§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Дадим прежде всего следующее определение.

Говорят, что ограниченный интервал $J = |x_0 - \alpha, x_0 + \beta|$, $\alpha, \beta > 0$, содержащийся в $|a, b|$, и замкнутый шар B с центром y_0 радиуса $R > 0$ (конечного или бесконечного), содержащийся в Ω, *образуют интервал и шар безопасности для* $\vec{L}$ *относительно* $x_0 \in |a, b|$, $y_0 \in \Omega$, если существует такое число $M \geqslant 0$ (конечное или бесконечное), что, с одной стороны, норма $\|\vec{L}(x, y)\|$ будет мажорироваться числом M на произведении $J \times B$, а с другой стороны, имеют место неравенства $\alpha \leqslant R/M$, $\beta \leqslant R/M$ [1]). Система интервала и шара безопасности *всегда существует*. В самом деле, так как функция $\vec{L}$ предполагалась непрерывной, то можно выбрать интервал $J_1 = |x_0 - \alpha_1, x_0 + \beta_1|$ и шар B с центром y_0 радиуса R, такие, чтобы отображение $\vec{L}$ было ограниченным на $J_1 \times B$. Пусть M — граница $\|\vec{L}(x, y)\|$ в $J_1 \times B$. Выберем интервал $J = |x_0 - \alpha, x_0 + \beta|$, где α и β определены соотношениями $\alpha = \inf(\alpha_1, R/M)$, $\beta = \inf(\beta_1, R/M)$. Тогда J и B будут удовлетворять требуемым условиям.

Конечно, можно, если это потребуется по тем или иным причинам, заменить число R меньшим числом R'. Но тогда при выбранном R' *будут снова определяться числа* α' и β'. Таким образом, если J, B составляют систему безопасности и если $J' \subset J$ и $B' \subset B$, то J', B' не обязательно образуют систему безопасности, однако J', B такую систему образуют.

Мы будем говорить, что отображение $\vec{L}$ *локально обладает свойством Липшица по* y *в* $|a, b| \times \Omega$, если, каковы бы ни были точки x_0 из $|a, b|$ и y_0 из Ω, существуют такие окрестности $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ этих точек и такое число $k \geqslant 0$, что для $x \in \mathscr{A}$, $y_1 \in \mathscr{B}$, $y_2 \in \mathscr{B}$ имеет место неравенство

$$\|\vec{L}(x, y_1) - \vec{L}(x, y_2)\| \leqslant k \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \qquad (V, 2; 1)$$

В этом случае при заданных x_0 и y_0 можно, как и ранее, определить интервал безопасности J и шар безопасности

[1]) Только в этой главе мы позволяем себе полагать $R = +\infty$, чтобы при $B = F$ продолжать говорить о B как о шаре с центром y_0. В этом случае можно положить $M = +\infty$. Числа α и β тогда могут быть произвольными, но конечными (интервал J должен быть ограниченным). В особом случае, когда точка x_0 совпадает с левым концом a (соответственно с правым концом b) интервала $|a, b|$, интервал безопасности будет иметь вид $[a, a + \beta|$, $\beta > 0$ (соответственно $|b - \alpha, b]$, $\alpha > 0$). *Существенным является тот факт, что такой интервал безопасности является некоторой окрестностью точки* x_0 *в* $|a, b|$. Мы больше не будем говорить об этих особых случаях. Если это потребуется, читатель сам внесет необходимые изменения.

B так, чтобы отображение $\vec{L}$ обладало свойством Липшица по y в $J \times B$, т. е. удовлетворяло неравенству (V, 2; 1) для $x \in J$, $y_1 \in B$ и $y_2 \in B$.

Существование и единственность локальных решений

Теорема 1 (Коши). *Пусть задано дифференциальное уравнение* (V, 1; 1), *в котором $\vec{L}$ является непрерывным отображением $|a, b| \times \Omega$ в полное пространство $\vec{F}$, локально обладающим свойством Липшица по y. Тогда при заданном условии Коши x_0, y_0 и такой системе интервала безопасности J и шара безопасности B относительно x_0, y_0, что функция $\vec{L}$ обладает в $J \times B$ свойством Липшица по y, рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение f, удовлетворяющее заданному условию Коши $f(x_0) = y_0$, определенное в J и такое, что $f(J) \subset B$.*

Доказательство. Мы можем заменить дифференциальное уравнение с начальным условием на эквивалентное ему интегральное уравнение. В самом деле, если дифференцируемая функция f является решением дифференциального уравнения и удовлетворяет начальному условию $f(x_0) = y_0$, то в силу непрерывности f и $\vec{L}$ функция $x \to \vec{L}(x, f(x))$ по теореме о сложной функции непрерывна, а из следствия 1 теоремы 89 гл. II вытекает, что f как первообразная этой функции есть неопределенный интеграл. Таким образом, f — непрерывная функция, являющаяся решением интегрального уравнения

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad \text{(V, 2; 2)}$$

Обратно, если непрерывная функция f является решением этого интегрального уравнения, то та же самая теорема 89 гл. II утверждает, что правая часть равенства (V, 2; 2) дифференцируема и ее производная функция равна $x \to \vec{L}(x, f(x))$. Следовательно, f — решение дифференциального уравнения. Кроме того, очевидно, что $f(x_0) = y_0$.

Обозначим через E метрическое пространство $(B^J)_{cb}$ непрерывных ограниченных отображений J в B. Пусть f — некоторый элемент E. Исходя из функции f, построим функцию g, определенную на J со значениями в F, по формуле

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad \text{(V, 2; 3)}$$

В силу выбора интервала и шара безопасности эта функция принимает в действительности свои значения не в F, а в шаре безопасности B. Это видно из следующих неравенств:

$$\|\overrightarrow{g(x)-y_0}\| \leqslant |x-x_0| \sup_{\xi \in J} \|\vec{L}(\xi, f(\xi))\| \leqslant$$
$$\leqslant |x-x_0| \sup_{\substack{\xi \in J \\ \eta \in B}} \|\vec{L}(\xi, \eta)\| \leqslant \frac{R}{M} M = R. \qquad (V, 2; 4)$$

Итак, каждому элементу f из E мы поставили в соответствие другой элемент g из E и, следовательно, определили некоторое отображение Φ пространства E в E: $g = \Phi(f)$. Рассматриваемое интегральное уравнение эквивалентно уравнению

$$f = \Phi(f). \qquad (V, 2; 5)$$

Для того чтобы доказать, что это уравнение имеет решение, и притом единственное, нам достаточно будет показать, что мы находимся в условиях применимости теоремы о неподвижной точке (теорема 46 гл. II).

Множество E — это полное метрическое пространство. В самом деле, шар B замкнут в полном по предположению пространстве F; следовательно, по теореме 43 гл. II он полон, а тогда в силу следствия 2 теоремы 65 гл. II множество $(B^J)_{cb}$ полно. Проверим теперь, является ли отображение Φ сжатием пространства E. Для $u \in E$ и $v \in E$ в силу (V, 2; 1)

$$\|\vec{L}(\xi, u(\xi)) - \vec{L}(\xi, v(\xi))\| \leqslant$$
$$\leqslant k \|\overrightarrow{u(\xi) - v(\xi)}\| \leqslant kd(u, v) \quad \text{для} \quad \xi \in J, \qquad (V, 2; 6)$$
$$d(\Phi(u), \Phi(v)) \leqslant \sup(\alpha, \beta)\, kd(u, v), \qquad (V, 2; 7)$$

поскольку $|x - x_0| \leqslant \sup(\alpha, \beta)$. Мы получили соотношение Липшица, в котором коэффициент Липшица не обязательно < 1, а значит, Φ не обязательно является сжатием. Однако при выбранном шаре B всегда можно, заменяя α или β на меньшие числа α_0, β_0, такие, что $\max(\alpha_0, \beta_0) < 1/k$, заменить интервал J меньшим интервалом J_0 так, чтобы отображение Φ было сжатием[1]). Однако это не обязательно, так как мы сейчас уви-

[1]) Можно было бы довольствоваться и этим, слегка изменив условие: вместо того, чтобы говорить: «*какова бы ни была* система безопасности J, B, такая, что $\vec{L}$ обладает свойством Липшица в $J \times B$, существует решение, и притом единственное», достаточно было бы сказать: «*существует* такая система безопасности $J_0 \times B$, при которой существует, и притом единственное решение ...».

Если речь идет лишь о теории дифференциальных уравнений, то такое дим, что при любом выборе J и B *всегда существует некоторая итерация отображения* Φ, *являющаяся сжатием*. В самом деле, отправляясь от двух произвольных элементов u и v пространства E, построим их образы с помощью последовательных итераций функции Φ. Имеем $u_0 = u$, $u_1 = \Phi(u_0)$, ..., $u_n = \Phi(u_{n-1})$, ... и $v_0 = v$, $v_1 = \Phi(v_0)$, ..., $v_n = \Phi(v_{n-1})$, ... Для этих итераций справедливы оценки

$$\|\overrightarrow{u_1(x) - v_1(x)}\| \leqslant |x - x_0| kd(u_0, v_0). \qquad (V, 2; 8)$$

Так как

$$\overrightarrow{u_2(x) - v_2(x)} = \int_{x_0}^{x} (\vec{L}(\xi, u_1(\xi)) - \vec{L}(\xi, v_1(\xi)))\, d\xi, \qquad (V, 2; 8_2)$$

то

$$\|\overrightarrow{u_2(x) - v_2(x)}\| \leqslant \int_{|x_0, x|} k \|\overrightarrow{u_1(\xi) - v_1(\xi)}\| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant k^2 d(u_0, v_0) \int_{|x_0, x|} |\xi - x_0| d\xi = \frac{(x - x_0)^2}{2} k^2 d(u_0, v_0). \qquad (V, 2; 9)$$

Легко получить общую формулу. Предположим, что нами уже доказано неравенство

$$\|\overrightarrow{u_{n-1}(x) - v_{n-1}(x)}\| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} k^{n-1} d(u_0, v_0), \qquad (V, 2; 10)$$

и покажем, что такое же неравенство имеет место для $u_n - v_n$. В самом деле,

$$\overrightarrow{u_n(x) - v_n(x)} = \int_{x_0}^{x} (\vec{L}(\xi, u_{n-1}(\xi)) - \vec{L}(\xi, v_{n-1}(\xi)))\, d\xi, \qquad (V, 2; 11)$$

откуда

$$\|\overrightarrow{u_n(x) - v_n(x)}\| \leqslant \int_{|x_0, x|} k \|\overrightarrow{u_{n-1}(\xi) - v_{n-1}(\xi)}\| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant k^n d(u_0, v_0) \int_{|x_0, x|} \frac{|\xi - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} d\xi = \frac{|x - x_0|^n}{n!} k^n d(u_0, v_0).$$

изменение условия не отражается на существе дела, ибо в любом случае теорема 2 позволит обнаружить решение во всей области существования.

