словами, изменяя порядок интегрирования. С помощью формулы (IV, 8; 35) получаем:

$$F_m(x)=\int_c^x \vec{f}(\xi)\,d\xi\int_\xi^x \frac{(t-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}\,dt, \qquad \text{(IV, 9; 45)}$$

где последний интеграл равен $(x-\xi)^{m-1}/(m-1)!$. Утверждение доказано, так как аналогичные рассуждения для $x < c$ приводят к той же формуле.

Следствие 1. *Пусть $\vec{f}$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда на $\mathbb{R}_1$ существует, и притом единственная, первообразная F_m порядка m для функции $\vec{f}$ со значениями в аффинном пространстве E с присоединенным векторным пространством $\vec{E}$, последовательные производные которой до $(m-1)$-го порядка включительно принимают заданные значения $F_m(c)$, $\vec{F}'_m(c)$, ..., $\vec{F}_m^{(m-1)}(c)$ в точке c. Эта первообразная*

[1]) Можно было бы вместо $\leqslant$ писать $<$, так как это изменяет подынтегральную функцию только на множестве меры нуль.

вычисляется по формуле

$$F_m(x)=F_m(c)+\frac{x-c}{1!}\vec{F}'(c)+\ldots+\frac{(x-c)^{m-1}}{(m-1)!}\vec{F}_m^{(m-1)}(c)+\\+\int_c^x\frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\vec{f}(\xi)\,d\xi.\qquad(\text{IV},9;46)$$

Доказательство. Единственность очевидна. Если мы заметим, что функция F_m, определенная по формуле (IV, 9; 46), является суммой некоторой первообразной порядка m, производные которой до $(m+1)$-го порядка в точке c обращаются в нуль, и некоторого полинома, задаваемого своим разложением Тейлора, производные которого до $(m+1)$-го порядка в точке c принимают заданные значения, то результат становится очевидным.

Следствие 2 (новая формула Тейлора для функции одной вещественной переменной). *Пусть f — некоторая функция, определенная на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в аффинном нормированном пространстве F, имеющая непрерывные производные порядков $\leqslant m+1$. Тогда имеет место формула*

$$f(x)=f(c)+\frac{x-c}{1!}\vec{f}'(c)+\ldots+\frac{(x-c)^m}{m!}\vec{f}^{(m)}(c)+\\+\int_c^x\frac{(x-\xi)^m}{m!}\vec{f}^{(m+1)}(\xi)\,d\xi,\qquad(\text{IV},9;47)$$

а также формула

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}\vec{f}'(x)+\ldots+\frac{h^m}{m!}\vec{f}^{(m)}(x)+\\+h^{m+1}\int_0^1\frac{(1-t)^m}{m!}\vec{f}^{(m+1)}(x+th)\,dt\ ^{1)}.\qquad(\text{IV},9;48)$$

Доказательство. Первая формула является на самом деле формулой (IV, 9; 46), в которой $\vec{f}$, $\vec{F}_m$ и m заменены на $\vec{f}^{(m+1)}$, f и $m+1$. Формула применима, так как f является первообразной порядка $m+1$ непрерывной функции $\vec{f}^{(m+1)}$ и ее

[1]) Надо было бы предполагать пространство a priori полным, как это делалось в теореме с тем, чтобы быть уверенным в существовании интеграла. Однако здесь это не является необходимым, так как при заданной функции f этот интеграл существует.

производные порядка 0, 1, 2, ..., m принимают значения $f(c)$, $\vec{f}'(c), \vec{f}''(c), \ldots, \vec{f}^{(m)}(c)$ в точке c.

Вторая формула получается заменой переменной или же применением первой формулы к интервалу $[0, 1]$ для функции $t \to f(x + t\vec{h})$.

Следствие 3 (новое общее выражение формулы Тейлора). *Пусть f — отображение класса C^{m+1} открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F. Если весь отрезок $[x, x+\vec{h}]$ содержится в Ω, то имеет место формула:*

$$f(x+\vec{h}) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\vec{h} + \ldots + \frac{f^{(m)}(x)}{m!}\vec{h}^m + \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\left(f^{(m+1)}(x+t\vec{h})\,\vec{h}^{m+1}\right)dt. \quad \text{(IV, 9; 49)}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить формулу Тейлора (IV, 9; 47) к интервалу $[0, 1]$ и функции $t \to f(x+t\vec{h})$. Согласно теореме о сложной функции, производная порядка k в точке t этой функции равна $f^{(k)}(x+t\vec{h})\vec{h}^k$. Полученная формула Тейлора значительно важнее формулы, приведенной в гл. III. В самом деле, *она дает явное выражение для остаточного члена*. Однако она требует несколько больше, а именно — функция f должна иметь производную $(m+1)$-го порядка, *непрерывную в области* Ω. При этом дополнительном предположении можно снова получить различные виды формулы Тейлора, приведенные в гл. III.

Если, например, f принимает вещественные значения, то можно воспользоваться теоремой о среднем в виде (IV, 1; 31). Тогда найдется такое число θ, $0 < \theta < 1$, при котором

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\left(f^{(m+1)}(x+t\vec{h})\,\vec{h}^{m+1}\right)dt = \\ = \left(f^{(m+1)}(x+\theta\vec{h})\,\vec{h}^{m+1}\right)\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}dt = \frac{f^{(m+1)}(x+\theta\vec{h})}{(m+1)!}\vec{h}^{m+1}, \quad \text{(IV, 9; 50)}$$

что снова приводит нас к формуле Тейлора (III, 7; 1_2). Если не делать никаких предположений относительно F, то согласно формуле (IV, 1; 24) имеет место следующая оценка остаточного члена:

$$\left\| \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \left(f^{(m+1)}(x+t\vec{h})\,\vec{h}^{m+1}\right) dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{h}\|^{m+1} \, |||f^{(m+1)}||| \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\, dt = |||f^{(m+1)}|||\, \frac{\|\vec{h}\|^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad \text{(IV, 9; 51)}$$

и мы снова возвращаемся к формуле Тейлора (III, 7; 2).

Если L является $(m+1)$-линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\vec{F}$, то, учитывая равенство $\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\, dt = \frac{1}{(m+1)!}$, можно записать:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \left(f^{(m+1)}(x+t\vec{h})\,\vec{h}^{m+1}\right) dt =$$

$$= \frac{L}{(m+1)!}\,\vec{h}^{m+1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \left(\left(f^{(m+1)}(x+t\vec{h}) - L\right)\vec{h}^{m+1}\right) dt, \qquad \text{(IV, 9; 52)}$$

где последний интеграл мажорируется величиной

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f^{(m+1)}(x+t\vec{h}) - L\|\, \|\vec{h}\|^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\, dt =$$

$$= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f^{(m+1)}(x+t\vec{h}) - L\|\, \frac{\|\vec{h}\|^{m+1}}{(m+1)!}; \qquad \text{(IV, 9; 53)}$$

мы вернулись к формуле Тейлора в виде (III, 7; 9).

Окончательно, все найденные ранее выражения для формулы Тейлора являются следствиями нового выражения. Однако, напомним еще раз, что они были доказаны при *менее ограничительных* условиях и, как мы видели в главе о дифференциальном исчислении, эти менее ограничительные условия очень полезны в некоторых теоремах (см., например, доказательство теоремы 14 гл. III).

Формула интегрирования по частям

Теорема 92. 1°) Элементарный случай. *Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — функции класса C^1, определенные на замкнутом интервале $[a, b]$*[1]) *прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховых пространствах*

[1]) В этой формуле a и b — произвольные точки $\mathbb{R}$: $a < b$, $a = b$ или $a > b$.

$\vec{E}$ и $\vec{F}$ соответственно. Пусть B — непрерывное билинейное отображение пространства $\vec{E}\times\vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b B(\vec{u}(x), \vec{v}'(x))\,dx =$$

$$= B(\vec{u}(b), \vec{v}(b)) - B(\vec{u}(a), \vec{v}(a)) - \int_a^b B(\vec{u}'(x), \vec{v}(x))\,dx. \qquad \text{(IV, 9; 54)}$$

2°) Общий случай. *Пусть $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ — две меры Радона, определенные на замкнутом интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховых пространствах $\vec{E}$ и $\vec{F}$ соответственно, имеющие базы $\geqslant 0$. Пусть B — непрерывное билинейное отображение $\vec{E}\times\vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$. Пусть $\vec{M}$ и $\vec{N}$ — неопределенные интегралы мер $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ со значениями в $\vec{E}$ и $\vec{F}$. Если $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ не имеют общих точечных масс, то интегралы $\int_a^b B(\vec{M}, d\vec{\nu})$ и $\int_a^b B(d\vec{\mu}, \vec{N})$ имеют смысл и справедлива общая формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b B(\vec{M}, d\vec{\nu}) = B(\vec{M}(b), \vec{N}(b)) - B(\vec{M}(a), \vec{N}(a)) - \int_a^b B(d\vec{\mu}, \vec{N}). \qquad \text{(IV, 9; 55)}$$

Доказательство. Если учесть формулу дифференцирования билинейного непрерывного отображения (теорема 12 гл. III)

$$\vec{F}' = \vec{f} = B(\vec{u}', \vec{v}) + B(\vec{u}, \vec{v}'), \qquad \text{(IV, 9; 56)}$$

то первая формула вытекает из формулы (IV, 9; 38_3), примененной к $\vec{F} = B(\vec{u}, \vec{v})$.

