найти такой интервал $[t_0+\beta-\varepsilon,\ t_0+\beta+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, что все решения уравнения (V, 2; 77), соответствующие начальным значениям $t_n$, $f(t_n)$, будут определены в этом интервале при достаточно большом $n$. Это говорит о том, что решение $f$ можно продолжить до точки $t_0+\beta+\varepsilon>t_0+\beta$, и мы получили противоречие. Значит, $\beta=+\infty$ и аналогично $\alpha=+\infty$.

Наконец, если $X$ принадлежит классу $C^p$, $p\leqslant m$, то доказательство, проведенное в теореме 8 индукцией по $m$, показывает, что решения принадлежат классу $C^{p+1}$.

Следствие. *Пусть $\vec{X}$ — векторное поле, локально обладающее свойством Липшица в открытом множестве $\Omega$ аффинного пространства $E$. Пусть $V$ — замкнутое многообразие класса $C^m$, $m\geqslant 2$* [1]*, в множестве $\Omega$. Предположим, что в каждой точке $x$ многообразия $V$ вектор $\vec{X}(x)$ является касательным в точке $x$ к $V$. Если функция $f\colon t\to f(t)$ есть такое решение дифференциального уравнения $d\vec{x}/dt=\vec{X}(x(t))$ со значениями в $E$, определенное на интервале $\mathbb{R}_1$ прямой $\mathbb{R}$, что $f(t_0)$ лежит в $V$, то $f(t)$ для каждого $t$ лежит в $V$ (каждая интегральная кривая, имеющая одну точку в $V$, целиком лежит в $V$).*

Доказательство. Согласно теореме, в некоторой окрестности точки $t_0$ существует решение дифференциального уравнения со значениями в $V$. В силу теоремы 1 в $E$ существует лишь единственное решение. Следовательно, единственное в $E$ решение для всех $t$, достаточно близких к $t_0$, лежит в $V$. Если через $\mathscr{E}$ обозначить множество тех $t$ из $\mathbb{R}_1$, для которых $f(t)\in V$, то это множество будет открытым, поскольку каждая его точка входит в него с некоторой своей окрестностью. Так как это множество является прообразом замкнутого множества $V$ при непрерывном отображении $f$, то оно замкнуто. Поскольку $\mathbb{R}_1$ связно, то это означает, что $\mathscr{E}$ совпадает с $\mathbb{R}_1$.

## § 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $|a, b|$ — вещественный интервал, а $\vec{F}$ — *векторное* нормированное пространство. *Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$\vec{y}'=A(x)\cdot\vec{y}, \qquad \text{(V, 3; 1)}$$

где для любого $x$ из $|a, b|$ отображение $A(x)$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$, т. е. некоторым эле-

[1]) Для этого следствия достаточно взять $m\geqslant 1$.

ментом пространства $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. Таким образом, $A$: $x \to A(x)$ есть непрерывное отображение $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$.

Предположим, например, что $\vec{F}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $\vec{f}$, определенная на $|a, b|$ со значениями в $\vec{F}$, эквивалентна системе $n$ скалярных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Отображение $A(x)$ определяется матрицей с $n$ строками и $n$ столбцами. Обозначим через $A_{ij}(x)$ коэффициенты этой матрицы. Тогда дифференциальное уравнение может быть записано в матричной форме

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \ldots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \ldots & A_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(x) & A_{n2}(x) & \ldots & A_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{V}, 3; 2)$$

или же в виде

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\, y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\mathrm{V}, 3; 3)$$

Пусть теперь нам нужно решить дифференциальное уравнение порядка $p$, записанное в виде

$$\vec{y}^{(p)} = A_0(x) \cdot \vec{y} + A_1(x) \cdot \vec{y}' + \ldots + A_{p-1}(x) \cdot \vec{y}^{(p+1)}, \qquad (\mathrm{V}, 3; 4)$$

где $A_i$ — непрерывные функции, определенные на $|a, b|$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$.

Полагая $\vec{y} = \vec{z}_0$, $\vec{y}' = \vec{z}_1, \ldots, \vec{y}^{(p-1)} = \vec{z}_{p-1}$, мы сведем это уравнение к линейной системе

$$\begin{aligned} \vec{z}_0' &= \vec{z}_1, \\ \vec{z}_1' &= \vec{z}_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2}' &= \vec{z}_{p-1}, \\ \vec{z}_{p-1}' &= A_0(x)\vec{z}_0 + A_1(x)\vec{z}_1 + \ldots + A_{p-1}(x)\vec{z}_{p-1}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{V}, 3; 5)$$

Эта система $n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка, аналогичная системе (V, 3; 2), также может быть записана в матричной форме (элементы этой матрицы принадлежат пространству $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$; обычная матрица получится, когда $\vec{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} \vec{z}_0' \\ \vec{z}_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2}' \\ \vec{z}_{p-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & A_{p-2}(x) & A_{p-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{z}_{p-2} \\ \vec{z}_{p-1} \end{pmatrix} \qquad (V, 3; 6)$$

($I$ — тождественное отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$, $I \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$).

Теорема 9. *Если пространство $\vec{F}$ полно, то линейное дифференциальное уравнение вида* (V, 3; 1) *имеет, и притом единственное, решение, определенное во всем интервале* $|a, b|$, *соответствующее заданному условию Коши* $x_0$, $y_0$. *Кроме того, если $A$ является функцией на $|a, b|$ класса $C^m$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то решение будет функцией на $|a, b|$ класса $C^m$ со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Поскольку $A$ является непрерывным отображением $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то оно ограничено на каждом компактном интервале $[a', b']$ интервала $|a, b|$. Пусть $M$—точная верхняя грань его нормы. Тогда функция $\vec{L}$, определенная здесь равенством $\vec{L}(x, \vec{y})=A(x)\cdot\vec{y}$, удовлетворяет, с одной стороны, неравенству

$$\|\vec{L}(x, \vec{y})\| \leqslant M\|\vec{y}\| \qquad (V, 3; 7)$$

и, с другой стороны, условию Липшица по $\vec{y}$:

$$\|\vec{L}(x, \vec{y}_1)-\vec{L}(x, \vec{y}_2)\| \leqslant M\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|. \qquad (V, 3; 8)$$

Отсюда следует, что в интервале $[a', b']$ можно применить теорему 4, в силу которой решение существует и единственно. (Из замечания 2°) на стр. 13 непосредственно следует, что здесь в системе безопасности необходимости нет и что метод последовательных приближений равномерно сходится на $[a', b']$.) Поскольку это утверждение верно для любого отрезка $[a', b']$, то оно справедливо и для самого интервала $|a, b|$. Принадлежность решения классу $C^{m+1}$ вытекает теперь из теоремы 8.

