§ 10. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НА $\mathbb{R}^n$. ДЛИНЫ, ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ В КОНЕЧНОМЕРНОМ АФФИННОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НА $\mathbb{R}^n$

Формула (IV, 9; 72) может быть обобщена на кратные интегралы на $\mathbb{R}^n$ относительно меры $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Теорема 102. *Пусть $\mathcal{O}$ и Ω — два открытых множества из $\mathbb{R}^n$ и ξ — гомеоморфизм Ω на $\mathcal{O}$, принадлежащий вместе со своим обратным гомеоморфизмом классу C^1. Пусть $\vec{f}$ — непрерывная на $\mathcal{O}$ функция с компактным носителем и значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда имеет место формула*

$$\int\int\limits_{\mathcal{O}}\ldots\int \vec{f}(x)\,dx = \int\int\limits_{\Omega}\ldots\int \vec{f}(\xi(t))\,|\det(\xi'(t))|\,dt, \qquad \text{(IV, 10; 1)}$$

в которой через dx обозначено $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, а через dt обозначено $dt_1 dt_2 \ldots dt_n$; что же касается $\det \xi'(t)$, то это — якобиан отображения ξ в точке t.

Доказательство. При $n = 1$ якобиан есть не что иное, как производная, а рассматриваемая теорема переходит в уже доказанную теорему 94. Поэтому дальнейшее доказательство можно будет провести по индукции.

Предположим, что теорема верна для кратного интеграла порядка $n-1$; докажем ее справедливость для кратного интеграла порядка $n \geqslant 2$.

Доказательство в одном частном случае. Функция ξ определена системой n функций $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ от n переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$. В рассматриваемом частном случае мы будем проводить доказательство, предполагая, что функция ξ_i равна $\xi_i(t) = t_j$. По теореме Фубини можно записать

$$\int\int\limits_{\mathcal{O}}\ldots\int \vec{f}(x)\,dx = \int da \int\limits_{\mathcal{O}(a)}\ldots\int \vec{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)\times$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n, \qquad \text{(IV, 10; 2)}$$

где $\mathcal{O}(a)$ является множеством точек $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из $\mathbb{R}^{n-1}$, таких, что $(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}$. Множество $\mathcal{O}(a)$ является некоторым открытым множеством пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ (сечение множества $\mathcal{O}$ гиперплоскостью $x_i = a$, совпадающей с $\mathbb{R}^{n-1}$). Интегрируемая функция имеет компактный носитель на $\mathcal{O}(a)$, поскольку этот носитель лежит в компакте, являющемся пересечением гиперплоскости с компактным носителем $\vec{f}$ в $\mathcal{O}$.

По предположению индукции, мы можем с помощью замены переменных преобразовать $(n-1)$-кратный интеграл на $\mathcal{O}(a)$. Отображение

$$(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $x_k = \xi_k(t_1, \ldots, t_{j-1}, a, t_{j+1}, \ldots, t_n), k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, является, вместе со своим обратным отображением, гомеоморфизмом, принадлежащим классу C^1, множества $\Omega(a)$ на $\mathcal{O}(a)$, где $\Omega(a)$ — открытое множество точек $(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)$ из $\mathbb{R}^{n-1}$, таких, что $(t_1, \ldots, t_{j-1}, a, t_{j+1}, \ldots, t_n) \in \Omega$. При этом

$$\int \underset{\mathcal{O}(a)}{\cdots} \int \vec{f}(x)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n =$$
$$= \int \underset{\Omega(a)}{\cdots} \int \vec{f}(\xi(t)) \left| \frac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)} \right| \times$$
$$\times\, dt_1 \ldots dt_{j-1}\, dt_{j+1} \ldots dt_n. \quad \text{(IV, 10; 3)}$$

Остается подставить это выражение в (IV, 10; 2). Однако, так как $x_i = t_j$, то

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)} = (-1)^{i+j} \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}, \quad \text{(IV, 10; 4)}$$

а, значит, модули обоих определителей одни и те же.

Окончательно по формуле Фубини получаем

$$\int \int \underset{\mathcal{O}}{\cdots} \int \vec{f}(x)\, dx =$$
$$= \int da \int \underset{\Omega(a)}{\cdots} \int \vec{f}(\xi(t_1, \ldots, t_{j-1}, a, t_{j+1}, \ldots, t_n)) \times$$
$$\times |\det \xi'(t_1, \ldots, t_{j-1}, a, t_{j+1}, \ldots, t_n)|\, dt_1 \ldots dt_{j-1}\, dt_{j+1} \ldots dt_n =$$
$$= \int \int \underset{\Omega}{\cdots} \int \vec{f}(\xi(t)) |\det \xi'(t)|\, dt, \quad \text{(IV, 10; 5)}$$

чем и заканчивается доказательство формулы (IV, 10; 1) в этом частном случае.

Доказательство общего случая. Пусть τ — некоторая точка Ω. Поскольку ξ и ξ^{-1} принадлежат классу C^1, то в этой точке $\det \xi'(t)$ отличен от нуля, а значит, существуют хотя бы один индекс i и один индекс j, такие, что частная производная $\frac{\partial \xi_i}{\partial t_j}(\tau) \neq 0$.

Рассмотрим теперь отображение θ_τ, определенное по формулам

$$y_l = t_l, \qquad l \neq j,$$
$$y_j = \xi_i(t_1, t_2, \ldots, t_n). \qquad \text{(IV, 10; 6)}$$

Якобианом этого преобразования в точке τ является не равная нулю частная производная $\partial\xi_i/\partial t_j$. Согласно теореме о неявных функциях, существует такое открытое множество Ω_τ, содержащее τ, что отображение θ_τ является гомеоморфизмом (принадлежащим вместе с обратным гомеоморфизмом классу C^1) этого множества Ω_τ на открытое множество $\mathcal{U}_\tau$ из $\mathbb{R}^n$. Уравнения (IV, 10; 6) при заданном $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $\mathcal{U}_\tau$ могут быть разрешены: $t_l = y_l$, $l \neq j$, и $t_j = \eta_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где η_j принадлежит классу C^1. Пусть $\mathcal{O}_\tau$ — образ Ω_τ при отображении ξ. При переменном τ открытые множества $\mathcal{O}_\tau$ образуют покрытие $\mathcal{O}$ и, в частности, покрытие компактного носителя K функции $\vec{f}$. Но тогда обязательно среди них найдется конечное число множеств, покрывающих K. Обозначим эти множества через $\mathcal{O}_{\tau_i}$, $i \in I$.

Рассмотрим теперь разложение единицы γ_i относительно этого конечного покрытия K. Можно написать:

$$\int\int_{\mathcal{O}} \ldots \int \vec{f}(x)\,dx = \sum_{i \in I} \int\int_{\mathcal{O}_{\tau_i}} \ldots \int \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 10; 7)}$$

Теперь отображение ξ множества Ω_{τ_i} в $\mathcal{O}_{\tau_i}$ может быть разложено на два C^1-диффеоморфизма, а именно: $\xi = (\xi \circ \theta_{\tau_i}^{-1}) \circ \theta_{\tau_i}$. Первый диффеоморфизм θ_{τ_i} определен формулой (IV, 10; 6), а второй $\zeta_i = \xi \circ \theta_{\tau_i}^{-1}$ может быть записан в виде $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_k = \xi_k(y_1, \ldots, y_{j-1}, \eta_j(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_{j+1}, \ldots, y_n), \quad k \neq i,$$
$$x_i = y_j. \qquad \text{(IV, 10; 8)}$$

Теперь можно воспользоваться уже изученным случаем, ибо гомеоморфизм $\xi \circ \theta_{\tau_i}^{-1}$ имеет такой же вид, как и в первом случае. Поэтому можно записать формулу

$$\int\int_{\mathcal{O}_{\tau_i}} \ldots \int \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx =$$
$$= \int\int_{\mathcal{U}_{\tau_i}} \ldots \int \gamma_i(\zeta_i(y))\vec{f}(\zeta_i(y))\,|\det \zeta_i'(y)|\,dy. \qquad \text{(IV, 10; 9)}$$

Гомеоморфизм θ_τ множества Ω_{τ_i} на $\mathcal{U}_{\tau_i}$ имеет такой же, и даже более простой, вид, поскольку здесь имеется лишь замена относительно одной из переменных. Поэтому

$$\int\int\underset{\mathcal{O}_{\tau_i}}{\cdots}\int \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx=$$
$$=\int\int\underset{\Omega_{\tau_i}}{\cdots}\int \gamma_i(\xi(t))\vec{f}(\xi(t))\left|\det\zeta_i'\left(\theta_{\tau_i}(t)\right)\right|\left|\det\theta_{\tau_i}'(t)\right|dt. \qquad (IV, 10; 10)$$

Из формулы умножения якобианов (следствие 3 теоремы 11 гл. II) теперь следует, что

$$\left|\det\zeta_i'\left(\theta_{\tau_i}(t)\right)\right|\cdot\left|\det\theta_{\tau_i}'(t)\right|=|\det\xi'(t)|.$$

Поэтому

$$\int\int\underset{\mathcal{O}_{\tau_i}}{\cdots}\int \gamma_i(x)\vec{f}(x)\,dx=$$
$$=\int\int\underset{\Omega_{\tau_i}}{\cdots}\int \gamma_i(\xi(t))\vec{f}(\xi(t))\,|\det\xi'(t)|\,dt. \qquad (IV, 10; 11)$$

Суммируя по различным значениям i, получаем (IV, 10; 1), и теорема полностью доказана.

Замечание. Предположение биективности ξ, очевидно, необходимо. Так как отображение $t\to x=t^2$ не является гомеоморфизмом $]-1, +1[$ на $[0, 1[$, то в случае одной переменной

$$\int_{]-1,+1[} 2|t|\,dt=2\neq 1=\int_{[0,1[}dx. \qquad (IV, 10; 12)$$

См. по этому поводу формулу (IV, 10; 23_2). Напротив, в весьма частном случае одной переменной, рассмотренном в теореме 93, не было необходимости предполагать, что ξ является гомеоморфизмом, и, положив $x=t^2$, мы получим формулу

$$\int_{-1}^{+1}2t\,dt=\int_{+1}^{+1}dx=0. \qquad (IV, 10; 13)$$

Следствие 1. *В условиях теоремы образ меры* $|\det\xi'(t)|\,dt$ *при отображении* ξ *на* Ω *является мерой* $dx=1(x)dx$ *на* $\mathcal{O}$ [1]).

[1]) Может показаться странным применение различных букв x и t, тем более что $\mathcal{O}$ и Ω лежат в одном и том же пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако из-за формулы (IV, 10; 1) такая запись удобна, поскольку ξ входит в формулу $t\to x=\xi(t)$. Позже, в следствии 4 и после следствия 5, мы будем применять одну и ту же букву. См. примечание на стр. 443.

Доказательство. В самом деле, если формулу (IV, 10; 1) применить к скалярной непрерывной функции f с компактным носителем, то мы придем к определению образа меры.

Замечание. Поскольку ξ является гомеоморфизмом, то, естественно, образ dx при отображении ξ^{-1} равен $|\det \xi'(t)|dt$. Образ dt при отображении ξ равен $|\det(\xi^{-1})'(x)|dx$.

В соответствии с обозначениями, введенными на стр. 627, можно будет писать $dx = d(\xi(t)) = |\det \xi'(t)|dt$.