Легко видеть, почему формула общего случая является обобщением частной формулы интегрирования по частям. В самом деле, если положить $d\vec{\mu} = \vec{u}'\,dx$ и $d\vec{\nu} = \vec{v}'\,dx$, то $\vec{M} = \vec{u}$ и $\vec{N} = \vec{v}$ будут неопределенными интегралами от $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$. Меры $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ имеют в качестве базы меру $dx \geqslant 0$. Поскольку меры $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ не имеют точечных масс, то они не имеют общей точечной массы, а, следовательно, формула (IV, 9; 55) (с учетом определения (IV, 5; 13)) сведется к формуле (IV, 9; 54).

Докажем теперь общий случай. В силу соотношения $\int\limits_a^b = -\int\limits_b^a$ всегда можно считать $a < b$.

Пусть μ_0 и ν_0 — такие вещественные меры $\geqslant 0$, для которых $\vec{\mu}$ имеет в качестве базы меру μ_0, а $\vec{\nu}$ имеет в качестве базы меру ν_0. Если положить $\lambda_0 = \mu_0 + \nu_0$, то мы увидим, что обе меры μ_0 и ν_0 мажорируются мерой λ_0, а, следовательно (теорема 53 Данфорда — Петтиса), имеют в качестве базы меру λ_0. Поэтому $d\mu_0 = p_0 d\lambda_0$ и $d\nu_0 = q_0 d\lambda_0$, где p_0 и q_0 локально λ_0-интегрируемы. Поскольку одновременно $d\vec{\mu} = \vec{p} d\mu_0$, $d\vec{\nu} = \vec{q} d\nu_0$, то окончательно получим (следствие теоремы 51):

$$d\vec{\mu} = (\vec{p} p_0)\, d\lambda_0 = \vec{f}\, d\lambda_0, \qquad d\vec{\nu} = (\vec{q} q_0)\, d\lambda_0 = \vec{g}\, d\lambda_0. \qquad (IV, 9; 57)$$

Рассмотрим теперь двойной интеграл

$$\iint\limits_{[a, b[\times [a, b[} B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))\, d\lambda_0(x)\, d\lambda_0(y). \qquad (IV, 9; 58)$$

Поскольку $\vec{f}$ и $\vec{g}$ являются $d\lambda_0$-интегрируемыми на *компакте* $[a, b]$, этот интеграл, согласно теореме 79, существует. Та же самая теорема говорит, что этот интеграл равен

$$B\left(\int\limits_a^b \vec{f}\, d\lambda_0, \int\limits_a^b \vec{g}\, d\lambda_0\right) = B(\vec{M}(b) - \vec{M}(a), \vec{N}(b) - \vec{N}(a)). \qquad (IV, 9; 59)$$

Представим теперь квадрат $[a, b[\times [a, b[$ в виде объединения трех непересекающихся множеств (и, конечно, λ_0-измеримых как пересечение открытых и замкнутых множеств):

1°) множество $a \leqslant y < x < b$, отмеченное на рис. 19 цифрой 1;

2°) множество $a \leqslant x < y < b$, отмеченное на рис. 19 цифрой 2;

3°) диагональ квадрата, т. е. множество $a \leqslant x = y < b$, отмеченное на рис. 19 цифрой 3.

Рассмотрим интеграл, аналогичный (IV, 9; 59), на первом множестве. Согласно теореме Фубини — Лебега (теорема 77),

$$\iint\limits_{(1)} = \int\limits_{]a, b[} d\lambda_0(x) \int\limits_a^x B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))\, d\lambda_0(y). \qquad (IV, 9; 60)$$

Функция $\vec{g}$ является λ_0-интегрируемой на интервале $[a, x[$, и, поскольку отображение $g \to B(f(x), \vec{g})$ является непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{G}$, можно записать

$$\int_a^x B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))\, d\lambda_0(y) = B\left(\vec{f}(x), \int_a^x \vec{g}\, d\lambda_0\right). \qquad \text{(IV, 9; 61)}$$

Здесь интеграл $\int_a^x \vec{g}\, d\lambda_0$ равен $\vec{N}(x) - \vec{N}(a)$. Кроме того, $\int_a^x \vec{g}\, d\lambda_0 = 0$ при $x = a$. Поэтому второй интеграл $\int_{]a,\, b[}$ можно заменить на $\int_{[a,\, b[} = \int_a^b$. Отсюда мы получаем значение первого интеграла. С учетом (IV, 5; 13) получаем интеграл

$$\iint_{(1)} = \int_a^b B(\vec{f}(x), \vec{N}(x) - \vec{N}(a))\, d\lambda_0(x) = \int_a^b B(d\vec{\mu}(x), \vec{N}(x) - \vec{N}(a)), \qquad \text{(IV, 9; 62)}$$

обязательно имеющий смысл.

Совершенно такие же рассуждения относительно интеграла по множеству 2 дадут следующий результат:

$$\iint_{(2)} = \int_a^b B(\vec{M}(x) - \vec{M}(a),\ d\vec{\nu}(x)). \qquad \text{(IV, 9; 63)}$$

Покажем теперь, что интеграл, рассматриваемый на множестве 3, т. е. на диагонали, равен нулю. Его можно вычислить по теореме Фубини. Если зафиксировать x, то надо будет

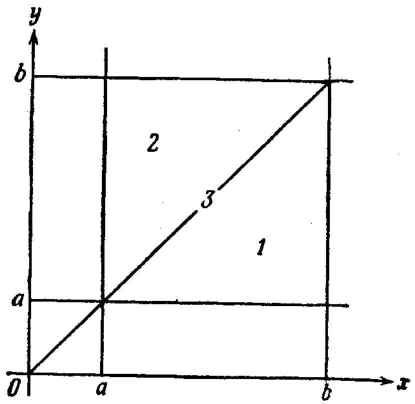

Рис. 19.

сначала на множестве $\{x\}$ вычислить $\int B(\vec{f}(x), \vec{g}(y))\, d\lambda_0(y)$. Этот интеграл всегда равен нулю, кроме того случая, когда его мера λ_0 имеет точечную массу в точке x. Обозначим через $\lambda_0(\{x\})$ эту точечную массу. Тогда предыдущий интеграл равен $B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))\lambda_0(\{x\})$, и, следовательно, интеграл по диагонали будет определяться формулой

$$\int\limits_{(3)}\int = \int\limits_a^b B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))\,\lambda_0(\{x\})\,d\lambda_0(x). \qquad \text{(IV, 9; 64)}$$

Заметим, что масса меры $\vec{\mu}$ в точке x, т. е. интеграл относительно $\vec{f}d\lambda_0$ от характеристической функции множества $\{x\}$, сводящегося к точке x, равен $\vec{f}(x)\lambda_0(\{x\})$. Точно так же масса меры $\vec{\nu}$ в точке x равна $\vec{g}(x)\lambda_0(\{x\})$. Предположение, что $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ не имеют общих точечных масс, равносильно утверждению, что для каждой точки x, в которой λ_0 имеет точечную массу, по крайней мере одна из функций $\vec{f}$ или $\vec{g}$ равна нулю. Но тогда функция $x \to B(\vec{f}(x), \vec{g}(x))\lambda_0(\{x\})$ тождественно равна нулю, а, следовательно, интеграл (IV, 9; 64) равен нулю.

Сравнивая (IV, 9; 59), (IV, 9; 62) и (IV, 9; 63), получаем:

$$B(\vec{M}(b) - \vec{M}(a), \vec{N}(b) - \vec{N}(a)) =$$
$$= \int\limits_a^b B(d\vec{\mu}(x), \vec{N}(x) - \vec{N}(a)) + \int\limits_a^b B(\vec{M}(x) - \vec{M}(a), d\vec{\nu}(x)). \qquad \text{(IV, 9; 65)}$$

Раскрывая и производя, как в (IV, 9; 61), перестановку интеграла и линейного непрерывного отображения, получаем

$$B(\vec{M}(b), \vec{N}(b)) - B(\vec{M}(a), \vec{N}(b)) - B(\vec{M}(b), \vec{N}(a)) + B(\vec{M}(a), \vec{N}(a)) =$$
$$= \int\limits_a^b B(d\vec{\mu}, \vec{N}) - B\left(\int\limits_a^b d\vec{\mu}, N(a)\right) + \int\limits_a^b B(\vec{M}, d\vec{\nu}) - B\left(\vec{M}(a), \int\limits_a^b d\vec{\nu}\right). \qquad \text{(IV, 9; 66)}$$

Поскольку $\int\limits_a^b d\vec{\mu} = \vec{M}(b) - \vec{M}(a)$ и $\int\limits_a^b d\vec{\nu} = \vec{N}(b) - \vec{N}(a)$, то после взаимного уничтожения равных членов в обеих частях равенства мы получим искомую формулу (IV, 9; 55).