Теорема 10. *Множество $\mathscr{E}$ решений уравнения* (V, 3; 1) *является некоторым векторным подпространством пространства $\vec{F}^{|a,b|}$. Отображение, ставящее в соответствие каждому решению $\vec{f}$ его значение $\vec{y}_0$ в точке $x_0$, является линейной биекцией $\mathscr{E}$ на $\vec{F}$.*

Доказательство. Так как уравнение линейно, то сумма двух решений и произведение решения на произвольное число также являются решениями. Следовательно, множество $\mathscr{E}$ — это векторное пространство.

Отображение, ставящее каждому $\vec{f} \in \mathscr{E}$ в соответствие элемент $\vec{f}(x_0) = \vec{y}_0$, линейно. Из теоремы 9 существования и единственности следует, что это отображение является биекцией.

Следствие 1. *Для того чтобы $k$ решений были линейно независимыми элементами в векторном пространстве $\mathscr{E}$, необходимо и достаточно, чтобы значения этих решений в точке $x_0$ интервала $|a, b|$ были $k$ линейно независимыми векторами пространства $\vec{F}$. Решение, обращающееся в нуль в точке $x_0$, тождественно равно нулю.*

Это утверждение вытекает из свойства инъективности отображения $\vec{f} \to \vec{f}(x_0)$ пространства $\mathscr{E}$ в пространство $\vec{F}$.

Следствие 2. *Если $\vec{F}$ — пространство размерности $n$, то множество $\mathscr{E}$ решений также имеет размерность $n$.*

Это следствие, очевидно, вытекает из теоремы.

Если в этом случае мы выберем в $\vec{F}$ некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (это делается автоматически, если в качестве $\vec{F}$ взять пространство $\mathbb{R}^n$), то каждому из векторов $\vec{e}_i$, рассматриваемому как начальное значение в точке $x_0$ интервала $|a, b|$, соответствует некоторое решение.

Таким образом, имеется $n$ независимых решений $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$, образующих некоторый базис в векторном пространстве решений $\mathscr{E}$. Каждому начальному значению $\vec{y}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$ соответствует единственное решение $\vec{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \vec{\eta}_i$.

Функция $\vec{\eta}_i$ в базисе пространства $\vec{F}$ записывается в виде

$$\vec{\eta}_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}(x) \vec{e}_k, \qquad (V, 3; 9)$$

где $\eta_{ik}$ — скалярные функции, а решение, соответствующее начальному условию, имеет вид

$$\vec{f}(x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} u_i \eta_{ik}(x)\,\vec{e}_k. \tag{V,3; 10}$$

Только что определенные функции $\eta_i(x)$ и $\eta_{ij}(x)$ связаны с выбором начальной точки $x_0$. Их иногда полезно обозначать через $\eta_i(x, x_0)$ и $\eta_{ik}(x, x_0)$.

Если через $f_k$ обозначить составляющую функции $\vec{f}$ по вектору $\vec{e}_k$, то функции $f_k$ удовлетворяют дифференциальной системе (V, 3; 2) или (V, 3; 3), а (V, 3; 10) можно записать в виде

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ik}(x, x_0)\, f_i(x_0). \tag{V,3; $10_2$}$$

Рассмотрим частный случай *скалярного*[1]) дифференциального уравнения порядка $p$ вида (V, 3; 4). Производя уже указанную ранее замену функций, можно прийти к одному дифференциальному уравнению, рассматриваемому в пространстве $\vec{F} = \mathbb{R}^p$. Новая неизвестная функция $\vec{g} = (f, f', f'', \ldots, f^{(p-1)})$ является функцией, определенной на $|a, b|$ со значениями в $\mathbb{R}^p$.

Начальное условие эквивалентно заданию в точке $x_0$ вектора $\vec{z}_0$ из $\mathbb{R}^p$, т. е. заданию скаляров $y_0^{(q)}$, $q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$,— значений функции и ее производных порядка $1, 2, \ldots, p-1$. Когда мы говорим о независимости системы $k$ начальных значений, мы имеем в виду независимость соответствующих векторов пространства $\mathbb{R}^p$.

Если рассматриваются $k$ решений уравнения, то слова «зависимые» или «независимые» a priori двусмысленны. Не ясно, говорится ли о независимости функций $\vec{g}$ или о независимости функций $f$?

*Легко видеть, что оба эти утверждения о независимости, точно так же, как и оба утверждения о зависимости, эквивалентны.* В самом деле, если между $k$ решениями $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ имеется линейное соотношение с коэффициентами, не равными одновременно нулю, то то же самое соотношение будет, очевидно, иметь место между функциями $f_i$. Обратно, если такого рода соотношение имеет место между функциями $f_1, f_2, \ldots, f_k$, то оно сохраняется для первых производных, вторых производ-

[1]) Коэффициенты $A_q(x)$, $q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, являются здесь непрерывными скалярными функциями. Полем скаляров обычно будет поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ных и т. д., включая производные порядка $p-1$, т. е. это соотношение имеет место между соответствующими функциями $\vec{g}_i$.

Множество решений $f$ уравнения (V, 3; 4) является также и векторным подпространством размерности $n$ пространства $\mathscr{C}(|a, b|)$. В связи с предыдущим мы должны через $\eta_i$, $i=0, 1, 2, \ldots, p-1$ [1]), обозначить решение уравнения (V, 3; 4), соответствующее начальному условию

$$\eta_i^{(q)}(x_0)=0 \quad \text{для} \quad q \neq i, \ \eta_i^{(i)}(x_0)=1, \tag{V, 3; 11}$$

или

$$\eta_i^{(q)}(x_0)=\delta_i^q, \tag{V, 3; 12}$$

где $\delta_i^q$ — символ Кронекера. Если теперь некоторое решение определено начальными условиями

$$u^{(q)}=y_0^{(q)}=f^{(q)}(x_0), \tag{V, 3; 13}$$

то оно задается формулой

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p-1} y_0^{(i)}\eta_i(x) \quad \text{или} \quad f(x)=\sum_{i=0}^{p-1} \eta_i(x, x_0) f^{(i)}(x_0). \tag{V, 3; 14}$$

По поводу этих дифференциальных скалярных уравнений порядка $p$ напомним некоторые результаты, которые излагаются в специальных курсах.

При $p=1$ уравнение решается непосредственно в квадратурах. В самом деле, в этом случае оно имеет вид

$$\frac{y'}{y}=A(x), \tag{V, 3; 15}$$

а его решение находится по формулам

$$y=Ce^{\int A(x)\,dx}, \quad f(x)=y_0 e^{\int_{x_0}^{x} A(\xi)\,d\xi}. \tag{V, 3; 16}$$

Однако в том случае, когда порядок дифференциального уравнения $\geqslant 2$, его решение в общем виде через интегралы не выражается.

