Следствие 4. *Пусть r — расстояние от точки O в N-мерном аффинном евклидовом пространстве. Интеграл* $\int\int\limits_{r\leqslant 1}\ldots\int \frac{dx}{r^\alpha}$ $\left(\text{соответственно } \int\int\limits_{r\geqslant 1}\ldots\int \frac{dx}{r^\alpha}\right)$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\alpha < N$ *(соответственно* $\alpha > N$*).*

Это следствие является обобщением следствия 1 теоремы 97, соответствующим $N = 1$.

Доказательство. По следствию 2, предыдущие интегралы конечны тогда и только тогда, когда конечны соответствующие простые интегралы $\int \frac{r^{N-1}}{r^\alpha}\,dr = \int \frac{1}{r^{\alpha-N+1}}\,dr$. Это так в том случае, когда $\alpha - N + 1 < 1$ (соответственно >1) или $\alpha < N$ (соответственно $>N$).

§ 11. ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ РЯДАМИ ИЛИ ИНТЕГРАЛАМИ

Функции, представимые рядами

Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — последовательность отображений множества E в множество F. Предположим, что эта последовательность просто сходится при n, стремящемся к бесконечности, к некоторому отображению f из E в F. Функция f называется *пределом последовательности функций.*

Поставим задачу изучения различных свойств функции f в зависимости от выбора E и F и свойств функций f_n: непрерывность f для топологических пространств E и F; интегрируемость f, если $E = X$ представляет собой локально компактное пространство с мерой Радона $\mu \geqslant 0$, а $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство; дифференцируемость f в случае аффинных нормированных пространств E и F. Вообще говоря, вместо того чтобы иметь дело с последовательностями, в анализе чаще всего рассматривают ряды. В этом случае E является некоторым множеством, $\vec{F}$ — пространством Банаха, а функцию $\vec{S}$ определяют по формуле

$$\overrightarrow{S(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overrightarrow{u_n(x)}, \qquad x \in E. \tag{IV, 11; 1}$$

Предположим, что с помощью некоторых критериев можно доказать простую сходимость этого ряда; рассмотрим задачу изучения непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы $\vec{S}$, исходя из аналогичных свойств функций $\vec{u}_n$.

Совершенно очевидно, что в этом случае подход, использующий ряды, не отличается от подхода, использующего последовательности, ибо $\vec{S}$ является пределом последовательности функций $\vec{S}_n = \sum_{i=0}^{n} \vec{u}_i$, и, обратно, если функция $\vec{f}$ есть предел некоторой последовательности функций $\vec{f}_n$, то она будет суммой ряда $\vec{f}_0 + (\vec{f}_1 - \vec{f}_0) + (\vec{f}_2 - \vec{f}_1) + \ldots$. С теоретической точки зрения, в том случае, когда $\vec{F}$ — банахово пространство, оба подхода равносильны. Представление функций в виде пределов последовательностей является более общим подходом, поскольку оно возможно в произвольных топологических пространствах. На практике для представления функций чаще всего используют ряды.

Если F — поле комплексных чисел, то может случиться, что нам придется иметь дело с функциями, представленными в виде бесконечного произведения, а именно $\Pi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае предполагается, что можно доказать простую сходимость этого произведения, и ставится задача изучения непрерывности, интегрируемости или дифференцируемости функции Π, исходя из аналогичных свойств членов произведения.

Бо́льшая часть критериев уже рассматривалась в предыдущих главах. В таких случаях мы будем довольствоваться лишь их напоминанием, а здесь приведем только новые критерии.

Непрерывность суммы ряда

В нашем распоряжении имеется теорема 65 гл. II, которую мы сейчас лишь напомним:

Пусть f_n — последовательность отображений топологического пространства E в метрическое пространство F, сходящаяся к некоторому пределу f локально равномерно на E. Если при этом функции f_n непрерывны, то непрерывной будет и функция f.

Естественно, эта теорема, сформулированная для предела некоторой последовательности, также верна для суммы ряда или для предела бесконечного произведения.

Интегрируемость суммы ряда относительно некоторой меры $\geqslant 0$

Здесь мы располагаем теоремами 34—36, их следствиями и теоремой 37 предыдущей главы. Приведем только следующее их уточнение:

Теорема 110. *Пусть $\vec{f}_n$ — последовательность μ-интегрируемых на X функций со значениями в некотором банаховом пространстве $\vec{F}$. Предположим, что $\vec{f}_n$ просто сходятся μ-почти всюду к некоторому пределу $\vec{f}$ и по норме мажорируются одной и той же фиксированной μ-интегрируемой функцией $g \geqslant 0$. Тогда, какова бы ни была μ-измеримая часть Y множества X, интегралы $\int\limits_Y \vec{f}_n$ сходятся к $\int\limits_Y \vec{f}$ равномерно относительно части Y, пробегающей множество μ-измеримых частей множества X.*

Доказательство. В теореме 35 Лебега мы видели, что $\int \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\mu$ сходятся к 0, т. е. при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое целое число p, что для всех $n \geqslant p$ имеет место неравенство $\int \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\mu \leqslant \varepsilon$.

Для каждой измеримой части Y множества X мы имеем одно и то же неравенство $\int\limits_Y \|\vec{f} - \vec{f}_n\| d\mu \leqslant \varepsilon$, откуда заведомо следует неравенство $\left\| \int\limits_Y \vec{f}_n\, d\mu - \int\limits_Y \vec{f} d\mu \right\| \leqslant \varepsilon$, полностью доказывающее теорему.

Следствие. *Пусть $\vec{f}_n$ — последовательность функций, определенных на замкнутом интервале $[a, b]$ прямой $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, dx-интегрируемых и равномерно сходящихся при n, стремящемся к бесконечности, к некоторой предельной функции $\vec{f}$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta \vec{f}_n(x)\, dx$ сходятся к $\int\limits_\alpha^\beta \vec{f}(x) dx$ равномерно относительно α и β из $[a, b]$.*

Дифференцируемость суммы ряда

Что касается дифференцируемости, то у нас до сих пор не было никаких теорем.

Пусть f_n — последовательность отображений аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F.

Предположим, что все эти отображения дифференцируемы. Выясним, можно ли из достаточно сильной сходимости f_n к f, например равномерной, получить дифференцируемость предельной функции и сходимость f'_n к f'? Легко видеть, что такое утверждение не верно, поскольку из оценок, налагаемых на функции, получить оценки на производные невозможно. Рассмотрим, например, последовательность комплексных функций одной вещественной переменной, определенных по формулам

$$f_n(x) = \frac{e^{in^2x}}{n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{IV, 11; 2}$$

Эта последовательность равномерно сходится к 0 на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ при n, стремящемся к бесконечности. Однако, ее производные определяются по формуле

$$f'_n(x) = ine^{in^2x}, \tag{IV, 11; 3}$$

и модуль производной f'_n стремится к бесконечности при n, стремящемся к бесконечности, для всех значений x.

Точно так же можно рассмотреть ряд Вейерштрасса:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 3^n x}{2^n}. \tag{IV, 11; 4}$$

Этот ряд, составленный из вещественных функций вещественной переменной, равномерно сходится на прямой $\mathbb{R}$, поскольку его общий член мажорируется по модулю числом $1/2^n$. Значит, этот ряд представляет собой некоторую непрерывную функцию.

Ряд же, составленный из производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos 3^n x, \tag{IV, 11; 5}$$

не сходится. Более того, Вейерштрасс показал, что *функция S не имеет производной ни при каком значении x — это был первый пример функций такого рода*

Таким образом, налагаемые условия должны быть связаны не только со сходимостью функций, но также и со сходимостью их производных. Мы сейчас убедимся, что если сделать предположение о равномерной сходимости производных и сходимости функций всего лишь в одной точке, то из него будет следовать равномерная сходимость самих функций и будет обоснован переход к пределу для производной.

Теорема 111. *Пусть f_n — дифференцируемые (соответственно принадлежащие классу C^1) отображения открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аф-*

финное нормированное пространство F. Пусть производные f'_n (функции на Ω со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E};\vec{F})$) сходятся локально равномерно к некоторому пределу g, а $f_n(a)$ сходятся к пределу $f(a)$ хотя бы в одной точке a множества Ω. Если множество Ω связно, а пространство F полно, то f_n сходятся локально равномерно в Ω к некоторому пределу f. Функция f дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^1), и ее производная равна g.

Если же множество Ω не связно, а пространство F не полно, но f'_n сходятся локально равномерно к некоторому пределу g и f_n сходятся просто к некоторому пределу f, то сходимость f_n к f будет локально равномерной, а f будет дифференцируемой (соответственно принадлежащей классу C^1), при этом $f' = g$.

Доказательство. Поскольку сходимость f'_n локально равномерна, то существует такая окрестность точки a, в которой f'_n равномерно сходятся к функции g. Обозначим через $B = B(a;\rho)$ шар с центром a радиуса $\rho > 0$, содержащийся в этой окрестности. Если x принадлежит этому шару, то мы можем применить формулу конечных приращений (теорема 13 гл. III) к функции $\vec{f}_{mn} = \overrightarrow{f_m - f_n}$ и написать:

$$\|\overrightarrow{f_{mn}(x) - f_{mn}(a)}\| \leqslant \rho \sup_{\|\xi - a\| \leqslant \rho} \|f'_{mn}(\xi)\|. \qquad \text{(IV, 11; 6)}$$

Функции $f'_{mn} = f'_m - f'_n$ сходятся равномерно к 0 в шаре B при m и n, стремящихся к бесконечности. Следовательно, левая часть сходится равномерно к 0 в этом шаре. Поскольку, по предположению, $\overrightarrow{f_{mn}(a)} = \overrightarrow{f_m(a) - f_n(a)}$ сходятся к 0, то отсюда следует, что $\overrightarrow{f_{mn}} = \overrightarrow{f_m - f_n}$ сходятся равномерно к 0 в этом шаре при n и m, стремящихся к бесконечности.