Однако в разделах, близких к теории дифференциальных уравнений (интегральные уравнения), в которых необходимо иметь все решение целиком, а не кусок этого решения, сужать так условия нельзя. Кроме того, часто полезно иметь в своем распоряжении *как можно больший* интервал J, в котором процесс последовательных приближений дает искомое решение.

Таким образом, итерация Φ^n отображения Φ удовлетворяет неравенству

$$d(\Phi^n(u), \Phi^n(v)) \leqslant \frac{(\sup(\alpha, \beta))^n}{n!} k^n d(u, v). \qquad (V, 2; 12)$$

Для достаточно больших значений n имеем

$$\frac{(\sup(\alpha, \beta))^n}{n!} k^n < 1,$$

а это означает, что соответствующая итерация Φ^n является сжатием на E. Из замечания, следующего после теоремы 46 гл. II, вытекает, что в этом случае применим метод последовательных приближений и что существует, и притом единственная, неподвижная точка преобразования Φ. Тем самым доказаны существование и единственность решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Только что полученные оценки показывают, кроме того, что если это решение f искать методом последовательных приближений, то можно получить его представление в виде ряда

$$\begin{aligned} f &= f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \dots + (f_n - f_{n-1}) + \dots, \\ f_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(\xi, f_{n-1}(\xi))\, d\xi, \end{aligned} \qquad (V, 2; 13)$$

при этом будет выполняться неравенство

$$|||\overrightarrow{f_n - f_{n-1}}||| \leqslant \frac{(\sup(\alpha, \beta))^{n-1}}{(n-1)!} k^{n-1} |||\overrightarrow{f_1 - f_0}|||. \qquad (V, 2; 14)$$

Общий член ряда очень быстро убывает, как убывают члены ряда, представляющего экспоненциальную функцию.

Замечания. 1°) В случае конечномерного F можно показать, что одной только непрерывности $\vec{L}$ *без условия Липшица* достаточно для того, чтобы дифференциальное уравнение имело *по крайней мере* одно локальное решение, удовлетворяющее заданному условию Коши. Другими словами, существование решения всегда обеспечено и *может быть только нарушено условие единственности.* Если же F бесконечномерно, а $\vec{L}$ только непрерывно, то, возможно, мы не получим ни существования, ни единственности.

Очень простой пример показывает, что если $\vec{L}$ не удовлетворяет условию Липшица, то при одном и том же условии Коши дифференциальное уравнение может иметь несколько решений. Рассмотрим, например, скалярное дифференциальное уравнение ($F = \mathbb{R}$):

$$y' = 3y^{2/3}. \qquad (V, 2; 15)$$

Так как отношение $\frac{|y^{2/3}-0|}{|y-0|}=\frac{1}{|y|^{1/3}}$ не ограничено при $y\neq 0$, стремящемся к 0, то в окрестности точки $y=0$ условие Липшица не выполняется.

Общее решение этого уравнения таково:

$$y=(x-c)^3, \text{ где } c \text{ — постоянная и } y=0. \qquad (V, 2; 16)$$

Если мы будем искать решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию $y=0$ при $x=0$, то увидим, что таких решений имеется бесчисленное множество, и в частности четыре следующих решения:

$$\text{a) } y=0; \qquad \text{b) } y=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0, \\ x^3 & \text{для } x>0; \end{cases}$$

$$\text{c) } y=\begin{cases} x^3 & \text{для } x<0, \\ 0 & \text{для } x\geqslant 0; \end{cases} \qquad \text{d) } y=x^3. \qquad (V, 2; 16_2)$$

2°) Легко видеть, что ограничение интервалом безопасности J и шаром безопасности B необходимо. Эта система безопасности играет тройную роль:

a) Для того чтобы имело место неравенство (V, 2; 12), интервал J должен быть ограниченным (интервал $|a, b|$ не обязательно ограничен и может совпадать со всей прямой $\mathbb{R}$).

b) Для того чтобы можно было применить теорему о неподвижной точке, пространство E должно быть таким, чтобы отображение Φ не выводило бы за его пределы. Однако если окажется, что L определено на $|a, b|\times F$ (другими словами, если $\Omega=F$), то можно, с этой точки зрения, положить $R=M=+\infty$, $E=(F^J)_{cb}$, где J — произвольный ограниченный интервал из $|a, b|$.

c) Условие Липшица предполагается выполненным только локально, и надо выбирать J и B так, чтобы оно выполнялось в $J\times B$. Эта необходимость, очевидно, исчезает, если предполагать, что $\vec{L}$ удовлетворяет глобальному условию Липшица, т. е. имеет место соотношение (V, 2; 1) при любом $x\in|a, b|$ и любых y_1, y_2 в Ω.

Отсюда следует, что *если $\vec{L}$ непрерывно на $|a, b|\times F$ и удовлетворяет условию Липшица* (V, 2; 1) *в множестве $|a, b|\times F$, то в системе безопасности необходимости нет и решение дифференциального уравнения существует, и притом оно единственно на всем $|a, b|$. Последовательные приближения сходятся всюду и притом равномерно на каждой ограниченной части интервала $|a, b|$.*

Мы сейчас приведем пример, в котором $\vec{L}$ определено на $\mathbb{R} \times F$, *всюду принадлежит классу* C^∞, но решение дифференциального уравнения, однако, существует только в малом интервале с центром в начальной точке x_0. Конечно, условие Липщица здесь будет выполнено только локально.

В самом деле, рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$y' = -y^2. \tag{V, 2; 17}$$

Регулярность правой части позволяет заранее надеяться, что решение будет определено на всей вещественной прямой. Решая это уравнение, находим

$$y = \frac{1}{x-c}, \quad \text{где} \quad c \text{ — постоянная и } y = 0. \tag{V, 2; 18}$$

Мы видим, что при заданной постоянной c решение имеет *непредвиденную особенность* $x = c$. Если мы выберем начальное условие в виде $f(0) = y_0 = -1/c$, $c > 0$, то можем быть уверенными в том, что интервал безопасности не дойдет до точки c. Выясним здесь, что представляют собой J и B.

Возьмем, например, в качестве B шар с центром y_0 и радиусом R. Тогда $M = (1/c + R)^2$, откуда $\beta = R/(1/c + R)^2$. Нам хотелось бы выбрать R так, чтобы β было как можно большим. Однако величина, стоящая в правой части предыдущего равенства, меньше c, поскольку $R < c(1/c + R)^2$ — неравенство, эквивалентное неравенству $R < 1/c + 2R + cR^2$, которое всегда справедливо, так как $R < 2R$.

Распространение метода на решение некоторых интегральных уравнений

Пусть теперь F — *полное* аффинное нормированное пространство, Ω — открытое множество пространства F, $|a, b|$ — интервал прямой $\mathbb{R}$ и $\vec{L}$ — непрерывное отображение $(x, \xi, y) \to \vec{L}(x, \xi, y)$ множества $|a, b| \times |a, b| \times \Omega$ в пространство $\vec{F}$.

Пусть, кроме того, $x \to h(x)$ — непрерывная функция на $|a, b|$ со значениями в F и x_0 — некоторая точка $|a, b|$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x) = h(x) + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(x, \xi, f(\xi))\, d\xi, \tag{V, 2; 19}$$

где f — искомая функция, непрерывная на $|a, b|$ со значениями в Ω. Так как искомая функция f находится под знаком интеграла, то написанное уравнение называется *интегральным.*

Это уравнение является обобщением уравнения (V, 2; 2), эквивалентного некоторому дифференциальному уравнению с начальными условиями. Здесь вместо y_0 написано $h(x)$, а $\vec{L}$ зависит от x и ξ, т. е. x также находится под знаком интеграла. Это уравнение не сводится к дифференциальному уравнению. *В данном случае ищется, вообще говоря, решение f, определенное на всем интервале* $|a, b|$.

Теорема 1_2. *Пусть заданы точка $y_0 \in F$, число $R \geqslant 0$ (конечное или бесконечное), число $M \geqslant 0$ (конечное или бесконечное) и число $k \geqslant 0$, такие, чтобы шар $B = B(y_0; R)$ с центром y_0 радиуса R лежал в Ω и чтобы выполнялись следующие условия:*

1°) *для* $x \in |a, b|$, $\xi \in |a, b|$, $y \in B$ *имеет место неравенство*

$$\|\vec{L}(x, \xi, y)\| \leqslant M; \qquad (V, 2; 20)$$

2°) *для* $x \in |a, b|$, $\xi \in |a, b|$ *и* y_1, y_2, *принадлежащих тому же шару* B, *имеет место неравенство Липшица*

$$\|\vec{L}(x, \xi, y_1) - \vec{L}(x, \xi, y_2)\| \leqslant k \|\overrightarrow{y_1 - y_2}\|; \qquad (V, 2; 20_2)$$

3°) *для всех* x *из* $|a, b|$ *имеет место неравенство*

$$\|\overrightarrow{h(x) - y_0}\| + |x - x_0| M \leqslant R. \qquad (V, 2; 20_3)$$

Тогда интегральное уравнение (V, 2; 19) *имеет, и притом единственное, решение, принимающее значения в B и определяемое методом последовательных приближений, равномерно сходящихся на любом ограниченном интервале $|a', b'|$ интервала $|a, b|$.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1, где $E = (B^{|a', b'|})_{cb}$, а отображение Φ: $f \to g = \Phi(f)$ из E в E определяется по формуле

$$g(x) = h(x) + \int_{x_0}^{x} \vec{L}(x, \xi, f(\xi))\, d\xi. \qquad (V, 2; 20_4)$$

Замечание. Предположим, что мы можем взять $R = +\infty$, $M = +\infty$ и что для каждого ограниченного интервала $|a', b'|$ из $|a, b|$ существует число $k = k(a', b')$ (но не для самого интервала $|a, b|$). Тогда заключение теоремы сохраняет свою силу.

