ГЛАВА V

Дифференциальные уравнения

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Какие вопросы можно изучить, рассматривая дифференциальное уравнение вида

$$\vec{y}' = \vec{L}(x, y)? \tag{V, 1; 1}$$

Пусть заданы открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал $|a, b|$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ [1]), открытое множество Ω аффинного нормированного пространства F [2]) и *непрерывное* отображение $\vec{L}$ множества $|a, b| \times \Omega$ в $\vec{F}$. Выясним, существует ли на $|a, b|$ такая дифференцируемая функция f: $y = f(x)$ со значениями в Ω, чтобы для нее и ее производной функции имело место тождество

$$\vec{f}'(x) \equiv \vec{L}(x, f(x)). \tag{V, 1; 2}$$

Согласно теореме о сложной функции, при такой постановке вопроса функция $\vec{f}'$ всегда будет непрерывной, а, значит, функция f будет не только дифференцируемой, но и непрерывно дифференцируемой.

Функция, обладающая этими свойствами, называется *решением* или *интегралом* дифференциального уравнения.

В частном случае, когда F есть пространство $\mathbb{R}^n$, задание функции f равносильно заданию системы n скалярных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Отображение $\vec{L}$ эквивалентно системе n

---

[1]) Значениями a и b могут быть $-\infty$ и $+\infty$, но тогда $|a, b|$ их не содержит и, следовательно, $|a, b| \subset \mathbb{R}$, а не $\overline{\mathbb{R}}$.

[2]) Пространство F — аффинное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, но $|a, b|$ — это всегда интервал в $\mathbb{R}$; $\vec{f}'(x)$ есть производный вектор, т.е., согласно определению (III, 3; 1), это элемент из $\vec{F}$. Если заменить $\mathbb{R}$ аффинным нормированным пространством E, то мы получим *уравнение в полных дифференциалах*, обладающее существенно иными свойствами. Случай, когда E является полем комплексных чисел, будет изучен позже.

непрерывных скалярных функций $L_1, L_2, \ldots, L_n$, зависящих от $n+1$ переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, а дифференциальное уравнение эквивалентно «дифференциальной системе»:

$$\begin{aligned} y_1' &= L_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= L_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= L_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 1; 3)$$

Интеграл или решение такой дифференциальной системы представляет собой систему n скалярных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, удовлетворяющих следующим тождествам:

$$f_i'(x) \equiv L_i(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (\mathrm{V}, 1; 4)$$

Выписанные дифференциальные уравнения являются уравнениями первого порядка в том смысле, что в них входит производная только первого порядка. Естественно, что можно рассматривать уравнения и высших порядков, но они сводятся к уравнениям первого порядка.

Рассмотрим, например, следующее дифференциальное уравнение:

$$\vec{y}^{(p)} = L(x, y, \vec{y}', \vec{y}'', \ldots, \vec{y}^{(p-1)}). \qquad (\mathrm{V}, 1; 4_2)$$

Будем считать, что $|a, b|$ — это интервал вещественной прямой, F — аффинное нормированное пространство, $\mathcal{U}$ — открытое множество пространства $F \times \vec{F}^{(p-1)}$ и $\vec{L}$ — непрерывное отображение $|a, b| \times \mathcal{U}$ в $\vec{F}$. Мы отыскиваем функцию f, определенную на $|a, b|$, принимающую значения в F, p раз дифференцируемую и такую, что для каждого x из $|a, b|$ точка $(f(x), \vec{f}'(x), \ldots, \vec{f}^{(p-1)}(x))$ лежит в $\mathcal{U}$ и имеет место тождество

$$\vec{f}^{(p)}(x) \equiv L(x, f(x), \vec{f}'(x), \ldots, \vec{f}^{(p-1)}(x)). \qquad (\mathrm{V}, 1; 5)$$

Положим

$$f = g_0, \quad \vec{f}' = \vec{g}_1, \ \ldots, \ \vec{f}^{(p-1)} = \vec{g}_{p-1}. \qquad (\mathrm{V}, 1; 6)$$

Очевидно, отыскание функции f равносильно нахождению системы функций $g_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{p-1}$, удовлетворяющих дифференциальной системе:

$$
\begin{aligned}
\vec{g}_0' &= \vec{g}_1, \\
\vec{g}_1' &= \vec{g}_2, \\
&\cdots\cdots \\
\vec{g}_{p-2}' &= \vec{g}_{p-1}, \\
\vec{g}_{p-1}' &= L(x, g_0, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{p-1}).
\end{aligned}
\qquad (V, 1; 7)
$$

Эта система представляет собой дифференциальное уравнение, аналогичное рассматривавшемуся ранее уравнению, в котором пространство F заменено произведением $F \times \vec{F}^{p-1}$, а открытое множество Ω — множеством $\mathcal{U}$. Полагая $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}) = z$, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\vec{z}' = \mathcal{L}(x, z), \qquad (V, 1; 8)$$

где $z = g(x) = (g_0(x), \vec{g}_1(x), \ldots, \vec{g}_{p-1}(x))$, а $\vec{\mathcal{L}}$ есть отображение $(x, (y_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{p-1})) \to (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{p-1}, L(x, y_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{p-1}))$ множества $|a, b| \times \mathcal{U}$ в $\vec{F}^p$.

Мы предполагали, что рассматриваемое дифференциальное уравнение *регулярно*, т. е. разрешимо относительно производной высшего порядка. На практике это часто не так, что приводит к многочисленным трудностям, и в частности к отсутствию решения или к существованию нескольких решений, соответствующих заданным начальным условиям. В теоремах, которые мы приведем в дальнейшем, *всегда* будет предполагаться, что уравнение разрешено относительно производной наивысшего порядка, т. е. всегда представлено в виде (V, 1; 1).

Для такого уравнения задание значения y_0 решения f в точке x_0 интервала $|a, b|$ называется *условием Коши*. Коротко говорят так: «условие Коши x_0, y_0». Если задано дифференциальное уравнение порядка p вида (V, 1; 4), то, учитывая, что оно может быть приведено к виду (V, 1; 1), можно условие Коши записать в виде значения $z_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{p-1})$ функции $z = g(x)$ для $x = x_0$, т. е. значения функции f и ее производных порядков $1, 2, \ldots, p-1$ в точке x_0 интервала $|a, b|$.

Пользуясь некоторыми условиями, относящимися к функции $\vec{L}$, докажем, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение, соответствующее заданному условию Коши.