Замена переменных при вычислении простых интегралов

Теорема 93. *Пусть $t \to x = \xi(t)$ — некоторая функция класса C^1, определенная на интервале $[\alpha, \beta]$ прямой $\mathbb{R}$, такая* *что $\xi(\alpha) = a$ и $\xi(\beta) = b$* [1]*. Пусть $\vec{f}$ — непрерывная функция, определенная на интервале $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда справедлива формула «замены переменной»:*

$$\int_a^b \vec{f}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \vec{f}(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt. \tag{IV, 9; 67}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Φ, определенную равенством

$$\vec{\Phi}(u) = \int_a^u \vec{f}(x)\,dx. \tag{IV, 9; 68}$$

Так как $\vec{f}$ предполагалась непрерывной, то функция $\vec{\Phi}$ принадлежит классу C^1 и является первообразной функции $\vec{f}$. Кроме того, $\vec{\Phi}(a) = \vec{0}$, а $\vec{\Phi}(b)$ совпадает с левой частью равенства (IV, 9; 67). Функция $s \to \vec{\Psi}(s) = \vec{\Phi}(\xi(s))$, согласно теореме о сложных функциях, принадлежит классу C^1. Она удовлетворяет условию $\vec{\Psi}(\alpha) = \vec{\Phi}(a) = \vec{0}$, а ее производная вычисляется по формуле

$$\vec{\Psi}'(s) = \vec{\Phi}'(\xi(s))\,\xi'(s) = \vec{f}(\xi(s))\,\xi'(s). \tag{IV, 9; 69}$$

Отсюда следует, что для любого значения s можно записать

$$\vec{\Psi}(s) = \int_\alpha^s \vec{f}(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt. \tag{IV, 9; 70}$$

При $s = \beta$ получаем $\vec{\Psi}(\beta) = \vec{\Phi}(b)$, левую часть равенства (IV, 9; 67), а так как правая часть равенства (IV, 9; 70) совпадает с правой частью (IV, 9; 67), то теорема доказана.

Применяемая здесь формула не обобщается на кратные интегралы, поскольку ее вывод опирается на интеграл $\int_a^b$, относящийся исключительно к прямой. Нам будет полезно воспользоваться другой формой интеграла, использующей символ $\int_{[a,b]}$.

[1]) Здесь α, β, a, b — произвольные числа на $\mathbb{R}$, $\alpha \gtreqless \beta$, $a \gtreqless b$.

Пусть I — интервал $[a, b]$ или $[b, a]$ в зависимости от того, какая из величин a или b больше, и пусть J — интервал $[\alpha, \beta]$ или $[\beta, \alpha]$.

Если к предположениям теоремы 93 мы добавим новое условие: ξ *является монотонной функцией на* J, то формулу (IV, 9; 67) можно будет записать в виде

$$\int_I \vec{f}(x)\,dx = \int_J \vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt. \qquad \text{(IV, 9; 71)}$$

В самом деле, если ξ возрастает, то $|\xi'(t)|$ совпадает с $\xi'(t) \geqslant 0$. С другой стороны, интегралы $\int_I$ и $\int_J$ являются интегралами вида $\varepsilon \int_a^b$ и $\varepsilon \int_\alpha^\beta$, где $\varepsilon = \pm 1$. Так как функция ξ предполагается возрастающей, то значение ε будет одним и тем же в обоих случаях. Если же функция ξ будет убывающей, то функция $|\xi'(t)|$ равна $-\xi'(t)$. Значения, которые принимает ε в обоих предыдущих интегралах, противоположны друг другу.

Формулу (IV, 9; 71) мы докажем для несколько иного случая.

Теорема 94. *Пусть $\mathcal{O}$ и Ω — два открытых множества вещественной прямой $\mathbb{R}$. Пусть ξ — гомеоморфизм Ω на $\mathcal{O}$, принадлежащий вместе со своим обратным гомеоморфизмом классу C^1. Пусть $\vec{f}$ — непрерывная функция на $\mathcal{O}$ с компактным носителем, принимающая значения в банаховом пространстве $\vec{F}$. При этих условиях имеет место формула*

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{f}(x)\,dx = \int_{\Omega} \vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt. \qquad \text{(IV, 9; 72)}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку носителя $\vec{f}$. Поскольку $\mathcal{O}$ является окрестностью этой точки, существует не менее одного открытого интервала с центром в этой точке, замыкание которого целиком лежит в $\mathcal{O}$. Множество всевозможных таких открытых интервалов, образованных для всех точек носителя $\vec{f}$, является покрытием этого носителя. Поскольку носитель компактен, то достаточно конечного числа интервалов, например $]a_i, b_i[$, $i \in I$, для покрытия этого носителя.

Пусть теперь γ_i — некоторое разбиение единицы, относящееся к покрытию интервалами $]a_i, b_i[$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{f}(x)\,dx = \sum_{i \in I} \int\limits_{]a_i,\,b_i[} \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 9; 73)}$$

Функция ξ^{-1} должна быть гомеоморфизмом интервала $]a_i, b_i[$ на его образ. Значит, функция ξ^{-1} вместе со своей обратной функцией ξ строго монотонна в $]a_i, b_i[$ [1]) (теорема 37 гл. II). Если мы положим $a_i = \xi(\alpha_i)$, $b_i = \xi(\beta_i)$, то в силу монотонности ξ можно применить формулу (IV, 9; 67) и записать равенство

$$\int\limits_{]a_i,\,b_i[} \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx = \int\limits_{]\alpha_i,\,\beta_i[} \gamma_i(\xi(t))\vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt, \qquad \text{(IV, 9; 74)}$$

из которого вытекает, что

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{f}(x)\,dx = \sum_{i \in I} \int\limits_{]\alpha_i,\,\beta_i[} \gamma_i(\xi(t))\vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{i \in I} \int\limits_{\Omega} \gamma_i(\xi(t))\vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt = \int\limits_{\Omega} \vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt. \qquad \text{(IV, 9; 75)}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы образ меры $|\xi'(t)|\,dt$ на множестве Ω при отображении ξ множества Ω в множество $\mathcal{O}$ является мерой Лебега dx на множестве $\mathcal{O}$.*

Для доказательства в качестве f следует взять какую-либо скалярную непрерывную функцию с компактным носителем на $\mathcal{O}$. При этом мы придем к определению образа некоторой меры.

Следствие 2. *Если ξ удовлетворяет условиям теоремы и если $\vec{f}$ является произвольной функцией на $\mathcal{O}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то $\vec{f}$ будет интегрируемой относительно dx на $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда интегрируема на Ω*

[1]) В противном случае существовали бы такие три точки u, v, w этого интервала, что $u < v < w$ и $\xi^{-1}(u) \leqslant \xi^{-1}(v)$, $\xi^{-1}(w) \leqslant \xi^{-1}(v)$ или $\xi^{-1}(u) \geqslant \xi^{-1}(v)$, $\xi^{-1}(w) \geqslant \xi^{-1}(v)$. Рассмотрим, например, первое условие со знаком $\leqslant$. В действительности, в силу биективности ξ^{-1}, можно было бы взять даже знак $<$. Однако тогда в силу следствия теоремы 33 гл. II функция ξ^{-1} принимала бы не менее двух раз каждое значение, заключенное строго между $\xi^{-1}(v)$ и $\sup(\xi^{-1}(u), \xi^{-1}(w))$: один раз в интервале $[u, v[$ и один раз в интервале $]v, w]$, что невозможно, так как эта функция биективна.

относительно dt *функция* $t \to \vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|$, *и при этом справедливо равенство* (IV, 9; 72).

В самом деле, по следствию 1, dx является образом $|\xi'(t)|\,dt$ при отображении ξ. При этом, в силу теоремы 60, функция $\vec{f}$ интегрируема относительно dx тогда и только тогда, когда будет интегрируемой относительно $|\xi'(t)|\,dt$ функция $\vec{f}(\xi(t))$. В силу теоремы 51, последнее имеет место тогда и только тогда, когда функция $\vec{f}(\xi(t))\,|\xi'(t)|$ интегрируема относительно dt. Соотношение (IV, 9; 72) следует из теорем 60 и 51.