Продолжение локальных решений дифференциального уравнения

Интервал J, выбранный с помощью предыдущего метода, является таким интервалом, в котором имеет место теорема о неподвижной точке и применим метод последовательных приближений. *Этот интервал не обязательно совпадает с наибольшим интервалом, в котором существует решение дифференциального уравнения.*

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы* 1 *на некотором подинтервале* $|a_1, b_1|$ *интервала* $|a, b|$ *два решения дифференциального уравнения принимают одно и то же значение в точке* c, *то эти решения совпадают во всем интервале* $|a_1, b_1|$.

Доказательство. Пусть J, B есть система безопасности относительно точки c. Поскольку решения f_1 и f_2 непрерывны, то можно найти такой меньший интервал $J' \subset J$, что $f_1(J') \subset B$ и $f_2(J') \subset B$. Тогда J', B также будет системой безопасности. Поскольку в J' существует единственное решение, принимающее заданное значение в точке c, значения которого лежат в B (теорема 1), то f_1 и f_2 совпадают в J'. Следовательно, если решения f_1 и f_2 совпадают в некоторой точке интервале $|a_1, b_1|$, то они необходимо совпадают в некоторой окрестности этой точки. Таким образом, множество $\mathscr{E}$ тех точек x, в которых $f_1(x) = f_2(x)$, есть непустое открытое множество из $|a_1, b_1|$. Это множество также и замкнуто, поскольку оно является прообразом множества $\{\vec{0}\} \in \vec{F}$ при непрерывном отображении $\overrightarrow{f_1 - f_2}$ отрезка $|a_1, b_1|$ в $\vec{F}$. Поскольку отрезок $|a_1, b_1|$ связен, мы получаем, что $\mathscr{E} = |a_1, b_1|$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Для дифференциального уравнения* (V, 1; 1), *удовлетворяющего условиям теоремы* 1 *и условию Коши* x_0, y_0, *существует максимальный интервал* $|a_0, b_0|$, $a \leqslant a_0 \leqslant x_0 \leqslant \leqslant b_0 \leqslant b$, *в котором существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию Коши* x_0, y_0. *Это решение единственно в этом интервале. Его нельзя продолжить до точки* a_0, *кроме, возможно, того случая, когда* $a_0 = a$, *и продолжить до точки* b_0, *кроме, быть может, того случая, когда* $b_0 = b$ [1]).

Доказательство. В самом деле, рассмотрим все такие точки γ, при которых существует решение дифференциального уравнения, соответствующее условию Коши x_0, y_0 в интервале $[x_0, \gamma]$. Согласно теореме, если γ_1 и γ_2 — две такие точки, $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$, то решение, определенное в $[x_0, \gamma_1]$, является продолжением решения, определенного в $[x_0, \gamma_2]$. Множество всех таких чисел γ имеет точную верхнюю грань b_0 в $\overline{\mathbb{R}}$. Решение тогда, очевидно, существует в интервале $[x_0, b_0[$.

[1]) Иначе говоря, $]a_0, b_0[$ является открытым интервалом $\overline{\mathbb{R}}$, кроме, быть может, того случая, когда $a_0 = a$ или $b_0 = b$.

Покажем, что если $b_0 < b$, то это решение не может быть продолжено до точки b_0, т. е. $f(x)$ *не имеет предела, когда* $x < b_0$ *стремится к* b_0. В самом деле, предположим, что такой предел существует, и обозначим его через $f(b_0)$. Тогда $\vec{f}'(x)$ имеет предел $\vec{L}(b_0, f(b_0))$. Из теоремы 14 гл. III следует, что функция f имеет в точке b_0 производную слева, равную $\vec{L}(b_0, f(b_0))$. Но тогда в окрестности точки b_0 существует решение уравнения, соответствующее условию Коши b_0, $f(b_0)$. Поскольку f удовлетворяет уравнению слева от точки b_0, то в силу единственности это решение совпадает с f слева от точки b_0. Таким образом, f оказалась продолженной до некоторого решения *справа* от точки b_0, что противоречит тому, что точка b_0 является точной верхней гранью множества точек γ.

Точно такие же рассуждения приводят к существованию наибольшего интервала $]a_0, x_0]$ и доказательству того, что при $a_0 \neq a$ функция f не может быть продолжена до точки a_0.

Если мы вернемся к примеру, приведенному выше в формуле (V, 2; 17), то увидим, что, отправляясь от начальных значений $x_0 = 0$, $y_0 = -1/c$, можно получить максимальный интервал существования решения в виде $]-\infty, c[$. Это решение не может быть продолжено до самой точки c.

Для получения глобальных решений, определенных на самом интервале $|a, b|$, надо наложить на $\vec{L}$ более ограничительные условия. Это как раз то, что мы видели в замечании 2°) на стр. 13 ($\vec{L}$ определена на $|a, b| \times F$ и удовлетворяет тому же глобальному условию Липшица по y на $|a, b| \times F$). Позже, пользуясь априорной оценкой решений (теорема 3), мы придем к более общей теореме 4.

Априорная оценка решений дифференциального уравнения

Теорема 3. *Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение*

$$z' = M(x, z), \qquad \text{(V, 2; 21)}$$

где M — вещественная функция $\geqslant 0$, определенная и непрерывная на множестве $[x_0, b_0] \times \mathbb{R}_+$ [1]*.*

Пусть f — дифференцируемая на $[x_0, b_0]$ функция со значениями в аффинном нормированном пространстве F, удовлетворяющая строгим дифференциальным неравенствам

$$\|\vec{f}'(x)\| < M(x, \|\overrightarrow{f(x) - 0}\|), \quad \text{или} \quad \|\vec{y}'\| < M(x, \|\overrightarrow{y - 0}\|), \qquad \text{(V, 2; 22)}$$

---

[1]) $\mathbb{R}_+$, как всегда, является множеством вещественных чисел $\geqslant 0$.

где 0 — *выбранное начало координат пространства* F. *Если* $f(x_0)=y_0$ *и если* g — *неотрицательное решение уравнения* (V, 2; 21), *соответствующее начальным значениям* x_0, $\|\overrightarrow{y_0-0}\|$ *и определенное в* $[x_0, b_0]$, *то для каждого* x *из* $[x_0, b_0]$ *имеет место оценка*

$$\|\overrightarrow{f(x)-0}\|\leqslant g(x), \qquad \text{(V, 2; 23)}$$

где для $x>x_0$ *имеет место знак* $<$.

Если интервал $[x_0, b_0]$ *заменен интервалом* $[a_0, x_0]$, *то одновременно следует заменить* g *решением* $h\geqslant 0$ *уравнения* $Z'=-M(x, z)$, *соответствующим тем же самым начальным значениям* x_0, $\|\overrightarrow{y_0-0}\|$.

Прежде чем приступить к доказательству, объясним, почему эта теорема называется «априорной оценкой решений дифференциальных уравнений». Пусть задано дифференциальное уравнение (V, 1; 1), где $\Omega=F$, и предположим, что $\vec{L}$ допускает оценку

$$\|\vec{L}(x, y)\|<M(x, \|\overrightarrow{y-0}\|). \qquad \text{(V, 2; 23}_2\text{)}$$

Тогда если существует решение f уравнения (V, 1; 1), определенное в $[x_0, b_0]$ и соответствующее начальным значениям x_0, y_0 (мы не утверждаем, что такое решение существует, мы говорим: «если оно существует»), то оно a priori допускает оценку (V, 2; 23). *Мажорируя правую часть* $\vec{L}$ *дифференциального уравнения, мы мажорируем и его решения.*

Доказательство. Доказательство очень близко к доказательству леммы для формулы конечных приращений (теорема 13 гл. III).

Пусть $x>x_0$. Функция g, очевидно, является возрастающей. Обозначим через A множество таких точек ξ интервала $[x_0, x]$, для которых имеет место неравенство (V, 2; 23) (где вместо x надо подставить ξ). Так как $x_0\in A$, то это множество непусто. Пусть c — его точная верхняя грань. Так как предел точек ξ, удовлетворяющих неравенству (V, 2; 23), удовлетворяет этому же неравенству, то множество A замкнуто. Следовательно, множество A содержит точку c.

Докажем, что предположение $c<x$ противоречиво. В самом деле, если бы оно было верным, то для $\xi>c$ должно было бы быть справедливым неравенство $\|\overrightarrow{f(\xi)-0}\|>g(\xi)$. Устремляя $\xi>c$ к c, получаем отсюда $\|\overrightarrow{f(c)-0}\|\geqslant g(c)$, а так как в силу того, что $c\in A$, справедливо противоположное неравенство

$\|\overrightarrow{f(c)-0}\| \leqslant g(c)$, то

$$\|\overrightarrow{f(c)-0}\| = g(c). \qquad (V, 2; 24)$$

В этом случае

$$\|\vec{f'}(c)\| < M(c, \|\overrightarrow{f(c)-0}\|) = M(c, g(c)) = g'(c). \qquad (V, 2; 25)$$

Поэтому $\|\vec{f'}(c)\| < g'(c)$. Если λ является числом, заключенным строго между этими двумя числами, а γ — достаточно малое по модулю вещественное число, то

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| < \lambda\gamma, \\ &|g(c+\gamma)-g(c)| > \lambda\gamma, \end{aligned} \qquad (V, 2; 26)$$

а следовательно,

$$\|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| < |g(c+\gamma)-g(c)|. \qquad (V, 2; 27)$$

Комбинируя (V, 2; 24) и (V, 2; 27), для $\gamma > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f(c+\gamma)-0}\| \leqslant \|\overrightarrow{f(c)-0}\| + \|\overrightarrow{f(c+\gamma)-f(c)}\| < \\ < g(c) + (g(c+\gamma)-g(c)) = g(c+\gamma), \end{aligned} \qquad (V, 2; 28)\ [1]$$

что противоречит свойству точной верхней грани c. Поэтому $c = x$, чем доказывается соотношение (V, 2; 23) с неравенством $\leqslant$.