Обычно, опираясь на известные частные решения, стараются понизить порядок уравнения. Если уравнение (V, 3; 4) имеет частное решение $Y$, то, используя замену функций $y=Yu$, непосредственно проверяют, что $u$ является решением дифференциального уравнения, в котором коэффициент при $u$ равен 0.

[1]) Здесь индексы 0, 1, 2, ..., $p-1$ используются для нумерации элементов базиса пространства $\mathbb{R}^p$.

Другими словами, если положить $u' = v$, то мы получим относительно $v$ дифференциальное уравнение порядка $p-1$. Решив его, можно затем найти $u$ квадратурой.

Когда речь идет о системе дифференциальных уравнений или о дифференциальном уравнении, соответствующем пространству $\vec{F}$ размерности $\geqslant 2$, то, даже если это уравнение имеет первый порядок, явное решение его в квадратурах, вообще говоря, не известно.

**Разрешающий оператор (резольвента) линейного дифференциального уравнения**

Пусть пространство $\vec{F}$ полно, и пусть $x_1$, $x_2$ — две точки интервала $|a, b|$. Согласно теореме 9, существует единственное решение уравнения (V, 3; 1), принимающее заданное значение $\vec{y}_1$ в точке $x_1$. В точке $x_2$ это решение принимает определенное значение $\vec{y}_2$. Тем самым определяется некоторое отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$, которое каждому значению решения в точке $x_1$ ставит в соответствие его значение в точке $x_2$. Это отображение, очевидно, линейно, поскольку сумме двух начальных значений в точке $x_1$ соответствует решение, равное сумме двух соответствующих решений, и, следовательно, его значение в точке $x_2$ равно сумме двух соответствующих значений. Аналогичное утверждение имеет место относительно умножения на скаляр. Если через $\pi_x$ мы обозначим биекцию пространства решений $\mathscr{E}$ на $\vec{F}$, которая каждому решению $\vec{f}$ ставит в соответствие его значение в точке $x$: $\pi_x \vec{f} = \vec{f}(x)$ (теорема 10), то рассматриваемое отображение будет иметь вид $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$.

Это линейное отображение $\vec{F}$ в $\vec{F}$ непрерывно. В самом деле, если рассмотреть последовательность начальных значений $(\vec{y}_1)_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующих одной и той же точке $x_1$ и сходящихся при $\nu$, стремящемся к бесконечности, к некоторому пределу $\vec{y}_1$ в $\vec{F}$, то из теоремы 6 о непрерывности решения относительно начальных значений следует, что последовательность решений $\vec{f}_\nu$, соответствующих начальным значениям $(\vec{y}_1)_\nu$, сходится к решению $\vec{f}$, соответствующему начальному значению $\vec{y}_1$, равномерно на каждом компакте интервала $|a, b|$. В частности, сходимость имеет место в точке $x_2$, чем и доказывается непрерывность отображения $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$.

Отображение $\pi_{x_2} \circ \pi_{x_1}^{-1}$ является линейным непрерывным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$, т. е. элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, который обозначается через $R(x_2;\ x_1)$ [1]). *Этот оператор полностью характеризуется тем фактом, что для каждого решения $\vec{f}$ дифференциального уравнения имеет место формула*

$$\vec{f}(x_2)=R(x_2,\ x_1)\cdot\vec{f}(x_1),\quad \text{где}\quad R(x_2,\ x_1)=\pi_{x_2}\circ\pi_{x_1}^{-1}. \qquad (V,3;\ 17)$$

Оператор $R(x_2,\ x_1)$ называется *разрешающим оператором* (или *резольвентой*) дифференциального уравнения относительно точек $x_1$ и $x_2$ интервала $|a,\ b|$. То, что обычно называют разрешающим оператором дифференциального уравнения, является функцией $R$: $(x_2,\ x_1)\to R(x_2,\ x_1)$. Это некоторое отображение $|a,\ b|\times\times|a,\ b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. Если в $\vec{F}$ выбран базис с обозначениями, принятыми на стр. 40, то разрешающий оператор представляется с помощью матрицы, транспонированной к матрице $\eta_{ij}$: $R_{jl}(x_2,\ x_1)=\eta_{lj}(x_2,\ x_1)$.

Теорема 11. *Разрешающий оператор обладает следующими основными свойствами:*

$$\begin{aligned} &R(x_3,\ x_2)\circ R(x_2,\ x_1)=R(x_3,\ x_1),\\ &R(x_1,\ x_2)=(R(x_2,\ x_1))^{-1}, \qquad (V,3;\ 18)\\ &R(x,\ x)=I.\end{aligned}$$

Доказательство. Эти соотношения вытекают непосредственно из определения $R(x_2,\ x_1)=\pi_{x_2}\circ\pi_{x_1}^{-1}$ [или, еще лучше, из первой формулы (V, 3; 17), выражающей тот факт, что $R(x_2,\ x_1)\cdot\vec{y}_1$ дает значение в точке $x_2$ решения, принимающего значение $\vec{y}_1$ в точке $x_1$].

Теорема 12. *Отображение $R$ множества $|a,\ b|\times|a,\ b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$ является единственным отображением, имеющим частную производную по первой переменной и удовлетворяющим, с одной стороны, дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x,\ \xi)=A(x)\circ R(x,\ \xi), \qquad (V,3;\ 19)$$

*а с другой — начальному условию*

$$R(x,\ x)=I. \qquad (V,3;\ 20)$$

[1]) Для удобства записи дальнейших формул, в особенности формулы (V, 3; 18), вместо $R(x_1,\ x_2)$ пишут $R(x_2,\ x_1)$.

Доказательство. В самом деле, если мы зафиксируем $\xi$ в интервале $|a, b|$ и рассмотрим $R$ как функцию одной переменной $x$, то получим некоторую функцию со значениями не в векторном нормированном пространстве $\vec{F}$, а в векторном нормированном пространстве $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Так как пространство $\vec{F}$ полно, то $\vec{G}$ также полно (теорема 50 гл. II).

Рассмотрим теперь для некоторой функции, определенной на $|a, b|$ со значениями в $\vec{G}$, дифференциальное уравнение

$$\vec{Y}' = A(x) \circ \vec{Y}. \qquad (V, 3; 20_2)$$

Сначала убедимся, что уравнение является линейным дифференциальным уравнением в смысле определения (V, 3; 1).