Несобственные интегралы на прямой

Пусть $]a, b[$, $a < b$, — некоторый интервал прямой $\mathbb{R}$, не содержащий своего правого конца b. Пусть $\vec{\mu}$ — мера Радона на $]a, b[$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{E}$ и с базой $\geqslant 0$. *Несобственный интеграл* $\int\limits_{]a, \to b[} d\vec{\mu}$ называется *сходящимся*, если интеграл $\int\limits_{]a, b'[} d\vec{\mu}$ при каждом b' из $]a, b[$ имеет смысл и при b', стремящемся к b по значениям из $]a, b[$, существует предел в $\vec{E}$. Вместо $\int\limits_{]a, b[}$ мы пишем $\int\limits_{]a, \to b[}$ (где $\to b$ означает, что в $]a, b[$ берутся значения b', стремящиеся к b), поскольку это выражение в первом обозначении не имеет смысла как интеграл от некоторой интегрируемой функции. Выражение «$\int\limits_{]a, \to b[}$ сходится» означает, что для каждого неопределенного интеграла M от $\vec{\mu}$, со значениями в аффинном нормированном пространстве E с присоединенным векторным пространством $\vec{E}$, $M(b')$ имеет предел при b', стремящемся к b по значениям из $]a, b[$.

Пусть λ — некоторая мера $\geqslant 0$, а $\vec{f}$ — локально λ-интегрируемая функция со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{]a, \to b[} \vec{f}\,d\lambda$ от $\vec{f}$ по λ сходится, если сходится $\int\limits_{]a, \to b[} d\vec{\mu}$, $\vec{\mu} = \vec{f}\lambda$. Говорят, что $\int\limits_{]a, \to b[} \vec{f}\,d\lambda$ абсолютно или нормально сходится, если сходится интеграл $\int\limits_{]a,\to b[} \|\vec{f}\| d\lambda$. Аналогичные определения даются для интегралов вида $\int\limits_{]a\leftarrow, b]}$.

Можно рассматривать интегралы вида $\int\limits_{]a\leftarrow,\to b[}$. Говорят, что такой интеграл сходится, если существует предел интеграла $\int\limits_{]a', b'[}$, когда a' и b', оставаясь в $]a,b[$, стремятся независимо друг от друга соответственно к a и b. Если, например, $a<b$, то это означает, что, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдутся такие $a'_0>a$ и $b'_0<b$, что для всех $a<a'\leqslant a'_0$ и $b'_0\leqslant b'<b$ имеет место неравенство $\left\| \int\limits_{]a\leftarrow,\to b[} - \int\limits_{]a', b'[} \right\| \leqslant \varepsilon$. Это также означает, что для произвольного c из $]a, b[$ оба интеграла $\int\limits_{]c,\to b[}$ и $\int\limits_{]a\leftarrow, c]}$ имеют смысл.

Нередко a и b равны $\pm\infty$. В частности, можно рассматривать $\int\limits_{]-\infty\leftarrow,\to+\infty[}$. Вводят иногда также и обозначения вида $\int\limits_{a}^{\to b}$, $\int\limits_{a\leftarrow}^{b}$, $\int\limits_{a\leftarrow}^{\to b}$.

Теорема 97. *Пусть λ — мера Радона $\geqslant 0$ на $]a,b[$ и $\vec{f}$ — функция, определенная на $[a,b[$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, λ-интегрируемая на каждом интервале $]a,b'[$, где $b'\in]a,b[$. Для того чтобы интеграл $\int\limits_{]a,\to b[} \vec{f}\, d\lambda$ был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы при b', изменяющемся в $]a,b[$, интеграл $\int\limits_{]a, b'[} \|\vec{f}\| d\lambda$ был ограничен. Необходимо и достаточно также, чтобы функция $\vec{f}$ была интегрируемой относительно меры λ на интервале $]a, b[$, и тогда интеграл $\int\limits_{]a,\to b[} \vec{f}\, d\lambda$ сходится и равен $\int\limits_{]a, b[} \vec{f}\, d\lambda$.*

Как мы уже видели, эта теорема говорит о том, что *понятие интегрируемости в смысле Лебега соответствует обобщенному понятию абсолютно сходящегося несобственного интеграла Римана*, рассматриваемому в курсе математического анализа. Напротив, *условно сходящиеся несобственные интегралы*

Римана не являются интегралами от функций, интегрируемых в смысле Лебега. В этом случае запись $\int\limits_{|a, b[} \vec{f}\, d\lambda$ не имеет смысла, и с точки зрения излагаемой теории абсолютно необходимо писать $\int\limits_{|a, \to b[} \vec{f}\, d\lambda$ [1]). Эта теорема, с другой стороны, показывает, что на этой стадии понятие абсолютно сходящегося несобственного интеграла никакого интереса для нас не представляет, ибо оно не дает ничего нового по отношению к интегралу Лебега. Новыми являются лишь *условносходящиеся* несобственные интегралы, т. е. сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся.

Доказательство. Обозначим через φ_b характеристическую функцию интервала $[a, b[$.

1°) Поскольку $b' \to \int\limits_{|a, b'[} \|\vec{f}\|\, d\lambda$ является возрастающей функцией, эта функция имеет предел при b', стремящемся к b, тогда и только тогда, когда она ограничена. Следовательно, $\int\limits_{|a, \to b[} \|\vec{f}\|\, d\lambda$ сходится тогда и только тогда, когда при переменном b' ограничен интеграл $\int\limits_{|a, b'[} \|\vec{f}\|\, d\lambda$.

2°) Локально интегрируемая функция $\vec{f}$ измерима (см. примечание на стр. 592). Следовательно, эта функция интегрируема тогда и только тогда, когда $\int\limits_{|a, b[}^{*} \|\vec{f}\|\, d\lambda = \int \|\vec{f}\| \varphi_b\, d\lambda < +\infty$. Однако, по теореме 36 Фату, это выражение является пределом от $\int \|\vec{f}\| \varphi_{b'}\, d\lambda = \int\limits_{|a, b'[}^{*} \|\vec{f}\|\, d\lambda = \int\limits_{|a, b'[} \|\vec{f}\|\, d\lambda$. Следовательно, $\vec{f}$ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет смысл интеграл $\int\limits_{|a, \to b[} \|\vec{f}\|\, d\lambda$.

---

[1]) Мы говорим «с точки зрения излагаемой теории необходимо», так как *в большинстве случаев стрелка не ставится!* Например, всегда пишут $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, в то время как $\frac{\sin x}{x}$ не интегрируема по dx на $|0, +\infty[$.

Надо было бы писать $\int\limits_{|0, \to +\infty[} \frac{\sin x}{x}\, dx$ или $\int\limits_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

3°) Если эти условия выполнены для фиксированной интегрируемой функции $\geqslant 0$, то при b', стремящемся к b, $\vec{f}\varphi_{b'}$ будет просто сходится к $\vec{f}\varphi_b$ и имеет место неравенство $\|\vec{f}\varphi_{b'}\| \leqslant \|\vec{f}\|$. Из теоремы 35 Лебега следует, что при b', стремящемся к b, интеграл $\int\limits_{]a,b'[} \vec{f}\,d\lambda = \int \vec{f}\varphi_{b'}\,d\lambda$ сходится к $\int\limits_{]a,b[} \vec{f}\,d\lambda = \int \vec{f}\varphi_b\,d\lambda$, а, следовательно, $\int\limits_{]a,\to b[} \vec{f}\,d\lambda$ сходится и равен $\int\limits_{]a,b[} \vec{f}\,d\lambda$.

Следствие 1. *На каждом ограниченном интервале* $[a, b]$, $a < b$, *содержащем начало координат, функция* $1/|x|^\alpha$ *интегрируема по мере Лебега тогда и только тогда, когда* $\alpha < 1$. *На интервале* $[a, +\infty[$ *или* $]-\infty, a]$, *не содержащем начала, это функция интегрируема тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

Функция $1/|x|^\alpha$ непрерывна в $\complement 0$, а, следовательно, локально интегрируема в $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$. Пусть, например, $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a < b$. Функция $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{|x|^{\alpha-1}}$, где $\varepsilon = +1$ для $x > 0$ и $\varepsilon = -1$ для $x < 0$, является первообразной функции $1/|x|^\alpha$ в $\complement 0$ при $\alpha \neq 1$, а функция $\varepsilon \ln|x|$ является ее первообразной при $\alpha = 1$. Для $0 < c < d < +\infty$ имеем:

$$\int\limits_{|c,d|} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{d^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{c^{\alpha-1}}\right) & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln d - \ln c & \text{для } \alpha = 1. \end{cases} \qquad \text{(IV, 9; 76)}$$

Так как функция $1/x^\alpha \geqslant 0$, то она интегрируема в $]0, b|$ тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{]0\leftarrow,b|}$, т. е. тогда и только тогда, когда его первообразные имеют конечный предел, если $x > 0$ стремится к 0. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\alpha < 1$, и тогда

$$\int\limits_{]0,b|} \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_{]0\leftarrow,b|} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{b^{\alpha-1}}.$$

Тот же самый результат имеет место для интервала $|a, 0]$. Однако $1/|x|^\alpha$ интегрируема в интервале $|a, b|$ тогда и только тогда, когда она интегрируема в $[a, 0]$ и $[0, b]$, т. е. тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

Пусть теперь $a > 0$. Функция $1/x^\alpha$ будет интегрируемой в $|a, +\infty[$ тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{[a, \to+\infty[} dx/x^\alpha$, т. е. тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$. При этом

$$\int\limits_{[a,+\infty[} \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_{[a, \to+\infty[} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{a^{\alpha-1}}.$$

Точно такое же рассуждение можно провести для интервала $]-\infty, a]$, $a < 0$.