Остается доказать строгое неравенство для $x > x_0$. Предположим, что в некоторой точке $c > x_0$ имеет место равенство, т. е. (V, 2; 24). Мы возьмем на этот раз в (V, 2; 27) $-\gamma$ вместо $\gamma > 0$.

Снова комбинируя (V, 2; 24) и (V, 2; 27), получаем

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f(c-\gamma)-0}\| \geqslant \|\overrightarrow{f(c)-0}\| - \|\overrightarrow{f(c-\gamma)-f(c)}\| > \\ > g(c) - (g(c) - g(c-\gamma)) = g(c-\gamma). \end{aligned} \qquad (V, 2; 31)$$

Неравенство $\|\overrightarrow{f(c-\gamma)-0}\| > g(c-\gamma)$ при $\gamma > 0$ противоречит уже имеющемуся неравенству (V, 2; 23). Следовательно, (V, 2; 23) для $x > x_0$ действительно является строгим неравенством. Таким образом, для интервала $[x_0, b_0]$, $b_0 > x_0$, теорема доказана.

Аналогичным методом она доказывается и для отрезка $[a_0, x_0]$.

Замечания. 1°) Если иметь в виду неравенство (V, 2; 22) со знаком $\leqslant$, то без дополнительных предположений получить

---

[1] Нумерация формул здесь и далее соответствует оригиналу. — *Прим. ред.*

(V, 2; 24) со знаком $\leqslant$, вообще говоря, нельзя. Возьмем, например, правую часть уравнения (V, 2; 15) в качестве M, $F=\mathbb{R}$ и в качестве точки 0 число нуль. Если f и g — два решения этого уравнения, соответствующие одним и тем же начальным значениям 0, 0, то для $x \geqslant 0$ имеет место неравенство $f \leqslant g$, а следовательно, также $g \leqslant f$, т. е. окончательно $f=g$. Другими словами, в этом случае для уравнения (V, 2; 15) решение единственно, что, как мы видели ранее, не имеет места.

2°) Эта теорема возвращает нас к теореме о конечных приращениях (теорема 13 гл. III) и лемме, служившей для ее доказательства. Рассмотрим, например, эту лемму, более общую, чем сама теорема.

Функция $x \to g(x)-g(0)+\varepsilon x+\varepsilon$ из этой леммы является решением дифференциального уравнения $z'=g'(x)+\varepsilon$, и имеет место неравенство $\|\overrightarrow{f'(x)}\|<g'(x)+\varepsilon$. Неравенство (V, 2; 23) теперь дает неравенство $\|\overrightarrow{f(1)-f(0)}\|<g(1)-g(0)+2\varepsilon$, откуда, поскольку ε произвольно, следует (III, 5; 3).

Однако лемма и теорема 13 гл. III доказаны без предположения о существовании производной функции f на концах интервала. Здесь мы должны предполагать не только то, что производная $\vec{f}'(x_0)$ существует, но и то, что она удовлетворяет строгому неравенству $\|\vec{f}'(x_0)\|<M(x_0, \|\overrightarrow{y_0-0}\|)$. Если же это не так, то тот же самый пример (V, 2; 15) показывает, что заключение теоремы будет неверным.

Условие существования глобальных решений на $|a, b|$

Теорема 4. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (V, 1; 1) *и предположим, что* $\vec{L}$ *обладает следующими свойствами:*

1°) $\vec{L}$ *определено на* $|a, b| \times F$ (*т. е.* $\Omega=F$), *и имеет место оценка*

$$\|\vec{L}(x, y)\| \leqslant \mu\|\overrightarrow{y-0}\|+\nu, \qquad (V, 2; 32)$$

где μ *и* ν — *неотрицательные постоянные, а* 0 — *выбранное начало в* F [1]);

2°) *каково бы ни было число* $\rho>0$, *существует такое число* $k=k(\rho)$, *что при* x, *изменяющемся в* $|a, b|$, *и при* y_1, y_2, *из-*

---

[1]) Это начало особой роли не играет. Если его заменить другим началом $0'$, то мы получим то же самое неравенство с другими постоянными $\mu'=\mu$ и $\nu'=\mu\|\overrightarrow{0'-0}\|+\nu$. Можно по желанию взять $0=y_0$.

меняющихся в шаре $B(0, \rho)$, *имеет место условие Липшица* (V, 2; 1) *с постоянной* $k(\rho)$.

Тогда, если F *полно, для каждых начальных значений* x_0, y_0 *дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение на всем интервале* $|\,a, b\,|$.

Доказательство. В самом деле, определим возможный интервал безопасности около точки x_0. Зададим произвольно некоторое конечное число $R > 0$ и возьмем в качестве B шар с центром y_0 радиуса R. В этом шаре величина $\|\vec{L}(x, y)\|$ мажорируется числом $M = \mu(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + R) + \nu$.

Следовательно, интервал безопасности определяется так: $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \beta]$, где

$$\sup(\alpha, \beta) \leqslant \frac{R}{\mu(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + R) + \nu}. \qquad (V, 2; 32_2)$$

Из предположений относительно условия Липшица следует, что в множестве безопасности $J \times B$ отображение $\vec{L}$ обладает свойством Липшица по y (постоянная k соответствует радиусу $\rho = \|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + R$).

Из всего сказанного мы получаем следующий фундаментальный результат: *для всех начальных значений* y_0, *при которых норма* $\|\overrightarrow{y_0 - 0}\|$ *ограничена фиксированным числом, длина интервала безопасности ограничена снизу некоторым фиксированным числом* > 0. Отправляясь от точки x_0, по интервалу безопасности пройдем вправо до точки $x_1 = x_0 + R/[\mu(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + R) + \nu]$. Исходя из этой точки и начального значения $f(x_1)$, можно построить новый интервал безопасности, который позволит нам дойти до точки x_2. Исходя из нее и нового начального значения $f(x_2)$, можно по новому интервалу безопасности пройти до точки x_3 и т. д. Таким путем мы получим последовательность интервалов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, ... Каждый раз, найдя интервал $[x_{n-1}, x_n]$, мы тем самым определяем решение дифференциального уравнения в интервале $[x_0, x_n]$. Нам надо доказать, что в действительности после конечного числа шагов построения интервалов безопасности мы обязательно достигнем любой наперед заданной точки b' из интервала $|\,a, b\,|$.

Для этого достаточно показать, что длины интервалов $[x_{n-1}, x_n]$ ограничены снизу некоторым числом > 0. Согласно изложенному выше, это условие будет выполнено, если заранее известно, что последовательные начальные значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, ... при $x < b'$ находятся в некотором ограниченном множестве. По условию имеет место оценка (V, 2; 32). Значит, выполнены условия теоремы 3 с уравнением

$$z' = M_\varepsilon(x, z) = \mu z + \nu + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{V, 2; 33}$$

Решение этого уравнения, соответствующее начальным значениям x_0, $\|\overrightarrow{y_0 - 0}\|$, получается элементарно. Им будет функция

$$g_\varepsilon(x) = \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu + \varepsilon}{\mu}\right) e^{\mu(x - x_0)} - \frac{\nu + \varepsilon}{\mu}. \tag{V, 2; 34}$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ в каждом интервале с началом x_0, в котором существует решение рассматриваемого уравнения, имеет место априорное неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x) - 0}\| \leqslant g_\varepsilon(x). \tag{V, 2; 35}$$

Оно справедливо для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому имеет место также неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x) - 0}\| \leqslant \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu}{\mu}\right) e^{\mu(x - x_0)} - \frac{\nu}{\mu}. \tag{V, 2; 36}$$

В частности, для каждого $x_n < b'$

$$\|\overrightarrow{f(x_n) - 0}\| \leqslant \left(\|\overrightarrow{y_0 - 0}\| + \frac{\nu}{\mu}\right) e^{\mu(b' - x_0)} - \frac{\nu}{\mu}. \tag{V, 2; 37}$$

Отсюда следует, что значения $\vec{f}(x_n)$ находятся в некоторой ограниченной части пространства $\vec{F}$, а это означает, что для $x_n < b'$ интервалы $[x_n, x_{n+1}]$ имеют длины, ограниченные снизу некоторым фиксированным числом > 0, т. е. что b' достигается при конечном числе n. Отсюда следует, что решение существует в $[x_0, b']$ для каждого конечного $b' \leqslant b$ и, значит, в $[x_0, b\,|$.

Точно так же доказывается существование решения в $|\,a, x_0]$ и, следовательно, в $|\,a, b\,|$.

З а м е ч а н и я. 1°) Если неравенство (V, 2; 32) заменить более слабым требованием вида

$$\|\vec{L}(x, y)\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{y - 0}\|^{1+\alpha} + \nu, \quad \alpha > 0, \tag{V, 2; 38}$$

то заключение теоремы 4 будет неверным. Так, например, скалярное уравнение

$$y' = -\beta y^{(\beta+1)/\beta}, \quad \beta > 0, \tag{V, 2; 39}$$

удовлетворяет этому условию в интервале $[0, +\infty[$ прямой $\mathbb{R}$ с $\alpha = 1/\beta$. Однако при начальных значениях 0, $1/c^\beta$ $(c > 0)$ его решение имеет вид

$$f(x) = \left(\frac{1}{c - x}\right)^\beta \tag{V, 2; 40}$$

и определено в $[0, c[$, но не может быть продолжено до самой точки c.

2°) Теорема 4 имеет место при несколько более общих условиях. Предположим, например, что $b=+\infty$. Тогда для того, чтобы решение существовало в $]a, b']$ при любом конечном b', т. е. в $]a, +\infty[$, достаточно, чтобы условия теоремы 4 выполнялись в каждом интервале $]a, b']$.