Для фиксированного $x$ отображение $A(x)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Но тогда $\vec{Y} \to A(x) \circ \vec{Y}$ представляет собой некоторое линейное непрерывное отображение $B(x)$ пространства $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ в себя, т. е. $B(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$. Соотношение (V, 3; 20) можно записать в виде $\vec{Y}' = B(x) \cdot \vec{Y}$. Кроме того, в силу теоремы 54 гл. II норма $\| B(x) \|$ отображения $B(x)$ в пространстве $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$, определяемая формулой

$$\sup_{\substack{u \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F}) \\ \| u \| \leqslant 1}} \| A(x) \circ u \|,$$

не превосходит $\| A(x) \|$ — нормы $A(x)$ в пространстве $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Для того чтобы доказать, что мы имеем дело с дифференциальным уравнением вида (V, 3; 1), мы должны доказать, что $B$: $x \to B(x)$ является непрерывным отображением $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{G})$; иначе говоря, мы должны доказать, что при $x$, стремящемся к $x_0$, норма $\| B(x) - B(x_0) \|$ стремится к 0. Эта величина, согласно определению нормы, не превосходит $\| A(x) - A(x_0) \|$ — нормы в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Следовательно, она стремится к 0 в силу предположения о непрерывности отображения $A$ по $x$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Значит, мы можем применить теорему 9 и утверждать, что существует, и притом единственное, решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $Y(\xi) = I$, где $I$ — тождественный оператор $\vec{F}$ в $\vec{F}$, являющийся элементом пространства $\vec{G} = \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Обозначим через $S(x, \xi)$ решение этого дифференциального уравнения. Рассмотрим теперь при заданном векторе $\vec{y}_1$ из $\vec{F}$

функцию $\vec{f}$, определенную на $|a, b|$ со значениями в $\vec{F}$ по формуле

$$\vec{f}(x) = S(x, \xi)\cdot\vec{y}_1{}^{1)}. \qquad (V, 3; 21)$$

Эта функция дифференцируема, а ее производная в силу следствия 1 теоремы 11 гл. III (о перестановочности производной и линейного непрерывного отображения) имеет вид

$$\vec{f}'(x) = \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi)\cdot\vec{y}_1. \qquad (V, 3; 22)$$

Так как $\vec{Y}$ является решением дифференциального уравнения (V, 3; 20), то, кроме того,

$$\vec{f}'(x) = (A(x)\circ S(x, \xi))\cdot\vec{y}_1 = A(x)\cdot\vec{f}(x). \qquad (V, 3; 23)$$

Это говорит о том, что $\vec{f}$ есть решение дифференциального уравнения (V, 3; 1). Так как начальным условием является $\vec{f}(\xi) = S(\xi, \xi)\cdot\vec{y}_1 = \vec{y}_1$, то $\vec{f}$ — единственное решение дифференциального уравнения (V, 3; 1), соответствующее начальному условию $\vec{f}(\xi) = \vec{y}_1$. Поскольку значение этого решения в точке $x$ задается формулой (V, 3; 21) и это справедливо для любого начального вектора $\vec{y}_1$, то $S(x, \xi) = R(x, \xi)$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Теорема 13. *Если в уравнении* (V, 3; 1) *функция $A$ принадлежит классу $C^m$, то резольвента $R$ является функцией переменных $x$ и $\xi$ класса $C^{m+1}$, т. е. является отображением $|a, b|\times|a, b|$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ класса $C^{m+1}$.*

Доказательство. Тот факт, что резольвента $R$ имеет все последовательные производные до порядка $m+1$ по $x$, вытекает из того, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению (V, 3; 19) с коэффициентами класса $C^m$ и из следствия теоремы 8.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $R$, не зависит от параметра $\xi$. От параметра $\xi$ зависит начальное условие в смысле, указанном в теореме 6. Из этой теоремы вытекает, что резольвента $R$ является непрерывным отображением множества $|a, b|\times|a, b|$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Ее первая производная по $x$, определяемая по фор-

---

1) Функция $\vec{f}$ зависит от выбора $\vec{y}_1$. Следовало бы писать $f_{\vec{y}_1}(x)$.

муле (V, 3; 19), также является непрерывным отображением $|a, b| \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Для того чтобы показать, что $R$ имеет частную производную по $\xi$, надо было бы воспользоваться теоремой о дифференцируемости по параметру $\xi$. Но мы дадим прямое доказательство. С этой целью воспользуемся вторым равенством (V, 3; 18), т. е. равенством $R(x, \xi) = (R(\xi, x))^{-1}$. Отсюда видно, что частная производная по $\xi$, т. е. частная производная по второй переменной функции $R$, является частной производной по первой переменной функции $R^{-1}$. Кроме того, мы знаем, что отображение $R \to R^{-1}$ дифференцируемо, и нам известна формула (III, 8; 32) дифференцирования обратного оператора. Мы видим, следовательно, что $R$ дифференцируема по $\xi$ и

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}(R(\xi, x))^{-1} = -(R(\xi, x))^{-1} \circ \frac{\partial R}{\partial \xi}(\xi, x) \circ (R(\xi, x))^{-1}. \tag{V, 3; 24}$$

Заменяя здесь средний член с помощью дифференциального уравнения (V, 3; 19), получаем замечательную формулу:

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = -R(x, \xi) \circ (A(\xi) \circ R(\xi, x)) \circ (R(\xi, x))^{-1}, \tag{V, 3; $24_2$}$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}(x, \xi) = -R(x, \xi) \circ A(\xi). \tag{V, 3; 25}$$

Эта формула аналогична формуле (V, 3; 19). Она отличается от нее только знаком и порядком композиции оператора $A$: справа, а не слева. Отсюда следует, что резольвента $R$ имеет непрерывную относительно совокупности переменных $x$, $\xi$ частную производную по $\xi$ и, следовательно, в силу теоремы 15 гл. III является отображением класса $C^1$ множества $|a, b| \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Теперь достаточно провести индукцию по $m$. Предположим, что если $A$ принадлежит классу $C^{m-1}$ отображений $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то $R$ является отображением $|a, b| \times |a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$ класса $C^m$. Пусть теперь $A$ принадлежит классу $C^m$ при $m \geqslant 1$. Тогда эта функция в любом случае принадлежит классу $C^{m-1}$, а следовательно, $R$ принадлежит по крайней мере классу $C^m$. В этом случае функции $\partial R/\partial x$ и $\partial R/\partial \xi$, определяемые формулами (V, 3; 19) и (V, 3; 25), в силу теоремы 18 гл. III принадлежат классу $C^m$. Это означает, что резольвента $R$ принадлежит классу $C^{m+1}$, и теорема доказана.