Следствие 2. *Пусть $\vec{f}$ — некоторая функция, определенная на $\mathcal{O}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Для того чтобы $\vec{f}$ была интегрируемой по мере dx, необходимо и достаточно, чтобы функция $t \to \vec{f}(\xi(t))|\det \xi'(t)|$ была интегрируемой относительно меры dt, и тогда будет иметь место формула* (IV, 10; 1)[1].

Это утверждение является значительным обобщением теоремы, в которой функция $\vec{f}$ предполагалась непрерывной и имеющей компактный носитель.

Доказательство. Следствие 1 позволяет применить теорему 60: $\vec{f}(x)$ является dx-интегрируемой тогда и только тогда, когда $\vec{f}(\xi(t))$ будет $(|\det \xi'(t)|dt)$-интегрируемой. Согласно теореме 51, это будет тогда и только тогда, когда dt-интегрируема функция $\vec{f}(\xi(t))|\det \xi'(t)|$.

Следствие 3. *Пусть A — часть Ω, измеримая по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Тогда ее образ $\xi(A) \subset \mathcal{O}$ измерим по мере Лебега и имеет меру, равную* $\int\limits_{\xi(A)} dx = \int\limits_A |\det(\xi'(t))|\,dt$.

Для доказательства достаточно применить формулу (IV, 10; 1) к характеристической функции множества $\xi(A)$.

Следствие 4. *Мера Лебега $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно любого сдвига $\mathbb{R}^n$. Мера подмножества A из $\mathbb{R}^n$ равна мере его сдвигов. Другими словами, какими бы ни были элемент $\vec{a}$ из $\mathbb{R}^n$ и сдвиг $\tau_{\vec{a}}$: $x \to x + \vec{a}$, имеем $\tau_{\vec{a}}(dx) = dx$.*

---

[1]) На этот раз мы берем меры dx и dt, т. е. *одну и ту же меру в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Якобиан сдвига $\xi = \tau_{\vec{a}}$, где $\xi(t) = t + \vec{a}$, равен 1 в любой точке пространства $\mathbb{R}^n$.

Позже мы увидим, что *мера dx, с точностью до множителя пропорциональности, является единственной мерой, инвариантной относительно сдвигов*: любая комплексная мера Радона на $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно сдвигов, имеет вид $c\,dx$, где c — некоторая комплексная постоянная. Более общо, любая мера Радона на $\mathbb{R}^n$ со значениями в нормированном векторном пространстве $\vec{E}$, инвариантная относительно всех сдвигов, имеет вид $\vec{c}\,dx$, где $\vec{c}$ — фиксированный вектор из $\vec{E}$.

Следствие 5. *Пусть ξ — линейное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Если A — множество из $\mathbb{R}^n$, измеримое по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$, то его образ $\xi(A)$ также измерим по мере Лебега и, кроме того, (мера $\xi(A)$) $= |\Delta|$ (мера A), где Δ — определитель линейного отображения ξ.*

Доказательство. Так как якобиан линейного отображения является постоянной величиной, равной Δ, то достаточно применить следствие 3; в нем предполагается, что ξ является гомеоморфизмом, а, значит, $\Delta \neq 0$. Однако результат остается верным, если $\Delta = 0$, поскольку здесь мера $\xi(A)$ равна нулю, ибо $\xi(A)$ содержится в векторном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $<n$ (см., например, следствие 1 теоремы 102_2).

Здесь *мы получаем новое важное истолкование модуля определителя линейного отображения*: $|\Delta| = \dfrac{\text{мера}\,\xi(A)}{\text{мера}\,A}$ для каждого измеримого по мере Лебега множества A. Пользуясь языком следствия 1, мы можем сказать, что образ меры $|\Delta|dx$ при отображении ξ является мерой dx или образ меры dx при линейном отображении ξ с отличным от нуля определителем $|\Delta|$ является мерой $\dfrac{1}{|\Delta|}dx$. (Если A является измеримым по мере Лебега множеством $\mathbb{R}^n$, то его мера относительно dx должна равняться мере его образа $\xi(A)$ по мере образа $\xi(dx)$. Это действительно так, поскольку $\xi(dx) = \dfrac{1}{|\Delta|}dx$ и поскольку мера $\xi(A)$ по dx равна определителю $|\Delta|$, умноженному на меру A.)

Если ξ является гомотетией с отношением k, то мера $\xi(A)$ по мере Лебега равна $|\Delta| = |k|^n$, умноженному на меру A:

$$\text{мера}\,kA = |k|^n \times \text{мера}\,A.$$

Следствие 5_2. *Мера Лебега n-параллелепипеда*[1]) *в* $\mathbb{R}^n$ *с вершиной a, определенного векторами* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$, *равна модулю определителя этих векторов.*

Пусть X_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$, — координаты векторов $\vec{X}_i$. Определителем этих векторов является, по определению, определитель, составленный из чисел X_{ij}.

Рассмотрим теперь линейное отображение ξ, преобразующее i-й вектор $\vec{e}_i$ канонического базиса $\mathbb{R}^n$ в вектор $\vec{X}_i$. Так как векторы $\vec{e}_i$ определяют n-параллелепипед объема 1 (этот параллелепипед является произведением $[0, 1]\times[0, 1]\times\ldots\times[0, 1]$, а, следовательно, его мера равна n-й степени меры Лебега отрезка $[0, 1]$ прямой $\mathbb{R}$, т. е. равна 1), то из следствия 5 вытекает, что искомый объем равен $|\det \xi|$ — модулю определителя n векторов $\vec{X}_i$.

Следствие 6. *Пусть a — некоторая точка* Ω, *A — часть* Ω, *измеримая по мере Лебега. Тогда отношение мер Лебега множеств* $\xi(A)$ *и A сходится к* $|\det \xi'(a)|$, *когда множество A равномерно стягивается к точке a.*

Переменное множество A мы называем *равномерно стягивающимся* к a, если точная верхняя грань расстояния от a до точек множества A стремится к 0.

Доказательство. Запишем разность $\varepsilon = \frac{\text{мера } \xi(A)}{\text{мера } A} - |\det \xi'(a)|$ в виде

$$\varepsilon = \frac{\int\int \ldots \int_A \det |(\xi'(t))| \, dt}{\int\int \ldots \int_A dt} - |\det \xi'(a)| =$$

$$= \frac{\int\int \ldots \int_A (|\det(\xi'(t))| - |\det(\xi'(a))|) \, dt}{\int\int \ldots \int_A dt}; \quad \text{(IV, 10; 14)}$$

---

[1]) В аффинном пространстве E над полем вещественных чисел p-параллелепипедом с вершиной a, определенным векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, называется множество элементов из E вида $a + t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \ldots + t_p\vec{X}_p$, где $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Векторы эти не обязательно должны быть независимыми. Число p может быть больше размерности E. В настоящем следствии задано n векторов в $\mathbb{R}^n$. Если они зависимы, то следствие применимо, и мера n-параллелепипеда будет равной нулю.

отсюда следует, что эта разность допускает оценку:

$$|\varepsilon| \leqslant \sup_{t \in A} \left| |\det(\xi'(t))| - |\det(\xi'(a))| \right|. \qquad \text{(IV, 10; 15)}$$

Из полученного неравенства вытекает утверждение леммы, если учесть, что по условию ξ принадлежит классу C^1 и что, следовательно, функция $t \to |\det \xi'(t)|$ непрерывна.

Замечание. Доказанное следствие дает важную интерпретацию для $|\det(\xi'(a))|$. Интуитивно это можно представлять следующим образом. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$. Его образ при производном отображении $\xi'(a)$ образован векторами $\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t_1}(a), \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t_2}(a), \ldots, \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t_n}(a)$. Если в качестве множества A взять малый n-параллелепипед с вершиной в a, определенной векторами $k\vec{e}_i$ при малом k, то его образ будет «приближенно» представлять собой n-параллелепипед с вершиной $\xi(a)$, определяемый векторами $k\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t_i}(a)$. Отношение объемов этих n-параллелепипедов равно модулю определителя векторов $\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t_i}(a)$, т. е. $|\det(\xi'(a))|$.

Однако здесь мы очень далеки от строгого доказательства следствия 6.

Пример замены переменных. Вычисление интеграла в полярных координатах. Займемся сначала полярными координатами на плоскости. Здесь мы имеем дело с отображением P: $(r, \varphi) \to (x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, изученным в гл. III на стр. 242,

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \qquad \text{(IV, 10; 16)}$$

Якобиан отображения P равен r. Если мы перейдем к сужению отображения на открытое множество Ω, определяемое неравенствами $r > 0$ и $0 < \varphi < 2\pi$, то P будет гомеоморфизмом, принадлежащим вместе со своим обратным гомеоморфизмом классу C^1 и отображающим Ω на свой образ $\mathcal{O}$, являющийся в $\mathbb{R}^2$ дополнением к множеству $y = 0$, $x \geqslant 0$. Пусть теперь $\vec{f}$ — некоторая функция $(x, y) \to \vec{f}(x, y)$, определенная на $\mathbb{R}^2$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Она будет интегрируемой на $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда она интегрируема на $\mathcal{O}$; при этом ее интегралы на $\mathbb{R}^2$ и $\mathcal{O}$ будут одними и теми же, поскольку дополнение к $\mathcal{O}$ имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^2$.

Согласно следствию 2, эта функция интегрируема на $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда будет интегрируемой на Ω функция $(r, \varphi) \to f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r$, причем справедлива формула

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \vec{f}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\theta. \qquad \text{(IV, 10; 17)}$$

В этой формуле интеграл по Ω можно заменить на интеграл по области $\overline{\Omega}$, т. е. по множеству, определенному расширенными неравенствами $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, ибо по мере $dr\,d\varphi$ мера множества $\overline{\Omega} - \Omega = \dot{\Omega}$, определяемого соотношениями $\{r = 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ или $r > 0,\ \varphi = 0$, или $r > 0,\ \varphi = 2\pi\}$, равна нулю.

Часто бывает выгодно для вычисления якобиана применить геометрический метод. Выполним эти вычисления на примере полярных координат в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. У нас имеется отображение P пространства $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, определяемое по формулам $m(r, \theta, \varphi) \to M(x, y, z)$, где

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 10; 13)}$$

Если ограничиться открытым множеством

$$\Omega = \{r,\ \theta,\ \varphi;\ r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\},$$

то P будет представлять собой C^1-диффеоморфизм множества Ω на его образ — открытое множество $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^3$, являющееся дополнением к полуплоскости $\{x, y, z;\ y = 0, x \geqslant 0\}$.

Как и в предыдущем случае, $\complement\mathcal{O}$ и $\dot{\Omega} = \overline{\Omega} - \Omega$ имеют нулевую меру.