Следствие 2. *Обозначим через $1/x^\alpha$ при комплексном α и вещественном $x > 0$ число $e^{-\alpha \ln x}$. Функция $x \to 1/x^\alpha$ интегрируема по мере Лебега в $]0, a]$, $a > 0$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}\alpha < 1$. Эта функция интегрируема в $[a, +\infty[$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}\alpha > 1$. Кроме того, интегралы $\int\limits_{]0\leftarrow, a]} dx/x^\alpha$ и $\int\limits_{[a, \to+\infty[} dx/x^\alpha$ сходятся лишь тогда, когда они сходятся абсолютно.*

В самом деле, функция $1/x^\alpha$ непрерывна, а, значит, измерима. Она интегрируема тогда и только тогда, когда ее абсолютная величина $1/x^{\operatorname{Re}\alpha}$ интегрируема, и мы вернулись к следствию 1.

Для доказательства сходимости интегралов мы используем ту же самую первообразную $\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ или $\ln x$. Опираясь на формулу (IV, 9; 76), можно заключить, что сходимость имеет место для $\int\limits_{]0\leftarrow, a]}$ только при $\alpha < 1$ и для $\int\limits_{[a, +\infty[}$ только при $\alpha > 1$, т. е. тогда, когда имеет место абсолютная сходимость или интегрируемость.

Распространим теперь на несобственные интегралы относительно меры dx методы интегрирования по частям и замены переменной.

Теорема 98 (интегрирование по частям).

1°) *Элементарный случай.*

Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — функции класса C^1, определенные на интервале $[a, b[$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховых пространствах $\vec{E}$ и $\vec{F}$ соответственно. Пусть B — непрерывное билинейное отображение $\vec{E} \times \vec{F}$ в банахово пространство $\vec{G}$. Если выражение $B(\vec{u}(x), \vec{v}(x))$ при $x < b$, стремящемся к b, имеет предел, то $\int\limits_a^{\to b} B(\vec{u}, \vec{v}')\,dx$ существует тогда и только тогда, когда су-

ществует $\int_a^{\to b} B(\vec{u}', \vec{v})\,dx$, *и при этом имеет место формула*

$$\int_a^{\to b} B(\vec{u}, \vec{v}')dx = \lim_{b'\to b} B(\vec{u}(b'), \vec{v}(b')) - B(\vec{u}(a), \vec{v}(a)) - \\ - \int_a^{\to b} B(\vec{u}', \vec{v})\,dx. \quad (IV, 9; 77)$$

2°) *Общий случай*[1]).

Пусть $\vec{\mu}$ *и* $\vec{\nu}$ — *меры Радона на* $[a, b[$ *со значениями соответственно в банаховых пространствах* $\vec{E}$ *и* $\vec{F}$, *имеющие базу* $\geqslant 0$ *и не имеющие общей точечной массы. Пусть* B — *непрерывное билинейное отображение пространства* $\vec{E} \times \vec{F}$ *в банахово пространство* $\vec{G}$.

Пусть $\vec{M}$ *и* $\vec{N}$ — *неопределенные интегралы от* $\vec{\mu}$ *и* $\vec{\nu}$ *со значениями в* $\vec{E}$ *и* $\vec{F}$. *Если при этом* $B(\vec{M}(x), \vec{N}(x))$ *имеет предел при* x, *стремящемся к* b, *то* $\int_a^{\to b} B(\vec{M}, d\vec{\nu})$ *существует тогда и только тогда, когда существует интеграл* $\int_a^{\to b} B(d\vec{\mu}, \vec{N})$, *при этом*

$$\int_a^{\to b} B(\vec{M}, d\vec{\nu}) = \\ = \lim_{b'\to b} B(\vec{M}(b'), \vec{N}(b')) - B(\vec{M}(a), \vec{N}(a)) - \int_a^{\to b} B(d\vec{\mu}, \vec{N}). \quad (IV, 9; 78)$$

Доказательство получается сразу, если написать формулу для пары a, b' и устремить b' к b.

Следствие (критерий Абеля для полусходимости несобственных интегралов). *Пусть* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ — *функции, определенные на интервале* $[a, b[$ *прямой* $\mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, *со значениями в банаховых пространствах* $\vec{E}$ *и* $\vec{F}$. *Пусть* B — *билинейное*

[1]) В приложениях часто пользуются так называемой «второй формулой о среднем», которая является частным случаем рассматриваемой здесь формулы.

непрерывное отображение $\vec{E} \times \vec{F}$ *в банахово пространство* $\vec{G}$. *Предположим, что функции* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ *обладают следующими свойствами*:

1°) *функция* $\vec{u}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b[$ *и* $\vec{u}(x)$ *сходится к нулю, когда* $x < b$ *стремится к* b;

2°) *функция* $\vec{v}$ *локально* dx*-интегрируема и имеет ограниченные неопределенные интегралы, т. е. величины* $\vec{\sigma}_{c,d} = \int_{]c,d[} \vec{v}(x)\,dx$ *независимо от выбора* c *и* d *ограничены по норме.*

Тогда, если пространство $\vec{E}$ *конечномерно*[1]*, имеет смысл интеграл* $\int_{]a,\to b[} B(\vec{u}(x), \vec{v}(x))\,dx$. *Кроме того, если через* $U(c)$ *обозначить полную вариацию функции* $\vec{u}$ *на* $]c, b[$ *и через* $V(c)$ — *точную верхнюю грань величин* $\|\vec{\sigma}_{c,d}\|$ *для* $d \in [c, b[$, *то имеет место оценка*

$$\left\| \int_{]c,\to b[} B(\vec{u}(x), \vec{v}(x))\,dx \right\| \leqslant \|B\|\, U(c)\, V(c), \quad a \leqslant c < b. \qquad \text{(IV, 9; 79)}$$

Для простоты мы проведем доказательство в случае, когда $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ совпадают с полем $\mathbb{C}$, а отображение B является умножением чисел. В этом случае рассматривается интеграл $\int_{]c,\to b[} uv\,dx$. По условию функция u имеет ограниченную вариацию, через $U(c)$ обозначается ее полная вариация в $]c, b[$ и считается, что $u(x)$ стремится к 0 при $x < b$, стремящемся к b. Предполагается, кроме того, что функция v локально dx-интегрируема, а неопределенные интегралы

$$V(c) = \sup_{c \leqslant d < b} \left| \int_{]c,d[} v(x)\,dx \right|$$

ограничены. Тогда интеграл $\int_{]c,\to b[} uv\,dx$ должен иметь смысл

---

[1]) Это ограничение необходимо, если с помощью теоремы 88 хотят получить, что $\vec{u}$ является неопределенным интегралом от некоторой меры $\vec{\mu}$ с базой $\geqslant 0$. Однако, если этот факт известен заранее (например, если $\vec{u}$ принадлежит классу C^1, — следствие 1 теоремы 89), то в таком ограничении необходимости нет.

и должна иметь место следующая оценка:

$$\left| \int\limits_{]c, \to b[} uv\,dx \right| \leqslant U(c)\,V(c). \qquad \text{(IV, 9; 80)}$$

Как мы сейчас увидим, все утверждения опираются на интегрирование по частям. В самом деле, поскольку функция u, которую мы будем обозначать через M, имеет ограниченную вариацию, то $dM = \mu$ есть мера Радона на $[a, b[$ конечной нормы (теорема 88). Точнее: $U(c) = \int\limits_{[c, b[} d|\mu|$. Рассмотрим затем меру $v\,dx = \nu$ и через N обозначим какой-нибудь неопределенный интеграл от ν. Положим, например, $N(x) = \int\limits_c^x v(t)\,dt$ так, чтобы $N(c) = 0$. Функция N непрерывна, ограничена и и $V(c) = \sup\limits_{c \leqslant x < b} |N(x)|$. Нам надо вычислить интеграл $\int\limits_{]c, \to b[} M(x)\,dN(x)$. Меры μ и ν не имеют общей точечной массы, поскольку ее нет у меры ν. Поэтому можно применить теорему 98: рассматриваемый интеграл имеет смысл тогда и только тогда, когда имеет смысл интеграл $\int\limits_{]a, \to b[} N(x)\,dM(x)$ и первый интеграл равен

$$\left(\lim_{x \to b} M(x)\,N(x)\right) - M(a)\,N(a) - \int\limits_{]a, \to b[} N(x)\,dM(x). \qquad \text{(IV, 9; 81)}$$

Далее, при x, стремящемся к b, функция $M(x)$ стремится к 0. Так как функция $N(x)$ по предположению ограничена, то функция $M(x)N(x)$ также стремится к нулю. Кроме того, интеграл в правой части абсолютно сходится, так как $\mu = dM$ имеет конечную норму и N ограничена. Это означает, что рассматриваемый интеграл также сходится (*но не обязательно абсолютно*). Поэтому, заменяя a на c и учитывая, что $N(c) = 0$, получаем:

$$\int\limits_{]c, \to b[} uv\,dx = -\int\limits_{[c, b[} N(x)\,d\mu(x),$$

а, следовательно,

$$\left| \int\limits_{]c, \to b[} uv\,dx \right| \leqslant \int\limits_{[c, b[} |N(x)|\,d|\mu(x)| \leqslant V(c)\,U(c), \qquad \text{(IV, 9; 81}_2\text{)}$$

чем и доказывается неравенство (IV, 9; 80).