**Линейное уравнение со свободным членом**

Считая $\vec{F}$ нормированным векторным пространством, будем называть линейным уравнением со свободным членом уравнение вида

$$\vec{y}' = A(x)\cdot\vec{y} + \vec{B}(x), \tag{V, 3; 26}$$

где $A$ — непрерывное отображение $|a, b|$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, а $\vec{B}$ — непрерывное отображение $|a, b|$ в $\vec{F}$. Выражение «линейное со свободным членом» не совсем удачно. Лучше было бы сказать: «аффинное дифференциальное уравнение», поскольку для каждого $x$ отображение $\vec{y}\to A(x)\cdot\vec{y}+\vec{B}(x)$ является аффинным отображением $\vec{F}$ в $\vec{F}$. Функция $\vec{B}$ называется свободным членом дифференциального уравнения. Уравнение (V, 3; 1) с той же самой функцией $A$ называется соответствующим линейным уравнением или соответствующим однородным уравнением [1]).

Теорема 14. *Общее решение линейного уравнения со свободным членом* (V, 3; 26) *получается добавлением к какому-либо его частному решению общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Доказательство очевидно.

Конечно, эта теорема *не доказывает* существования решения, поскольку в ней необходимо предполагать существование частного решения. Однако в случае полноты $\vec{F}$ существование частного решения непосредственно следует из теоремы 4: для любых начальных значений $x_0$, $\vec{y}_0$ существует, и притом единственное, решение, определенное во всем интервале $|a, b|$.

Теорема 15. *Для заданных начальных значений $x_0$, $\vec{y}_0$ единственное решение уравнения* (V, 3; 26) (*если пространство $\vec{F}$ полно*) *задается формулой*

$$\vec{f}(x) = R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} R(x, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi, \tag{V, 3; 27}$$

*где $R$ — резольвента соответствующего однородного уравнения.*

Эта формула показывает, что если можно решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то можно решить уравнение с любым свободным членом в квадратурах.

[1]) Изучение аффинных дифференциальных уравнений должно было бы проводиться в аффинных пространствах. Однако *практически* $\vec{F}$ всегда является векторным, а не только аффинным пространством.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом, который называется методом *вариации произвольных постоянных*. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\vec{f}(x)=R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}, \tag{V, 3; 28}$$

где $\vec{C}$ — некоторая постоянная, а именно начальное значение $\vec{y}_0$. Теперь мы будем поступать так, как будто эта постоянная является переменной величиной. Другими словами, мы произведем замену функций:

$$\vec{f}(x)=R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}(x). \tag{V, 3; 29}$$

Такая замена всегда возможна. Каждая функция $\vec{f}$ может быть представлена, и притом единственным образом, в виде (V, 3; 29), поскольку для этого достаточно положить

$$\vec{C}(x)=(R(x,\ x_0))^{-1}\cdot\vec{f}(x)=R(x_0,\ x)\cdot\vec{f}(x). \tag{V, 3; 30}$$

Функция $\vec{C}$ дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируема функция $\vec{f}$. Согласно теореме 12 гл. III, учитывая тот факт, что билинейное каноническое отображение $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})\times\vec{F}$ непрерывно, формулу дифференцирования можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{f}'(x)&=\frac{\partial R}{\partial x}(x,\ x_0)\cdot\vec{C}(x)+R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}'(x)=\\&=(A(x)\circ R(x,\ x_0))\cdot\vec{C}(x)+R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}'(x)=\\&=A(x)\cdot\vec{f}(x)+R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}'(x_0).\end{aligned} \tag{V, 3; 31}$$

Если это выражение подставить в уравнение (V, 3; 26) и учесть исчезновение члена, содержащего $\vec{C}$, то мы получим

$$R(x,\ x_0)\cdot\vec{C}'(x)=\vec{B}(x) \tag{V, 3; 32}$$

или

$$\vec{C}'(x)=R(x_0,\ x)\cdot\vec{B}(x). \tag{V, 3; 33}$$

Общее решение будет получено, если в качестве $\vec{C}$ взять произвольную первообразную функции $x\to R(x_0,\ x)\cdot\vec{B}(x)$.

Если учесть начальное условие, то функция $\vec{C}$ должна принимать начальное значение

$$\vec{C}(x_0)=R(x_0,\ x_0)\cdot\vec{f}(x_0)=\vec{y}_0, \tag{V, 3; 34}$$

и, следовательно, единственное возможное решение будет определяться по формуле

$$\vec{C}(x)=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x} R(x_0, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi, \qquad (V,3;35)$$

которая для функции $\vec{f}$ дает выражение

$$\vec{f}(x)=R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0+R(x, x_0)\cdot\int_{x_0}^{x} R(x_0, \xi)\,\vec{B}(\xi)\,d\xi. \qquad (V,3;36)$$

Для заданных $x$ и $x_0$ оператор $R(x, x_0)$ есть линейный оператор, действующий из $\vec{F}$ в $\vec{F}$. Поэтому его можно ввести под знак интеграла (теорема 6 гл. IV) и окончательно получить такую формулу:

$$\vec{f}(x)=R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x} (R(x, x_0)\circ R(x_0, \xi))\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi, \quad (V,3;37)$$

совпадающую, с учетом соотношения (V, 3; 18), с формулой (V, 3; 27).

Замечание. Оба члена формулы (V, 3; 27) имеют важное значение. Первый является решением однородного уравнения, соответствующего заданному начальному значению $\vec{y}_0$. Второй является решением данного уравнения со свободным членом, соответствующим начальному значению $\vec{0}$.

В том, что (V, 3; 27) является искомым решением данного дифференциального уравнения, можно убедиться прямой проверкой. В самом деле, мы уже знаем, что $R(x, x_0)\cdot\vec{y}_0$ является решением однородного уравнения с начальным значением $\vec{y}_0$. Рассмотрим интегральный член. Он, очевидно, обращается в нуль при $x=x_0$. Кроме того, он дифференцируем по $x$ и его производная по $x$ получается так же, как производная функция (IV, 9; 41), по методу, указанному на стр. 798 т. I;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} R(x, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi\right)=$$

$$=R(x, x)\cdot\vec{B}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R}{\partial x}(x, \xi)\cdot\vec{B}(\xi)\,d\xi=$$

$$= \vec{B}(x) + \int_{x_0}^{x} A(x) \cdot (R(x, \xi) \cdot \vec{B}(\xi))\, d\xi =$$

$$= \vec{B}(x) + A(x) \cdot \int_{x_0}^{x} R(x, \xi) \cdot \vec{B}(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 37_2)$$

Это означает, что интегральный член действительно является решением дифференциального уравнения (V, 3; 26) с начальным значением $\vec{0}$. Следовательно, правая часть соотношения (V, 3; 27) является решением уравнения (V, 3; 26) с начальным значением $\vec{y}_0$. Так как решение может быть только одно, то мы тем самым получили новое доказательство теоремы 15.