Функции f_n не обязательно являются ограниченными в B. Но если мы выберем целое число n_0 так, чтобы при $n \geqslant n_0$ имело место неравенство $\sup_{\|\vec{\xi} - a\| \leqslant \rho} \|\overrightarrow{f_{n_0}(\xi) - f_n(\xi)}\| \leqslant 1$, то все $\overrightarrow{f_n - f_{n_0}}$ будут ограниченными по норме числом 1 в шаре B и функции $(\overrightarrow{f_m - f_{n_0}}) - (\overrightarrow{f_n - f_{n_0}})$, $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$, будут равномерно сходиться к 0 в шаре B при m и n, стремящихся к бесконечности. Это говорит о том, что функции $\overrightarrow{f_n - f_{n_0}}$, $n \geqslant n_0$, образуют в метрическом пространстве $(\vec{F}^B)_{cb}$ последовательность Коши. Если $\vec{F}$ полно, то это метрическое пространство также полно (следствие 2 теоремы 65 гл. II), и тогда разность $\overrightarrow{f_n - f_{n_0}}$, а вместе с ней и $\vec{f}_n$ сходятся равномерно к некоторому пределу в B при n, стремящемся к бесконечности. Если $\vec{F}$ не полно, но если заранее известно, что функции f_n сходятся просто к некоторому пределу f, то отсюда следует, что сходимость равномерна в B. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое целое число p, что из неравенств $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ для всех x из B следует: $\|\overrightarrow{f_m(x) - f_n(x)}\| \leqslant \varepsilon$. Переходя к пределу, при m, стремящемся к бесконечности (при фиксированном x), получаем отсюда, что при $n \geqslant p$ для каждого $x \in B$ имеет место неравенство $\|\overrightarrow{f(x) - f_n(x)}\| \leqslant \varepsilon$, доказывающее наше утверждение.

Если заранее известно, что f_n сходятся просто к некоторому пределу f, то только что проведенное рассуждение сохранится для произвольной точки Ω, а это означает, что сходимость f_n к f локально равномерна. Если же известно лишь, что $f_n(a)$ сходятся к $f(a)$, F полно, а Ω связно, то необходимо провести новые рассуждения.

Обозначим через $\mathscr{E}$ множество таких точек x из Ω, для которых последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторому пределу при n, стремящемся к бесконечности. Это множество открыто. В самом деле, если точка b принадлежит $\mathscr{E}$, то, проведя для точки b то же самое рассуждение, что и для точки a, мы увидим, что существует содержащийся в Ω шар с центром в точке b, в каждой точке которого функции f_n сходятся к некоторому пределу. Следовательно, множество $\mathscr{E}$ открыто. Покажем теперь, что оно замкнуто в Ω. Для этого предположим, что $b_0, b_1, \ldots, b_j, \ldots$ является последовательностью точек из Ω, сходящейся при j, стремящемся к бесконечности, к некоторой предельной точке $b \in \Omega$, и докажем, что если все b_j принадлежат $\mathscr{E}$, то и b принадлежит $\mathscr{E}$.

По предположению, существует некоторая окрестность точки b, в которой последовательность f'_n сходится равномерно к g. Следовательно, существует некоторый шар $B(b; \rho')$ с центром в точке b, полностью лежащий в этой окрестности. Поскольку при j, стремящемся к бесконечности, b_j сходятся к b, существует такое целое j_0, что при $j \geqslant j_0$ выполняется неравенство $\|b_j - b\| \leqslant \rho'/3$. Но тогда шар с центром в b_j радиуса $\frac{2}{3}\rho'$ содержится в $B(b; \rho')$, и, следовательно, в этом шаре f'_n равномерно сходятся к g, а $f_n(b_j)$ сходятся к $f(b_j)$. К точке b_j можно теперь применить то же рассуждение, которое было только что проведено относительно точки a. Мы увидим, что в каждой точке x шара $B(b_j; 2\rho/3)$ функции $f_n(x)$ сходятся к некоторому пределу. Точка b составляет часть этого шара, а, следовательно, она также принадлежит множеству $\mathscr{E}$, которое тем самым оказывается замкнутым. Так как множество Ω предполагалось связным, то непустое множество $\mathscr{E}$ (содержащее точку a) может быть одновременно и открытым, и замкнутым только в том случае, когда оно совпадает с самим множеством Ω. Мы доказали, что f_n сходятся к некоторому пределу f всюду в Ω, а в этом случае, как мы видели выше, сходимость заведомо локально равномерна.

Нам надо теперь доказать, что f дифференцируема и ее производная равна g. Поскольку a уже не играет особой роли, то достаточно показать, что производная функции f в точке a равна $g(a)$. Обозначим через $\vec{k}_n$ функции, определенные на $B(a; \rho)$, со значениями в $\vec{F}$ по формуле:

$$\vec{k}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{f_n(x) - f_n(a)} - f'_n(a)\,\overrightarrow{(x-a)}}{\|\overrightarrow{x-a}\|} & \text{для} \quad x \neq a, \\ \vec{0} \quad \text{для} \quad x = a. \end{cases} \qquad \text{(IV, 11; 7)}$$

Эти функции просто сходятся в B к функции $\vec{k}$, определенной формулой:

$$\vec{k}(x) = \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{f(x) - f(a)} - g(a)\,\overrightarrow{(x-a)}}{\|\overrightarrow{x-a}\|} & \text{для} \quad x \neq a, \\ \vec{0} \quad \text{для} \quad x = a. \end{cases} \qquad \text{(IV, 11; 8)}$$

Из формулы конечных приращений, взятой в виде, указанном в следствии 1 теоремы 13, следует неравенство:

$$\|\vec{k}_m(x) - \vec{k}_n(x)\| \leqslant \sup_{\|\overrightarrow{\xi - a}\| \leqslant \rho} \|(f'_m(\xi) - f'_n(\xi)) - (f'_m(a) - f'_n(a))\|. \qquad \text{(IV, 11; 9)}$$

Отсюда вытекает, что разность $\vec{k}_m - \vec{k}_n$ сходится равномерно к $\vec{0}$ в B при m и n, стремящихся к бесконечности. Но тогда проведенные ранее рассуждения относительно f_n показывают, что $\vec{k}_n$ сходится равномерно к $\vec{k}$ в B при n, стремящемся к бесконечности. Согласно определению производной $f'_n(a)$, каждая функция $\vec{k}_n$ непрерывна в точке $x = a$. По теореме 65 гл. II равномерный предел $\vec{k}$ также непрерывен в точке $x = a$. Это означает, что функция f дифференцируема в точке a и $f'(a) = g(a)$.

Наконец, если функции f_n принадлежат классу C^1, то f'_n непрерывны, и, поскольку они сходятся локально равномерно к g, то, согласно теореме 109, функция g непрерывна, а, значит, функция f принадлежит классу C^1, и теорема полностью доказана.

Замечания. 1°) Поскольку в теореме речь идет лишь о дифференциальном исчислении, то ее можно было привести в гл. III. Однако мы решили собрать в этом параграфе ряд результатов одного характера.

2°) Конечно, первая часть теоремы будет неверной, если не считать пространство F полным, а множество Ω — связным.

Приведем контрпример для случая, когда множество Ω не связно. Пусть Ω — дополнение к началу координат на вещественной прямой $\mathbb{R}$, а f_n — функция, равная нулю для $x < 0$ и равная постоянной n для $x > 0$. Тогда производные f'_n тождественно равны нулю, и, следовательно, последовательность равномерно сходится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Функции f_n сходятся к некоторому пределу в любой точке $x < 0$. Однако они не сходятся ни к какому пределу на всей вещественной оси $\mathbb{R}$.

3°) Существенным во всех этих вопросах является равномерная *локальная* сходимость. *Если даже предполагать, что сходимость f'_n к g равномерна в Ω, то можно утверждать лишь, что f_n сходится к f локально равномерно.*

Рассмотрим, к примеру, на вещественной прямой функции $f_n(x) = x/n$. Они просто сходятся к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Их производные $f'_n(x) = 1/n$ сходятся к 0 равномерно на $\mathbb{R}$. Отсюда следует (и это было ясно a priori), что функции f_n сходятся к 0 равномерно на любом компакте (или локально равномерно). Однако они не сходятся к 0 равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку $|||f_n||| = +\infty$.

Следствие 1. *Пусть f_n — отображение открытого множества Ω аффинного нормированного пространства E в аффинное нормированное пространство F, принадлежащее классу C^m. Если для каждого $k \leqslant m$ функции $f_n^{(k)}$, определенные на Ω, со значениями в $\mathscr{L}_k(E^k; F)$ локально равномерно сходятся к некоторому пределу f_k и $f_0 = f$, то f принадлежит классу C^m и $f_k = f^{(k)}$ для $k \leqslant m$.*

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Если Ω является открытым множеством аффинного нормированного пространства E, а F — аффинным банаховым пространством, то пространство $(F^\Omega)_{cb;\, m}$ полно.*

Напомним, что $f \in (F^\Omega)_{cb;\, m}$, если f является непрерывным ограниченным отображением Ω в F и если для каждого $k \leqslant m$ производная этого отображения порядка k является непрерывным ограниченным отображением Ω в $\mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F})$. В этом случае $|||f|||_m = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} |||f^{(k)}|||_0$ (см. стр. 267).

Доказательство. Пусть f_n — последовательность Коши, принадлежащая $(F^\Omega)_{cb;\, m}$. Согласно определению норм, производные функции $f_n^{(k)}$, $0\leqslant k\leqslant m$, образуют последовательность Коши в $\mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F}))^\Omega_{cb;\,0}$. Так как пространство $\vec{F}$ полно, то полно пространство $\mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F})$ (теорема 53 гл. II), а вместе с ним полно и пространство $(\mathscr{L}_k(\vec{E}^k; \vec{F}))^\Omega_{cb;\,0}$ (следствие 2 теоремы 65 гл. II). Следовательно, функции $f_n^{(k)}$ сходятся равномерно на Ω к непрерывному ограниченному пределу f_k на Ω.

Согласно следствию 1, функция f принадлежит классу C^m и $f^{(k)} = f_k$, т. е. f лежит в $(F^\Omega)_{cb;\, m}$. Поскольку каждая последовательность $f_n^{(k)}$ равномерно сходится к $f_k = f^{(k)}$, то f_n сходится к f в пространстве $(F^\Omega)_{cb;\, m}$, которое тем самым оказывается полным.