В частном случае, когда $u = M$ принадлежит классу C^1, формула (IV, 9; 81) записывается в виде:

$$\int\limits_{|a, \to b[} uv\,dx = \int\limits_{|a, \to b[} M(x)\,v(x)\,dx =$$
$$= (\lim_{x \to b} M(x)\,N(x)) - M(a)\,N(a) - \int\limits_{|a, b|} M'(x)\,v(x)\,dx$$

и

$$\int\limits_{|c, \to b[} uv\,dx = - \int\limits_{|c, b[} M'vx,$$

а, следовательно,

$$\left| \int\limits_{|c, \to b[} uv\,dx \right| \leqslant V(c) \int\limits_{|c, b[} |M'(x)|\,dx = U(c)\,V(c). \quad \text{(IV, 9; 81}_3\text{)}$$

Замечание. Теперь становится ясным то, что не было столь очевидным в случае теоремы Абеля для рядов: *суть теоремы Абеля составляет формула интегрирования по частям.* Теорема Абеля о рядах является частным случаем теоремы Абеля относительно интегралов. В самом деле, пусть в условиях теоремы 63 гл. II заданы последовательности $\vec{u}_n$ и $\vec{v}_n$. Обозначим через $\vec{u}$ и $\vec{v}$ функции, определенные на полупрямой $[0, +\infty[$ по формулам:

$$\begin{aligned} \vec{u}(x) &= \vec{u}_n \quad \text{для} \quad n \leqslant x < n+1, \\ \vec{v}(x) &= \vec{v}_n \quad \text{для} \quad n \leqslant x < n+1. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 9; 82)}$$

Мы видим, что последовательность $\vec{u}_n$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ функция $\vec{u}$. Мы видим также, что частные суммы $\vec{\sigma}_{m,n}$ для последовательности $\vec{v}_n$ ограничены тогда и только тогда, когда ограничены интегралы $\int\limits_{|c, d|} \vec{v}(x)\,dx$. Но тогда из только что доказанной теоремы вытекает теорема 63 гл. II и оценка (II, 14; 31) при $c = m + 1$.

Примеры применения критерия Абеля

Пусть u — некоторая функция, определенная на полупрямой $[a, +\infty[$, с комплексными значениями, имеющая ограниченную вариацию и стремящаяся к нулю на бесконечности.

Тогда для вещественного $\lambda \neq 0$ сходится интеграл

$$\int_{]a, \to +\infty[} e^{i\lambda x} u(x)\,dx, \qquad \text{(IV, 9; 83)}$$

и имеет место неравенство

$$\left\| \int_{]c, \to +\infty[} e^{i\lambda x} u(x)\,dx \right\| \leqslant U(c) \frac{2}{|\lambda|}. \qquad \text{(IV, 9; 84)}$$

В самом деле, если мы положим $v(x) = e^{i\lambda x}$, то увидим, что интеграл

$$\sigma_{c,d} = \int_{]c, d]} v(x)\,dx = \frac{e^{i\lambda d} - e^{i\lambda c}}{i\lambda}$$

допускает оценку: $|\sigma_{c,d}| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}$ [1].

Естественно, результат не верен при $\lambda = 0$.

Точно так же можно рассмотреть аналогичные интегралы

$$\int_{]a, \to \infty[} \cos\lambda x\ u(x)\,dx, \qquad \int_{]a, \to +\infty[} \sin\lambda x\ u(x)\,dx, \qquad \text{(IV, 9; 85)}$$

для которых проводится то же самое рассуждение. Последний интеграл, кроме того, имеет смысл при $\lambda = 0$, так как он тогда равен нулю [2].

---

[1]) Проведем в этом примере интегрирование по частям, лежащее в основе доказательства теоремы Абеля. Имеем:

$$\int_{[c, d[} e^{i\lambda x}\ u(x)\,dx = \left[\frac{e^{i\lambda x} u(x)}{i\lambda}\right]_c^d - \int_{[c, d[} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\,du(x).$$

Предел существует при d, стремящемся к бесконечности.

[2]) Если функция u вещественна, $\geqslant 0$, убывает и стремится на бесконечности к 0, то теорема о знакопеременных рядах снова обеспечивает сходимость. В самом деле, интеграл

$$\int_{\left[\frac{n\pi}{\lambda}, \frac{(n+1)\pi}{\lambda}\right]} u(x) \sin\lambda x\,dx$$

имеет знак $(-1)^n$, при возрастании n убывает по абсолютной величине (поскольку $u(x + \pi/\lambda) \leqslant u(x)$) и стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности $\left(\text{этот интеграл мажорируется по модулю величиной } \frac{\pi}{\lambda} u\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)\right)$. Значит, он является общим членом сходящегося ряда. Этим доказывается, что последовательность интегралов $\int_{\left]a, \frac{n\pi}{\lambda}\right]}$ при $n \to \infty$ имеет некоторый предел.

Во всех трех рассматриваемых случаях, если функция u не интегрируема на $[a, +\infty[$, мы будем иметь дело с несобственными полусходящимися интегралами.

Особый интерес представляют интегралы

$$\int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{e^{i\lambda x}}{x^\alpha} dx, \qquad \int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{\cos \lambda x}{x^\alpha} dx, \qquad \int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{\sin \lambda x}{x^\alpha} dx. \qquad \text{(IV, 9; 86)}$$

Функция u, поскольку она имеет особенность в начале $x=0$, не имеет ограниченной вариации. Поэтому эти интегралы условиям теоремы Абеля не удовлетворяют. Однако для обоснования сходимости достаточно их разбить на сумму двух интегралов $\int\limits_0^1$ и $\int\limits_1^{\to +\infty}$.

Если считать для первых двух интегралов $\alpha < 1$, а для третьего $\alpha < 2$, то интегралы $\int\limits_0^1$ будут иметь смысл, поскольку в этом случае мы имеем дело с функциями, интегрируемыми по Лебегу. Остается, следовательно, изучить интеграл $\int\limits_1^{\to +\infty}$. Что касается этого интеграла, то мы находимся в условиях применимости теоремы Абеля, поскольку функция $1/x^\alpha$, будучи убывающей и ограниченной, имеет ограниченную вариацию и при $\alpha > 0$ стремится к нулю на бесконечности.

Таким образом, рассматриваемые интегралы сходятся: два первых при $0 < \alpha < 1$, а третий при $0 < \alpha < 2$. Заметим, что здесь функция u на интервале $]0, +\infty[$ принадлежит классу C^∞ и что мы рассматриваем «наиболее» классический случай интегрирования по частям! Эти интегралы играют очень важную роль в анализе и физике. Позже мы научимся их вычислять, основываясь на новой функции, так называемой Г-функции. Приведем для примера два из этих интегралов:

$$\int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{для } \lambda > 0, \qquad \text{(IV, 9; 87)}$$

$$\int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_{]0, \to +\infty[} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \text{ при } \lambda > 0. \quad \text{(IV, 9; 87}_2\text{)}$$

Однако при $\frac{n\pi}{\lambda} \leqslant b' \leqslant \frac{(n+1)\pi}{\lambda}$ интеграл $\int\limits_{]a, b']}$ заключен между интегралами $\int\limits_{\left]a, \frac{n\pi}{\lambda}\right]}$ и $\int\limits_{\left]a, \frac{(n+1)\pi}{\lambda}\right]}$. Значит, интеграл сходится.