Частная производная $\partial\vec{P}/\partial r$ в точке $m = (r, \theta, \varphi)$ является единичным вектором $\vec{i}$, направленным по радиус-вектору точки $M = (x, y, z) = P(m)$. Частная производная $\partial\vec{P}/\partial\theta$ является вектором $r\vec{j}$, где $\vec{j}$ — единичный вектор касательной к меридиану в точке M в направлении возрастания значений угла θ. Частная производная $\partial P/\partial\varphi$ является вектором $r\sin\theta\,\vec{k}$, где $\vec{k}$ — единичный вектор, направленный по параллели, проходящей через M, в направлении возрастания значений φ. Поэтому в дифференциальных обозначениях можно написать формулу

$$d\vec{M} = P'(m)\, d\vec{m} = \vec{i}\, dr + r\vec{j}\, d\theta + r\sin\theta\ \vec{k}\, d\varphi. \qquad \text{(IV, 10; 19)}$$

Якобианом отображения P в точке $m=(r,\theta,\varphi)$ является определитель системы трех векторов $\frac{\partial \vec{P}}{\partial r}$, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi}$ по отношению к векторам базиса $\mathbb{R}^3$. Этот определитель равен произведению $r^2 \sin\theta$ на определитель системы векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Последний же, как определитель системы трех единичных взаимно перпендикулярных векторов, равен ± 1 [1]). Поэтому имеем

$$\det P'(r,\ \theta,\ \varphi) = \pm r^2 \sin\theta \neq 0.$$

Формула замены переменных в полярных координатах в трехмерном пространстве имеет, таким образом, следующий вид:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} \vec{f}(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{IV, 10; 20}$$

Обобщение теоремы 102 *и следствий* 1, 2, 3, 6. Теорема 102 и следствия 1, 2, 3 остаются справедливыми, если ξ является гомеоморфизмом, принадлежащим классу C^1. Обратный гомеоморфизм ξ^{-1} при этом не обязан принадлежать классу C^1, т. е. $\det \xi'(t)$ для некоторых значений $t \in \Omega$ может обращаться в нуль. Следствие 6 остается справедливым, если ξ является некоторым отображением класса C^1 и не обязательно представляет собой гомеоморфизм. Эти факты мы примем без доказательства. Из них теперь можно получить следующую теорему:

Теорема 102_2. *Пусть ξ — некоторое отображение класса C^1 открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через A множество точек Ω, в которых якобиан отображения ξ равен нулю. Тогда его образ $\xi(A)$ относительно меры Лебега имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда $\Omega=\mathbb{R}^n$. Меру Лебега некоторого множества будем обозначать через mes. Пусть $a \in A$. Согласно следствию 6, распространенному, как только что было сказано, на произвольное отображение ξ класса C^1, существует при заданном $\varepsilon > 0$

---

[1]) Это означает, что параллелепипед, определяемый векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, имеет объем, равный 1. Конечно, этот факт «известен», но не забывайте, что до построения теории интегрирования теория мер объемов не была строго обоснована! Это будет сделано в этом параграфе.

такой открытый шар B_a с центром в a, что для любой части B шара B_a, измеримой по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$, имеет место неравенство

$$\operatorname{mes} \xi(B) \leqslant \varepsilon \operatorname{mes} B. \qquad \text{(IV, 10; 21)}$$

Пусть K — компакт множества A. Тогда B_a, $a \in K$, образуют открытое покрытие K. Для него существует некоторое конечное подпокрытие, например $B_1, B_2, \ldots, B_N$. Положим $B'_1 = K \cap B_1$, $B'_2 = K \cap B_2 \cap \complement B'_1$, $B'_3 = K \cap B_3 \cap \complement B'_1 \cap \complement B'_2$ и т. д. Тогда множества $B'_1, B'_2, \ldots, B'_N$, являющиеся пересечениями измеримых множеств, будут измеримыми. Кроме того, они не пересекаются и образуют покрытие K. Но тогда $\xi(B'_1), \xi(B'_2), \ldots, \xi(B'_N)$ образуют покрытие $\xi(K)$.

Поэтому имеем

$$\operatorname{mes} \xi(K) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \operatorname{mes} \xi(B'_i) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \operatorname{mes}(B'_i) = \varepsilon \operatorname{mes} K. \qquad \text{(IV, 10; 22)}$$

Так как ε произвольно, то это означает, что $\operatorname{mes} \xi(K) = 0$.

Заметим теперь, что множество A замкнуто, поскольку оно является прообразом множества $\{0\}$ при непрерывном отображении $t \to \det \xi'(t)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Если через K_m обозначить пересечение A с шаром $\|\vec{x}\| \leqslant m$ из $\mathbb{R}^n$, то K_m будет компактом A, а само A — объединением K_m[1]. Каждое множество $\xi(K_m)$ имеет, как мы только что видели, нулевую меру. Множество $\xi(A)$, представляющее собой объединение счетного числа множеств $\xi(K_m)$ нулевой меры, имеет меру, равную нулю.

Следствие 1. *Пусть V — многообразие класса C^1, счетное в бесконечности. Пусть H — отображение класса C^1 множества V в $\mathbb{R}^n$. Если размерность $V \leqslant n-1$, то его образ $H(V)$ имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В частности, если множество V является многообразием класса C^1 в $\mathbb{R}^n$ размерности $\leqslant n-1$, то оно имеет меру, равную нулю.*

Доказательство. Пусть l — размерность многообразия V, $l \leqslant n-1$. Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — карта многообразия V. Тогда сложное отображение $H \circ \Phi$ является отображением $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$, принадлежащим классу C^1.

Если положить

$$\xi(t, u) = (H \circ \Phi)(t) \quad \text{для} \quad t \in \mathcal{O},\ u \in \mathbb{R}^{n-l}, \qquad \text{(IV, 10; 23)}$$

[1]) В этом месте использовано упрощенное предположение $\Omega = \mathbb{R}^n$. Оно позволяет непосредственно показать, что A является счетным объединением компактов. Однако утверждение справедливо и в общем случае.

то рассматриваемое отображение продолжается до отображения класса C^1 открытого множества $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^{n-l}$ из $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$.

Так как $\partial\xi/\partial u \equiv 0$, то якобиан этого отображения будет равен нулю и, следовательно, согласно теореме, образ $H \circ \Phi(\mathcal{O}) = \xi(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^{n-l})$ имеет меру Лебега, равную нулю. Это означает, что образ при отображении H образа $\Phi(\mathcal{O})$ карты Φ имеет нулевую меру. Пусть теперь K является некоторым компактом V. Так как он может быть покрыт конечным числом образов карт, то его образ при отображении H заведомо имеет нулевую меру. Поскольку V, по предположению, является объединением счетного множества компактов, то теперь ясно, что образ V при отображении H также имеет меру, равную нулю.

Замечание. Не следует думать, что этот результат останется верным для многообразия класса C^0, т. е. топологических не дифференцируемых многообразий. Если, например, в плоскости мы рассмотрим *кривую Жордана*, т. е. множество, гомеоморфное отрезку прямой $[a, b]$, и если гомеоморфизм H отрезка $[a, b]$ на эту дугу только непрерывен, но не дифференцируем, то мера этой кривой Жордана по мере $dx \otimes dy$ не обязательно равна нулю. Непрерывное отображение H отрезка $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ является путем в $\mathbb{R}^n$ в смысле определения, данного на стр. 90. Путь же, если он только непрерывен; т. е. не дифференцируем, может иметь образ, целиком заполняющий куб в $\mathbb{R}^n$, с мерой >0.

Следствие 2. *Пусть ξ — отображение класса C^1 открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ в открытое множество $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^n$. Обозначим для каждой точки $x \in \mathcal{O}$ через $\nu(x)$ число точек прообраза $\xi^{-1}(\{x\})$. Отображение ξ является собственным относительно меры $|\det \xi'(t)|\,dt$ множества Ω тогда и только тогда, когда ν локально dx-интегрируема в $\mathcal{O}$; в этом случае образ меры $|\det \xi'(t)|\,dt$ множества Ω при отображении ξ является мерой $\nu(x)\,dx$ множества $\mathcal{O}$. При этом, если $\vec{f}$ — функция, определенная на $\mathcal{O}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то функция $\nu(x)\vec{f}(x)$ является dx-интегрируемой тогда и только тогда, когда dt-интегрируема функция $\vec{f}(\xi(t))\,|\det \xi'(t)|$, причем имеет место равенство*

$$\int\int_{\mathcal{O}}\ldots\int \vec{f}(x)\,\nu(x)\,dx = \int\int_{\Omega}\ldots\int \vec{f}(\xi(t))\,|\det \xi'(t)|\,dt. \tag{IV, 10; 23$_2$}$$

Полагая здесь $\nu = 1$, мы снова получим следствия 1 и 2 теоремы 102.

Измерение объемов в аффинных евклидовых конечномерных пространствах

Пусть E — аффинное евклидово пространство размерности N. Возможность измерения объемов в таком пространстве кажется интуитивно очевидной; остается обосновать ее со всей строгостью.

Пусть $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ — *ортонормированная* система координат в E. С ее помощью можно отождествить E с $\mathbb{R}^N$ и таким образом определить меру как тензорное произведение $dx = dx_1 \otimes dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_N$.

Более строго, следует говорить, что выбор системы координат определяет линейную биекцию P: $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \to a + x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_N\vec{e}_N$ пространства $\mathbb{R}^N$ на E и что при этих условиях можно определить образ меры $P(dx)$ при отображении P меры Лебега $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ пространства $\mathbb{R}^N$. Допускаемая нами вольность речи заключается в том, что вместо $P(dx)$ мы пишем просто dx.

Теорема 103 (основная теорема измерения объемов). *Пусть E — аффинное евклидово пространство размерности N. Мера, определенная в ортонормированной системе координат по формуле $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_N$, не зависит от выбранной системы координат.*

Доказательство. Пусть $a, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ — некоторая ортонормированная система координат, а $b, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_N$ — другая ортонормированная система. Координаты x и y одной и той же точки в этих системах координат связаны формулой замены переменных:

$$y_i = a_i + \sum_{j=1}^{N} m_{ij} x_j, \qquad a_i = (\overrightarrow{a - b} \mid \vec{f}_i), \quad m_{ij} = (\vec{e}_j \mid \vec{f}_i). \tag{IV, 10; 24}$$

Согласно следствию 1 теоремы 102 о замене переменных в кратных интегралах имеем: $dy = |\Delta| dx$[1]), где Δ — определитель матрицы $\mathscr{M}$, составленной из чисел m_{ij}. Однако определитель ортогональной матрицы равен ± 1, так как она удовлетворяет условию $\mathscr{M}\,{}^t\mathscr{M} = I$, где ${}^t\mathscr{M}$ — транспонированная,

[1]) Здесь допускается отмеченная вольность речи. На самом деле две системы координат определяют две биекции P и Q пространства $\mathbb{R}^N$ на E и $P = Q \circ \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ является отображением $\mathbb{R}^N$ на $\mathbb{R}^N$, определенным по формуле (IV, 10; 24). Теперь $P(dx) = Q(\mathscr{M}(dx)) = Q(|\Delta^{-1}|dy)$, или $|\Delta|P(dx) = Q(dy)$, что мы записали в виде $|\Delta|dx = dy$.

а I — единичная матрицы, и поэтому $\Delta^2 = 1$[1]). Абсолютная величина этого определителя равна 1. Отсюда следует, что $dx = dy$, и теорема доказана.

Итак, в аффинном евклидовом пространстве существует вполне определенная мера Радона $\geqslant 0$, которую мы будем обозначать через dx. *Эта мера инвариантна относительно сдвигов и, более общо, относительно движений пространства*, т. е. относительно аффинных обратимых преобразований, сохраняющих скалярные произведения. Так как эта мера в ортонормированной системе координат равна $dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$, то к ней применимы следствия 5 и 5_2 теоремы 102.

Пусть теперь A — некоторое измеримое множество из E. Его объемом в евклидовом пространстве называется его мера относительно dx. Если A является прямоугольным параллелепипедом со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_N$, то его объем, очевидно, равен произведению $a_1 a_2 \ldots a_N$, если выбрать ортонормированную систему координат, базисные векторы которой параллельны его сторонам.