### Случай скалярного дифференциального уравнения порядка $p$ со свободным членом

Речь идет об уравнении, представимом в виде

$$y^{(p)} = A_0(x)\,y + A_1(x)\,y' + \ldots + A_{p-1}(x)\,y^{(p-1)} + B(x). \qquad (V, 3; 38)$$

Переходя, как обычно, к новой функции $z = (z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}) = (y, y', y'', \ldots, y^{(p-1)})$, данное уравнение можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z_1' \\ \vdots \\ z_{p-2}' \\ z_{p-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & \ldots & A_{p-2}(x) & A_{p-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \qquad (V, 3; 39)$$

Учитывая значение резольвенты, определенное на стр. 44 в обозначениях, принятых на стр. 42, можно убедиться, что решение этого уравнения, соответствующее начальному значению $(y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(p-1)})$, задается по некоторой формуле, из которой мы оставим лишь то, что дает $z_0 = y$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \eta_i(x, x_0)\, f^{(i)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 40)$$

В частности, если отыскивается решение уравнения со свободным членом $B$, соответствующее начальным условиям $y_0 = 0$,

$y_0'=0, \ldots, y_0^{(p-1)}=0$, то оно определяется по формуле

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 41)$$

Здесь снова можно произвести непосредственную проверку, аналогичную той, какая была сделана для формулы (V, 3; $37_2$). Имеем

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi=\eta_{p-1}(x, x)\, B(x)+ \\ +\int_{x_0}^{x} \eta'_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi. \qquad (V, 3; 41_2)$$

Здесь первое слагаемое равно нулю по определению функции $\eta_{p-1}$. Последовательно дифференцируя, получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi=\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(k)}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi \quad \text{для} \quad k \leqslant p-1 \qquad (V, 3; 41_3)$$

и

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^p \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi= \\ =\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(p)}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi+\eta_{p-1}^{(p-1)}(x, x)\, B(x)= \\ =\int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}^{(p)}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi+B(x). \qquad (V, 3; 41_4)$$

Отсюда находим, что

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^p-\sum_{i=0}^{p-1} A_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i\right) \int_{x_0}^{x} \eta_{p-1}(x, \xi)\, B(\xi)\, d\xi= \\ =\int_{x_0}^{x}\left[\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^p-\sum_{i=0}^{p-1} A_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i\right) \eta_{p-1}(x, \xi)\right] B(\xi)\, d\xi+B(x)=B(x), \qquad (V, 3; 41_5)$$

поскольку $\eta_{p-1}$ есть решение соответствующего однородного уравнения.

Написанный интеграл является, следовательно, решением уравнения со свободным членом, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке $x_0$.

При решении линейного уравнения со свободным членом *всегда можно путем изменения правой части свести это уравнение к случаю, когда все начальные значения равны нулю*[1]). *Мы видим, что решение дифференциального уравнения со свободным членом полностью определяется, если известна одна лишь функция* $\eta_{p-1}(x, \xi)$, *соответствующая начальным условиям* $y_0(\xi)=0,\ y_0'(\xi)=0,\ \ldots,\ y_0^{(p-2)}(\xi)=0,\ y_0^{(p-1)}(\xi)=1$. *Конечно, эта функция должна быть известна для каждой точки* $\xi$ *интервала* $|a, b|$[2]).

Если рассмотреть частный случай, когда все $A_i$ равны нулю, то мы получим уравнение

$$y^{(p)} = B(x). \qquad (\mathrm{V}, 3; 42)$$

Решением однородного уравнения $y^{(p)}=0$, соответствующим начальным значениям $0, 0, 0, \ldots, 1$ в точке $\xi$, является функция $\eta_{p-1}(x, \xi) = (x-\xi)^{m-1}/(m-1)!$.

Согласно (V, 3; 41), решением уравнения (V, 3; 42), соответствующим нулевым начальным условиям в точке $x_0 = c$, является функция

$$f(x) = \int_c^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} B(\xi)\, d\xi. \qquad (\mathrm{V}, 3; 43)$$

Это дает (если скалярное дифференциальное уравнение (V, 3; 42) заменить дифференциальным уравнением относительно функций со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$) новое доказательство теоремы 91 гл. IV.

---

[1]) В самом деле, положим $g(x) = f(x) - \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^q}{q!} f^{(q)}(x_0)$. Эта функция обращается в точке $x_0$ в нуль вместе со всеми своими производными порядка $1, 2, \ldots, p-1$. Если к ней применить дифференциальный оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^p - \sum_{i=0}^{p-1} A_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i$, то мы получим разность функции $B(x)$ и некоторой известной функции — результат применения дифференциального оператора к полиному $\sum_{q=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^q}{q!} f^{(q)}(x_0)$. Таким образом, $g$ является решением дифференциального уравнения с известным свободным членом (отличным от $B$) и с нулевыми начальными значениями в $x_0$.

[2]) Начальные значения $0, 0, \ldots, 1$ играют, следовательно, особую роль. С ними мы будем в дальнейшем часто встречаться.

## Применение теории линейных дифференциальных уравнений к вопросу о непрерывности и дифференцируемости решения дифференциального уравнения, зависящего от параметра

Теорема $15_2$. *Пусть* $|a, b|$ — *интервал прямой* $\mathbb{R}$, $F$ — *аффинное нормированное полное пространство,* $\Lambda$ — *топологическое пространство,* $\vec{L}$: $(x, y, \lambda) \to \vec{L}(x, y, \lambda)$ — *непрерывное отображение* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ *в* $\vec{F}$ *и* $\lambda \to x_0(\lambda)$, $\lambda \to y_0(\lambda)$ — *непрерывные отображения* $\Lambda$ *в* $|a, b|$ *и* $\Omega$ *соответственно.*

*Предположим, что* $\vec{L}$ *имеет частную производную* $\partial L/\partial y$, *являющуюся непрерывным отображением* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$ *в* $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. *Если для значения* $\lambda_0$ *параметра* $\lambda$ *дифференциальное уравнение* (V, 1; 1) *имеет решение* $f_{\lambda_0}$, *определенное в замкнутом интервале* $[a', b']$ *интервала* $|a, b|$, *соответствующее начальным значениям* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda_0)$, *то найдется такая окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* $\lambda_0$ *в* $\Lambda$, *что для каждого* $\lambda \in \mathscr{V}$ *дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение* $f_\lambda$ *в* $[a', b']$, *соответствующее начальным значениям* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$. *Кроме того,* $\lambda \to f_\lambda$ *является непрерывной функцией на* $\mathscr{V}$ *со значениями в* $\left(\Omega^{[a', b']}\right)_{cb}$.

