

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава I. Теория множеств	9
§ 1. Множества. Элементарные операции	9
Части множества	9
Отношение включения. Дополнение	10
Объединение. Пересечение	10
Произведение множеств	11
§ 2. Отображения. Функции	11
Примеры отображений	12
Инъекции. Сюръекции. Биекции	13
Образ и прообраз подмножества	13
Множество отображений. Семейства. Последовательности	15
Композиция отображений	15
Замена переменных и замена функций	16
§ 3. Отношения эквивалентности. Фактормножество	17
Классы эквивалентности. Разбиения	18
Фактормножество	19
Факторгруппа по инвариантной подгруппе	19
Факторпространство векторного пространства по векторному подпространству	20
§ 4. Отношения порядка	21
Примеры отношений порядка	22
Мажорируемые части. Мажоранты. Максимум. Точная верхняя грань	23
Возрастающие функции	25
Пополненная прямая	26
§ 5. Мощности. Счетные множества	27
Мощности. Кардинальные числа	27
Счетные множества	31
Мощность континуума	33
Трансцендентные числа	33
Континуум-гипотеза	35
§ 6. Некоторые основные понятия логики	36
Глава II. Топология	40
§ 1. Метрические пространства. Элементарные примеры	40
Сферы. Шары	41
Нормированные векторные пространства	41
§ 2. Открытые и замкнутые части. Окрестности. Внутренность. Граница. Замыкание. Плотные подмножества	44
Открытые части	44
Замкнутые части	45
Окрестности	46

	Внутренность	47
	Внешность	48
	Граница	48
	Замыкание	49
	Плотные подмножества	50
	Подпространства. Индуцированная метрика	50
§ 3.	Непрерывные функции. Гомеоморфизмы	52
	Гомеоморфизмы	54
§ 4.	Метрические пространства и топологические пространства	55
	Топология пополненной прямой $\bar{\mathbb{R}}$	60
§ 5.	Последовательности. Пределы. Сходимости	60
§ 6.	Топологическое произведение	63
	Сходящиеся последовательности в произведении	64
	Непрерывные функции многих переменных	65
	Топологические группы. Топологические векторные пространства	66
	Раздельная непрерывность функции двух переменных	67
§ 7.	Компактные пространства. Элементарные свойства	67
	Локально компактные пространства	74
	Точка сгущения последовательности	75
	Верхний и нижний пределы вещественной последовательности	79
§ 8.	Свойства непрерывных функций на компактных пространствах	79
	Равномерная непрерывность	86
§ 9.	Связные пространства	88
	Линейно связные пространства	90
§ 10.	Дополнение по общей топологии связных пространств	92
	Некоторые применения понятия связности. Критерии негомеоморфности	97
	Существование и непрерывность обратной функции для строго монотонной непрерывной функции	98
	Применение: метрики, определяющие топологию в $\bar{\mathbb{R}}$	99
§ 11.	Полные метрические пространства	100
	Продолжение равномерно непрерывных отображений	104
	Частные свойства конечномерных топологических векторных пространств	106
§ 12.	Теорема о неподвижной точке	107
§ 13.	Элементарная теория нормированных векторных пространств и пространств Банаха	110
	Ядро и образ непрерывного линейного отображения	113
	Произведения нормированных векторных пространств	118
	Билинейные непрерывные отображения произведения нормированных векторных пространств в нормированное векторное пространство	121
	Мультилинейные непрерывные отображения	126
	Алгебры. Нормированные алгебры	127
§ 14.	Ряды в нормированных векторных пространствах	128
	Перестановка членов ряда	130
	Суммирование по блокам безусловно сходящегося ряда	134
	Действие линейного непрерывного отображения на ряд	136
	Произведение двух числовых рядов. Применение билинейного непрерывного отображения к двум рядам	137
	Обратимые отображения в банаховых пространствах	139
	Критерий условной сходимости	142
§ 15.	Наиболее употребительные примеры функциональных пространств.	
	Сходимость простая и равномерная	146
	Функциональные пространства	146
	Простая сходимость последовательности функций	149
	Равномерная сходимость последовательности функций	150