Точно так же в случае конечных a и b, если функция $\vec{L}$ определена только на произведении $]a, b[\times\Omega$, где Ω — шар с центром 0 радиуса R_0, и если выполнены остальные условия теоремы 4, то можно утверждать, что решение в интервале $]a, b[$ существует, если только априорная оценка (V, 2; 36) удерживает $f(x)$ на расстоянии $\leqslant R_0' < R_0$ от 0, т. е. если при $l=\sup((b-x_0), (x_0-a))$ имеет место неравенство

$$\left(\|\overrightarrow{y_0-0}\|+\frac{\nu}{\mu}\right)e^{\mu l}-\frac{\nu}{\mu}<R_0. \qquad \text{(V, 2; 41)}$$

Применение к механике

Рассмотрим в качестве типичного примера основную задачу динамики материальной точки.

Материальная точка в трехмерном пространстве подвергается действию силы $\vec{F}$, зависящей от положения материальной точки, ее скорости и времени, а именно: $\vec{F}=\vec{F}(t, M, \vec{V})$. Основное уравнение динамики $\vec{F}=m\vec{\gamma}$ запишется тогда в виде следующего дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$m\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}=\vec{F}\left(t, M, \overrightarrow{\frac{dM}{dt}}\right). \qquad \text{(V, 2; 42)}$$

Заменяя здесь M на f или y и полагая $\vec{f}'=\vec{g}$ или $\vec{y}'=\vec{z}$, перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка[1])

$$\vec{y}'=\vec{z},$$
$$\vec{z}'=\vec{F}(t, y, \vec{z}).$$

Пусть теперь сила $\vec{F}$ является непрерывной функцией, локально удовлетворяющей условию Липшица по $(M, \vec{v})$, а также следующей оценке:

$$\|\vec{F}(t, M, \vec{v})\|\leqslant\alpha\|\overrightarrow{M-0}\|+\beta\|\vec{v}\|+\gamma. \qquad \text{(V, 2; 43)}$$

[1]) Где переменная x обозначена через t.

(В качестве нормы можно взять, например, естественную норму трехмерного евклидова пространства.) Тогда, применяя предыдущую теорему, можно убедиться, что траектория точки, соответствующая начальному условию $M=M_0$, $\vec{v}=\vec{v}_0$ для $t=t_0$, может быть продолжена до $t=+\infty$. Если же сила не удовлетворяет оценке (V, 2; 43), то этого, вообще говоря, утверждать нельзя. Может случиться, что существует некоторое предельное время t_1, такое, что траектория будет определена в открытом интервале $[t_0, t_1[$ и не может быть продолжена до точки t_1. В этом случае ситуация аналогична той, которая имела место для дифференциального уравнения (V, 2; 17).

Непрерывность решения как функции параметра

Предположим, что дифференциальное уравнение зависит от некоторого параметра λ, пробегающего топологическое пространство Λ. Пусть функция $\vec{L}$ непрерывна на $|a, b|\times\Omega\times\Lambda$. Будем предполагать, кроме того, что эта функция *локально удовлетворяет условию Липшица* по y, т. е. для любой точки x_0, y_0, λ из $|a, b|\times\Omega\times\Lambda$ найдутся такая окрестность $J\times B\times\mathscr{V}$ этой точки и такая постоянная k, что для каждого $x\in J$, любых y_1 и y_2 из B и любого $\lambda\in\mathscr{V}$ выполняется условие Липшица

$$\|\vec{L}(x, y_1, \lambda)-\vec{L}(x, y_2, \lambda)\|\leqslant k\,\|\overrightarrow{y_1-y_2}\|. \qquad (V, 2; 44)$$

Предлагается выяснить, будет ли решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию $y=y_0(\lambda)$ при $x=x_0(\lambda)$, *непрерывно зависящему от* λ, являться непрерывной функцией параметра λ. Через f_λ мы будем обозначать решение дифференциального уравнения, соответствующее данному начальному условию при заданном значении параметра λ. В действительности f является функцией x и λ, а величина f_λ есть соответствующая частная функция при фиксированном значении параметра λ.

Дифференциальное уравнение и начальное условие запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\vec{f}_\lambda)'(x)=\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(x, \lambda)=\vec{L}(x, f(x, \lambda), \lambda),\\ f(x_0(\lambda), \lambda)=y_0(\lambda).\end{gathered} \qquad (V, 2; 45)$$

Теорема 5. *Пусть $\vec{L}$ — непрерывная функция на $|a, b|\times\times\Omega\times\Lambda$, локально удовлетворяющая условию Липшица по y. Если $\lambda\to x_0(\lambda)$ и $\lambda\to y_0(\lambda)$ суть непрерывные функции на Λ со значениями в $|a, b|$ и Ω соответственно и пространство F*

полно, то, каково бы ни было значение параметра λ_0, можно найти некоторый интервал $J = |\, x_0(\lambda_0) - \alpha,\ x_0(\lambda_0) + \beta\, |$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, шар B с центром $y_0(\lambda_0)$ радиуса R и окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0 в Λ, такие, что для каждого $\lambda \in \mathscr{V}$ существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$, определенное в J и принимающее значения в B. Кроме того, это решение является непрерывной функцией параметра; точнее, функция $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ является непрерывным отображением $J \times \mathscr{V}$ в B и частное отображение $\lambda \to f_\lambda$ окрестности $\mathscr{V}$ в метрическое пространство $(B^J)_{cb}$ непрерывно.

Доказательство. Обратимся к теореме 46_2 гл. II, обосновывающей непрерывность относительно параметра неподвижной точки сжатия. Будем исходить сначала из интервала $J_1 = |\, x_0(\lambda_0) - \alpha_1,\ x_0(\lambda_0) + \beta_1\, |$, сферы $B = B(y_0(\lambda_0);\ R)$ и окрестности $\mathscr{V}_1$ точки λ_0, таких, что

a) в множестве $J_1 \times B \times \mathscr{V}_1$ функция $\vec{L}$ удовлетворяет условию Липшица (V, 2; 44) с некоторым коэффициентом k;

b) $\| \vec{L}(x, y, \lambda) \|$ имеет в $J_1 \times B \times \mathscr{V}_1$ конечную точную верхнюю грань M.

Такой выбор величин возможен, поскольку функция $\vec{L}$ непрерывна и локально удовлетворяет условию Липшица по y.

Определим теперь интервал $J = |\, x_0(\lambda_0) - \alpha,\ x_0(\lambda_0) + \beta\, |$ так, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta \leqslant \beta_1$ и

$$\alpha + \beta \leqslant \frac{R}{2M} \quad \text{и} \quad < \frac{1}{k}. \tag{V, 2; 45_2}$$

Определим, наконец, окрестность $\mathscr{V}$ точки λ_0, $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_1$, так, чтобы для $\lambda \in \mathscr{V}$ имели место неравенства

$$\begin{gathered} x_0(\lambda_0) - \alpha \leqslant x_0(\lambda) \leqslant x_0(\lambda_0) + \beta, \\ \| \overrightarrow{y_0(\lambda) - y_0(\lambda_0)} \| \leqslant \frac{R}{2}. \end{gathered} \tag{V, 2; 46}$$

Это возможно в силу предположений о непрерывности начальных значений по параметру.

Возьмем теперь полное пространство $E = (B^J)_{cb}$. Через Φ_λ обозначим отображение E в $(F^J)_{cb}$, определяемое равенствами

$$\Phi_\lambda(f) = g, \qquad g(x) = y_0(\lambda) + \int_{x_0(\lambda)}^{x} \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\, d\xi. \tag{V, 2; 47}$$

Докажем прежде всего, что g принимает значения в B. Интервал J и шар B образуют систему безопасности, пригодную для всех значений λ из $\mathscr{V}$, а Φ_λ для всех $\lambda \in \mathscr{V}$ будет отображением пространства E в себя. В самом деле, согласно V, 2; 45$_2$) и (V, 2; 46), имеем

$$\|\overrightarrow{g(x)-y_0(\lambda_0)}\| \leqslant \|\overrightarrow{y_0(\lambda)-y_0(\lambda_0)}\| + |x - x_0(\lambda)|\,M \leqslant$$
$$\leqslant \frac{R}{2} + (\alpha+\beta)M \leqslant \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R. \qquad (V, 2; 48)$$

Следовательно, g принимает значения в B, а Φ_λ является отображением E в E.

Так как, согласно (V, 2; 45$_2$), $(\alpha+\beta)k < 1$ и

$$d(\Phi_\lambda(u), \Phi_\lambda(v)) = \sup_{x\in J}\left\|\int_{x_0(\lambda)}^{x}(\vec{L}(\xi, u(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, v(\xi), \lambda))\,d\xi\right\| \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha+\beta)\,kd(u, v), \qquad (V, 2; 49)$$

то отображение Φ_λ является сжатием с коэффициентом Липшица < 1, не зависящим от λ.

Наконец, для каждого фиксированного f из E частное отображение $\lambda \to \Phi_\lambda(f)$ непрерывно на $\mathscr{V}$. В самом деле, если λ стремится к λ_1, то

$$d(\Phi_\lambda(f), \Phi_{\lambda_1}(f)) \leqslant \|\overrightarrow{y_0(\lambda)-y_0(\lambda_1)}\| +$$
$$+ \sup_{x\in J}\left\|\int_{x_0(\lambda)}^{x}\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\,d\xi - \int_{x_0(\lambda_1)}^{x}\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\,d\xi\right\|. \qquad (V, 2; 50)$$

В силу того что начальное значение $y_0(\lambda)$ непрерывно по λ, первый член правой части стремится к 0, когда λ стремится к λ_1. Второй член мажорируется величиной

$$\left\|\int_{x_0(\lambda)}^{x_0(\lambda_1)}\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda)\,d\xi\right\| +$$
$$+ \sup_{x\in J}\left\|\int_{x_0(\lambda_1)}^{x}(\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1))\,d\xi\right\|. \qquad (V, 2; 51)$$

Первое слагаемое в (V, 2; 51) стремится к 0, когда λ стремится к λ_1, так как оно не превосходит $|x_0(\lambda_1) - x_0(\lambda)|\,M$, а по предположению $x_0(\lambda)$ непрерывно по λ. Второе слагаемое мажорируется интегралом

$$\int_J \|\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\|\,d\xi. \qquad (V, 2; 52)$$

Поскольку при ξ, изменяющемся в компакте J, точка $(\xi, f(\xi))$ пробегает некоторый компакт K из $J \times \Omega$, из теоремы 66 гл. IV вытекает, что, когда λ стремится к λ_1, норма $\|\vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda) - \vec{L}(\xi, f(\xi), \lambda_1)\|$ стремится к 0 равномерно относительно $(\xi, f(\xi)) \in K$, т. е. относительно $\xi \in J$, а это означает, что (V, 2; 52) стремится к 0.