Примеры. Предыдущая теорема была сформулирована для последовательностей, но на практике она чаще применяется к рядам.

Пусть задан ряд (IV, 11; 1), где функции $\vec{u}_n$ определены на открытом множестве Ω аффинного нормированного пространства E и имеют значения в банаховом пространстве $\vec{F}$. Вообще говоря, заранее известно, что этот ряд просто сходится (и даже локально равномерно) в Ω. Функции $\vec{u}_n$ непрерывны, а это значит, что сумма ряда $\vec{S}$ также непрерывна. Если $\vec{u}_n$ дифференцируемы, то возникает вопрос, дифференцируема ли функция $\vec{S}$. Для его решения применяется следующий метод: *почленно дифференцируют предыдущий ряд и полагают a priori*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x). \qquad \text{(IV, 11; 13)}$$

Если ряд из производных $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ *локально равномерно сходится в* Ω, *то* $\vec{S}$ *дифференцируема и формула* (IV, 11; 13) *справедлива.*

В самом деле, в этом случае функции $\vec{S}_m = \sum_{n=0}^{m} \vec{u}_n$ сходятся к $\vec{S}$, и в то же самое время функции $S_m' = \sum_{n=0}^{m} u_n'$ локально равномерно сходятся к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u'_n$. Из теоремы следует, что $\vec{S}$ дифференцируема и ее производная равна предыдущему пределу.

Рассмотрим для примера ряд Фурье, в котором $\vec{a}_n$ и $\vec{S}(x)$ являются векторами некоторого банахового пространства $\vec{F}$:

$$\vec{S}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{a}_n e^{inx}, \text{ где } x \text{ вещественно;} \qquad \text{(IV, 11; 14)}$$

предположим, что $\vec{a}_n$ удовлетворяют неравенству

$$\|\vec{a}_n\| \leqslant \frac{A}{|n|^{p+2}}, \qquad \text{(IV, 11; 15)}$$

где p — целое число $\geqslant 0$ и A — постоянная >0.

Функция $\vec{S}$, представимая этим рядом, принадлежит по крайней мере классу C^p. В самом деле, если мы продифференцируем ряд почленно k раз, $k \leqslant p$, то получим следующие формулы:

$$\vec{S}^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^k \vec{a}_n e^{inx}. \qquad \text{(IV, 11; 16)}$$

Так как $\|(in)^k \vec{a}_n\| \leqslant A/|n|^2$, то каждый из этих рядов равномерно и даже нормально сходится, и, следовательно, необходимый результат вытекает непосредственно из теоремы.

Если же лучшей оценки, чем (IV, 11; 15), нет, то, вообще говоря, мы не можем произвести еще одно дифференцирование.

Замечания. 1°) *Тот факт, что теорема не применима, еще не означает, что предел f функций f_n или сумма $\vec{S}$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ не может иметь производной.* Все, что можно сказать о производной $\vec{S}'$ функции $\vec{S}$ в случае, когда ряд из производных расходится, — это то, что производную $\vec{S}'$, если она существует, нельзя представить в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}'_n$.

Рассмотрим, например, тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}. \qquad \text{(IV, 11; 17)}$$

Согласно теореме Абеля (теорема 63 гл. II), он сходится всюду и сходится равномерно в каждом интервале $[\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$. В самом деле, сумма

$$|\sin(2\pi x) + \sin(2\pi 2x) + \ldots + \sin(2\pi n x)|$$

мажорируется величиной $2/|e^{2i\pi x}-1|$ и, следовательно, числом $2/|e^{2i\pi\delta}-1|$ при $\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta$, а последовательность $1/n\pi$ убывает и стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Согласно (II, 14; 31), остаток при этом допускает оценку:

$$|R_n| \leqslant \frac{2}{\pi(n+1)|e^{2i\pi\delta}-1|},$$

доказывающую наше утверждение. Однако сходимость, очевидно, не будет равномерной на $[0, 1]$. Следовательно, имеет место локально равномерная сходимость на $]0, 1[$, а ряд представляет собой непрерывную функцию на этом открытом интервале. Почленное дифференцирование дает всюду расходящийся ряд

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n x. \qquad \text{(IV, 11; 17}_2\text{)}$$

Отсюда вовсе не следует, что функция S не дифференцируема. Позже мы увидим, что S определяется по формуле:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x=0 \text{ и } x=1, \\ \frac{1}{2}-x & \text{для} \quad 0<x<1. \end{cases} \qquad \text{(IV, 11; 18)}$$

Эта функция разрывна при $x=0$ и $x=1$. Из-за этого разрыва, несмотря на сходимость на $[0, 1]$, равномерная сходимость ряда имеет место только в интервале $[\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$.

Во всем интервале $]0, 1[$ эта функция дифференцируема и даже принадлежит классу C^∞. Ее производную, равную -1, в виде ряда (IV, 11; 17) представить нельзя, поскольку он расходится. Из этого примера видно, что метод, с помощью которого Вейерштрасс доказал, что ряд (IV, 11; 4) представляет функцию, не имеющую ни в одной точке производной, не является очевидным. *Из того факта, что почленное дифференцирование ряда приводит к расходящемуся ряду, вовсе не следует, что рассматриваемая функция не дифференцируема. Всего навсего он говорит лишь о том, что такая возможность не исключена!*

Дифференцируемость бесконечного произведения

Предположим, что некоторая функция определена в виде бесконечного произведения функций с вещественными или комплексными значениями:

$$\Pi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} u_n(x). \qquad \text{(IV, 11; 19)}$$

В этом случае можно, опираясь на сходимость этого произведения и сходимость ряда логарифмических производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(x)}{u_n(x)}, \qquad \text{(IV, 11; 20)}$$

выяснить, будет ли функция Π дифференцируема и будет ли ее логарифмическая производная определяться по формуле

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}. \qquad \text{(IV, 11; 21)}$$

Следует заметить, что доказательство этого утверждения нельзя свести непосредственно к рассмотрению функций $\ln u_n$, ибо речь здесь идет о функциях с комплексными значениями, не обязательно лежащими в области $\{z = re^{i\varphi},\ r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ комплексной плоскости, а, значит, нет уверенности в том, что вычисление логарифмов законно. Однако, если f является дифференцируемой функцией, определенной в открытом множестве аффинного нормированного пространства E и принимающей всюду комплексные значения $\neq 0$, то логарифмическую производную f'/f можно вычислять без предварительного перехода к логарифмам [1]).

Теперь можно сделать следующие замечания.

1°) Если f и g — функции с комплексными значениями, дифференцируемые и $\neq 0$ на Ω, то логарифмическая производная произведения (соответственно дроби) является суммой (соответственно разностью) логарифмических производных:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}, \qquad \frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}. \qquad \text{(IV, 11; 22)}$$

В самом деле, речь идет об уже известных формулах

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad \text{(IV, 11; 23)}$$

2°) Если f — дифференцируемая на Ω функция с комплексными значениями, то по теореме о сложной функции логарифмическая производная функции e^f равна $(e^f f')/e^f = f'$.

3°) Если множество Ω связно, а логарифмическая производная функции f равна нулю в Ω, то эта функция постоянна. В самом деле, производная f' этой функции равна нулю.

---

[1]) $f(x)$ является элементом поля $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а $f'(x)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\mathbb{K}$. Поэтому $f'(x)/f(x)$ также является линейным непрерывным отображением $\vec{E}$ в $\mathbb{K}$ (элементом пространства, сопряженного к пространству $\vec{E}$).

Отсюда следует, что если f и g — две функции, имеющие одну и ту же логарифмическую производную, то их отношение постоянно, ибо логарифмическая производная отношения f/g равна нулю.

4°) Для комплексных функций f_n на топологическом пространстве Ω (см. стр. 168) мы отмечали, что *равномерная сходимость f_n к f и равномерная сходимость f_n/f к 1 (если f всюду $\neq 0$) не эквивалентны. Однако, если функции f_n непрерывны, то соответствующие локально равномерные сходимости эквивалентны* (см. стр. 168 гл. II).

Точно так же, *если функции f_n (соответственно g_n) сходятся равномерно к f (соответственно к g) при n, стремящемся к бесконечности, то отсюда еще не следует, что $f_n g_n$ сходятся равномерно к fg*[1]*). Однако это утверждение справедливо для равномерной сходимости, если f_n и g_n непрерывны.*

В самом деле, пусть $a \in \Omega$. Тогда найдется такая окрестность $\mathscr{V}'$ точки a, в которой f_n (соответственно g_n) равномерно сходятся к f (соответственно к g). Обозначим через $\mathscr{V}''$ такую окрестность точки a, в которой функции f и g, непрерывные как локально равномерные пределы непрерывных функций, ограничены по модулю. Тогда имеем:

$$|f_n g_n - fg| \leqslant |f_n|\,|g_n - g| + |f_n - f|\,|g|. \qquad (\text{IV}, 11; 23_2)$$

Покажем, что на множестве $\mathscr{V} = \mathscr{V}' \cap \mathscr{V}''$ правая часть равномерно сходится к 0. Второе слагаемое, очевидно, обладает этим свойством. Что же касается первого слагаемого, то заметим, что существует такое целое число n_0, что для $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|f_n - f| \leqslant 1$. Так как функция $|f|$ ограничена в $\mathscr{V}''$, то при $n \geqslant n_0$ функция $|f_n|$ также будет ограниченной в $\mathscr{V}''$, а, значит, первое слагаемое также стремится равномерно к 0 в $\mathscr{V}$.

5°) *Если Ω является интервалом $\mathbb{R}$, а f — комплексной функцией $\neq 0$ на Ω, принадлежащей классу C^1, то имеет место формула:*

$$f(x) = f(a)\, e^{\int_a^x (f'(\xi)/f(\xi))\, d\xi}. \qquad (\text{IV}, 11; 24)$$

В самом деле, левая и правая части, согласно п. 2°), имеют одну и ту же логарифмическую производную f'/f; следовательно, они, согласно п. 3°), пропорциональны, а так как обе части совпадают при $x = a$, то они равны между собой.