*Если* $\Lambda$ — *открытое множество аффинного пространства* $G$ *и* $\vec{L}$ *принадлежит классу* $C^m$ $(m \geqslant 1)$ *на* $|a, b| \times \Omega \times \Lambda$, *то, когда* $\mathscr{V}$ *открыта, решение определяет функцию* $f$: $(x, \lambda) \to f_\lambda(x)$ *класса* $C^m$ *на* $[a', b'] \times \mathscr{V}$ *со значениями в* $F$.

*Производная* $g(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ *есть функция на* $[a', b']$ *со значениями в* $\mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$, *являющаяся решением линейного дифференциального уравнения (называемого уравнением в вариациях)*

$$g'(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \circ g(x) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0), \qquad \text{(V, 3; 44)}$$

*соответствующим начальному значению* $z_0$ *при* $x = x_0(\lambda_0)$, *где*

$$z_0 = y_0'(\lambda_0) - \vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0)\, x_0'(\lambda_0). \qquad \text{(V, 3; 45)}$$

Перед доказательством поясним написанные выше формулы.

1°) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Так как $g(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$ и $\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$, то $\frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \circ g(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$. Следовательно, $g'(x) \in \mathscr{L}(\vec{G}; \vec{F})$.

2°) $y'_0(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G};\ \vec{F})$. Так как $\vec{L}(x_0(\lambda_0),\ y_0(\lambda_0),\ \lambda_0) \in \vec{F}$, а $x'_0(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G};\ \mathbb{R})$[1], то $\vec{L}(x_0(\lambda_0),\ y_0(\lambda_0),\ \lambda_0)\,x'(\lambda_0) \in \mathscr{L}(\vec{G};\ \vec{F})$. Отображение $\vec{\gamma} \to (x'_0(\lambda_0)\cdot\vec{\gamma})\,\vec{L}(x_0(\lambda_0),\ y_0(\lambda_0),\ \lambda_0)$ пространства $\vec{G}$ в пространство $\vec{F}$ есть линейное непрерывное отображение.

Очевидно значение этой теоремы и уравнения в вариациях, *линейного относительно* $z = g$. Если мы можем решить дифференциальное уравнение для значения параметра $\lambda_0$, то решение *линейного* уравнения в вариациях (V, 3; 44), значительно более простого, чем произвольное уравнение, дает производную $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\ \lambda_0)$, а значит, позволяет «приближенно» с помощью разложения Тейлора $f_\lambda(x) = f_{\lambda_0}(x) + g(x)\,\overrightarrow{(\lambda - \lambda_0)} + \ldots$ получить решение данного уравнения для значений параметра $\lambda$, близких к $\lambda_0$. Заметим, наконец, что из условий рассматриваемой теоремы вытекает выполнение условий теоремы существования (теорема 1): из формулы конечных приращений следует, что отображение $\vec{L}$, имеющее непрерывную производную $\partial\vec{L}/\partial y$, локально удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Рассматриваемое дифференциальное уравнение с начальными условиями и параметром $\lambda$ эквивалентно уравнению

$$\vec{\Psi}(f,\ \lambda) = \vec{0}, \qquad \text{(V, 3; 46)}$$

где $\vec{\Psi}$ — отображение $\mathscr{U} \times \Lambda = (\Omega^{[a',\,b']})_{cb;\,1} \times \Lambda$[2] в $(\vec{F}^{[a',\,b']})_{cb;\,1}$. Отображение $\vec{h} = \vec{\Psi}(f,\ \lambda)$ есть непрерывная ограниченная функция на $[a',\ b']$ со значениями в $\vec{F}$, определенная по формуле

$$\vec{h}(x) = f(x) - \Big(y_0(\lambda) + \int\limits_{x_0(\lambda)}^{x} \vec{L}(\xi,\ f(\xi),\ \lambda)\,d\xi\Big). \qquad \text{(V, 3; 47)}$$

---

[1]) $x'_0(\lambda_0)$ является линейной формой на пространстве $\vec{F}$, рассматриваемом как векторное пространство над полем вещественных чисел. Другими словами, функцию $\lambda \to x_0(\lambda)$ можно дифференцировать только относительно поля вещественных чисел, и тогда сама функция $f$ дифференцируема лишь относительно этого поля, а все пространства $\mathscr{L}$ являются линейными пространствами относительно поля вещественных чисел. Тем не менее если $x_0$ не зависит от $\lambda$, то $x'_0(\lambda) \equiv 0$, и можно будет всюду рассматривать дифференцируемость относительно поля комплексных чисел.

[2]) Под $(\Omega^{[a',\,b']})_{cb;\,1}$ мы понимаем подпространство пространства $(F^{[a',\,b']})_{cb;\,1}$, образованное функциями $f$ со значениями в $\Omega \subset F$ без ограничения на значения производной $f'$.

Мы постараемся свести доказательство к теореме о неявных функциях. Согласно теореме 37 гл. III, $\mathcal{U}$ является открытым множеством аффинного пространства $\left(F^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}$. В свою очередь $\Lambda$ есть открытое множество аффинного нормированного пространства $G$. Следовательно, $\mathcal{U}\times\Lambda$ является открытым множеством аффинного нормированного пространства $F\times G$. Отображение $\vec{\Psi}$ есть непрерывное отображение $\mathcal{U}\times\Lambda$ в нормированное векторное пространство $\left(\vec{F}^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}$. Это видно из оценок, которые мы здесь не будем уточнять; они подобны тем, которые составляют сущность теоремы 5 или вариационного исчисления (теорема 38 гл. III). Теперь посмотрим, обладает ли функция $\vec{\Psi}$ частной производной по $f$. Обозначим через $\overrightarrow{\delta f}$ приращение $f$, как это делалось в вариационном исчислении (см. т. I, стр. 372). Тогда, пользуясь методом, примененным в теореме 38 гл. III, можно показать, что функция $\vec{\Psi}$ имеет частную производную $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f,\ \lambda)$, определяемую формулами

$$\overrightarrow{\delta\Psi}=\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f,\ \lambda)\cdot\overrightarrow{\delta f},$$

$$\overrightarrow{\delta\Psi}(x)=\overrightarrow{\delta f}(x)-\int\limits_{x_0(\lambda)}^{x}\frac{\partial L}{\partial y}(\xi,\ f(\xi),\ \lambda)\,\overrightarrow{\delta f}(\xi)\,d\xi, \tag{V, 3; 48}$$

и что частная производная $\frac{\partial\Psi}{\partial f}$ является непрерывным отображением $\mathcal{U}\times\Lambda$ в $\mathcal{L}\left(\left(\vec{F}^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1};\ \left(\vec{F}^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}\right)$.