Мы находимся, таким образом, в условиях применимости теоремы 46_2 гл. II. Неподвижная точка отображения Φ_λ является решением f_λ дифференциального уравнения, определенным в J со значениями в B и соответствующим начальным значениям $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$. Из теоремы 46_2 следует, что $\lambda \to f_\lambda$ является непрерывным отображением $\mathscr{V}$ в $E = (B^J)_{cb}$. Это утверждение, впрочем, эквивалентно непрерывности отображения $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ множества $J \times \mathscr{V}$ в B. В самом деле,

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{f(x, \lambda) - f(x_1, \lambda_1)}\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|\overrightarrow{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_1)}\| + \|\overrightarrow{f(x, \lambda_1) - f(x_1, \lambda_1)}\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant d(f_\lambda, f_{\lambda_1}) + \|\overrightarrow{f_{\lambda_1}(x) - f_{\lambda_1}(x_1)}\|. \qquad (V, 2; 53)
\end{aligned}$$

Здесь первый член стремится к 0, поскольку нами доказана непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$, а второй член стремится к нулю, поскольку f_{λ_1} непрерывно в точке x_1. Значит, функция $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ непрерывна на $J \times \mathscr{V}$. (Обратно, так как J компактно, то в силу теоремы 66 гл. IV из непрерывности отображения $(x, \lambda) \to f(x, \lambda)$ следует непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$.) Теорема 5 доказана.

Следствие. *Пусть $\vec{L}_n$ — последовательность непрерывных функций, определенных на $|a, b| \times \Omega$ со значениями в $\vec{F}$ и локально равномерно сходящихся к некоторому пределу $\vec{L}$ при n, стремящемся к бесконечности. Пусть $(x_0)_n$ — последовательность точек из $|a, b|$, сходящихся к точке x_0 интервала $|a, b|$, а $(y_0)_n$ — последовательность точек из Ω, сходящихся к точке $y_0 \in \Omega$.*

Пусть, кроме того, каждая точка множества $|a, b| \times \Omega$ имеет окрестность, в которой функции $\vec{L}_n$ удовлетворяют условию Липшица по y с постоянной Липшица, не зависящей от n.

Тогда существуют такой интервал J, являющийся окрестностью точки x_0 в $|a, b|$, такой шар B с центром в y_0 и такое целое число p, что при $n \geqslant p$ последовательность $(x_0)_n \in J$, последовательность $(y_0)_n \in B$, а уравнение $\vec{y}' = \vec{L}_n(x, y)$ имеет, и притом единственное, решение в J со значениями в B, соответствующее начальным значениям $(x_0)_n$, $(y_0)_n$, и при n, стремящемся к бесконечности, f_n сходится равномерно в J

к некоторому пределу $\vec{f}$, являющемуся единственным решением дифференциального уравнения $\vec{y}' = \vec{L}(x, y)$, соответствующим начальным значениям x_0, y_0.

Доказательство. Обозначим через Λ топологическое подпространство $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots; +\infty\}$ из $\overline{\mathbb{R}}$. Положим $\vec{L}_\infty = \vec{L}$, $(x_0)_\infty = x_0$, $(y_0)_\infty = y_0$. Тогда мы придем к теореме 5. (Локально равномерная сходимость $\vec{L}_n$ к $\vec{L}$ означает, что функция $(x, y, \lambda) \to \vec{L}_\lambda(x, y)$ является непрерывным отображением $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ в $\vec{F}$, ибо, когда x_ν сходится к x, y_ν сходится к y и λ_ν сходится к λ, имеет место неравенство $\|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu) - \vec{L}(x, y, \lambda)\| \leqslant \|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu) - \vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda)\| + \|\vec{L}(x_\nu, y_\nu, \lambda) - \vec{L}(x, y, \lambda)\|$, члены которого стремятся к 0 при ν, стремящемся к бесконечности, из которого следуют все необходимые выводы.)

Предыдущая теорема, естественно, неполноценна, как и сама теорема 1, в том смысле, что она обеспечивает непрерывность решения дифференциального уравнения только в очень малом интервале J. Поэтому имеет смысл улучшить результаты в следующем направлении:

Теорема 6. *Пусть $\vec{L}$ — непрерывное отображение $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ в $\vec{F}$. Предположим, кроме того, что для каждого значения параметра λ выполняются условия теоремы 3, где постоянные μ, ν и $k(\rho)$ не зависят от λ. Тогда при любом значении параметра λ существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее начальному условию $y = y_0(\lambda)$ при $x = x_0(\lambda)$ и определенное во всем интервале $|a, b|$. Кроме того, если $\lambda \to x_0(\lambda)$ и $\lambda \to y_0(\lambda)$ являются непрерывными отображениями Λ в $|a, b|$ и F соответственно, то решение непрерывно зависит от параметра λ на каждом компактном интервале $[a', b']$, содержащемся в $|a, b|$, т. е. отображение $\lambda \to \vec{f}_\lambda$ пространства Λ в $E = \left(F^{[a', b']}\right)_{cb}$ непрерывно.*

Доказательство. Прежде всего существование решения при любом λ в каждом интервале $|a, b|$ обеспечивается теоремой 3. Зададим теперь $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности начальных значений для точки λ_0 из Λ найдется такая ее окрестность $\mathscr{V}_1$, что для всех λ из $\mathscr{V}_1$ величины $\|\overrightarrow{y(\lambda) - 0}\|$ и $x_0(\lambda)$ ограничены. При этих условиях *оценка* (V, 2; 36) *решения показывает, что это решение остается ограниченным в любом* *интервале* $[a', b']$ *независимо от параметра* λ, *пробегающего окрестность* $\mathscr{V}_1$.

Функция $\vec{L}$ теперь удовлетворяет условию Липшица (V, 2; 1) в ограниченном множестве значений решения. Пусть k — соответствующая постоянная Липшица.

Имеем

$$\overrightarrow{f'_\lambda(x) - f'_{\lambda_0}(x)} = \vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) = \\ = [\vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda)] + \\ + [\vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0)]. \quad (V, 2; 54)$$

При λ, стремящемся к λ_0, правая часть стремится к $\vec{0}$ равномерно относительно x в компактном интервале $[a', b']$ интервала $|a, b|$ (теорема 66 гл. IV; см. часть доказательства теоремы 5, относящуюся к (V, 2; 52)). Значит, можно определить некоторую окрестность $\mathscr{V}'$ точки λ_0, $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}_1$, таким образом, чтобы этот член можно было оценить по норме для $\lambda \in \mathscr{V}'$ заранее заданным числом $\delta > 0$. По причинам, которые будут ясны позже, мы возьмем

$$\delta = \varepsilon/[(1 + 1/k)\, e^{k(b'-a')}].$$

В силу условия Липшица (V, 2; 1) имеет место неравенство

$$\|\vec{L}(x, f_\lambda(x), \lambda) - \vec{L}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda)\| \leqslant k \|\overrightarrow{f_\lambda(x) - f_{\lambda_0}(x)}\|. \quad (V, 2; 55)$$

Следовательно, функция $\vec{Y} = \overrightarrow{f_\lambda - f_{\lambda_0}}$ удовлетворяет дифференциальному *неравенству*

$$\|\vec{Y}'\| \leqslant k \|\vec{Y}\| + \delta. \quad (V, 2; 56)$$

Функция Y в точке $x_0(\lambda)$ принимает значение

$$\overrightarrow{f_\lambda(x_0(\lambda)) - f_{\lambda_0}(x_0(\lambda))} = \overrightarrow{(y_0(\lambda) - y_0(\lambda_0))} + \overrightarrow{(f_{\lambda_0}(x(\lambda_0)) - f_{\lambda_0}(x_0(\lambda)))}. \quad (V, 2; 57)$$

Выражение в первой скобке стремится к 0 при λ, стремящемся к λ_0 (в силу непрерывности начального значения $y_0(\lambda)$ по параметру λ). Выражение во второй скобке стремится к 0, поскольку $x_0(\lambda)$ стремится к $x_0(\lambda_0)$ (в силу непрерывности $x_0(\lambda)$ по λ), а f_{λ_0} непрерывна в точке $x_0(\lambda_0)$. Следовательно, правая часть соотношения (V, 2; 57) стремится к нулю и, значит, можно найти такую окрестность $\mathscr{V}''$ точки λ_0, $\mathscr{V}'' \subset \mathscr{V}_1$, что правая часть при $\lambda \in \mathscr{V}''$ по норме не будет превосходить числа δ. Тогда для $\lambda \in \mathscr{V} = \mathscr{V}' \cap \mathscr{V}''$ к функции $\vec{Y}$ можно применить оценку (V, 2; 36), поскольку она удовлетворяет соотношению

(V, 2; 56) с начальным значением, мажорируемым при $x = x_0(\lambda)$ по норме числом δ.

Таким образом, для $\lambda \in \mathscr{V}$ и $x \in [a', b']$ имеем

$$\|\overrightarrow{f_\lambda(x) - f_{\lambda_0}(x)}\| = \|\overrightarrow{Y(x)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\delta + \frac{\delta}{k}\right) e^{k\,|x - x_0(\lambda)|} - \frac{\delta}{k} \leqslant \delta\left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{k\,(b'-a')} = \varepsilon, \qquad \text{(V, 2; 58)}$$

и теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем (теорема 15_2) мы получим другую глобальную теорему вместе с теоремой о дифференцируемости по параметру.

Производные высших порядков решения дифференциального уравнения

Теорема 8. *Если $\vec{L}$ — отображение класса C^m множества $]a, b[\times \Omega$ в F, то каждое решение дифференциального уравнения* (V, 1; 1) *принадлежит классу* C^{m+1}.