	Другие применения выражения «равномерная сходимос-ть»	152
	Пространства, порожденные структурами пространств E и F	154
	Непрерывность локально равномерного предела последовательности непрерывных функций	155
	Некоторые контрпримеры	157
	Ряды функций со значениями в нормированном векторном пространстве	159
§ 16.	Бесконечные произведения вещественных или комплексных чисел и функций	162
	Бесконечные произведения и логарифмические ряды	164
	Бесконечные произведения вещественных или комплексных функций	167
	Применение к функции ζ Римана	168
Г л а в а III.	Дифференциальное исчисление	174
§ 1.	Аффинные пространства	174
	Аффинные многообразия	176
	Линейные отображения. Аффинные отображения	178
	Аффинные нормированные пространства	179
	Выпуклые множества в аффинных пространствах	183
	Евклидовы векторные и евклидовы аффинные пространства	184
	Эрмитовы векторные и эрмитовы аффинные пространства	187
	Изоморфизм (или полуизоморфизм) конечномерного евклидова (или эрмитова) пространства и его сопряженного пространства	189
	Ортонормированные базисы	190
	Обобщенные евклидовы или эрмитовы пространства	192
§ 2.	Вещественные функции вещественной переменной. Непрерывность справа и слева	195
	Разрывы первого рода. Правильные функции	196
	Производная вещественной функции вещественной переменной	198
	Монотонные функции	202
	Дифференцируемые функции и теоремы о промежуточных значениях	204
	Выпуклые функции	204
§ 3.	Производная отображения одного аффинного пространства в другое. Производный вектор функции скалярной переменной	208
	Общий случай. Частная производная вдоль вектора	209
	Матрица Якоби. Якобиан	211
	Недостатки понятия производной вдоль вектора	212
	Полная производная, или производное отображение	213
	Понятие дифференциала	217
	Геометрическая интерпретация производного отображения: дифференцируемое многообразие и линейное касательное многообразие	218
	Градиент вещественной функции в евклидовом пространстве	221
	Случай, когда F является произведением аффинных пространств	223
	Случай, когда E является произведением аффинных пространств. Частные производные отображения	224
	Производная билинейного непрерывного отображения	225
	Дифференцируемые функции. Непрерывно дифференцируемые функции	227
	Примеры непрерывно дифференцируемых функций	228
	Пространства дифференцируемых функций	229
§ 4.	Теорема о сложной функции	230
	Примеры вычисления обычных производных	235
§ 5.	Формула конечных приращений	247
	Полная дифференцируемость и частная дифференцируемость	253

§ 6.	Производные высших порядков	257
	Последовательные производные	261
	Случай произведения пространств. Полная и частная дифференцируемости	266
	Пространства n раз дифференцируемых функций	267
	Производная произведения (формула Лейбница)	268
§ 7.	Формула Тейлора. Максимум и минимум	272
	Применение формулы Тейлора для вычисления производных	276
	Формула Тейлора относительно некоторой системы координат	279
	Применение к изучению максимумов и минимумов. Определения	285
	Необходимые условия экстремума	285
	Нахождение необходимых и достаточных условий экстремума функции	287
	Частный случай вещественной функции f двух вещественных переменных x, y	290
	Применение формулы Тейлора к изучению расположения гиперповерхности по отношению к касательной гиперплоскости	292
§ 8.	Теорема о неявной функции. Постановка задачи	293
	Существование неявной функции	294
	Дифференцируемость неявной функции	298
	Дифференцируемость функции $u \rightarrow u^{-1}$ на $\mathcal{L}(\vec{F}; \vec{G})$	300
	Частный случай, когда $E = F = G = \mathbb{K}$ — скалярное поле	306
	Случай, когда E, F, G конечномерны	308
	Обратная функция как неявная функция	309
	Вычисление производных высших порядков неявной функции	314
	Техника замены переменных и замены функций	318
§ 9.	Дифференцируемые многообразия	319
	Определение многообразия при помощи его параметрического представления	321
	Определение многообразия с помощью неявных уравнений	331
	Вещественные и комплексные многообразия	333
	Абстрактные многообразия	334
	Векторное пространство, касательное в точке к многообразию аффинного пространства E размерности N	338
	Векторное пространство, касательное к абстрактному многообразию в точке	343
	Теорема о постоянном ранге	345
	Зависимые и независимые функции	350
	Особые, или параметрические, многообразия	352
§ 10.	Условные максимумы и минимумы	353
	Практический способ вычисления условного максимума или минимума	356
	Применение теории условных максимумов. Неравенства Гельдера и Минковского	358
§ 11.	Вариационное исчисление	369
	Постановка задачи	369
	Дифференцируемость J	372
	Необходимые условия экстремума	378
	Лемма Хаара	379
	Простые случаи интегрируемости уравнений Эйлера	383
	Уравнение геодезических на поверхности	389
	Относительный экстремум	393
	Замена переменных	394
	Приложение к задаче о геодезических	396
	Переменные концы. Условие трансверсальности	400
	Применение к геодезическим кривым	405