Теорема 103_2. *Если $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ являются системой N векторов с общим началом, то объем N-параллелепипеда, образованного этими векторами, вычисляется по формуле*:

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\vec{X}_1 | \vec{X}_1) & (\vec{X}_1 | \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_1 | \vec{X}_N) \\ (\vec{X}_2 | \vec{X}_1) & (\vec{X}_2 | \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_2 | \vec{X}_N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\vec{X}_N | \vec{X}_1) & (\vec{X}_N | \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_N | \vec{X}_N) \end{vmatrix}. \qquad \text{(IV, 10; 25)}$$

Доказательство. Выберем ортонормированную систему координат. Мы знаем, что V^2 является квадратом определителя системы N векторов (следствие 5_2 теоремы 102). Поэтому, для того чтобы получить предыдущую формулу, достаточно вычислить по правилам умножения определителей произведение определителя этой системы на себя.

Эта формула, очевидно, удобнее, чем формула, использующая определитель n векторов относительно некоторой системы координат, поскольку она включает лишь скалярные произведения и потому не зависит от какой-либо системы координат.

---

[1]) Невольно чувствуешь большой соблазн доказать это свойство определителя ортогональных матриц, опираясь на геометрическое понятие объема! Однако понятие объема не дано свыше и должно быть введено со всей строгостью с помощью той же теории интегрирования! Поэтому надо иметь алгебраическое доказательство свойства $\Delta = \pm 1$.

Измерение длин в аффинном евклидовом пространстве

Аффинное евклидово пространство нормировано, а, значит, в нем можно измерять длины кривых (см. стр. 701). Если $t \to M(t)$ при t, пробегающем некоторый интервал $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, является параметрически заданной кривой, принадлежащей классу C^1, то длина этой кривой равна интегралу $\int\limits_{\mathbb{R}_1} \|\overrightarrow{M'(t)}\| dt$ (формула (IV, 9; 40_2)), равному $\int\limits_{\mathbb{R}_1} (\overrightarrow{M'(t)} \mid \overrightarrow{M'(t)})^{1/2} dt$. Если x_i — составляющие M в ортонормированной системе координат, то это дает $\int\limits_{\mathbb{R}_1} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i'^2(t)}\, dt$.

Измерение n-мерных площадей в линейном многообразии размерности n аффинного евклидова конечномерного пространства

В аффинном евклидовом конечномерном пространстве мы смогли определить, с одной стороны, длины дуг кривых, а с другой, — меры объемов. Однако нам бы хотелось определить *все промежуточные* величины — площади поверхностей и, более общо, n-мерные площади n-мерных многообразий при $0 \leqslant n \leqslant N$.

Займемся для начала случаем, когда F является линейным n-мерным многообразием аффинного пространства E. В этом случае само F является некоторым аффинным евклидовым пространством, и, следовательно, в F существуют меры объемов. Если в F выбрать ортонормированную систему координат и отождествить его с $\mathbb{R}^n$, то эта мера равна $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Однако, поскольку F является пространством n измерений, то вместо слова «объем» мы будем употреблять слово «*n-мерная площадь*», или «*n-площадь*». Если F_1 и F_2 — два линейных многообразия одной и той же размерности n, то каждое аффинное отображение F_1 на F_2, сохраняющее скалярные произведения, переводит ортонормированную систему координат пространства F_1 в ортонормированную систему координат пространства F_2, а, следовательно, сохраняет n-площади. Каждое аффинное отображение, являющееся подобием с отношением k, т. е. отображением, умножающим длины на k и скалярные произведения на k^2, имеет якобиан относительно ортонормированных систем координат F_1 и F_2, равный $\pm k^n$, а, следовательно, умножает n-площади на $|k|^n$. Если $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ — векторы из F с общим началом, то n-мерная площадь определяемого ими n-параллелепипеда задается формулой:

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{X}_1 \mid \vec{X}_1) & (\vec{X}_1 \mid \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_1 \mid \vec{X}_n) \\ (\vec{X}_2 \mid \vec{X}_1) & (\vec{X}_2 \mid \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_2 \mid \vec{X}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\vec{X}_n \mid \vec{X}_1) & (\vec{X}_n \mid \vec{X}_2) & \ldots & (\vec{X}_n \mid \vec{X}_n) \end{vmatrix} = \det_{i,j} (\vec{X}_i \mid \vec{X}_j). \qquad (IV, 10; 26)$$

Упражнение. Иногда полезно предыдущую формулу записать в иной форме. Предположим, например, что речь идет о двух векторах $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Тогда она запишется в виде

$$S^2 = (\vec{X} \mid \vec{X})(\vec{Y} \mid \vec{Y}) - (\vec{X} \mid \vec{Y})^2. \qquad (IV, 10; 27)$$

В силу тождества Лагранжа ее можно переписать так:

$$\sum_{i,j} (X_i Y_j - X_j Y_i)^2, \qquad (IV, 10; 28)$$

где X_i (соответственно Y_i) — координаты векторов $\vec{X}$ (соответственно $\vec{Y}$) относительно некоторой ортонормированной системы координат. Таким образом, S^2 является суммой квадратов площадей параллелограммов — ортогональных проекций исходного параллелограмма на плоскости, порожденные всевозможными парами векторов базиса. *Эта формула обобщается на n-мерные площади при произвольном n.*

Теорема 104. *n-мерная площадь n-параллелепипеда равна произведению $(n-1)$-мерной площади какого-либо из его оснований на длину соответствующей высоты.*

Доказательство. n-параллелепипед определяется своей вершиной и n векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$. Предположим сначала, что эти n векторов линейно зависимы. Тогда n-мерная площадь параллелепипеда равна нулю. Однако в этом случае или же $n-1$ векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$ зависимы, и тогда $(n-1)$-мерная площадь основания равна нулю, или же они независимы, и тогда вектор $\vec{X}_n$ лежит в векторном подпространстве $\vec{F}_n$, порожденном векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, а, значит, в нуль обращается высота. В обоих случаях утверждение теоремы справедливо.

Предположим теперь, что исходные n векторов линейно независимы. Рассмотрим основание параллелепипеда, определенное его вершиной и векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$. Выберем такой ортонормированный базис в $\vec{F}$, в котором первые $n-1$

элементов лежат в векторном подпространстве $\vec{F}_{n-1}$, порожденном векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, а n-й вектор базиса является единичным вектором $\vec{e}_n$, ортогональным к пространству $\vec{F}_{n-1}$. Далее, n-мерная площадь n-параллелепипеда является модулем определителя, составленного из n векторов относительно этого базиса. Можно написать, что $\vec{X}_n = \vec{\xi}_n + \vec{Y}_n$, где ортогональная проекция $\vec{\xi}_n$ вектора $\vec{X}_n$ на $\vec{F}_{n-1}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, а длина вектора $\vec{Y}_n = (\vec{X}_n | \vec{e}_n) \vec{e}_n$ равна $|(\vec{X}_n | \vec{e}_n)|$. Вектор $\vec{Y}_n$ является высотой параллелепипеда, относящейся к выбранному основанию. В этом случае определитель векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ является также определителем векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}, \vec{Y}_n$. Однако его последняя строка состоит из элементов $0, 0, \ldots, 0, (\vec{X}_n | \vec{e}_n)$. Поэтому определитель равен произведению определителя, составленного из векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, модуль которого является $(n-1)$-мерной площадью основания, на число $(\vec{X}_n | \vec{e}_n)$, модуль которого дает длину высоты $\vec{Y}_n$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 1. *n-мерная площадь n-параллелепипеда, определяемого n векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$, не превосходит произведения длин этих векторов. Она всегда строго меньше этого произведения, кроме того случая, когда все векторы попарно ортогональны.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $n = 1$. Предполагая, что оно верно для $n-1$ векторов, докажем его справедливость для n векторов.

n-мерная площадь n-параллелепипеда равна произведению $(n-1)$-мерной площади основания, порожденного векторами $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, на длину $\|\vec{Y}_n\|$ высоты $\vec{Y}_n$. По предположению индукции, первый сомножитель не превосходит произведения $\|\vec{X}_1\| \|\vec{X}_2\| \ldots \|\vec{X}_{n-1}\|$ и строго меньше его, если векторы $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$ не являются попарно ортогональными. Второй сомножитель не превосходит $\|\vec{X}_n\|$ и строго меньше его, если $\vec{X}_n$ не ортогонален векторам $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{n-1}$, чем и заканчивается доказательство следствия.

Следствие 2. *Пусть $(X_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ — квадратная матрица, составленная из вещественных чисел и состоящая из*

n строк и n столбцов. Тогда определитель Δ этой матрицы допускает следующую оценку:

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{X_{11}^2 + \ldots + X_{1n}^2}\sqrt{X_{21}^2 + \ldots + X_{2n}^2} \cdots \sqrt{X_{n1}^2 + \ldots + X_{nn}^2}. \qquad \text{(IV, 10; 28}_2\text{)}$$

Для доказательства достаточно аналитически записать предыдущий результат.

Замечание. В случае комплексных чисел X_{ij} это неравенство сохранится, если заменить X_{ij}^2 на $|X_{ij}|^2$, однако его доказательство будет значительно сложнее. Неравенство (IV, 10; 28_2) было доказано Адамаром и нашло значительное приложение в теории интегральных уравнений Фредгольма.

Теорема 105 (об ортогональной проекции площадей гиперплоскостей). *Если F и G — гиперплоскости евклидова аффинного пространства E размерности N, то $(N-1)$-мерная площадь ортогональной проекции на G измеримого множества A гиперплоскости F равна произведению площади A на косинус острого угла, образованного гиперплоскостями F и G.*

Доказательство. Можно считать, что F и G не параллельны друг другу, так как в противном случае теорема очевидна. Пусть H — пересечение F и G. Размерность этого пересечения равна $N-2$. Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — единичные векторы пространств $\vec{F}$ и $\vec{G}$, перпендикулярные $\vec{H}$ и выбранные так, что они составляют острый угол θ, равный по определению углу между гиперплоскостями F и G (этот угол является также углом между нормалями к $\vec{F}$ и $\vec{G}$). Таким образом, $(\vec{f}|\vec{g}) = \cos\theta \geqslant 0$. Выберем в H ортонормированную систему координат $0, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_{N-2}$. Тогда $0, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_{N-2}, \vec{f}$ образуют ортонормированную систему координат в F, а $0, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_{N-2}, \vec{g}$ — ортонормированную систему координат в G. Введение указанных систем координат отождествляет эти пространства с $\mathbb{R}^{N-1}$.

Проекция F на G является аффинным отображением, оставляющим неизменной точку 0, а, следовательно, определяется некоторой матрицей относительно этих систем координат. Проекции векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_{N-2}$ совпадают с самими векторами, а проекция вектора $\vec{f}$ равна $\vec{g}\cos\theta$. Следовательно, матрица этого отображения является диагональной с элементами $1, 1, \ldots, \cos\theta$. Определитель Δ этой матрицы равен $\cos\theta$, и потому результат вытекает из следствия 5 теоремы 102.

n-мерная площадь n-мерного параметрического многообразия

Попытаемся теперь определить n-мерную площадь n-мерного многообразия класса C^1 аффинного евклидова пространства E. Мы не будем здесь строить общую теорию, как это мы делали для длин и для объемов. Мы рассмотрим только случай многообразия класса C^1.

1°) Пусть Ψ: $\mathcal{O} \to \Psi(\mathcal{O})$ — отображение класса C^1 некоторого открытого множества $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^n$ в пространство E.