Доказательство. Как мы говорили в самом начале, если $\vec{L}$ непрерывно, то f обязательно принадлежит классу C^1. Проведем теперь индукцию по m. Предположим, что принадлежность f классу C^m в случае, когда $\vec{L}$ принадлежит классу C^{m-1}, доказана, и допустим, что $\vec{L}$ принадлежит классу C^m. Тогда $\vec{L}$ тем более принадлежит классу C^{m-1} и, значит, по предположению индукции f принадлежит классу C^m. Но тогда, согласно теореме о сложных функциях (теорема 19 гл. III), функция $\vec{f'}\colon x \to \vec{L}(x, f(x))$ принадлежит классу C^m, а это означает, что f принадлежит классу C^{m+1}, и теорема доказана.

Конечно, при вычислении последовательных производных применяется теорема о сложных функциях. Например,

$$\overrightarrow{f''(x)} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \overrightarrow{f'(x)} =$$
$$= \frac{\partial \vec{L}}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \vec{L}(x, f(x)). \qquad \text{(V, 2; 70)}$$

Замечательным фактом является то, что для вычисления последовательных производных решения в точке x_0 нет необходимости решать дифференциальное уравнение, так как достаточно знать только лишь начальное значение y_0 этого решения в точке x_0.

Так можно получить

$$f(x_0) = y_0,$$
$$\vec{f}'(x_0) = \vec{L}(x_0, y_0), \qquad (V, 2; 71)$$
$$\vec{f}''(x_0) = \frac{\partial \vec{L}}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \vec{L}(x_0, y_0), \ \ldots .$$

Это замечание является источником многочисленных методов решения, *применимых в том случае, когда можно заранее быть уверенным в том, что решение не только имеет производные всех порядков, но также и в том, что в некоторой окрестности точки x_0 оно представимо разложением Тейлора* (метод мажорант Коши, с которым мы познакомимся позже).

Следствие. *Если $\vec{L}$ принадлежит классу C^∞, то каждое решение дифференциального уравнения* (V, 1; 1) *принадлежит классу C^∞.*

Первые интегралы дифференциального уравнения

Первым интегралом дифференциального уравнения (V, 1; 1) называется непостоянная скалярная функция H, определенная на $|a, b| \times \Omega$: $x, y \to H(x, y)$, которая становится постоянной, если y заменить произвольным решением дифференциального уравнения, т. е. при любом решении f величина $H(x, f(x))$ постоянна.

Предположим для определенности, что пространство F имеет размерность n и в нем введена некоторая система координат. Пусть f — решение, соответствующее начальным значениям x_0, y_0. Зафиксируем x_0, но будем изменять y_0. Тогда f будет функцией x и y_0. Уравнение $y = f(x, y_0)$ может, вообще говоря, быть разрешено относительно y_0 в виде $y_0 = h(x, y)$, по крайней мере локально. В самом деле, $h(x, y)$ является значением в точке x_0 решения дифференциального уравнения, принимающего в точке x значение y. Поэтому каждая из компонент $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таким образом найденной функции h является, очевидно, некоторым первым интегралом.

Действительно, если f — некоторое решение дифференциального уравнения, то значение y_0, которое оно принимает в точке x_0, очевидно, постоянно, а именно $f(x_0)$ $(h(x, f(x)) = f(x_0))$, и, следовательно, постоянна каждая составляющая этого вектора. Эти первые интегралы являются n независимыми скалярными функциями переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. В самом деле, так как в точке x_0 можно произвольно зафиксировать начальное значение y_0, то они могут принимать произвольные заранее заданные значения. Других первых интегралов, не зависящих от этих, не существует, поскольку, задав значения H_i, мы тем самым определяем y_0, а значит, определяем решение уравнения.

Предыдущий метод применим только локально. Он позволяет доказать существование n первых независимых интегралов только *в окрестности некоторой точки* (c, γ) *множества* $|a, b| \times \Omega$. С его помощью *глобальное* существование первых интегралов не доказывается, т. е. он не позволяет найти функцию H, определенную на всем множестве $|a, b| \times \Omega$. Вопрос о глобальном существовании носит совсем другой характер, чем предыдущий вопрос, *и даже в случае очень простых дифференциальных уравнений не существует, вообще говоря, первых интегралов, определенных во всей области существования функции* $\vec{L}$. *Именно в этом состоит основная трудность изучения дифференциальных уравнений.*

Приведем наиболее важное применение полученных результатов в механике. Дифференциальное уравнение основной задачи механики имеет такой вид:

$$\vec{q}'' = \vec{F}(t, q, \vec{q}'), \tag{V, 2; 72}$$

где q представляет собой точку пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. конечное число скаляров $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Если положить $\vec{q}' = \vec{r}$, то эта система станет системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \vec{q}' &= \vec{r}, \\ \vec{r}' &= \vec{F}(t, q, \vec{r}). \end{aligned} \tag{V, 2; 73}$$

Первый интеграл представляет собой в этом случае некоторую функцию H переменных t, q и $\vec{r} = \vec{q}'$, сохраняющую постоянное значение вдоль траектории рассматриваемой задачи.

В некоторых случаях, как мы это видели ранее, этот первый интеграл выражает *энергию* как сумму потенциальной и кинетической энергий.

Простейшие теоремы механики, такие, как теорема о центре тяжести, теорема о кинетической энергии и др., часто позволяют получить другие независимые первые интегралы энергии.

Изучение первых интегралов играет важную роль, потому что знание первого интеграла позволяет легко найти общее решение дифференциального уравнения.

Предположим, например, что нам надо решить некоторое дифференциальное уравнение порядка p относительно вещественной функции, записанной в виде

$$y^{(p)} = L(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}), \tag{V, 2; 74}$$

и предположим, что мы уже нашли его первый интеграл $H(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$. Это означает, что для каждого решения дифференциального уравнения имеет место равенство

$$H(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}) = c, \qquad (V, 2; 75)$$

где c — некоторая постоянная. Если теперь это уравнение может быть разрешено относительно $y^{(p-1)}$ в виде

$$y^{(p-1)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(p-2)}, c), \qquad (V, 2; 76)$$

то уравнение (V, 2; 74) заменится уравнением (V, 2; 76), являющимся некоторым дифференциальным уравнением порядка $p-1$, а не порядка p, но зависящим от произвольной постоянной. Если будет известен новый первый интеграл, не зависящий от предыдущего, то это позволит свести заданное уравнение к дифференциальному уравнению порядка $p-2$ и т. д.[1])

Дифференциальное уравнение, определенное векторным полем

Пусть V — многообразие размерности n в аффинном пространстве E размерности N над полем вещественных чисел, принадлежащее классу C^m. *Векторным полем на* V называется такое отображение $\vec{X}\colon x \to \vec{X}(x)$ многообразия V в векторное пространство $\vec{E}$, что для каждого $x \in V$ вектор $\vec{X}(x)$ лежит в векторном пространстве $\vec{T}(x; V)$, касательном в точке x к многообразию V. Говорят, что векторное поле принадлежит классу C^p ($p \leqslant m$), если отображение $\vec{X}$ многообразия V в $\vec{E}$ принадлежит классу C^p (см. определение, т. I, стр. 336). Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}(x(t)), \quad \text{или} \quad \vec{x}' = \vec{X}(x). \qquad (V, 2; 77)$$

Решением этого уравнения является функция $f\colon t \to f(t)$, определенная на некотором интервале временно́й оси $\mathbb{R}$ со значениями в V, такая, что для каждого t скорость $\vec{f}'(t)$ представляет собой вектор $\vec{X}(f(t))$ касательной к V в точке $f(t)$. Это уравнение даже в случае непрерывного поля не является уравнением вида (V, 1; 1), ибо функция $\vec{X}$ определена только на V, а не на E или на некотором открытом множестве E. С другой стороны, $\vec{X}$ зависит от x, а не от t. Это такие урав-

[1]) Такой случай встречается редко! Первый интеграл H часто является локальным, и его невозможно разрешить относительно $y^{(p-1)}$. Уравнение (V, 2; 75) далеко не всегда *эквивалентно* уравнению (V, 2; 74) и т. д.

нения, с которыми имеют дело при отыскании асимптотических линий, линий кривизны и даже некоторой поверхности аффинного евклидова трехмерного пространства.

Говорят, что *поле локально удовлетворяет условию Липшица*, если, какова бы ни была точка a из V, существуют такая окрестность $\mathscr{V}$ этой точки в E и такое число $k \geqslant 0$, что при любых x_1 и x_2 из $\mathscr{V} \cap V$ имеет место неравенство

$$\| \vec{X}(x_1) - \vec{X}(x_2) \| \leqslant k \| \overrightarrow{x_1 - x_2} \|^{1)}. \qquad (\mathrm{V}, 2; 78)$$

Теорема 8_2. *Пусть дифференциальное уравнение* (V, 2; 77) *определено полем* $\vec{X}$, *локально удовлетворяющим условию Липшица на многообразии* V *класса* C^m *пространства* E *при* $m \geqslant 2$. *Если* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in V$ *определяют условие Коши, то найдется открытый интервал прямой* $\mathbb{R}$: $]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *в котором существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее этому условию Коши, которое нельзя продолжить ни до точки* $t_0 - \alpha$, *ни до точки* $t_0 + \beta$. *В интервале, содержащем* t_0, *не может существовать более одного решения, принимающего заданное значение в* t_0. *Если многообразие* V *компактно или если оно замкнуто и имеет место оценка*

$$\| X(x) \| \leqslant \mu \| x - O \| + \nu, \qquad (\mathrm{V}, 2; 78_2)$$

где μ *и* ν — *постоянные* $\geqslant 0$, *а* O — *фиксированная точка* E, *то* $\alpha = \beta = +\infty$. *Если поле* $\vec{X}$ *принадлежит классу* C^p $(p \leqslant m)$, *то решение является функцией класса* C^{p+1}.