[1]) Произведение, как отображение $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, не является равномерно непрерывным.

В случае, когда $|f'/f| \leqslant M$, можно указать следующие оценки:

$$\left|\frac{f(x)}{f(a)}\right| \leqslant e^{M|x-a|} \tag{IV, 11; 25}$$

и

$$\left|\frac{f(x)}{f(a)} - 1\right| \leqslant e^{M|x-a|} - 1. \tag{IV, 11; 26}$$

Если теперь f является комплексной функцией класса C^1, заданной на открытом множестве Ω аффинного пространства E, всюду $\neq 0$, и если ее логарифмическая производная по норме мажорируется числом M, то, применяя неравенства (IV, 11; 25) и (IV, 11; 26) к функции $t \to f(a + t(\overrightarrow{x-a}))$, определенной на $[0, 1]$, получим такие же неравенства, где вместо $|x-a|$ будет стоять $\|\overrightarrow{x-a}\|$.

Имеет место следующий результат:

Теорема 112. *Пусть f_n — последовательность комплексных функций класса C^1, определенных на открытом множестве Ω аффинного нормированного пространства E и всюду $\neq 0$. Если их логарифмические производные f'_n/f_n локально равномерно сходятся к пределу g и если значения функций $f_n(a)$ сходятся к некоторому пределу $f(a) \neq 0$* [1]) *хотя бы в одной точке $a \in \Omega$, а множество Ω связно, то f_n сходятся к некоторой предельной функции f локально равномерно в Ω. Функция f нигде не обращается в нуль, она принадлежит классу C^1 и имеет функцию g в качестве логарифмической производной. Если Ω не связно, но заранее известно, что f_n просто сходятся всюду в Ω к некоторой не равной нулю функции, то сформулированные выводы полностью сохраняются.*

Доказательство. Положим $f_{mn} = f_m/f_n$. Пусть $B = B(a; \rho)$ — некоторый шар с центром в a, в котором функция f'_n/f_n равномерно сходится к g. Тогда при m и n, стремящихся к бесконечности, f'_{mn}/f_{mn} равномерно сходится к 0 в B. Из (IV, 11; 26) вытекает, что $f_{mn}(x)/f_{mn}(a)$ равномерно сходится к 1. Поскольку $f_{mn}(a)$ сходится к 1, то $f_{mn} = f_m/f_n$ при m и n, стремящихся к бесконечности, равномерно сходятся к 1.

В частности, существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $\left|\frac{f_n}{f_{n_0}} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$, а, значит, для $n \geqslant n_0$ и $x \in B$ выполняется не-

1) Если $f(a) = 0$ и Ω связно, то без труда доказывается, что функции f_n сходятся локально равномерно к нулю.

равенство $\frac{1}{2}|f_{n_0}|\leqslant|f_n|\leqslant\frac{3}{2}|f_{n_0}|$. Теперь для всех $x\in B$, $m\geqslant n_0$, $n\geqslant n_0$ будет иметь место неравенство

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_n(x)|\left|\frac{f_m(x)}{f_n(x)}-1\right|\leqslant\frac{3}{2}|f_{n_0}(x)|\left|\frac{f_m(x)}{f_n(x)}-1\right|,$$

а, следовательно, $|f_m(x)-f_n(x)|$ сходится к нулю при m и n, стремящихся к бесконечности. Поскольку поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ полно, отсюда следует, что $f_n(x)$ для всех $x\in B$ имеют предел $f(x)$. Кроме того, из $|f_n(x)|\geqslant|f_{n_0}(x)|/2$ следует, что $|f(x)|\geqslant|f_{n_0}(x)|/2>0$, т. е. что f не обращается в нуль в B. Наконец, если по заданному $\varepsilon>0$ выбрать p так, чтобы при $m\geqslant p$ и $n\geqslant p$ для всех $x\in B$ имело место неравенство $|f_m(x)/f_n(x)-1|\leqslant\varepsilon$, то при $n\geqslant p$ для всех $x\in B$ будет справедливым неравенство $|f(x)/f_n(x)-1|\leqslant\varepsilon$, а это означает, что f/f_n равномерно сходится к 1 в B.

Теперь, используя метод теоремы 111, можно убедиться, что если Ω связно (или если известно заранее, что f_n сходятся просто к некоторой функции f, которая всюду $\neq 0$), то f_n сходятся просто к некоторому пределу f всюду $\neq 0$ и f/f_n сходятся локально равномерно к 1, или f_n сходятся локально равномерно к f согласно результатам п. 4°) на стр. 789. Отношение f'_n/f_n тогда локально равномерно сходится к g, а f_n к f и поэтому $f'_n=(f'_n/f_n)f_n$ сходятся к gf, поскольку речь идет о непрерывных функциях (см. замечание 4°) на стр. 789). Теорема 111 теперь утверждает, что функция f дифференцируема и ее производная равна gf, т. е. логарифмическая производная равна g, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Если комплексные функции u_n на Ω принадлежат классу C^1 и всюду $\neq 0$ и если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u'_n/u_n$ локально равномерно в Ω сходится к некоторой предельной функции g и, кроме того, произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится хотя бы в одной точке a из Ω, то когда Ω связно, это произведение сходится на всем Ω локально равномерно, а определяемая им функция Π принадлежит классу C^1 и имеет логарифмическую производную, равную g. Если множество Ω не связно, но заранее известно, что произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится для любого $x\in\Omega$, то указанные выводы полностью сохраняются.*

Функции, представимые интегралами

Рассмотрим интеграл

$$\vec{f}(x) = \int_T \vec{h}(x, t)\, d\mu(t), \qquad (\mathrm{IV}, 11; 26_2)$$

где μ — мера Радона $\geqslant 0$ на локально компактном пространстве T, счетном в бесконечности, и $\vec{h}$ — функция на $X \times T$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

Предположим, что для каждого $x \in X$ *частная функция* $\vec{h}_x$: $t \to \vec{h}(x, t)$ *является* μ*-интегрируемой.* В дальнейшем это условие будет считаться выполненным, и мы не будем больше об этом напоминать. Предыдущий интеграл в этом случае определяет некоторый вектор $\vec{f}(x)$ из $\vec{F}$ и, следовательно, определяет некоторую функцию $\vec{f}: x \to \vec{f}(x)$. Рассмотрим задачу изучения непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости этой функции, исходя из аналогичных свойств функции $\vec{h}$.

Непрерывность функции, представимой интегралом

Наиболее важный критерий дает теорема 35 Лебега, которую мы сформулируем следующим образом.

Теорема 114. *Пусть пространство* X *метризуемо. Если для* μ*-почти всех значений* t *функция* $\vec{h}$ *раздельно непрерывна по* x *в точке* a *и существует такая окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* a*, для которой на* $\mathscr{V} \times T$ *имеет место оценка* $\|\vec{h}(x, t)\| \leqslant k(t)$*, где* k *есть* μ*-интегрируемая функция* $\geqslant 0$ *на* T*, то* $\vec{f}$ *непрерывна в точке* a *пространства* X.

В самом деле, если x устремить к a, то, начиная с некоторого момента, x будет находится в $\mathscr{V}$, и тогда, в силу теоремы 35 Лебега и следующего за ней замечания, $\vec{f}(x)$ будет стремится к $\vec{f}(a)$.

Надо быть внимательнее и не смешивать различные предположения.

Для μ-почти всех значений t мы считаем, что функция $\vec{h}$ непрерывна по x в точке a. Это естественно, поскольку изучается непрерывность функции $\vec{f}$ по x в точке a. С другой стороны, предполагается, что $\|\vec{h}\|$ мажорируется μ-интегрируемой функцией k переменной t, что также естественно, поскольку производится интегрирование по μ в пространстве T переменной t.

Следствие. *Пусть $\vec{h}$ — непрерывная функция на $X \times T$ со значениями в $\vec{F}$ и для каждой точки $a \in X$ существует такая ее окрестность $\mathscr{V}$ и такой компакт K из T, что для $x \in \mathscr{V}$ носитель частной функции $\vec{h}_x$: $t \to \vec{h}(x, t)$ лежит в K. Тогда $\vec{f}$ является непрерывной функцией из X в $\vec{F}$.*

Доказательство. При x, стремящемся к a, $\vec{h}_x$ сходится к $\vec{h}_a$ в $(\vec{F}^K)_{cb}$ (теорема 66). Следовательно, существует такая окрестность $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}$ точки a, что для $x \in \mathscr{V}_0$ норма $\|\vec{h}_x\|$ ограничена. Обозначим через M ее границу. Тогда можно применить предыдущую теорему с $k(t) = M\chi_K(t)$, где χ_K — характеристическая функция компакта K.

Непосредственно можно получить соотношение:

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\| \leqslant \mu(K) \sup_{t \in K} \|\vec{h}(x, t) - \vec{h}(a, t)\| =$$
$$= \mu(K) \|\vec{h}_x - \vec{h}_a\|, \qquad (\text{IV}, 11; 26_3)$$

где норма берется в $(\vec{F}^K)_{cb}$ и результат получается из теоремы 66 без ссылки на теорему Лебега (это позволяет не предполагать пространство X метризуемым).

Интегрируемость функции, представимой интегралом

Речь идет о следующей задаче. Предполагается, что пространство X локально компактно и снабжено мерой Радона $\lambda \geqslant 0$. Надо выяснить, будет ли функция $\vec{f}$ λ-интегрируемой и можно ли будет вычислять интеграл от этой функции, интегрируя сначала $\vec{h}$ по λ при фиксированном t, а затем интегрируя результат по t и по мере μ, т. е. имеем ли мы право писать:

$$\int_X d\lambda(x) \int_T \vec{h}(x, t)\, d\mu(t) = \int_T d\mu(t) \int_X \vec{h}(x, t)\, d\lambda(x)? \qquad (\text{IV}, 11; 27)$$

Основные критерии справедливости последнего равенства дают теоремы 77 и 78 Фубини и следствие теоремы 78. Формула (IV, 11; 27) справедлива в том случае, когда функция $\vec{h}$ интегрируема на $X \times T$ по мере тензорного произведения $\lambda \otimes \mu$, или если она измерима и $\geqslant 0$, или если она измерима и одна из величин, аналогичных (IV, 11; 27), относящихся к $\|\vec{h}\|$, конечна.