Производное отображение $\Psi'(u)$ в точке u из $\mathbb{R}^n$ переводит систему n векторов базиса $\mathbb{R}^n$ в систему n векторов $\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_i}(u)$ из E, $i = 1, 2, \ldots, n$. Она определяет некоторый параллелепипед, n-мерная площадь которого $D(u)$ определяется по формуле

$$D(u) = \sqrt{\det_{i,j}\left(\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_i}(u) \,\middle|\, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_j}(u)\right)}. \qquad \text{(IV, 10; 29)}$$

По определению, *n-мерная площадь n-мерного параметрического многообразия класса C^1, определяемого отображением Ψ, задается интегралом*

$$S = \int_{\mathcal{O}}\ldots\int D(u)\,du = \int_{\mathcal{O}}\ldots\int D(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,du_1\,du_2\ldots du_n. \qquad \text{(IV, 10; 30)}$$

Причины, по которым мы дали такое определение, ясны. Разобьем множество $\mathcal{O}$ на малые параллелепипеды со сторонами, параллельными осям. Образ при отображении Ψ параллелепипеда с вершиной u и сторонами, параллельными осям, длины $du_1, du_2, \ldots, du_n$ является «приближенно» параллелепипедом с вершиной $\Psi(u)$, определяемым векторами $\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_1}(u)\,du_1$, $\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_2}(u)\,du_2, \ldots, \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial u_n}(u)\,du_n$, площадь которого равна $D(u) \times \times du_1\,du_2\ldots du_n$. Искомая площадь является «суммой этих элементарных площадей», откуда и получается интеграл (IV, 10; 30).

Теорема 106. *n-мерная площадь параметрического многообразия Ψ, определяемого по формуле* (IV, 10; 30), *не изменится, если данное многообразие заменить эквивалентным многообразием. Другими словами, если Ψ_1 и Ψ_2 — отображения класса C^1 двух открытых множеств $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ из $\mathbb{R}^n$ в E и если существует C^1-диффеоморфизм H множества $\mathcal{O}_1$ на $\mathcal{O}_2$, такой,* *что* $\Psi_1 = \Psi_2 \circ H$, *то имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathcal{O}_1}\dots\int D_1(u)\,du = \int\limits_{\mathcal{O}_2}\dots\int D_2(u)\,du. \qquad \text{(IV, 10; 31)}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1 \in \mathcal{O}_1$, $\alpha_2 = H(\alpha_1) \in \mathcal{O}_2$ и $x = \Psi_1(\alpha_1) = \Psi_2(\alpha_2)$. Подпространство, порожденное n векторами $\frac{\partial\vec{\Psi}_1}{\partial u_i}(\alpha_1)$, имеет размерность $\leqslant n$ и равную n, если эти векторы независимы. Обозначим через F n-мерное подпространство, содержащее рассматриваемое подпространство. Поскольку линейное отображение $\Psi_1'(\alpha_1)$ является композицией $\Psi_2'(\alpha_2) \circ H'(\alpha_1)$, в которой $H'(\alpha_1)$ есть биекция, то это подпространство совпадает с подпространством, порожденным векторами $\frac{\partial\vec{\Psi}_2}{\partial u_i}(\alpha_2)$ (следствие 4 теоремы 11 гл. III). Выбирая в этом векторном пространстве F произвольный ортонормированный базис, мы можем отождествить его с пространством $\mathbb{R}^n$.

Если теперь мы положим $A_1 = D_1(\alpha_1)$ и $A_2 = D_2(\alpha_2)$, то множитель A_1, определяющий площадь параллелепипеда, порожденного векторами $\frac{\partial\vec{\Psi}_1}{\partial u_i}(\alpha_1)$, равен модулю определителя линейного отображения $\Psi_1'(\alpha_1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, а множитель A_2 равен модулю определителя линейного отображения $\Psi_2'(\alpha_2)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Соотношение $\Psi_1'(\alpha_1) = \Psi_2'(\alpha_2) \circ H'(\alpha_1)$ означает, что между определителями имеет место равенство

$$D_1(\alpha_1) = |\det H'(\alpha_1)|\,D_2(\alpha_2) = |\det H'(\alpha_1)|\,D_2(H(\alpha_1)). \qquad \text{(IV, 10; 32)}$$

Так как это равенство справедливо для любого α_1 из $\mathcal{O}_1$, то из формулы (IV, 10; 1) замены переменных для кратных интегралов следует, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathcal{O}_2}\dots\int D_2(\alpha_2)\,d\alpha_2 = \int\limits_{\mathcal{O}_1}\dots\int D_2(H(\alpha_1)|\det H'(\alpha_1)|\,d\alpha_1 =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{O}_1}\dots\int D_1(\alpha_1)\,d\alpha_1 \qquad \text{(IV, 10; 33)}$$

и, следовательно, оба интеграла, определяющие n-мерные площади для Ψ_1 и Ψ_2, равны между собой.

Пример. *Поверхности в аффинном евклидовом трехмерном пространстве.* В этом случае обычно через u, v принято обозначать координаты множества параметров $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, через x, y, z — составляющие отображения Ψ по осям ортонормированной системы координат в $E = \mathbb{R}^3$, через A, B, C — якобианы:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned} \tag{IV, 10; 34}$$

через E, F, G — величины:

$$\begin{aligned} E &= \left\| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} \right\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} \middle| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial v} \right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left\| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial v} \right\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned} \tag{IV, 10; 35}$$

и через H — то, что мы ранее обозначали через D. Согласно (IV, 10; 27), имеем

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \tag{IV, 10; 36}$$

а согласно (IV, 10; 28),

$$H = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{IV, 10; 37}$$

2°) Вернемся теперь к параметрическому многообразию V, определенному отображением Ψ.

Выражение $D(u)du$ определяет некоторую меру Радона dS на $\mathcal{O}$. Если A является множеством из $\mathcal{O}$, то меру этого множества относительно меры Радона можно рассматривать как n-мерную площадь сужения Ψ на это множество. Если Ψ является собственным относительно этой меры dS, то образ при отображении Ψ этой меры Радона есть некоторая мера $\Psi(dS) \geqslant 0$ в аффинном пространстве E. Обычно через dS мы будем обозначать меру на $\mathcal{O}$ или ее образ. Эта мера служит для определения поверхностных интегралов. Если $\vec{f}$ является функцией, определенной на E, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то интегралом $\int \ldots \int \vec{f}\, dS$ [1]), по определению, называют

$$\int \ldots \int \vec{f}\, dS = \int_{\mathcal{O}} \ldots \int (\vec{f} \circ \Psi)\, dS = \int_{\mathcal{O}} \ldots \int \overrightarrow{f(\Psi(u))}\, D(u)\, du. \tag{IV, 10; 38}$$

Это — интеграл от $\vec{f}$ относительно образа меры $\Psi(dS)$, если последний существует. Впрочем, если мы вернемся к ситуации теоремы 106, то увидим, что если через dS_1 и dS_2 обозначить меры, определенные на $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ с помощью предыдущего процесса относительно эквивалентных многообразий Ψ_1 и Ψ_2, то dS_2 является образом $H(dS_1)$ меры dS_1 при гомеоморфизме H. Об этом, действительно, говорит следствие 1 теоремы 102. Так как

$$\Psi_1(dS_1) = (\Psi_2 \circ H)(dS_1) = \Psi_2(H(dS_1)) = \Psi_2(dS_2),$$

то $\Psi_1(dS_1)$ и $\Psi_2(dS_2)$ представляют собой одну и ту же меру на E (если они существуют).

3°) Теперь мы можем дать корректное определение n-мерной площади *произвольного параметрического многообразия размерности n класса C^1* в аффинном пространстве E размерности N.

Пусть V — многообразие (абстрактное или погруженное в аффинное пространство) размерности n класса C^1. Пусть H — некоторое отображение V в E класса C^1, определяющее тем самым некоторое n-мерное многообразие, параметрическое или особое, класса C^1.

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта многообразия V. Тогда $\Psi = H \circ \Phi$ является отображением $\mathcal{O}$ в E класса C^1 и, значит, можно определить n-мерную площадь dS_Φ меры $\geqslant 0$ в $\mathcal{O}$. Ее образ при *гомеоморфизме* Φ является мерой $\Phi(dS_\Phi)$ на открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Если теперь рассмотреть две карты этого вида, например Φ_1 и Φ_2, и если открытые множества $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение Ω, то можно через Ω_1 и Ω_2 обозначить прообразы Ω при отображениях Φ_1 и Φ_2. Сужения Φ_1 и Φ_2 на Ω_1 и Ω_2 определяют теперь эквивалентные параметрические многообразия, поскольку

[1]) Как и для криволинейного интеграла (см. примечание на стр. 705), надо было написать $\int_{(\Psi)} \ldots \int \vec{f}\, dS$ — интеграл относительно параметрического многообразия (Ψ). С другой стороны, символ кратного интеграла $\int \ldots \int$ совершенно не обоснован, поскольку нет и речи об интегралах относительно тензорного произведения мер. Это, к сожалению, всего лишь некоторый прием, позволяющий указать, что речь идет об интеграле на многообразии размерности > 1.

$H_{1,2}=\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1$ является гомеоморфизмом класса C^1 (следствие 1 теоремы 33 гл. III) и поскольку $\Phi_1=\Phi_2\circ H_{1,2}$. Сделанное выше замечание показывает теперь, что мера dS_{Φ_2} на $\mathcal{O}_2$ является образом меры dS_{Φ_1} на $\mathcal{O}_1$ при отображении $H_{1,2}$ и что образы этих мер, т. е. меры $\Phi_1(dS_{\Phi_1})$ и $\Phi_2(dS_{\Phi_2})$, в Ω совпадают.

Рассмотрим теперь систему всех открытых множеств $\Phi(\mathcal{O})$, являющихся образами всех карт Φ на V. В каждом из этих открытых множеств мы имеем некоторую вещественную меру $\geqslant 0$ $\Phi(dS_\Phi)$, а в пересечении Ω двух из этих открытых множеств $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ меры $\Phi_1(dS_{\Phi_1})$ и $\Phi_2(dS_{\Phi_2})$, определенные соответствующими картами Φ_1 и Φ_2, совпадают. Значит, мы находимся в условиях теоремы о кусочной склейке мер (теорема 17) и можно утверждать, что на V существует некоторая вполне определенная мера Радона, которая на каждом образе карты $\Phi(\mathcal{O})$ совпадает с n-мерной площадью $\Phi(dS_\Phi)$, определенной этой картой. Именно эту меру Радона на V называют мерой n-мерных площадей на особом многообразии и обозначают через dS. Если A — часть V, то ее называют n-мерной площадью A (или сужения H в A), т. е., по определению, это мера A относительно dS. Если норма dS конечна, то она, т. е. интеграл $\int\limits_V\ldots\int dS$, является n-мерной площадью параметрического многообразия. Эта площадь не изменяется, если параметрическое многообразие будет заменено эквивалентным параметрическим многообразием. Если отображение H является dS-собственным, то существует на E образ меры $H(dS)$, часто обозначаемый через dS, носитель которого лежит в замыкании $\overline{H(V)}$ образа $H(V)$. Если $\vec{f}$ является некоторой функцией на E со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то можно говорить об интеграле $\int\ldots\int\vec{f}\,dS$[1]), равном по определению $\int\limits_V\ldots\int(\vec{f}\circ H)\,dS$. Это — интеграл от функции $\vec{f}$ относительно $H(dS)$; если только образ меры существует.