Так как пространство $F$ полно, то полным будет и пространство $\left(F^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}$ (теорема 113 гл. IV). Поэтому если мы докажем, что $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_{\lambda_0};\ \lambda_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathcal{L}\left(\left(\vec{F}^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1};\ \left(\vec{F}^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}\right)$, то сможем применить теорему 25 гл. III о неявных функциях. Для доказательства обратимости достаточно будет показать, что формула (V, 3; 48) позволяет выразить $\overrightarrow{\delta f}$ как функцию от $\overrightarrow{\delta\Psi}$ и что $\overrightarrow{\delta\Psi}\to\overrightarrow{\delta f}$ является непрерывным линейным отображением. Итак, при заданной вариации $\overrightarrow{\delta\Psi}$ вариация $\overrightarrow{\delta f}$ является решением линейного дифференциального уравнения со свободным членом

$$\overrightarrow{\delta f'}(x)=\frac{\partial L}{\partial y}(x,\ f_{\lambda_0}(x),\ \lambda_0)\cdot\overrightarrow{\delta f}(x)+\overrightarrow{\delta\Psi'}(x), \tag{V, 3; 49}$$

соответствующим начальному условию $\overrightarrow{\delta f}(x_0(\lambda_0)) = \overrightarrow{\delta\Psi}(x_0(\lambda_0))$. Это дифференциальное уравнение вида (V, 3; 1), где $A(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0)$.

Пусть $R$ — резольвента этого дифференциального уравнения. Тогда (V, 3; 48) в силу формулы (V, 3; 27) разрешается относительно $\overrightarrow{\delta f}$:

$$\overrightarrow{\delta f}(x) = R(x, x_0(\lambda_0)) \cdot \overrightarrow{\delta\Psi}(x_0(\lambda_0)) + \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} R(x, \xi) \cdot \overrightarrow{\delta\Psi'}(\xi)\, d\xi. \tag{V, 3; 50}$$

Это означает, что если вариация $\overrightarrow{\delta\Psi}$ берется в пространстве $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$, то она определяется некоторым, и притом единственным, элементом $\overrightarrow{\delta f}$ этого же пространства, и что отображение $\overrightarrow{\delta\Psi} \to \overrightarrow{\delta f}$ линейно и непрерывно. Следовательно, отображение $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_{\lambda_0}, \lambda_0)$ обратимо и применима теорема о неявных функциях. Из нее следует, что в $\Lambda$ имеется окрестность $\mathscr{V}$ точки $\lambda_0$ и в $\left(\Omega^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$ имеется окрестность $\mathscr{F}$ точки $f_{\lambda_0}$, такие, что для каждого $\lambda \in \mathscr{V}$ уравнение (V, 3; 46) имеет, и притом единственное, решение в окрестности $\mathscr{F}$. Тогда для $\lambda \in \mathscr{V}$ данное дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение, определенное на $[a', b']$ со значениями в $\Omega$, соответствующее начальным значениям $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ и такое, что $f_\lambda \in \mathscr{F}$.

[Фраза «такое, что $f_\lambda \in \mathscr{F}$» обогащает полученный перед ней результат в том, что касается *существования* (решение не только существует, но и принадлежит $\mathscr{F}$), но обедняет его в том, что касается *единственности* (единственное решение существует в окрестности $\mathscr{F}$ точки $f_{\lambda_0}$, но таких решений может быть несколько в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$). Однако теорема 2 обеспечивает единственность в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$.]

Из теоремы о неявных функциях, кроме того, следует непрерывность отображения $\lambda \to f_\lambda$ окрестности $\mathscr{V}$ в $\left(\vec{F}^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$.

Пусть $\Lambda$ — открытое множество аффинного нормированного пространства $\vec{G}$. Аналогично можно установить, что если $\vec{L}$ принадлежит классу $C^1$ на $]a, b[ \times \Omega \times \Lambda$, а $x_0$ и $y_0$ принадлежат классу $C^1$ на $\Lambda$, то $\Psi$ принадлежит классу $C^1$ на $\mathscr{U} \times \Lambda$

со значениями в $\left(F^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$. Из теоремы 28 гл. III следует, что отображение $\lambda \to f_\lambda$ открытого множества $\mathscr{V}$ в $\left(\Omega^{[a', b']}\right)_{cb;\,1}$ принадлежит классу $C^1$. Кроме того, производная этой функции может быть получена по правилу (III, 8; 24). Продифференцировав $\Psi(f, \lambda) = 0$ в точке $f_{\lambda_0}$, $\lambda_0$, получим

$$\overrightarrow{\delta f}(x) - \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} \frac{\partial L}{\partial y}(\xi, f_{\lambda_0}(\xi), \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta f}(\xi)\, d\xi - y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} -$$
$$- \int_{x_0(\lambda_0)}^{x} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\xi, f_{\lambda_0}(\xi), \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) d\xi + \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda), \lambda_0) = \vec{0}. \qquad (V, 3; 51)$$

Значит, $\overrightarrow{\delta f}$ можно получить как функцию от $\overrightarrow{\delta\lambda}$ следующим образом: $\overrightarrow{\delta f}$ является решением дифференциального уравнения

$$\overrightarrow{\delta f}'(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}, \qquad (V, 3; 52)$$

соответствующим начальному условию

$$\overrightarrow{\delta f}(x_0(\lambda_0)) = y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} - \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0), \qquad (V, 3; 53)$$

что возвращает нас к (V, 3; 44) и (V, 3; 45).

Наконец, если $\vec{L}$ принадлежит классу $C^m$, а $x_0$ и $y_0$ принадлежат классу $C^m$ на $\Lambda$, то индукцией проверяется, что $\lambda \to f_\lambda$ принадлежит классу $C^m$.

## § 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Так называют дифференциальные уравнения вида

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}, \qquad (V, 4; 1)$$

где $A$ — фиксированное непрерывное линейное отображение пространства $\vec{F}$ в себя: $A \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Здесь $|a, b| = \mathbb{R}$. В качестве поля скаляров для векторного пространства $\vec{F}$ всегда берется поле комплексных чисел.

Решение этого уравнения получается с помощью понятия экспоненты оператора. Рассмотрим ряд

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}. \qquad (V, 4; 2)$$