Теорема 99 (о замене переменной). *Пусть* $[\alpha, \beta[$ *и* $[a, b[$ — *два ограниченных или нет интервала прямой* $\mathbb{R}$. *Пусть* ξ — *такое отображение класса* C^1 *интервала* $[\alpha, \beta[$ *на интервал* $[a, b[$, *что* $\xi(\alpha) = a$ *и* $\lim\limits_{\beta' \to \beta} \xi(\beta') = b$ [1]. *При этих условиях интеграл* $\int\limits_a^{\to b} \vec{f}(x)\,dx$, *где* $\vec{f}$ — *локально* dx-*интегрируемая функция, определенная на* $[a, b[$, *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{F}$, *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int\limits_\alpha^{\to\beta} \vec{f}(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt$; *при этом имеет место равенство*

$$\int\limits_a^{\to b} \vec{f}(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\to\beta} \vec{f}(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt. \qquad (\mathrm{IV}, 9; 88)$$

Для доказательства достаточно записать формулу для интервала $[\alpha, \beta'[$ (следствие 2 теоремы 94) и устремить β' к β [2].

Пример. *Интегралы Френеля.* Так называются интегралы

$$\int\limits_{]0, \to +\infty[} \cos\lambda x^2\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{]0, \to +\infty[} \sin\lambda x^2\,dx. \qquad (\mathrm{IV}, 9; 89)$$

Так как подинтегральные функции при x, стремящемся к бесконечности, не сходятся даже к 0, то сходимость этих интегралов вовсе не очевидна. Однако изучение кривых, изображающих эти функции [3], показывает, что они сильно колеблются и что было бы естественным ожидать сходимости этих интегралов. В самом деле, достаточно здесь произвести замену переменной $x = \sqrt{t}$ для того, чтобы прийти к рассмотренным ранее интегралам $(\mathrm{IV}, 9; 87_2)$. Исходя из этих формул, справедливость которых будет доказана позже, приходим к следующим результатам:

$$\int\limits_{]0, \to +\infty[} \cos\lambda x^2\,dx = \int\limits_{]0, \to +\infty[} \sin\lambda x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}. \qquad (\mathrm{IV}, 9; 90)$$

---

[1] Относительное расположение α и β, так же как a и b, произвольно.

[2] При монотонной функции ξ отсюда легко получаются формулы, соответствующие (IV, 9; 71).

[3] Нулями функции $\sin\lambda x^2$ являются точки $\lambda x^2 = n\pi$, или $x = \sqrt{\dfrac{n\pi}{\lambda}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Расстояние между двумя последовательными нулями $\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ при n, стремящемся к бесконечности, стремится к нулю. Сходимость этих интегралов (см. примечание на стр. 733) вытекает сразу же из теоремы о знакопеременных рядах.

Главное значение в смысле Коши

Пусть задан некоторый интервал $|a, b|$ прямой $\mathbb{R}$ и точка c из $]a, b[$. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на $|a, b| - \{c\}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, интегрируемая по мере Лебега на $|a, c-\delta|$ и на $|c+\delta', b|$ при любых δ и $\delta' > 0$, но не обязательно интегрируемая на $|a, b|$. Когда говорят, что $\int\limits_{|a, b|} \vec{f}\, dx$ сходится как несобственный интеграл, то этим хотят сказать, что оба интеграла $\int\limits_{|a, \to c[} \vec{f}\, dx$ и $\int\limits_{]c \leftarrow, b|} \vec{f}\, dx$ сходятся. Это означает, что интеграл $\int\limits_{|a, c-\delta|} + \int\limits_{|c+\delta', b|}$ сходится к некоторому пределу при δ и δ', стремящихся независимо друг от друга к нулю.

Может случиться, что этот предел не существует, однако, существует предел при δ, стремящемся к нулю, когда $\delta' = \delta$. В этом случае говорят, что *интеграл от $\vec{f}$ сходится в смысле главного значения Коши*, и пишут

$$\text{v. p.} \int\limits_{|a, b|} \vec{f}(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \left(\int\limits_{|a, c-\delta|} + \int\limits_{|c+\delta, b|} \right).$$

Теорема 100. *Для того чтобы существовал предел v. p. $\int\limits_{|a, b|} \vec{f}(x)\, dx$, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки $x = c$ функция $\vec{f}$ являлась суммой антисимметричной функции $\vec{f}_1$ $(\vec{f}_1(c+u) = -\vec{f}_1(c-u))$ и такой симметричной функции $\vec{f}_2$ $(\vec{f}_2(c+u) = \vec{f}_2(c-u))$, для которой сходится интеграл $\int\limits_{]c \leftarrow, b|} \vec{f}_2(x)\, dx$.*

При $c = 0$ симметрия и антисимметрия называются четностью и нечетностью. Заменяя переменную $x = c + u$, можно всегда перейти к последнему случаю, когда $c = 0$. Каждая функция $\vec{f}$ единственным образом может быть представлена в окрестности точки $x = 0$ в виде суммы четной и нечетной функции:

$$\vec{f}(x) = \frac{\vec{f}(x) + \vec{f}(-x)}{2} + \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(-x)}{2} = \vec{f}_1(x) + \vec{f}_2(x). \qquad (IV, 9; 91)$$

Поскольку $\vec{f}_1$ нечетна, то *ее интеграл в симметричном интервале равен нулю.* Следовательно, если α выбрать так, чтобы $a \leqslant -\alpha < 0 < \alpha \leqslant b$, то мы получим:

$$\int\limits_{|-\alpha,\,\delta|} \vec{f}_1(x)\,dx + \int\limits_{|+\delta,\,+\alpha|} \vec{f}_1(x)\,dx = 0. \qquad \text{(IV, 9; 92)}$$

Сходимость *в смысле* v. p. в $|a, b|$, или, что то же самое, в интервале $[-\alpha, \alpha]$, одна и та же как для $\vec{f}$, так и для $\vec{f}_2$. Так как функция $\vec{f}_2$ четна, то

$$\int\limits_{|-\alpha,\,-\delta|} \vec{f}_2(x)\,dx + \int\limits_{|+\delta,\,+\alpha|} \vec{f}_2(x)\,dx = 2\int\limits_{|\delta,\,\alpha|} \vec{f}_2(x)\,dx, \qquad \text{(IV, 9; 93)}$$

так что интеграл от $\vec{f}$ существует в смысле v. p. тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{]0\leftarrow,\,\alpha|} \vec{f}_2(x)\,dx$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Пример. Предположим, что в окрестности точки $x = c$ функция $\vec{f}$ может быть представлена в виде $\vec{f}(x) = \frac{\vec{c}_{-1}}{x-c} + \vec{c}_0 + \vec{c}_1(x-c) + \ldots$. Так как функция $1/(x-c)$ антисимметрична, то интеграл в смысле v. p. существует.

Впрочем, если мы будем вычислять $\int\limits_{|c+\delta,\,b|} \vec{f}(x)\,dx$, то его можно будет записать в виде

$$\vec{c}_{-1}(\ln(b-c) - \ln\delta) - \int\limits_{|c+\delta,\,b|} \left(\vec{f}(x) - \frac{\vec{c}_{-1}}{x-c}\right) dx.$$

Второе выражение при δ, стремящемся к нулю, имеет предел (и даже $\vec{f}(x) - \frac{\vec{c}_{-1}}{x-c}$ интегрируема в $|a, b|$). Первое же выражение из-за члена $-\ln\delta$ предела не имеет. Если теперь вычислить $\int\limits_{|a,\,c-\delta|} \vec{f}(x)\,dx$, то мы получим

$$\vec{c}_{-1}(\ln\delta - \ln(c-a)) + \int\limits_{|a,\,c-\delta|} \left(\vec{f}(x) - \frac{\vec{c}_{-1}}{x-c}\right) dx.$$

При этом второе слагаемое имеет предел при δ, стремящемся к нулю, а первое слагаемое предела не имеет из-за наличия члена $\ln\delta$. Если образовать сумму $\int\limits_{|a,\,c-\delta|} + \int\limits_{|c+\delta,\,b|}$, то члены $\pm\vec{c}_{-1}\ln\delta$ взаимно уничтожаются и сумма при δ, стремящемся к 0, будет иметь предел. Поэтому мы получим:

$$\text{v. p.} \int\limits_{|a,b|} \vec{f}(x)\,dx = \vec{c}_{-1}\ln\left(\frac{b-c}{c-a}\right) + \int\limits_{|a,b|} \left(\vec{f}(x) - \frac{\vec{c}_{-1}}{x-c}\right)dx. \quad \text{(IV, 9; 94)}$$

Точно так же для функции $\vec{f}$, интегрируемой на каждом конечном интервале, существует понятие главного значения интеграла в смысле Коши для интервала $]-\infty, +\infty[$:

$$\text{v. p.} \int\limits_{|-\infty,+\infty|} \vec{f}(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int\limits_{|-B,+B|} .$$

Для того чтобы существовало такое главное значение, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{f}$ можно было представить в виде $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$, где $\vec{f}_1$ — четная, а $\vec{f}_2$ — нечетная функции, и чтобы интеграл $\int\limits_{|0\to+\infty[} \vec{f}_2(x)\,dx$ был сходящимся.