Предыдущие результаты можно подытожить и сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 107. *Пусть H: $V\to E$ — отображение класса C^1 многообразия V класса C^1 размерности n в аффинное евклидово*

---

[1]) Или лучше интеграл $\int\limits_{(H)}\ldots\int\vec{f}\,dS$ относительно параметрического многообразия, определенного отображением H многообразия V в E. Заметим, что мы ввели три рода мер $\geqslant 0$: меру ds_Φ на $\mathcal{O}$, меру $\Phi(dS_\Phi)$ на $\Phi(\mathcal{O})$, склейку мер $\Phi(dS_\Phi)$, дающую меру dS на V, и, наконец, меру $H(dS)$ на E.

пространство E размерности N, определяющее параметрическое многообразие в E. Для каждой карты Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ многообразия V через dS_Φ обозначим меру $D(u)du \geqslant 0$ на $\mathcal{O}$, определенную по формуле (IV, 10; 29). *Тогда на V существует, и притом единственная, мера $dS \geqslant 0$, совпадающая с $\Phi(dS_\Phi)$ на каждом множестве $\Phi(\mathcal{O})$. Эту меру называют n-мерной площадью на параметрическом многообразии. Если A является (dS-измеримой) частью многообразия V, то интеграл $\int\limits_A \ldots \int dS$ дает площадь A. В частности, $\int\limits_V \ldots \int dS = \| dS \|$ является площадью параметрического многообразия.*

Эти результаты, естественно, применимы, если V — многообразие, лежащее в E, а H — тождественное отображение.

Замечания. 1°) Если V является открытым множеством $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^n$, то в качестве карты Φ можно взять тождественное отображение, и тогда сразу же получаем $dS = dS_\Phi = D(u)du$. Впрочем, этот случай был уже нами разобран перед теоремой 106 (тогда V и H обозначались через $\mathcal{O}$ и Ψ).

2°) Пусть при $n=1$ многообразие V является открытым интервалом $\mathbb{R}_1$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ и H представляет собой отображение, обозначаемое через M, интервала $\mathbb{R}_1$ в E. Тогда мы приходим к случаю, рассмотренному выше в замечании 1°). Здесь $D(t)$ (для переменной из $\mathbb{R}_1$ мы пишем t вместо u) является длиной $\overrightarrow{M'(t)}$ и $ds = D(t)dt = \|\overrightarrow{M'(t)}\|dt$. Мы снова возвращаемся к длине (формула (IV, 9; 40_2)). Однако длина кривой может быть определена в произвольном нормированном аффинном пространстве и даже в произвольном метрическом пространстве (стр. 701), в то время как n-мерные площади при $n > 1$ могут быть определены только в аффинных евклидовых пространствах.

3°) Если V при $n = N$ является открытым множеством Ω из E, а H — тождественным преобразованием, то мера N-мерных площадей будет просто мерой объемов dx. В самом деле, теперь мы находимся в условиях замечания 1°), и, положив $\Phi = H =$ = тождественное преобразование, мы получим $D(u) = 1$.

4°) Если Ω — некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^N$, а ξ — отображение Ω в E класса C^1, то оно определяет некоторое параметрическое многообразие в E класса C^1. Точно так же, как в п. 3°), N-мерную площадь некоторой части A множества Ω можно называть ее объемом. Однако, поскольку отображение ξ не обязательно инъективно, эта величина не обязательно будет объемом образа $\xi(A)$. Если в E выбрать ортонормированную систему координат и отождествить это пространство с $\mathbb{R}^N$, то, согласно (IV, 10; 30), *этот объем всегда будет равен* $\int\int\limits_A \dots \int |\det \xi'(t)|\,dt$. В следствии 3 теоремы 102 мы видели, что это выражение равно объему $\xi(A)$, *если только* ξ *является некоторым гомеоморфизмом*. В общем случае, если для каждой точки $x \in E$ через $\nu(x)$ обозначить число тех точек Ω, образ которых при отображении ξ равен x, $0 \leqslant \nu(x) \leqslant +\infty$, то, согласно (IV, 10; 23_2), будет иметь место равенство

$$\int\int\limits_A \dots \int |\det \xi'(t)|\,dt = \int\int\limits_{\xi(A)} \dots \int \nu(x)\,dx. \qquad (IV, 10; 38_2)$$

Мы получили «объем $\xi(A)$, в котором каждая точка учитывается столько раз, сколько она покрывается при рассматриваемом отображении».

5°) Предположим теперь, что $n = 0$. Многообразие нулевой размерности в E является множеством изолированных точек E. В этом случае 0-*мерная площадь такого многообразия определяется как число (конечное или бесконечное) этих точек*; 0-*мерная площадь точки равна* 1.

Следствие 1. *При преобразовании подобия с отношением k n-мерные площади умножаются на $|k|^n$.*

Пусть V — некоторое многообразие класса C^1 размерности n и H: $V \to E$ — параметрическое многообразие пространства E класса C^1. Если отображение ξ пространства E является подобием с отношением k, то $\xi \circ H$ будет новым параметрическим многообразием, имеющим V в качестве многообразия параметров. Поскольку ξ изменяет n-мерные площади n-параллелепипедов в $|k|^n$ раз, то непосредственно видно, что мера $D(u)du$ относительно $\xi \circ H$ равна мере относительно H, умноженной на $|k|^n$, а, следовательно, мера dS на V относительно $\xi \circ H$ равна мере относительно H, умноженной на $|k|^n$, откуда и следует сформулированное утверждение.

Следствие 2. *Пусть V — истинное многообразие размерности n аффинного евклидова пространства E класса C^1. Если V замкнуто, то n-мерная площадь любой ограниченной dS-измеримой части A многообразия V конечна. Если многообразие V замкнуто и ограничено, то его площадь конечна.*

В самом деле, замыкание $\bar{A}$ подмножества A относительно V замкнуто в многообразии V. Так как V замкнуто в E, то $\bar{A}$ замкнуто в E и, поскольку это множество по условию еще и ограничено, то оно компактно (теорема 23 гл. II). Следовательно, мера действительно конечна.

Следствие 3. *Пусть H: $V \to E$ — параметрическое многообразие размерности n аффинного евклидова пространства E класса C^1. Если V счетно в бесконечности и W является некоторым подмногообразием V размерности $<n$ класса C^1, то его n-мерная площадь равна нулю.*

Это следствие является обобщением следствия 1 теоремы 102_2.

Доказательство. В самом деле, пусть $\Phi: \mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта многообразия V. Поскольку Φ является C^1-диффеоморфизмом, то прообраз при отображении Φ многообразия-пересечения W и $\Phi(\mathcal{O})$ является многообразием из $\mathcal{O}$ размерности $<n$ класса C^1 (следствие 2 теоремы 32 гл. III). Тогда этот прообраз имеет нулевую меру относительно du (следствие теоремы 102_2), а, значит, и относительно $D(u)du = dS_\Phi$. Поскольку Φ является некоторым гомеоморфизмом, то $W \cap \Phi(\mathcal{O})$ имеет нулевую n-мерную площадь в V. Так как каждый компакт K из V покрывается конечным числом образов таких карт, как $\Phi(\mathcal{O})$, то $W \cap K$ также имеет нулевую площадь. Наконец, поскольку V является счетным множеством компактов, то W является счетным объединением множеств нулевой n-мерной площади, а, значит, также имеет n-мерную площадь, равную нулю.

Пример 1. *Площадь сфер радиуса R в аффинном евклидовом трехмерном пространстве.* Выбор некоторой ортонормированной системы координат отождествляет E с $\mathbb{R}^3$. Если в $\mathbb{R}^2$ взять открытое множество $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ и положить

$$\begin{aligned} x &= R \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= R \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= R \cos\theta, \end{aligned} \qquad \text{(IV, 10; 39)}$$

то полярные координаты (IV, 10; 18) определят некоторую карту Φ; $\Phi(\mathcal{O})$ является открытой частью сферы, дополнительной к полумеридиану $y = 0$, $x \geqslant 0$. Поскольку этот полумеридиан является объединением некоторой полуокружности без концов, являющейся многообразием размерности 1 класса C^1, и двух полюсов — многообразий размерности 0 класса C^1, то он имеет нулевую площадь. Следовательно, площадь сферы равна площади $\Phi(\mathcal{O})$. Если A является каким-либо подмножеством сферы, то его площадь равна площади его пересечения с $\Phi(\mathcal{O})$. Следовательно, *знание только лишь карты Φ совершенно достаточно для изучения сферических площадей*; $\Phi(\mathcal{O})$ *dS-почти всюду совпадает с многообразием.* Именно так чаще всего бывает на практике. Согласно вычислениям, проведенным на стр. 750, мы знаем векторы $\partial\vec{\Phi}/\partial\theta$ и $\partial\vec{\Phi}/\partial\varphi$. Эти векторы взаимно ортогональны и имеют длину R и $R \sin\theta$, а, следовательно, площадь образованного ими параллелограмма равна $D(\theta, \varphi) = R^2 \sin\theta$. Значит, площадь части A сферы будет вычисляться по формуле

$$S(A) = \iint\limits_{\Phi^{-1}(A)} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \qquad \text{(IV, 10; 40)}$$

В частности, площадь сферы равна

$$S = \iint\limits_{\substack{0<\theta<\pi \\ 0<\varphi<2\pi}} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = R^2 \left(\int\limits_{]0,\pi[} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int\limits_{]0,2\pi[} d\varphi \right) = 4\pi R^2. \qquad \text{(IV, 10; 41)}$$

Позже мы вычислим площадь сферы в евклидовом пространстве произвольной размерности.

Пример 2. *Вычисление телесных углов в аффинном евклидовом пространстве.* Пусть $H: V \to E$ — некоторая параметрическая гиперповерхность, т. е. $(N-1)$-мерное параметрическое многообразие класса C^1 в аффинном пространстве E размерности N. Пусть O — некоторая точка пространства E. Поставим задачу определения «телесного угла, под которым заданная гиперповерхность видна из точки O» [1]. Мы определим абсолютный телесный угол, а не алгебраический угол, так что он всегда будет неотрицательным числом. *Мы должны будем всегда предполагать, что точка O не принадлежит образу многообразия V.* (В противном случае через V_0 можно обозначать дополнение в V к прообразу $H^{-1}(\{O\})$. Так как прообраз $H^{-1}(\{O\})$ замкнут, то множество V_0 открыто и, следовательно, является некоторым многообразием, а сужение H на V_0 является некоторым параметрическим многообразием, образ которого не содержит точки O. Телесный угол относительно V, по определению, будет телесным углом относительно V_0.) Пусть M — произвольная точка множества $E - O$. Полупрямая OM пересекает единичную сферу с центром O в некоторой точке m. Тем самым определяется некоторое отображение ξ: $M \to m = \xi(M)$ множества $E - O$ в E, принадлежащее, очевидно, классу C^1, образ которого является единичной сферой с центром O. Отображение $\xi \circ H$ определяет новое параметрическое многообразие класса C^1, где V есть, как всегда, многообразие параметров. Образ этого параметрического многообразия содержится в единичной сфере с центром O. Тогда, *по определе-*

[1]) Понятие определено весьма интуитивно. При этом результат (IV, 10; 48) просматривается почти сразу же. Мы его установим со всей строгостью в качестве типичного примера. На практике обычно знают, что хотят получить, и к цели идут быстрее!

нию, телесный угол, под которым из точки O видно параметрическое многообразие, определяемое отображением H, является $(N-1)$-мерной площадью параметрического многообразия, определяемого композицией $\xi \circ H$: $V \to E$.