Канонические уравнения Гамильтона	406
Применения к механике	409
Вариационное исчисление для кратных интегралов	410
Глава IV. Интегральное исчисление	416
§ 1. Интеграл Римана на прямой	416
Ступенчатые функции	418
Верхний интеграл Римана от ограниченной функции $f > 0$ с компактным носителем	421
Интегрируемые функции со значениями в пространстве Банаха	423
Интеграл от интегрируемой функции	425
Примеры интегрируемых по Риману функций	433
Вычисление интеграла функции с помощью сумм Коши — Римана	435
Среднее значение функции на интервале	438
§ 2. Меры Радона на локально компактном пространстве	439
Мера Радона на компактном пространстве	439
Примеры мер Радона	440
Меры на локально компактном пространстве	446
Примеры мер Радона	448
Применения к механике и физике	450
Векторные меры	450
Разложение единицы	452
Носитель меры Радона	465
Продолжение меры на непрерывные функции φ с некомпактным носителем	473
Принцип кусочной склейки мер	475
Комплексные и вещественные меры	476
Вещественные положительные меры	478
Решетки	481
§ 3. Продолжение положительной меры. Теория Лебега	489
Внешние меры открытых множеств	490
Внутренняя мера компакта	492
Измеримые множества. Мера множеств	494
Множества нулевой меры	506
Свойства, выполняющиеся почти всюду	508
μ -измеримые функции со значениями в метризуемом сепарабельном пространстве	510
μ -этажные функции	513
Борелевские функции	517
Интеграл от векторной этажной функции	520
Верхний интеграл от вещественной неотрицательной функции	520
Интегрируемость функций с векторными значениями	524
Интеграл Лебега от функции с векторными значениями	524
Интегрируемость и интегралы от функций, определенных почти всюду	533
§ 4. Теорема Лебега о сходимости. Пространство L^1	534
Примеры применений теоремы Лебега	540
Характеристика интегрируемых функций. Интегрируемость и измеримость	551
Теория интегрирования, основанная на свойствах непрерывных и полунепрерывных снизу функций	555
Пространства $\mathcal{L}^p(X, \mu; \vec{F})$	561
Пространства $\mathcal{L}^p(X, \mu; \vec{F})$. Теорема Фишера — Рисса	572
Пространства $\mathcal{L}^\infty(\vec{F})$ и $L^\infty(\vec{F})$	574
Продолжение мер, не обладающих свойством неотрицательности	578

§ 5. Умножение меры на функцию	590
Произведение векторной меры на непрерывную скалярную функцию	590
Элементарные свойства	591
Случай когда μ — вещественная мера ≥ 0	591
Мера с базой μ . Мера с базой ≥ 0	594
Применение к продолжению меры с векторными значениями	610
Применение к интегрируемости функции по нескольким мерам	612
Сопряженность пространств L^p и $L^{p'}$	614
§ 6. Образ меры при отображении	617
Случай, когда H является гомеоморфизмом X на Y	626
Обобщение теоремы §9 на случай, когда μ не ≥ 0	627
Различные примеры образов мер	628
§ 7. Широкая сходимость мер Радона	630
Сходимость по норме. Локальная сходимость по норме	630
Широкая сходимость	632
Функции, μ -интегрируемые по Риману	634
Широкая сходимость и равномерная сходимость	641
Компактные подмножества пространства $\mathcal{C}_k(X)$	645
Широкая сходимость последовательности мер к мере Дирака	646
Узкая сходимость последовательности мер конечной нормы	652
Сходимость широкая и сходимость узкая	654
§ 8. Тензорное произведение мер. Кратные интегралы	657
Постановка задачи	657
Существование и единственность тензорного произведения	658
Примеры тензорных произведений	662
Элементарные свойства	663
Носитель меры $\mu \otimes \nu$	663
Вычисление двойного интеграла путем двух последовательных простых интегрирований	664
Случай, когда интегрируемая функция является произведением функции от x и функции от y	673
Окончание доказательства прямого утверждения теоремы	675
Обобщение на произвольные кратные интегралы	677
Широкая сходимость тензорных произведений	679
§ 9. Частные свойства мер Радона на вещественной прямой \mathbb{R}	682
Введение символа $\int_a^b d\mu$	682
Неопределенные интегралы	683
Функции с ограниченной вариацией на прямой	686
Функция, удовлетворяющая условию Липшица на ограниченном интервале \mathbb{R}_1 прямой \mathbb{R} , имеет ограниченную вариацию	687
Функции ограниченной вариации и неопределенные интегралы	694
Длина пути в метрическом пространстве	701
Неопределенный интеграл и первообразная	706
Последовательные первообразные непрерывной функции на прямой	711
Формула интегрирования по частям	716
Замена переменных при вычислении простых интегралов	720
Несобственные интегралы на прямой	724
Примеры применения критерия Абеля	732
Главное значение в смысле Коши	736
§ 10. Кратные интегралы на \mathbb{R}^n . Длины, площади и объемы в конечномерном аффинном евклидовом пространстве. Замена переменных в кратных интегралах на \mathbb{R}^n	742

Измерение объемов в аффинных евклидовых конечномерных пространствах	754
Измерение длин в аффинном евклидовом пространстве	756
Измерение n -мерных площадей в линейном многообразии размерности n аффинного евклидова конечномерного пространства	756
n -мерная площадь n -мерного параметрического многообразия	760
Вычисление объемов с помощью поверхностных интегралов	770
§ 11. Функции, представимые рядами или интегралами	777
Функции, представимые рядами	777
Непрерывность суммы ряда	778
Интегрируемость суммы ряда относительно некоторой меры ≥ 0	778
Дифференцируемость суммы ряда	779
Дифференцируемость бесконечного произведения	787
Функции, представимые интегралами	792
Непрерывность функции, представимой интегралом	792
Интегрируемость функции, представимой интегралом	793
Дифференцируемость функции, представимой интегралом	794
Случай несобственных сходящихся интегралов	799
Применение к делимости дифференцируемых функций	804
Предметный указатель	811