Легко подсчитать, что

$$\text{v. p.} \int\limits_{|a,b|} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{b}{a}\right| \quad (\text{при } a \neq 0,\ b \neq 0), \quad \text{(IV, 9; 95)}$$

$$\text{v. p.} \int\limits_{]-\infty,+\infty[} \frac{dx}{x} = 0 \quad (\text{функция нечетна}). \quad \text{(IV, 9; 96)}$$

З а м е ч а н и е. Аналогично вводится понятие главного значения в смысле Коши для рядов, множеством индексов которых является множество $\mathbb{Z}$ целых чисел любого знака. Если $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{u}_n$ — такой ряд, то, поскольку $\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$, понятие сходимости для него не определено. Существует лишь понятие безусловной сходимости (эквивалентное абсолютной сходимости, если $\vec{u}_n$ принимают значения в конечномерном пространстве (см. замечание 2°) на стр. 133). Однако *обычно говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{u}_n$ *сходится, если сходится каждый из двух рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_{-n}$.

Это утверждение означает, что сумма $\sum\limits_{n=-N_1}^{n=+N_2} \vec{u}_n$ имеет предел, когда N_1 и N_2 независимо друг от друга стремятся к $+\infty$.

Однако можно было бы считать, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{u}_n$ сходится *в смысле главного значения Коши*, если сходится сумма $\sum_{n=-N}^{n=+N} \vec{u}_n$ при N, стремящемся к бесконечности. Если, например, $\vec{u}_n = -\vec{u}_{-n}$, то такая сходимость всегда будет иметь место, а сумма будет равна нулю.

Главное значение в смысле Коши можно определить для кратных интегралов. Если $\vec{f}$ является некоторой функцией на $\mathbb{R}^n$, суммируемой на каждом множестве $|x| \geqslant \delta > 0$, то говорят, что интеграл от этой функции сходится в смысле главного значения Коши, если имеет предел при δ, стремящемся к 0, интеграл $\int\limits_{|x| \geqslant \delta} \ldots \int \vec{f}(x)\,dx$. При $n = 1$ мы снова возвращаемся к главному значению на $\mathbb{R}$.

Приведем пример, который играет особо важную роль в квантовой механике и в котором используется понятие главного значения Коши.

Теорема 101. *Пусть $]a, b[$ — такой интервал прямой $\mathbb{R}$, что $a < 0 < b$. Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая функция, определенная на $]a, b[$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если $\vec{f}$ дифференцируема в начале координат или, более общо, если величина $[\vec{f}(x) - \vec{f}(0)]/|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \neq 0$, остается ограниченной, когда x стремится к нулю, то интеграл $\int\limits_{]a, b[} (\vec{f}(x)/x)\,dx$ существует в смысле главного значения Коши в начале координат. Кроме того, интеграл*

$$\int\limits_{]a, b[} \frac{\vec{f}(x)}{x + iy}\,dx \tag{IV, 9; 97}$$

сходится при y, стремящемся к 0, по значениям знака ε ($\varepsilon = \pm 1$) к

$$\text{v. p.} \int\limits_{]a, b[} \frac{\vec{f}(x)}{x}\,dx - \varepsilon i\pi \vec{f}(0). \tag{IV, 9; 98}$$

Естественно было ожидать появления члена v. p. $\int$, а не второго члена $-\varepsilon i\pi \vec{f}(0)$, хотя существенным здесь является именно наличие 2-го члена.

Доказательство. Функция $\vec{f}(x)/(x+iy)$ на $]a, -A|$ и $|+A, +b[$, $A>0$, измерима и мажорируема по норме величиной $\|\vec{f}(x)\|/A$, а, значит, интегрируема. В силу теоремы 35 Лебега, при y, стремящемся к 0, интеграл $\int\limits_{|A, +b[} \frac{\vec{f}(x)}{x+iy}\,dx$ сходится к $\int\limits_{|A, +b[} \frac{\vec{f}(x)}{x}\,dx$. Остается показать, что v. p. $\int\limits_{|-A, +A|} \frac{\vec{f}(x)}{x}\,dx$ существует и что $\int\limits_{|-A, +A|} \frac{\vec{f}(x)}{x+iy}\,dx$ сходится к v. p. $\int\limits_{|-A, +A|} \frac{\vec{f}(x)}{x}\,dx - \varepsilon i\pi\vec{f}(0)$.

Запишем очевидное разложение:

$$\int\limits_{|-A, +A|} \frac{\vec{f}(x)}{x+iy}\,dx = \vec{f}(0) \int\limits_{|-A, +A|} \frac{dx}{x+iy} + \int\limits_{|-A, +A|} \frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(0)}{x+iy}\,dx. \tag{IV, 9; 99}$$

Изучим сначала его первый член. Для определенности положим $\varepsilon = +1$. Рассмотрим в открытом дополнении к *полупрямой* $\{z=x+iy;\ y=0,\ x \leqslant 0\}$ комплексной плоскости функцию $\ln z$, определенную на стр. 164. Положим $z=re^{i\varphi}$, где $-\pi<\varphi<\pi$, и $\ln z=\ln r+i\varphi$. Таким образом определенная логарифмическая функция принадлежит классу C^1, а ее производная равна $1/z$. Следовательно, функция $x \to \ln(x+iy)$ дифференцируема на прямой при $y \neq 0$ и ее производной является функция $x \to 1/(x+iy)$. Отсюда следует, что первый интеграл в (IV, 9; 99) равен

$$\vec{f}(0)\,[\ln(x+iy)]_{x=-A}^{x=+A}. \tag{IV, 9; 100}$$

Так как $|x+iA|=|x-iA|$, то логарифм модуля исчезает, и выражение (IV, 9; 100) будет равно $\vec{f}(0)\,i(\varphi_2-\varphi_1)$, где через φ_2 обозначен аргумент точки $A+iy$, а через φ_1 — аргумент точки $-A+iy$. Если устремить y к 0, то эти аргументы будут стремиться соответственно к 0 и π и, следовательно, первый интеграл будет сходиться к $-i\pi\vec{f}(0)$.

Рассмотрим теперь второй интеграл. При y, стремящемся к 0, функция $x \to \frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(0)}{x+iy}$ просто сходится к функции $x \to \frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(0)}{x}$ всюду, кроме начала координат, где, впрочем, последняя функция не определена. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая функция просто сходится почти всюду к этой функции. Кроме того, она мажорируема по норме функцией $x \to \frac{\|\vec{f}(x) - \vec{f}(0)\|}{|x|}$, которая является неотрицательной и интегрируемой. Последнее вытекает из того, что функция $x \to \frac{\|\vec{f}(x) - \vec{f}(0)\|}{|x|}$ мажорируема функцией $\frac{\|\vec{f}(x) - \vec{f}(0)\|}{|x|^\alpha} \cdot \frac{1}{|x|^{1-\alpha}}$, а последняя не превосходит постоянной, умноженной на $1/|x|^{1-\alpha}$ при $1 - \alpha < 1$. Из теоремы Лебега следует, что переход к пределу для второго интеграла оправдан и что при y, стремящемся к 0, он сходится к интегралу

$$\int_{|-A,+A|} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(0)}{x}\, dx. \tag{IV, 9; 101}$$

Поскольку подинтегральная функция интегрируема, ее интеграл совпадает с ее интегралом в смысле главного значения Коши, а это в силу нечетности $1/x$ дает

$$\text{v. p.} \int_{|-A,+A|} \frac{\vec{f}(x)}{x}\, dx - \vec{f}(0)\,\text{v. p.} \int_{|-A,+A|} \frac{dx}{x} = \text{v. p.} \int_{|-A,+A|} \frac{\vec{f}(x)}{x}\, dx. \tag{IV, 9; 102}$$

Складывая теперь оба предела, найденные для двух интегралов в (IV, 9; 99), получаем требуемый результат.

Если y стремится к 0 по значениям <0, то φ_2 также стремится к 0, φ_1 стремится к $-\pi$, а величина (IV, 9; 100) стремится к $+i\pi\vec{f}(0)$.

З а м е ч а н и е. Если изложенные результаты применить к скалярной непрерывной функции f с компактным носителем на вещественной прямой, то в этом случае хотелось бы сказать, что мера $dx/(x+iy)$, зависящая от параметра y, при y, стремящемся к 0 со знаком ε, широко сходится к мере $\text{v. p.}(dx/x) + \varepsilon i\pi\delta$. Однако этого делать нельзя, *поскольку функция $1/x$ не является локально интегрируемой относительно dx, а следовательно,* $\text{v. p.}(dx/x)$ *не является мерой Радона.* Впрочем, предыдущая сходимость имеет место не для всех непрерывных функций f с компактным носителем, а *лишь для дифференцируемых функций или функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям в начале координат.*

В теории распределений можно увидеть, как интерпретируется предыдущий переход к пределу.