Мера площадей, связанная с параметрическим многообразием $\xi \circ H$, является некоторой мерой $d\omega \geqslant 0$ на V, которую называют мерой телесных углов. Можно говорить также о мере относительно ω части A множества V. Полный телесный угол параметрического многообразия равен $\|d\omega\| = \int\limits_V \ldots \int d\omega \leqslant +\infty$. Очевидно, что если V является просто некоторым открытым множеством единичной сферы и H является тождественным отображением, то этот телесный угол будет площадью самого множества V. В частности, если V представляет собой всю единичную сферу или какую-либо сферу с центром O, то в качестве телесного угла получают площадь единичной сферы в E. Телесный угол инвариантен относительно гомотетии с центром в точке O.

Найдем производное отображение отображения ξ в точке $M_0 \in E$. В пространстве E мы можем произвольно выбрать ортонормированную систему координат. Выберем ее так, чтобы $N-1$ первых координат точки M_0 были равны нулю, а N-я координата равнялась расстоянию r_0 от точки M_0 до точки O. Формулы, определяющие преобразование ξ: $x \to y$, тогда будут иметь вид:

$$y_i = \frac{x_i}{r} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \quad \text{(IV, 10; 42)}$$

Отсюда дифференцированием получаем

$$dy_i = \frac{dx_i}{r} - \frac{x_i}{r^2}\,dr, \quad \text{где} \quad dr = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{r}\,dx_j. \quad \text{(IV, 10; 43)}$$

Ввиду особого расположения точки M_0 относительно выбранной системы координат это дает $dr = dx_N$, откуда

$$dy_i = \frac{dx_i}{r_0} \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad dy_N = 0. \quad \text{(IV, 10; 44)}$$

Отсюда вытекает, что *искомое производное отображение $\xi'(M_0)$ сводится к ортогональному проектированию каждого вектора $\vec{X}$ на гиперплоскость, перпендикулярную радиус-вектору OM_0 в точке M_0 и последующей гомотетии с отношением $1/r_0$.*

Пусть теперь Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта V, $u_0 \in \mathcal{O}$ и $M_0 = H(\Phi(u_0))$. Тогда множитель $D(u_0)$, относящийся к $(N-1)$-мерным площадям на V, является $(N-1)$-мерной площадью в E параллелепипеда, построенного на системе векторов $\vec{X}_i = H'(\Phi(u_0))\dfrac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_i}(u_0)$. С другой стороны, для телесного угла мы имеем множитель $\Delta(u_0)$, который должен быть $(N-1)$-мерной площадью параллелепипеда, построенного на системе векторов $\vec{Y}_i$, полученных из предыдущих векторов при отображении $\xi'(M_0)$. Согласно теореме 105 о проекциях площадей и следствию 1 теоремы 107, $\Delta(u_0) = D(u_0)\cos\theta_0/r_0^{N-1}$, где $\theta_0 = \theta(u_0)$ — острый угол, образованный OM_0 с нормалью к многообразию V в точке M_0.

Окончательно, на открытом множестве $\mathcal{O}$ из $\mathbb{R}^n$ имеет место формула

$$d\omega_\Phi = \Delta(u)\,du = \frac{\cos\theta(u)}{(r(u))^{N-1}}\,D(u)\,du. \qquad \text{(IV, 10; 45)}$$

Образ этой меры при отображении Φ дает меру углов в открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Это можно записать так:

$$\Phi(d\omega_\Phi) = \frac{\cos\theta}{r^{N-1}}\,\Phi(dS_\Phi), \qquad \text{(IV, 10; 46)}$$

где для точки $v \in V$ величины θ и r относятся к точке $H(v) \in E$. Легко находится та же самая мера для любого открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ из V:

$$d\omega = \frac{\cos\theta}{r^{N-1}}\,dS = \frac{\cos\theta(v)}{(r(v))^{N-1}}\,dS(v). \qquad \text{(IV, 10; 47)}$$

Телесный угол dS-измеримого подмножества A из V или всего множества V находится, следовательно, по формуле

$$\Omega = \int\limits_A \cdots \int d\omega \quad \text{или} \quad \int\limits_V \cdots \int \frac{\cos\theta}{r^{N-1}}\,dS, \qquad \text{(IV, 10; 48)}$$

как этого и следовало ожидать из геометрических соображений.

Вычисление объемов с помощью поверхностных интегралов

Пусть Φ есть C^1-диффеоморфизм открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество Ω аффинного евклидова пространства E.

Если $\vec{f}$ — функция, определенная на Ω, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то интеграл $\int\int\limits_\Omega \cdots \int \vec{f}(x)\,dx$, где

dx — мера, связанная с аффинным евклидовым пространством, может быть, согласно следствию 2 теоремы 102 о замене переменных в кратных интегралах, вычислен по формуле (IV, 9; 76):

$$\int\int_{\Omega}\ldots\int \vec{f}(x)\,dx = \int\int_{\mathcal{O}}\ldots\int \vec{f}(\Phi(u))\,|\det \Phi'(u)|\,du, \qquad \text{(IV, 10; 49)}$$

в которой выписанный определитель является якобианом преобразования относительно *произвольно выбранной в E ортонормированной системы координат*. Этот определитель дает объем параллелепипеда, определяемого векторами $\vec{X}_i = \overrightarrow{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_i}}(u)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Положим $u = (v, w)$, где $v = (u_1, \ldots, u_{N-1})$ и $w = u_N$. Зафиксируем w. Тогда сужение отображения Φ на множество значений u, соответствующее этому значению w, является гиперповерхностью Σ_w в Ω класса C^1. Рассмотрим векторы $\vec{X}_i$. Первые $N - 1$ из них будут векторами, касательными к гиперповерхности в рассматриваемой точке, а N-й вектор $\vec{X}_N$ будет расположен вне касательной гиперплоскости.

Обозначим через $\vec{\nu}$ единичный вектор нормали к гиперповерхности Σ_w в рассматриваемой точке $\Phi(u)$. Объем параллелепипеда, определяемого векторами $\vec{X}_i$, является произведением $(N-1)$-мерной площади параллелепипеда, порождаемого первыми $N-1$ векторами, на длину ортогональной проекции последнего вектора на нормаль: $|(\vec{X}_N|\vec{\nu})|$. Однако указанная $(N-1)$-мерная площадь определяется множителем $D(v, w)$[1], позволяющим вычислить площади на поверхности Σ_w. Поэтому мы имеем право записать:

$$\int\int_{\Omega}\ldots\int \vec{f}(x)\,dx = \int\int_{\mathcal{O}}\ldots\int \vec{f}(\Phi(u))\left|D(v, w)\left(\overrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial w}}(u)\,\middle|\,\vec{\nu}\right)\right|du. \qquad \text{(IV, 10; 50)}$$

Если известно, что функция $\vec{f}$ интегрируема, или если известно, что она вещественна, $\geqslant 0$ и измерима, то можно

[1]) Эта функция обязательно зависит от v и w. Для фиксированного w она зависит лишь от v. Следовательно, $D(v, w)\,dv = dS_w$ является мерой площадей относительно параметрического многообразия Σ_w: $v \to \Phi(v, w)$. Ее образ при *гомеоморфизме* Φ является мерой площадей на самом многообразии Σ_w. Хотя эта мера на Σ_w изменяется вместе с w, она всегда допускает представление через dS. (Обиходная математика была бы слишком сложной, если бы мы не пользовались упрощенным языком!)

применить теорему Фубини и результат записать в виде

$$\int dw \int \ldots \int \vec{f}(\Phi(u)) \left| D(v,\ w)\left(\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial w}(u) \,|\, \vec{v}\right)\right| dv, \qquad \text{(IV, 10; 51)}$$

или

$$\int dw \int \ldots \int \vec{f}(x)\left|\left(\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial w}\,\middle|\,\vec{v}\right)\right| dS. \qquad \text{(IV, 10; 52)}$$

Таким образом этот N-кратный интеграл может быть вычислен последовательно как некоторый поверхностный интеграл по гиперповерхности Σ_w, зависящей от параметра w, а затем как простой интеграл относительно w.

Рассмотрим теперь частный случай, представляющий самостоятельный интерес. Пусть h — некоторая вещественная функция класса C^1, определенная на открытом множестве Ω аффинного пространства E, производное отображение которой $\overleftarrow{h'(a)}$ отлично от нуля в каждой точке $a \in \Omega$. Зафиксируем некоторую точку a. Поскольку производное отображение $\overleftarrow{h'(a)}$ отлично от нуля, существует по крайней мере одна частная производная h относительно некоторой ортонормированной системы координат в E, не равная нулю. Пусть, для определенности, это $\frac{\partial h}{\partial x_N}(a)$. Тогда, согласно теореме о неявных функциях (теорема 28 гл. III), существует такая окрестность Ω_a точки a в Ω, в которой уравнение $w = h(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ может быть разрешено относительно x_N в виде $x_N = g(x_1, \ldots, x_{N-1}, w)$, где g — функция класса C^1. Кроме того, согласно правилу (III, 8; 23), та же самая теорема дает $\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{1}{\partial h/\partial x_N}$. Если теперь перейти к сужению на открытое множество Ω_a и воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} &x_i = u_i = v_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \\ &x_N = g(u_1,\ \ldots,\ u_{N-1},\ u_N) = g(v_1,\ \ldots,\ v_{N-1},\ w), \end{aligned} \qquad \text{(IV, 10; 53)}$$

то мы окажемся в описанных выше условиях. Мы определили C^1-диффеоморфизм Φ открытого множества $\mathcal{O}_a \subset \mathbb{R}^N$ на Ω_a так, что подпространства $w = \text{const}$ стали гиперповерхностями Σ_w с уравнением $h(x) = w$. Поскольку x_i, $i \leqslant N-1$, не зависят от w, то вектор $\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial w}(u)$ является вектором, параллельным оси x_N, с составляющей $\frac{\partial g}{\partial w}(u) \left(= \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_N}(x)} \right)$ по этой оси. Если учесть, что, согласно следствию 5 теоремы 33_4 гл. III, единичный вектор нормали $\vec{\nu} = \pm\overrightarrow{\operatorname{grad}} h / \|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|$, то проекция вектора $\vec{\nu}$ на ось x_N равна $\pm \frac{\partial h}{\partial x_N}(x) / \|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h(x)\|$.