Дифференцируемость функции, представимой интегралом

Будем считать, что $X = \Omega$ является открытым множеством аффинного нормированного пространства E.

То, что нам приходилось видеть в рядах, наводит на мысль, что $\vec{f}$ может быть дифференцируемой только тогда, когда интеграл, относящийся к частной производной $\vec{h}$ по x, сам обладает подходящими свойствами.

В противоположность тому, что было сделано в теореме 111, мы не будем стараться свести дело к общему случаю, в котором f предполагается существующей только в точке a области Ω.

Теорема 115. *Предположим, что для μ-почти каждого значения t частная функция $x \to \vec{h}(x, t)$ дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^1) на Ω. Пусть ее производная функция $x \to \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(x, t)$ является отображением Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Предположим, что в каждой точке a функция $t \to \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(a, t)$ (определенная μ-почти всюду на T со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}, \vec{F})$) μ-измерима*[1] *и что существует в Ω такая окрестность $\mathscr{V}$ точки a, что на $\mathscr{V} \times T$ имеет место неравенство $\left\| \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(x, t) \right\| \leqslant k(t)$, где k — неотрицательная и μ-интегрируемая функция на T.*

При этих условиях функция $\vec{f}$, отображающая Ω в $\vec{F}$, дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^1), и для каждой точки $a \in \Omega$ ее производная вычисляется по формуле

$$\vec{f}'(a) = \int_T \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(a, t)\, d\mu(t) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}). \qquad \text{(IV, 11; 28)}$$

---

[1]) Эта измеримость будет автоматически выполняться, если пространство E конечномерно. Предположим для простоты, что $E = \mathbb{K}$ есть поле скаляров. Тогда для μ-почти всех значений t имеет место равенство

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(x, t) = \lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\vec{h}(x+\xi, t) - \vec{h}(x, t)}{\xi} \in \vec{F}.$$

Функции $t \to \vec{h}(x+\xi, t)$ и $t \to \vec{h}(x, t)$ μ-измеримы (и даже μ-интегрируемы). Следовательно, для фиксированного x функция $t \to \frac{\partial \vec{h}}{\partial x}(x, t)$ является μ-почти всюду пределом некоторой последовательности μ-измеримых функций, а, следовательно, μ-измерима.

Напомним, кроме того, что все встречающиеся на практике функции измеримы!

Прежде чем проводить доказательство этой теоремы, сделаем несколько замечаний по поводу ее условий.

Подинтегральная функция при заданной точке a определена μ-почти всюду на T, измерима и мажорируема некоторой интегрируемой функцией $k \geqslant 0$, а, значит, интегрируема (согласно теореме 50 гл. II, пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ полно). Таким образом, условия теоремы обеспечивают существование правой части равенства (IV, 11; 28).

Добавим, что если для μ-почти всех значений t частная функция $\vec{h}_t$ не только дифференцируема по x, но и принадлежит классу C^1 в Ω, то *условие мажорируемости производной функцией k влечет за собой непрерывность производной $\vec{f}'$, т. е. принадлежность $\vec{f}$ классу C^1 на* Ω. Однако это условие необходимо даже для доказательства дифференцируемости $\vec{f}$.

Доказательство. Надо доказать только тот факт, что функция $\vec{f}$ имеет производную, определяемую формулой (IV, 11; 28). Все сводится к тому, чтобы доказать, что при $\vec{X}$, стремящемся к $\vec{0}$, величина

$$\frac{1}{\|\vec{X}\|}\left\|\int_T \left(\vec{h}(a+\vec{X},\, t)-\vec{h}(a,\, t)-\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}(a,\, t)\,\vec{X}\right)d\mu(t)\right\| \qquad \text{(IV, 11; 29)}$$

стремится к 0. Эта величина не превосходит

$$\int_T \left(\frac{1}{\|\vec{X}\|}\left\|\vec{h}(a+\vec{X},\, t)-\vec{h}(a,\, t)-\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}(a,\, t)\,\vec{X}\right\|\right)d\mu(t). \qquad \text{(IV, 11; 30)}$$

В силу частной дифференцируемости $\vec{h}$, подинтегральная функция t сходится просто μ-почти всюду к $\vec{0}$, когда $\vec{X}$ стремится к $\vec{0}$. Если мы сможем промажорировать ее некоторой неотрицательной μ-интегрируемой функцией t, то результат будет получен в силу теоремы 35 Лебега. Далее, если через ρ обозначить такое число >0, при котором шар $B(a; \rho)$ будет содержаться в $\mathscr{V}$, то для μ-почти всех значений t можно применить формулу конечных приращений в виде следствия 1 теоремы 13 гл. III, лишь бы только $\|\vec{X}\| \leqslant \rho$, а это даст

$$\frac{1}{\|\vec{X}\|}\left\|\vec{h}(a+\vec{X},\, t)-\vec{h}(a,\, t)-\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}(a,\, t)\,\vec{X}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in]a,\, a+\vec{X}[}\left\|\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}(\xi,\, t)-\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}(a,\, t)\right\| \leqslant 2k(t) \qquad \text{(IV, 11; 31)}$$

(где k по условию $\geqslant 0$ и μ-интегрируема), откуда следует доказательство теоремы.

Практически поступают следующим образом. Если функция $\vec{f}$ определена интегралом (IV, 11; 26_2), то для того, чтобы убедиться в ее дифференцируемости, формально дифференцируют под знаком интеграла и пишут равенство (IV, 11; 28). Формула будет обоснованной, если выполнены условия теоремы (которые в случае, когда h_t μ-почти всюду на Ω принадлежит классу C^1, позволяют утверждать, что функция, определяемая правой частью равенства (IV, 11; 28), непрерывна).

Укажем простое, но весьма важное следствие.

Следствие. *Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная по формуле* (IV, 11; 26_2) *при следующих условиях*:

a) *$\vec{h}$ является непрерывным отображением $\Omega \times T$ в $\vec{F}$;*

b) *$\vec{h}$ имеет всюду частную производную по x и $\partial\vec{h}/\partial x$ является непрерывным отображением $\Omega \times T$ в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$;*

c) *для каждой точки $a \in \Omega$ существует в Ω такая окрестность $\mathscr{V}$ этой точки и такой компакт K из T, что для всех x из $\mathscr{V}$ непрерывная на T частная функция $\vec{h}_x$ со значениями в $\vec{F}$ имеет носитель в K.*

Тогда функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^1 в Ω и ее производная задается формулой (IV, 11; 28).

Доказательство аналогично доказательству следствия теоремы 114. Следует только убедиться, что из этих условий вытекают условия теоремы 115.

Замечание относительно исследования последовательных первообразных функции, непрерывной на интервале прямой $\mathbb{R}$. Вернемся к ситуации, которая рассматривалась в теореме 91. Функция $\vec{F}_m$, определенная по формуле (IV, 9; 41), является первообразной функции $\vec{f}$ порядка m, обращающейся в нуль в точке c вместе во всеми своими производными до порядка $m - 1$ включительно. Это было доказано с помощью преобразования двух последовательных интегралов к одному интегралу. Теперь мы можем дать другое доказательство этого утверждения путем непосредственной его проверки.

Дифференцируема ли функция $\vec{F}_m$? Непосредственно этого не видно. Эта функция зависит от x, с одной стороны, потому, что x является верхним пределом интегрирования, а с другой,— потому, что x находится под знаком интеграла.

Функцию $\vec{F}_m(x)$ можно рассматривать как значение при $y = x$ функции двух переменных

$$\vec{G}_m(x, y) = \int_c^y \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} d\xi. \qquad \text{(IV, 11; 32)}$$

Покажем, что эта функция имеет полную производную. Для этого достаточно доказать, что она имеет непрерывные частные производные по x и y, а затем применить теорему 15 гл. III (см. далее формулу (IV, 11; 36)). Прежде всего, согласно теореме 89,

$$\frac{\partial \vec{G}_m}{\partial y}(x, y) = \vec{f}(y) \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad \text{(IV, 11; 33)}$$

и полученная функция непрерывна по (x, y).

Для фиксированного y к функции $(x, \xi) \to \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}$ применима теорема 115 (здесь вместо x и t у нас написаны x и ξ, вместо $d\mu(t)$ написано $d\xi$, а отрезок $[c, y]$ взят в качестве компакта $K = T$). Поэтому функция $\vec{G}_m$ имеет частную производную по x, определяемую по формуле

$$\frac{\partial \vec{G}_m}{\partial x}(x, y) = \int_c^y \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!} d\xi \quad \text{для} \quad m \geqslant 2. \qquad \text{(IV, 11; 34)}$$

Покажем, что $\partial \vec{G}_m / \partial x$ также непрерывна по (x, y)[1]. Зафиксируем (x_0, y_0) и предположим, например, что $y_0 \geqslant c$. Тогда можно написать:

$$\frac{\partial \vec{G}_m}{\partial x}(x, y) = \int_{R_1} \varphi_y(\xi) \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!} d\xi, \qquad \text{(IV, 11; 35)}$$

где φ_y является характеристической функцией интервала $[c, y]$. Для фиксированного ξ при (x, y), стремящемся к (x_0, y_0), $\varphi_y(\xi) \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}$ сходится к $\varphi_{y_0}(\xi) \vec{f}(\xi) \frac{(x_0-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}$ всюду, кроме, быть может, $\xi = y_0$ (поскольку тогда $\varphi_y(\xi)$ не сходится к $\varphi_{y_0}(\xi)$, если y стремится к y_0 по значениям $< y_0$). Следовательно, для $d\xi$-почти всех значений ξ (всех, кроме одного: y_0) частная функция $(x, y) \to \varphi_y(\xi) \vec{f}(\xi) \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}$ непрерывна в точке (x_0, y_0). Если x и y будут пробегать компактные окре-

---

[1]) В действительности, если учесть замечание 1°), следующее за теоремой 15 гл. III, проводить доказательство этого факта не нужно.