Доказательство. Пусть $\Phi\colon \mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта окрестности точки x_0 на V. Здесь $\mathcal{O}$ — некоторое открытое множество $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \Phi(\mathcal{O})$. Множество $\mathcal{O}$ можно считать достаточно малым для того, чтобы существовало продолжение Θ отображения Φ^{-1} класса C^m, определенное в некотором открытом множестве Ω пространства E (теорема 33 гл. III).

Теперь векторное поле $\vec{X}$ можно перенести в векторное поле на $\mathcal{O}$. Каждой точке $u \in \mathcal{O}$ поставим в соответствие вектор $\vec{U}(u)$, образ которого при отображении $\Phi'(u)$ будет вектором $\vec{X}(\Phi(u))$.

---

1) Это условие означает, что пространство E заведомо предполагается нормированным. Однако поскольку все нормы в пространстве E эквивалентны (теорема 13 гл. II), то поле, локально обладающее свойством Липшица относительно одной нормы, будет обладать этим свойством и относительно всякой другой эквивалентной нормы (с другой постоянной k). Тот факт, что некоторое поле локально обладает свойством Липшица, не зависит от выбора нормы.

Это возможно, поскольку $\Phi'(u)$ является биекцией $\mathbb{R}^n$ на векторное пространство, касательное к V в точке $\Phi(u)$ (следствие 1 теоремы 33_4 гл. III). Кроме того, согласно следствию 2 этой же теоремы, можно записать, что

$$\vec{U}(u) = \Theta'(\Phi(u)) \cdot \vec{X}(\Phi(u)), \quad \text{или} \quad \vec{U}(\Theta(x)) = \Theta'(x) \cdot \vec{X}(x), \tag{V, 2; 79}$$
$$\vec{X}(\Phi(u)) = \Phi'(u) \cdot \vec{U}(u).$$

Покажем, что определенное нами на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$ поле $\vec{U}$ удовлетворяет локально условию Липшица. Пусть $u_0 \in \mathcal{O}$ и $\Phi(u_0) = x_0 \in V$. Поскольку $m \geqslant 2$, можно найти окрестность $\mathcal{O}_0$ точки u_0 в $\mathcal{O}$ и окрестность Ω_0 точки x_0 в Ω, где $\Phi(\mathcal{O}_0) \subset \Omega_0$, такие, что отображения Φ, Φ' ограничены в $\mathcal{O}_0$, а отображения Θ, Θ', Θ'' ограничены в Ω_0 и таковы, что отображение $\vec{X}$ обладает свойством Липшица и ограничено в $\Omega_0 \cap V$. Пусть k — постоянная Липшица, а M — граница норм всех этих функций.

Для u_1 и u_2 в $\mathcal{O}_0$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\vec{U}(u_1) - \vec{U}(u_2)\| &= \|\Theta'(\Phi(u_1)) \cdot \vec{X}(\Phi(u_1)) - \Theta'(\Phi(u_2)) \cdot \vec{X}(\Phi(u_2))\| \leqslant \\ &\leqslant \|\Theta'(\Phi(u_1)) \cdot (\vec{X}(\Phi(u_1)) - \vec{X}(\Phi(u_2)))\| + \\ &\quad + \|(\Theta'(\Phi(u_1)) - \Theta'(\Phi(u_2))) \cdot \vec{X}(\Phi(u_2))\| \leqslant \\ &\leqslant Mk \|\overrightarrow{\Phi(u_1) - \Phi(u_2)}\| + \|\Theta'(\Phi(u_1)) - \Theta'(\Phi(u_2))\| M. \end{aligned} \tag{V, 2; 80}$$

Из формулы конечных приращений следует, что это выражение не превосходит

$$M^2 k \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\| + M^2 \|\overrightarrow{\Phi(u_1) - \Phi(u_2)}\|^{1)} \leqslant (M^2 k + M^3) \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|, \tag{V, 2; 81}$$

а следовательно, $\vec{U}$ локально удовлетворяет свойству Липшица. Так как $\mathcal{O}$ представляет собой *открытое* множество в $\mathbb{R}^n$, то дифференциальное уравнение $\overrightarrow{du/dt} = \vec{U}(u)$ полностью удовлетворяет условиям теоремы 1. Значит, при заданных начальных значениях t_0, $u_0 = \Theta(x_0)$ имеется интервал $]t_0 - \alpha_0, t_0 + \beta_0[$, в котором существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, соответствующее этому

---

[1]) Здесь записано, что $\|\Theta'(a) - \Theta'(b)\| \leqslant \|\overrightarrow{a - b}\| \sup\limits_{\xi \in [a, b]} \|\Theta''(\xi)\|$. В этом месте использовано условие $m \geqslant 2$. Многообразие $V \in [a, b]$ должно принадлежать по меньшей мере классу C^2.

начальному условию. Если такое решение мы обозначим через $\varphi\colon t \to \varphi(t)$, то функция $\Phi \circ \varphi\colon t \to \Phi(\varphi(t))$ будет решением уравнения (V, 2; 77), ибо, согласно (V, 2; 79),

$$\frac{\vec{d}}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \overrightarrow{\varphi'(t)} = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \vec{U}(\varphi(t)) = \vec{X}(\Phi(\varphi(t))). \tag{V, 2; 82}$$

Обратно,

$$\frac{\vec{d}}{dt}(\Theta(f(t))) = \Theta'(f(t)) \cdot \overrightarrow{f'(t)} = \Theta'(f(t)) \cdot \vec{X}(f(t)) = \vec{U}(\Theta(f(t))) \tag{V, 2; 82$_2$}$$

или

$$\varphi'(t) = \vec{U}(\varphi(t)), \text{ и если положить } \varphi(t) = \Theta(f(t)),$$

то решение $x = f(t)$ уравнения (V, 2; 77) обязательно получится из такого решения по крайней мере для значений t, достаточно близких к t_0, для которых $f(t) \in \Phi(\mathcal{O}_0)$.

Этим доказывается существование локальных решений уравнения (V, 2; 77). Кроме того, два решения уравнения (V, 2; 77), принимающие в точке t_0 одно и то же значение x_0, совпадают в каждой окрестности точки x_0, и потому методы теоремы 2 и ее следствия дают одни и те же результаты как для уравнения (V, 2; 77), так и для уравнения (V, 1; 1).

Предположим, что многообразие V компактно. Пусть $]t_0-\alpha, t_0+\beta[$ — максимальный интервал определения решения f. Будем считать β конечным. Известно, что если $t < t_0+\beta$ стремится к $t_0+\beta$, то функция $f(t)$ имеет предел лишь в том случае, когда имеет предел $\vec{X}(f(t))$, и тогда решение может быть продолжено до самой точки $t_0+\beta$. Однако мы видели, что это невозможно. Но, поскольку V компактно, можно найти такую последовательность $t_1, t_2, t_3, \ldots$, стремящуюся к $t_0+\beta$, при n, стремящемся к бесконечности, что $f(t_n)$ имеет предел в V. То же самое имеет место, если многообразие V предполагается только замкнутым и если имеет место оценка (V, 2; 78$_2$). В самом деле, в этом случае имеет место дифференциальное неравенство $\|\vec{d}f/dt\| = \|\vec{X}(f(t))\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{f(t)-O}\| + \nu$, а следовательно, функция f удовлетворяет неравенству (V, 2; 36) (где x следует заменить на t). Отсюда следует, что функция $f(t)$ ограничена, т. е. для $t < t_0+\beta$ содержится в некотором замкнутом шаре. Следовательно, она принадлежит пересечению этого замкнутого шара и замкнутого многообразия V, т. е. некоторому компакту многообразия V. Но тогда снова можно найти последовательность t_n, стремящуюся к $t_0+\beta$, на которой $f(t_n)$ имеет предел в V. Из следствия теоремы 5 (где $\vec{L}_n = \vec{L}$) вытекает, что можно найти такой интервал $[t_0+\beta-\varepsilon,\ t_0+\beta+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, что все решения уравнения (V, 2; 77), соответствующие начальным значениям t_n, $f(t_n)$, будут определены в этом интервале при достаточно большом n. Это говорит о том, что решение f можно продолжить до точки $t_0+\beta+\varepsilon>t_0+\beta$, и мы получили противоречие. Значит, $\beta=+\infty$ и аналогично $\alpha=+\infty$.

Наконец, если X принадлежит классу C^p, $p\leqslant m$, то доказательство, проведенное в теореме 8 индукцией по m, показывает, что решения принадлежат классу C^{p+1}.

Следствие. *Пусть $\vec{X}$ — векторное поле, локально обладающее свойством Липшица в открытом множестве Ω аффинного пространства E. Пусть V — замкнутое многообразие класса C^m, $m\geqslant 2$* [1]*, в множестве Ω. Предположим, что в каждой точке x многообразия V вектор $\vec{X}(x)$ является касательным в точке x к V. Если функция $f\colon t\to f(t)$ есть такое решение дифференциального уравнения $d\vec{x}/dt=\vec{X}(x(t))$ со значениями в E, определенное на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, что $f(t_0)$ лежит в V, то $f(t)$ для каждого t лежит в V (каждая интегральная кривая, имеющая одну точку в V, целиком лежит в V).*

Доказательство. Согласно теореме, в некоторой окрестности точки t_0 существует решение дифференциального уравнения со значениями в V. В силу теоремы 1 в E существует лишь единственное решение. Следовательно, единственное в E решение для всех t, достаточно близких к t_0, лежит в V. Если через $\mathscr{E}$ обозначить множество тех t из $\mathbb{R}_1$, для которых $f(t)\in V$, то это множество будет открытым, поскольку каждая его точка входит в него с некоторой своей окрестностью. Так как это множество является прообразом замкнутого множества V при непрерывном отображении f, то оно замкнуто. Поскольку $\mathbb{R}_1$ связно, то это означает, что $\mathscr{E}$ совпадает с $\mathbb{R}_1$.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $|a, b|$ — вещественный интервал, а $\vec{F}$ — *векторное* нормированное пространство. *Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$\vec{y}'=A(x)\cdot\vec{y}, \tag{V, 3; 1}$$

где для любого x из $|a, b|$ отображение $A(x)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$, т. е. некоторым эле-

[1]) Для этого следствия достаточно взять $m\geqslant 1$.