Отсюда следует формула

$$\left|\left(\overrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial w}} \middle| \vec{\nu}\right)\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial h}{\partial x_N}\right|} \cdot \frac{\left|\frac{\partial h}{\partial x_N}\right|}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|}. \qquad \text{(IV, 10; 54)}$$

Если $\vec{f}$ является некоторой интегрируемой на Ω_a функцией со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то можно вычислить ее объемный интеграл с помощью поверхностного по следующей формуле:

$$\int\int_{\Omega_a} \cdots \int \vec{f}(x)\, dx = \int dw \int_{\Sigma_w} \cdots \int \frac{\vec{f}(x)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h(x)\|} dS. \qquad \text{(IV, 10; 55)}$$

Эти вычисления, естественно, могут быть выполнены только для открытого множества Ω_a, являющегося окрестностью точки a. Однако *окончательный результат не зависит от специального выбора координат относительно точки a*. Формула (IV, 10; 55) представляет самостоятельный интерес и не связана с выбором системы координат. Если теперь покрыть компакт K из Ω конечным числом таких открытых множеств Ω_a, то мы получим, что этот результат верен для каждой функции с компактным носителем в Ω и со значениями в $\vec{F}$. Пользуясь переходом к пределу, для произвольной интегрируемой на Ω функции со значениями в $\vec{F}$ можно получить формулу

$$\int\int_{\Omega} \cdots \int \vec{f}(x)\, dx = \int dw \int_{\Sigma_w} \cdots \int \frac{\vec{f}(x)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h(x)\|} dS. \qquad \text{(IV, 10; 56)}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 108. *Пусть Ω — открытое множество аффинного евклидова пространства E, и пусть h — вещественная функция класса C^1, определенная на Ω, производная которой в каждой точке $\neq 0$. Если через Σ_w обозначить гиперповерхность, определенную уравнением $h(x) = w$, и если $\vec{f}$ является функцией, определенной на Ω, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, интегрируемой по мере объемов dx в E, то для почти всех значений w функция $\vec{f} / \|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|$ интегрируема на Σ_w относительно поверхностной меры dS, интеграл $\int_{\Sigma_w} \cdots \int \frac{\vec{f}}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|} dS$,* *определенный для почти всех значений w, является функцией w со значениями в $\vec{F}$, интегрируемой по мере dw, и имеет место формула* (IV, 10; 56). *Если $\vec{f}$ есть dx-измеримая, вещественная, не обязательно интегрируемая функция $\geqslant 0$, то обе части равенства* (IV, 10; 56) *равны и одновременно являются конечными или бесконечными.*

Замечание. Геометрически предыдущий результат довольно ясен. Элемент объема dx может быть представлен как произведение поверхностного элемента dS поверхности Σ_w на расстояние вдоль нормали $d\nu$, разделяющее поверхность Σ_w от поверхности Σ_{w+dw}. Вектор $\overrightarrow{\operatorname{grad}} h$ является вектором нормали к поверхности Σ_w длины $\left|\frac{dw}{d\nu}\right|$. Отсюда следует, что $d\nu = \frac{dw}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|}$ и, следовательно, $dx = \frac{dS\,dw}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} h\|}$. Это рассуждение лишено строгости; четкие рассуждения были проведены ранее.

Следствие 1. *Пусть E — евклидово аффинное пространство, и пусть r — функция «расстояние от точки O в E», т. е. $r(x) = \|\overrightarrow{x - O}\|$. Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на E, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, интегрируемая по объемной мере dx. Тогда почти для всех значений r функция $\vec{f}$ интегрируема относительно поверхностной меры на сфере Σ_r с центром O радиуса r.*

Интеграл $\int \ldots \int\limits_{\Sigma_r} \vec{f}(x)\, dS$ от этой функции, определенный для почти всех значений r, интегрируем по мере dr, и имеет место равенство

$$\int\int \ldots \int \vec{f}(x)\, dx = \int\limits_{]0, +\infty[} dr \int \ldots \int\limits_{\Sigma_r} \vec{f}(x)\, dS. \qquad \text{(IV, 10; 57)}$$

Если f есть dx-измеримая, вещественная, не обязательно интегрируемая функция $\geqslant 0$, то обе части равенства (IV, 10; 57) *равны и одновременно принимают конечное или бесконечное значение.*

Для доказательства достаточно применить теорему к дополнению Ω к точке O в E относительно функции $h = r$. Градиент этой функции в каждой точке M является единичным вектором, лежащим на OM, и, следовательно, длина градиента тождественно равна 1, откуда следует требуемый результат.

Следствие 2. *Пусть $\vec{f}$ — некоторая функция, определенная на полупрямой $\mathbb{R}_+$, т. е. на множестве чисел $\geqslant 0$ прямой $\mathbb{R}$. Пусть r — скалярная функция, определенная на аффинном евклидовом пространстве E размерности N соотношением $x \to r(x) = \|\overrightarrow{x - O}\|$, где $\|\overrightarrow{x - O}\|$ — расстояние от x до точки $O \in E$. Тогда функция $\vec{f} \circ r$: $x \to \vec{f}(r(x))$, определенная на E со значениями в $\vec{F}$, зависит только от расстояния переменной x до точки O (что коротко записывается в виде $\vec{f}(r)$). Функция $\vec{f} \circ r$ измерима на E по мере объемов тогда и только тогда, когда функция $\vec{f}$ измерима на $\mathbb{R}_+$ по мере Лебега. Функция $\vec{f} \circ r$ интегрируема на E по мере объемов тогда и только тогда, когда функция $t \to t^{N-1}\vec{f}(t)$ интегрируема на $\mathbb{R}_+$ по мере Лебега, и имеет место равенство*

$$\int\int_E \ldots \int \vec{f}(x)\,dx = S_N \int_{\mathbb{R}_+} \vec{f}(t)\,t^{N-1}\,dt, \qquad \text{(IV, 10; 58)}$$

где S_N — площадь сферы радиуса 1 в E. Наконец, образ меры объемов dx при отображении r: $x \to r(x)$ из E в $\mathbb{R}_+$ является мерой $S_N t^{N-1} dt$ на $\mathbb{R}_+$.

Вообще говоря, r используется как переменная интегрирования в правой части (IV, 10; 58): $S_N \int_{[0, +\infty[} \vec{f}(r) r^{N-1}\,dr$.

Доказательство. Если $\vec{f}$ — непрерывная скалярная функция с компактным носителем на $\mathbb{R}_+$, то к ней можно применить следствие 1. Поскольку на сфере Σ_r радиуса r функция f постоянна и равна $f(r)$, то величина $\int_{\Sigma_r} \ldots \int f(r)\,dS$ равна произведению $f(r)$ на площадь сферы радиуса r. С помощью гомотетии (следствие 1 теоремы 107) получаем, что эта площадь равна произведению r^{N-1} на площадь S_N сферы радиуса 1, откуда и следует равенство (IV, 10; 58).

Эта формула означает, что образ меры dx при отображении $x \to r(x)$ является мерой $S_N t^{N-1} dt$ на $\mathbb{R}_+$. Но тогда из теоремы 60 следует, что если $\vec{f}$ является некоторой функцией на $\mathbb{R}_+$, то функция $\vec{f}(r)$ dx-интегрируема тогда и только тогда, когда $\vec{f}$ $(S_N t^{N-1} dt)$-интегрируема на $\mathbb{R}_+$, а из теоремы 51 следует, что $\vec{f}$ интегрируема относительно $(S_N t^{N-1} dt)$ тогда и только тогда, когда dt-интегрируема функция $S_N \vec{f}(t) t^{N-1}$.

Это следствие означает также, что вычисление объемного интеграла от функции, зависящей лишь от одной переменной r, можно свести к вычислению обычного интеграла. Достаточно лишь знать площадь S_N единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, а она хорошо известна для $N = 1, 2, 3$:

$$S_1 = 2\,^{1)},\qquad S_2 = 2\pi,\qquad S_3 = 4\pi.$$

Обратно, если на $\mathbb{R}_+$ существует функция $\vec{f}$, для которой известны значения $\int\int\limits_E \dots \int \vec{f}(r)\,dr$ и $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \vec{f}(t)\,t^{N-1}\,dt$, то они дают значение S_N (если интегралы не равны нулю). Это как раз то, что мы сделаем позже, положив $f(t) = e^{-t^2}$. Так можно найти (сделайте это в качестве упражнения), что

$$S_4 = 2\pi^2,\qquad S_5 = \frac{8}{3}\pi^2,\qquad S_6 = \pi^3, \ \dots .$$

Площадь сферы радиуса R равна $S_N R^{N-1}$, что дает

$$2,\quad 2\pi R,\quad 4\pi R^2,\quad 2\pi^2 R^3,\quad \frac{8}{3}\pi^2 R^4,\quad \pi^3 R^5, \ \dots .$$

Следствие 3. *В аффинном евклидовом пространстве размерности N объем шара радиуса R равен $S_N \dfrac{R^N}{N}$ (первообразная площади сферы $S_N R^{N-1}$, обращающаяся в нуль при $R = 0$).*

В самом деле, этот объем вычисляется по формуле (IV, 10; 58), ибо он является интегралом от характеристической функции шара — функции, зависящей только от r. Здесь $f(r) = 0$ для $r > R$ и $= 1$ для $r \leqslant R$. Мы приходим к значению $S_N \int\limits_{[0, R]} r^{N-1}\,dr = S_N \dfrac{R^N}{N}$.

Таким путем для $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ получаем:

$$2R,\quad \pi R^2,\quad \frac{4}{3}\pi R^3,\quad \frac{1}{2}\pi^2 R^4,\quad \frac{8}{15}\pi^2 R^5,\quad \frac{1}{6}\pi^3 R^6.$$

---

[1]) S_1 является 0-мерной площадью. Сфера в $\mathbb{R}$ с центром в 0 радиуса 1 сводится к множеству $\{-1, +1\}$, состоящему из двух элементов, площадь которого равна 2 (замечание 5°) после теоремы 107). Впрочем, если некоторая функция на прямой $\mathbb{R}$ зависит только от расстояния до начала координат, то это означает, что она четна, и в этом случае формула (IV, 10; 58) примет вид $\int\limits_{]-\infty, +\infty[} \vec{f}(x)\,dx = S_1 \int\limits_{[0, +\infty[} \vec{f}(x)\,dx$, откуда $S_1 = 2$.

Следствие 4. *Пусть r — расстояние от точки O в N-мерном аффинном евклидовом пространстве. Интеграл* $\int\int\limits_{r\leqslant 1}\ldots\int \frac{dx}{r^\alpha}$ $\left(\textit{соответственно } \int\int\limits_{r\geqslant 1}\ldots\int \frac{dx}{r^\alpha}\right)$ *конечен тогда и только тогда, когда $\alpha < N$ (соответственно $\alpha > N$).*

Это следствие является обобщением следствия 1 теоремы 97, соответствующим $N = 1$.

Доказательство. По следствию 2, предыдущие интегралы конечны тогда и только тогда, когда конечны соответствующие простые интегралы $\int \frac{r^{N-1}}{r^\alpha}\,dr = \int \frac{1}{r^{\alpha-N+1}}\,dr$. Это так в том случае, когда $\alpha - N + 1 < 1$ (соответственно >1) или $\alpha < N$ (соответственно $>N$).

§ 11. ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ РЯДАМИ ИЛИ ИНТЕГРАЛАМИ

Функции, представимые рядами

Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — последовательность отображений множества E в множество F. Предположим, что эта последовательность просто сходится при n, стремящемся к бесконечности, к некоторому отображению f из E в F. Функция f называется *пределом последовательности функций.*

Поставим задачу изучения различных свойств функции f в зависимости от выбора E и F и свойств функций f_n: непрерывность f для топологических пространств E и F; интегрируемость f, если $E = X$ представляет собой локально компактное пространство с мерой Радона $\mu \geqslant 0$, а $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство; дифференцируемость f в случае аффинных нормированных пространств E и F. Вообще говоря, вместо того чтобы иметь дело с последовательностями, в анализе чаще всего рассматривают ряды. В этом случае E является некоторым множеством, $\vec{F}$ — пространством Банаха, а функцию $\vec{S}$ определяют по формуле

$$\overrightarrow{S(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overrightarrow{u_n(x)}, \qquad x \in E. \qquad \text{(IV, 11; 1)}$$

Предположим, что с помощью некоторых критериев можно доказать простую сходимость этого ряда; рассмотрим задачу изучения непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы $\vec{S}$, исходя из аналогичных свойств функций $\vec{u}_n$.