стности точек x_0, y_0 в $\mathbb{R}_1$, то подинтегральная функция будет ограниченной, иметь носитель в фиксированном компакте, а, следовательно, из теоремы 114 будет следовать, что $\partial\vec{G}_m/\partial x$ непрерывна в точке (x_0, y_0).

Таким образом, $\vec{G}_m$ принадлежит классу C^1 на $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_1$. Но тогда по теореме о сложной функции (следствие 5 теоремы 11) функция $\vec{F}_m$ принадлежит классу C^1 и ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{d\vec{F}_m}{dx}(x) = \frac{\partial\vec{G}_m}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial\vec{G}_m}{\partial y}(x, x). \qquad \text{(IV, 11; 36)}$$

Если учесть, что $(x-y)^{m-2}$ при $m \geqslant 2$ обращается в нуль при $y = x$, то для $m \geqslant 2$ получаем:

$$\frac{d\vec{F}_m}{dx}(x) = \frac{\partial\vec{G}_m}{\partial x}(x, x) = \int_c^x \vec{f}(\xi)\frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}\,d\xi. \qquad \text{(IV, 11; 37)}$$

Таким же образом можно поступать и далее, последовательно дойти до производной $(m-1)$-го порядка включительно и получить формулу

$$\frac{d^k}{dx^k}\vec{F}_m(x) = \int_c^x \vec{f}(\xi)\frac{(x-\xi)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}\,d\xi = \vec{F}_{m-k}(x), \qquad k \leqslant m-1, \qquad \text{(IV, 11; 38)}$$

из которой следует, что производные в точке c функции $\vec{F}_m$ до $(m-1)$-го порядка обращаются в нуль.

Вычислим теперь производную порядка m от функции $\vec{F}_m$. К функции $\vec{F}_1$ можно применить ту же формулу, но на этот раз мы получим:

$$\vec{F}_1(x) = \int_c^x \vec{f}(\xi)\,d\xi, \qquad \frac{d\vec{F}_1}{dx}(x) = \vec{f}(x). \qquad \text{(IV, 11; 39)}$$

Таким образом, нами доказано, что производная m-го порядка функции $\vec{F}_m$ равна $\vec{f}$, и, следовательно, функция $\vec{F}_m$, определенная по формуле (IV, 9; 41), является первообразной порядка m для функции $\vec{f}$, обращающейся вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно в нуль в точке c, что является новым доказательством теоремы 91.

Случай несобственных сходящихся интегралов

Пусть $\vec{h}$ — функция, определенная на произведении $X \times \mathbb{R}_1$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Здесь $\mathbb{R}_1$ — некоторый интервал $]a, b[$ прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим интеграл

$$\vec{f}(x) = \int_{]a, \rightarrow b[} \vec{h}(x, t)\, d\mu(t). \qquad \text{(IV, 11; 40)}$$

Будем предполагать, что μ является некоторой мерой Радона на $\mathbb{R}_1$ и что для каждого $x \in X$ несобственный интеграл, определяющий функцию $\vec{f}(x)$ (см. определение на стр. 724), является сходящимся. Говорят, что несобственный интеграл равномерно сходится при x, пробегающем некоторую часть A множества X, если собственный интеграл $\int_{]a, b'[}$ сходится к несобственному интегралу $\int_{]a, \rightarrow b[}$ (при b', стремящемся к b так, что $b' < b$) равномерно относительно $x \in A$. Это еще означает, что «остаток» $\int_{]b', \rightarrow b[}$ сходится к 0 при b', стремящемся к b равномерно относительно $x \in A$. Можно сказать также, что при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $b_0 < b$ (не зависящее от x), что для любого $x \in A$ из $b_0 \leqslant b' < b$ следует неравенство $\left\| \int_{]b', \rightarrow b[} \right\| \leqslant \varepsilon$.

Необходимые свойства функции $\vec{f}$ могут быть получены в два приема. Сначала доказывают, что собственный интеграл $\int_{]a, b'[}$ обладает требуемыми свойствами, а затем устремляют b' к b.

Не ставя целью рассмотреть возможно более общие случаи, мы приведем следующие теоремы:

Теорема 116. *Пусть $\vec{f}$ — функция, определенная на X по формуле* (IV, 11; 40), *в которой несобственный интеграл предполагается сходящимся для каждого $x \in X$. Предположим, что*

1°) *X является метризуемым пространством и для каждого $b' < b$ собственный интеграл*

$$\vec{f}_{b'}(x) = \int_{]a, b'[} \vec{h}(x, t)\, d\mu(t) \qquad \text{(IV, 11; 41)}$$

определяет на X некоторую функцию $\vec{f}_{b'}$ со значениями в $\vec{F}$, *непрерывную в точке $x = x_0$ пространства X (например, по теореме* 114).

2°) *Существует такая окрестность $\mathscr{V}$ точки x_0, что несобственный интеграл равномерно сходится относительно x из $\mathscr{V}$.*

В этом случае функция $\vec{f}$ непрерывна в точке x_0 пространства X.

Теорема очевидна. По предположению, функция $\vec{f}_{b'}$ непрерывна на $\mathscr{V}$ в точке x_0 и функция $\vec{f}_{b'}$ сходится к $\vec{f}_b = \vec{f}$ равномерно на $\mathscr{V}$. Остается лишь применить теорему 65 гл. II.

Теорема 117. *Пусть задан несобственный интеграл* (IV, 11; 40), *в котором $X = \Omega$ есть открытое множество аффинного нормированного пространства E. Будем предполагать, что*

1°) *Для каждого $b' < b$ собственный интеграл* (IV, 11; 41) *представляет собой некоторую функцию $\vec{f}_{b'}$ на Ω, удовлетворяющую условиям теоремы* 115, *из которой следует, что $\vec{f}_{b'}$ дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^1) на Ω, а ее производная определяется по формуле*

$$\vec{f}'_{b'}(x) = \int_{]a,\, b'[} \frac{\partial h}{\partial x}(x,\ t)\, d\mu(t). \qquad \text{(IV, 11; 42)}$$

2°) *Несобственный интеграл*

$$g(x) = \int_{]a,\, \to b[} \frac{\partial h}{\partial x}(x,\ t)\, d\mu(t) \qquad \text{(IV, 11; 43)}$$

сходится для каждого $x \in \Omega$ локально равномерно на Ω.

3°) *Множество Ω связно, F полно, а несобственный интеграл* (IV, 11; 40) *сходится хотя бы в одной точке $x = a$ области Ω или же Ω и F произвольны, а этот несобственный интеграл сходится для каждого $x \in \Omega$.*

Тогда несобственный интеграл (IV, 11; 40) *сходится для каждого x из Ω; эта сходимость локально равномерна на Ω, функция $\vec{f}$, определенная по формуле* (IV, 11; 40), *дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^1) на Ω, а ее производной является функция g.*

В самом деле, когда b' стремится к b, функции $\vec{f}_{b'}$ удовлетворяют условиям теоремы 111 [1]).

[1]) Здесь речь идет не о *последовательности* $\vec{f}_n$, а о *семействе* $\vec{f}_{b'}$, зависящем от вещественного параметра b' и некотором пределе при b', стремящемся к b. Легко проверяется, что для этих функций все сказанное остается в силе.

Пример 1. Рассмотрим интеграл (в котором $x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt. \qquad \text{(IV, 11; 44)}$$

Функция $t \to 1/(1+t^2)$ интегрируема на $\mathbb{R}$. Поэтому, применяя теорему 114 с $\mathscr{V} = \mathbb{R}$ и $k(t) = 1/(1+t^2)$, получаем, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Дифференцируя по x под знаком интеграла, получаем интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{ite^{itx}}{1+t^2}\, dt, \qquad \text{(IV, 11; 45)}$$

не имеющий смысла, поскольку функция $t/(1+t^2)$ не интегрируема. Поэтому доказать дифференцируемость f, рассматривая лишь собственные интегралы (теорема 115), невозможно.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл

$$g(x) = \int_{]-\infty \leftarrow,\ \rightarrow +\infty[} \frac{ite^{itx}}{1+t^2}\, dt. \qquad \text{(IV, 11; 46)}$$

Применяя теорему Абеля, можно убедиться, что для $x \neq 0$ он является условно сходящимся. В самом деле, функция $t \to t/(1+t^2)$ (производная которой равна $(1-t^2)/[(1+t^2)^2]$) монотонна в каждом из интервалов $]-\infty, -1]$, $[-1, +1]$ и $[+1, +\infty[$. Так как эта функция непрерывна и при t, стремящемся к бесконечности, стремится к 0, то она ограничена и, согласно следствию теоремы 86, имеет ограниченную вариацию. Функция $t \to e^{itx}$ имеет при $x \neq 0$ «ограниченные неопределенные интегралы» (оценка (IV, 9; 107)):

$$|\sigma_{c,d}| = \left| \int_c^d e^{itx}\, dt \right| \leqslant \frac{2}{|x|}. \qquad \text{(IV, 11; 47)}$$

Поэтому из критерия Абеля (следствие теоремы 98) следует условная сходимость (IV, 11; 46) для $x \neq 0$. *Эта условная сходимость локально равномерна на открытом множестве* $\Omega = \complement 0$ *прямой* $\mathbb{R}$. В самом деле, для каждого заданного числа $\delta > 0$ при $c \geqslant 1$ и $|x| \geqslant \delta$ имеет место оценка (в обозначениях теоремы Абеля):

$$\left| \int_{]-\infty \leftarrow,\ -c]} \right| \text{ и } \left| \int_{[+c,\ \rightarrow +\infty[} \right| \leqslant U(c)\, V(c) = \frac{c}{1+c^2} \cdot \frac{2}{\delta}\,^{1)} \qquad \text{(IV, 11; 47}_2\text{)}$$

[1]) Для $c \geqslant 1$ функция $t/(1+t^2)$ монотонна в $[c, +\infty[$, и ее полная вариация в точности равна $c/(1+c^2)$.

— величина, стремящаяся к 0 при c, стремящемся к бесконечности, и фиксированном δ.

При фиксированном c собственный интеграл

$$f_c(x) = \int\limits_{[-c, +c]} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{(IV, 11; 48)}$$

в силу теоремы 115 или даже ее следствия, принадлежит на Ω (или даже на $\mathbb{R}$) классу C^1. Поэтому мы можем устремить c к $+\infty$ и применить теорему 117. Функция f оказывается дифференцируемой в $\Omega = \complement 0$, а ее производная определяется несобственным интегралом g из (IV, 11; 46).

Если теперь мы формально вычислим вторую производную

$$\int \frac{-t^2 e^{itx}}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{(IV, 11; 49)}$$

то получим выражение, не имеющее смысла ни при каком способе рассуждений.

Позже мы увидим, что функция f задается формулой

$$f(x) = \pi e^{-|x|}. \qquad \text{(IV, 11; 50)}$$

Эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$, принадлежит классу C^1 на дополнении к началу координат и не имеет производной в начале координат. Однако эта функция принадлежит классу C^∞, т. е. имеет последовательные производные всех порядков на дополнении к началу координат. Здесь, как и в замечании 1°) на стр. 787, предыдущие теоремы позволяют предвидеть, когда функция, представимая интегралом, дифференцируема; невыполнение условий теорем еще не означает, что она не будет дифференцируемой.

В качестве второго примера мы докажем очень важную в теории рядов и интегралов Фурье формулу.

Пример 2.

Теорема 118. *Имеет место формула*

$$\int\limits_{[0, \rightarrow +\infty[} \frac{\sin \lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda > 0. \qquad \text{(IV, 11; 51)}$$

Эта формула уже была приведена в (IV, 9; 87). Полагая $\lambda t = t'$, перейдем к случаю $\lambda = 1$. Для доказательства рассмотрим функцию J, определенную следующим образом:

$$J(x) = \int\limits_{[0, \rightarrow +\infty[} e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,dt. \qquad \text{(IV, 11; 52)}$$

При $x > 0$ под интегралом в правой части стоит интегрируемая функция. Поэтому этот интеграл собственный (теорема 97), При $x=0$ это не так. Интеграл будет несобственным сходящимся по теореме Абеля.

Докажем, прежде всего, что интеграл правой части является несобственным интегралом, равномерно сходящимся при $x \geqslant 0$. В самом деле, если к $\int\limits_{[c, \to +\infty[} c > 0$ применить теорему Абеля, где

$$u(t)=\frac{e^{-xt}}{t}, \qquad v(t)=\sin t, \tag{IV, 11; 53}$$

то u будет убывающей функцией, стремящейся к 0 при t, стремящемся к бесконечности, т. е. функцией ограниченной вариации, а v будет функцией с ограниченными неопределенными интегралами: $\left|\int\limits_{[c, d]} \sin t\, dt\right| \leqslant 2$. Поэтому непосредственно применима оценка (IV, 9; 79):

$$\left|\int\limits_{[c, \to +\infty[} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leqslant \frac{2e^{-xc}}{c} \leqslant \frac{2}{c} \tag{IV, 11; 54}$$

— величина, стремящаяся к 0 равномерно относительно $x \geqslant 0$ при c, стремящемся к бесконечности. Поскольку при конечном фиксированном c, согласно следствию теоремы 114, $J(x, c) = \int\limits_{[0, c]}$ является непрерывной функцией x, то функция J, по теореме 116, непрерывна на полупрямой $\mathbb{R}_+$, т. е. на множестве вещественных чисел $\geqslant 0$. Выясним теперь, будет ли эта функция дифференцируемой? Продифференцируем ее формально под знаком интеграла:

$$J'(x) = -\int\limits_{[0, \to +\infty[} e^{-xt} \sin t\, dt. \tag{IV, 11; 55}$$

Интеграл, стоящий в правой части, является интегралом от некоторой интегрируемой при $x > 0$ функции, тогда как при $x=0$ он является несобственным расходящимся интегралом. Поэтому нет более необходимости пользоваться здесь теоремой Абеля, поскольку нет возможности каким-либо образом получить информацию о производной в начале координат. Однако можно просто воспользоваться теоремой 115. Функция $x \to e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$ для всех значений t принадлежит классу C^1 на $\Omega =]0, +\infty[$, имеет производную, равную $-e^{-xt}\sin t$, и при $x \geqslant \delta > 0$ выполняется неравенство

$$|e^{-xt} \sin t| \leqslant e^{-\delta t}, \tag{IV, 11; 56}$$

где справа стоит интегрируемая функция $\geqslant 0$.

Из теоремы 115 следует, что функция J на $\Omega =]0, +\infty[$ принадлежит классу C^1 и ее производная определяется формулой (IV, 11; 55). Но тогда интеграл, стоящий в правой части, может быть вычислен элементарно. В самом деле, производя дважды интегрирование по частям (теорема 98), его можно записать в виде

$$J'(x) = -\int_{[0, \to +\infty[} \frac{e^{-xt}}{x} \cos t\, dt =$$

$$= \left[-\frac{e^{-xt}}{-x^2} \cos t \right]_0^{+\infty} + \int_{[0, \to +\infty[} \frac{e^{-xt}}{x^2} \sin t\, dt = -\frac{1}{x^2} - \frac{J'(x)}{x^2}, \quad \text{(IV, 11; 57)}$$

откуда

$$J'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad x > 0. \qquad \text{(IV, 11; 58)}$$

Заметим, что $J'(x)$ имеет предел, когда x стремится к 0. Из теоремы 14 гл. III следует, что функция J имеет при $x = 0$ производную и эта производная равна -1. Однако мы видели, что это невозможно было ни предвидеть, ни представить $J'(0) = -1$ с помощью не имеющего никакого смысла интеграла $-\int_{[0, \to +\infty[} \sin t\, dt$.

Из предыдущего следует, что функцию J можно получить, отыскивая первообразную правой части равенства (IV, 11; 58), что дает

$$J(x) = -\operatorname{arc\,tg} x + c. \qquad \text{(IV, 11; 59)}$$

Постоянная c легко вычисляется. Действительно, при x, стремящемся к $+\infty$, функция $t \to (e^{-xt} \sin t)/t$ просто сходится к 0, и, поскольку она при $x \geqslant 1$ мажорируется неотрицательной интегрируемой функцией $t \to (e^{-t}|\sin t|)/t$, то из теоремы Лебега следует, что $J(x)$ стремится к 0 при x, стремящемся к $+\infty$.

Постоянная правой части равенства (IV, 11; 59) тогда равна $\pi/2$. Следовательно, в силу непрерывности функции J в начале координат, $J(0) = \pi/2$, чем и заканчивается доказательство теоремы. В теории эйлеровых функций мы познакомимся с одним обобщением этой формулы.

Применение к делимости дифференцируемых функций

Теорема 119. *Пусть $\vec{U}$ — функция, определенная на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{R}^N$[1]), со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Предположим, что пересечение Ω с ги-*

[1]) Можно было бы всюду заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$.

перплоскостью $x_N = 0$ состоит из нулей функции $\vec{U}$ порядка, не меньшего k, т. е. функция $\vec{U}$ на нем равна нулю вместе со своими частными производными до порядка $k-1$ включительно.

Если функция $\vec{U}$ принадлежит классу C^m с $m \geqslant k$, то найдется единственная функция $\vec{V}$, определенная на Ω, со значениями в $\vec{F}$ класса C^{m-k}, такая, что будет иметь место тождество

$$\vec{U}(x) = x_N^k \vec{V}(x). \qquad \text{(IV, 11; 60)}$$

В некотором смысле можно сказать, что тот факт, что функция $\vec{U}$ имеет на гиперплоскости $x_N = 0$ нуль порядка k, влечет за собой «делимость $\vec{U}$ на x_N^k». Следует заметить, что отношение не принадлежит тому же классу дифференцируемости, что и функция $\vec{U}$.

Доказательство. 1°) *Если такая функция $\vec{V}$ существует*, то она определяется единственным образом, ибо в каждой точке, где $x_N \neq 0$, она задается отношением $\vec{V}_0(x) = \vec{U}(x)/x_N^k$. Так как по условию $m \geqslant k$, т. е. $m-k \geqslant 0$, то эта функция непрерывна и с помощью предельного перехода может быть определена в точке, где $x_N = 0$ [1]).

2°) Докажем существование функции $\vec{V}$. Для простоты предположим, что область Ω выпукла и можно применить формулу Тейлора [2]). Для каждой точки $x \in \Omega$ с координатами x_1, x_2, ..., x_N к функции одной переменной $u - \vec{U}(x_1, \ldots, x_{N-1}, u)$ можно применить формулу Тейлора до порядка $k-1$ относительно точки 0 и приращения x_N. Поскольку производные до порядка $k-1$ включительно на H равны нулю, то эта формула сводится к остаточному члену, и мы можем написать (формула (IV, 9; 49)), что

$$\vec{U}(x_1, \ldots, x_N) = x_N^k \int_0^1 \frac{\partial^k \vec{U}}{\partial x_N^k}(x_1, \ldots, x_{N-1}, tx_N)\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt. \qquad \text{(IV, 11; 61)}$$

[1]) Это пункт 1°) доказательства теоремы 45 гл. II.

[2]) Существование $\vec{V}$ будет очевидным, если $\vec{V}_0(x) = \vec{U}(x)/x_N^k$, определенная для $x_N \neq 0$, имеет предел при x, стремящемся к такой точке a, что $a_N = 0$, и если функция, равная $\vec{V}_0(x)$ для $x_N \neq 0$ и равная предыдущему пределу при $x_N = 0$, принадлежит классу C^{m-k}. Таким образом, для каждой точки a, такой, что $a_N = 0$, можно ограничиться рассмотрением того, что происходит в некоторой окрестности точки a. Это позволяет ограничиться открытой выпуклой окрестностью.

Мы видим, что в качестве $\vec{V}$ можно взять функцию, определяемую интегралом

$$\vec{V}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \\ = \int_0^1 \frac{\partial^k \vec{U}}{\partial x_N^k}(x_1, \ldots, x_{N-1}, tx_N) \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, dt. \quad \text{(IV, 11; 62)}$$

Эта функция принадлежит классу C^{m-k} в Ω. В самом деле, поскольку функция $\vec{U}$, по предположению, принадлежит классу C^m, то ее производная $\partial^k \vec{U}/\partial x_N^k$ принадлежит классу C^{m-k}, и тогда для вычисления производной порядка $\leqslant m-k$ функции $\vec{V}$ мы можем воспользоваться дифференцированием под знаком интеграла. Теперь мы находимся в условиях применимости следствия теоремы 115, что и доказывает теорему.

Замечания. 1°) Тот факт, что $\vec{F}$ является пространством Банаха, т. е. полно, существен. Так как $\vec{V}(x) = \vec{U}(x)/x_N^k$, то для точек x, не лежащих в гиперплоскости $x_N = 0$, $\vec{V}(x)$ является элементом $\vec{F}$. Для точек x, находящихся в этой гиперплоскости, интеграл (IV, 11; 62) в неполном пространстве может не иметь смысла. Поэтому предел $\vec{V}(x)$ при x, стремящемся к некоторой точке гиперплоскости $x_N = 0$, существовать не обязан.

2°) Можно было бы надеяться, что функция $\vec{V}$ принадлежит классу $C^{m'}$, где $m' > m-k$. Однако это не верно, и наилучшим является число $m-k$.

Рассмотрим частный случай $N = 1$ $(\mathbb{R}^N = \mathbb{R})$, $\vec{F} = \mathbb{R}$ и функцию U, определенную формулой

$$U(x) = |x|^{m+1/2}. \quad \text{(IV, 11; 63)}$$

Она, очевидно, принадлежит классу C^m, но не принадлежит классу C^{m+1}. В начале координат она имеет нуль порядка $m+1$ и, следовательно, в частности, любого порядка $k \leqslant m$. Отношение V здесь запишется в виде

$$V(x) = |x|^{m-k+1/2}. \quad \text{(IV, 11; 64)}$$

Это отношение принадлежит классу C^{m-k} и не принадлежит классу C^{m-k+1}.

Следствие. *Пусть $\vec{U}$ — некоторая функция класса C^m на открытом множестве Ω аффинного конечномерного пространства*

E со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Пусть Σ — гиперповерхность класса C^m, содержащаяся в Ω, а $f(x)=0$ — нормальное уравнение этой гиперповерхности[1]*. Если эта гиперповерхность состоит из нулей функции $\vec{U}$ порядка, не меньшего k, то существует функция $\vec{V}$ класса C^{m-k}, определенная единственным образом на Ω со значениями в $\vec{F}$ и такая, что*

$$\vec{U}(x)=(f(x))^k\,\vec{V}(x). \tag{IV, 11; 65}$$

Доказательство. Здесь, как и при доказательстве теоремы (см. замечание 2°) на стр. 805), достаточно для каждой точки a гиперповерхности дать доказательство, относящееся к некоторой окрестности этой точки. Выберем некоторую систему координат в E. Поскольку $f(x)=0$ является нормальным уравнением поверхности Σ, то в точке $a\in\Sigma$ хотя бы одна из частных производных f относительно $x_1, x_2, \ldots, x_N$ отлична от 0. Предположим, например, что это $\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$.

Рассмотрим теперь функции, определенные равенствами

$$\begin{gathered} u_1=x_1,\quad u_2=x_2,\ \ldots,\ u_{N-1}=x_{N-1},\\ u_N=f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \end{gathered} \tag{IV, 11; 66}$$

Эти функции определяют некоторое отображение Φ множества Ω в $\mathbb{R}^N$ класса C^m. Якобиан этого отображения $\neq 0$ в точке a, поскольку он равен $\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$. Согласно теореме о неявных функциях (следствие 2 теоремы 31 гл. III), существует такая открытая окрестность ω точки a в Ω, что сужение Φ на ω является C^m-диффеоморфизмом ω на некоторое открытое множество ω_1 из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Φ^{-1} его обратный диффеоморфизм. С помощью Φ можно перенести каждую фигуру из ω на ω_1.

Пересечение Σ с ω перейдет на гиперповерхность $\Sigma_1=\Phi(\Sigma)$, являющуюся пересечением гиперплоскости $u_N=0$ с множеством ω_1.

Диффеоморфизм Φ преобразует функцию $\vec{U}$ на ω со значениями в $\vec{F}$ в функцию $\vec{U}_1$ на ω_1 со значениями в $\vec{F}$, равную $\vec{U}_1=\vec{U}\circ\Phi^{-1}$.

Легко проверить, что гиперплоскость $u_N=0$ состоит из нулей порядка k функции $\vec{U}_1$[2].

[1]) Смотри следствие теоремы 33_2 гл. III.

[2]) Так как $\vec{U}_1=\vec{U}\circ\Phi^{-1}$, то производные $\vec{U}_1$ определяются по теореме о сложных функциях. Вычисление их громоздко, но *индукцией по k легко доказать,* что все они равны нулю до порядка $k-1$ включительно.

Из теоремы следует, что в ω_1 существует такая функция $\vec{V}_1$ класса C^{m-k}, определяемая единственным образом, для которой имеет место тождество $\vec{U}_1 = u_N^k \vec{V}_1$. В этом случае $\vec{V}_1$ является результатом преобразования Φ^{-1} функции $\vec{V}$ на ω, определенной соотношением $\vec{V} = \vec{V}_1 \circ \Phi$. Функция $\vec{V}$ на ω принадлежит классу C^{m-k}, и на ω имеет место тождество $\vec{U} = f^k \vec{V}$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 2. *Пусть Σ — гиперповерхность класса C^∞ открытого множества Ω конечномерного аффинного пространства E с нормальным уравнением $f(x) = 0$. Все другие ее нормальные уравнения $g(x) = 0$ можно получить, полагая $g = fV$, где V — некоторая скалярная функция класса C^∞ на Ω всюду $\neq 0$.*

Доказательство. Прежде всего, если $g = fV$, а функция V не имеет нулей и принадлежит классу C^∞, то функция g также принадлежит классу C^∞ и $g(x) = 0$ определяет гиперповерхность Σ. Кроме того, для точки $a \in \Sigma$

$$\overleftarrow{g'(a)} = \overleftarrow{f'(a)}\, V(a) + f(a)\, \overleftarrow{V'(a)} = \overleftarrow{f'(a)}\, V(a) \neq 0,$$

а, следовательно, $g(x) = 0$ есть нормальное уравнение гиперповерхности Σ.

Обратно, пусть $g(x) = 0$ — нормальное уравнение гиперповерхности Σ. Тогда g принадлежит классу C^∞ и обращается в нуль на Σ, т. е., согласно следствию 1, $g = fV$, где V принадлежит классу C^∞. Можно также сказать, что $g(x) = 0$ является нормальным уравнением Σ, а f принадлежит классу C^∞ и обращается в нуль на Σ, т. е. $f = gW$, где W принадлежит классу C^∞. Поэтому $g = fV = gWV$, откуда следует, что $VW = 1$ там, где g не обращается в нуль, т. е. вне Σ. Поскольку W и V непрерывны, то функция WV также непрерывна, а, следовательно, $WV \equiv 1$ всюду. Это означает, что $V \neq 0$ всюду, и следствие доказано.

Замечания. 1°) Интересно отметить, что интегральное исчисление оказывается полезным для изучения таких чисто дифференциальных свойств.

2°) Исходя из следствия 2, *можно доказать* (*но это очень сложно*), *что каждая замкнутая гиперповерхность Σ класса C^∞ аффинного конечномерного пространства может быть полностью определена одним нормальным уравнением $f(x) = 0$.*

Для простоты следующую теорему мы приведем лишь в случае $k = 1$.

Теорема 120. *Пусть Ω — открытое множество пространства $\mathbb{R}^N$ и $\vec{U}$ — некоторая функция на Ω класса C^m со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Предположим, что функция $\vec{U}$ обращается в нуль на пересечении Ω с векторным n-мерным подпространством, определяемым уравнением $x_{n+1} = \ldots = x_N = 0$. Тогда можно найти (вообще говоря, бесконечным числом способов) такие функции $V_{n+1}, V_{n+2}, \ldots, V_N$ класса C^{m-1} на Ω со значениями в $\vec{F}$, что*

$$\vec{U}(x) = x_{n+1}\vec{V}_{n+1}(x) + \ldots + x_n\vec{V}_N(x). \qquad \text{(IV, 11; 67)}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 119. Формула конечных приращений (формула Тейлора для $k-1=0$) применяется здесь к функции $N-n$ переменных: $(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_N) \to \vec{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_{n+1}, \ldots, u_N)$. При этом получается, что

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_N) =$$

$$= \int_0^1 (U'(x_1, x_2, \ldots, x_n, tx_{n+1}, \ldots, tx_N)\cdot(0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_N))\,dt =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{N} x_i \int_0^1 \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, tx_{n+1}, \ldots, tx_N)\,dt. \qquad \text{(IV, 11; 68)}$$

Поэтому для $i = n+1, n+2, \ldots, N$ можно положить

$$\vec{V}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, tx_{n+1}, \ldots, tx_N)\,dt, \qquad \text{(IV, 11; 69)}$$

чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Здесь при $n \leqslant N-2$ единственного решения не будет. К функции $\vec{V}_{N-1}$ можно добавить функцию x_N, а к функции $\vec{V}_N$ функцию x_{N-1}, и это приведет лишь к добавлению и вычитанию $x_{N-1}x_N$ из $\vec{U}$.

Следствие. *Пусть V — многообразие класса C^m открытого множества Ω конечномерного аффинного пространства E, определенное системой нормальных уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_l(x) = 0$. Пусть $\vec{U}$ — функция класса C^m на Ω со* *значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, равная нулю на V. Тогда существует система функций $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_l$ (вообще говоря, их бесконечно много) класса C^{m-1} на Ω со значениями в $\vec{F}$, такая, что*

$$\vec{U} = f_1\vec{V}_1 + f_2\vec{V}_2 + \ldots + f_l\vec{V}_l. \qquad \text{(IV, 11; 70)}$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 теоремы 119 с некоторыми усложнениями, требующими применения разложения единицы. На нем мы останавливаться не будем.