со значениями в $\left(F^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}$. Из теоремы 28 гл. III следует, что отображение $\lambda \to f_\lambda$ открытого множества $\mathscr{V}$ в $\left(\Omega^{[a',\,b']}\right)_{cb;\,1}$ принадлежит классу C^1. Кроме того, производная этой функции может быть получена по правилу (III, 8; 24). Продифференцировав $\Psi(f, \lambda) = 0$ в точке f_{λ_0}, λ_0, получим

$$\overrightarrow{\delta f}(x) - \int\limits_{x_0(\lambda_0)}^{x} \frac{\partial L}{\partial y}\left(\xi, f_{\lambda_0}(\xi), \lambda_0\right) \cdot \overrightarrow{\delta f}(\xi)\, d\xi - y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} -$$

$$- \int\limits_{x_0(\lambda_0)}^{x} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(\xi, f_{\lambda_0}(\xi), \lambda_0\right) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) d\xi + \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}\left(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda), \lambda_0\right) = \vec{0}. \qquad \text{(V, 3; 51)}$$

Значит, $\overrightarrow{\delta f}$ можно получить как функцию от $\overrightarrow{\delta\lambda}$ следующим образом: $\overrightarrow{\delta f}$ является решением дифференциального уравнения

$$\overrightarrow{\delta f}'(x) = \frac{\partial L}{\partial y}\left(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0\right) \cdot \overrightarrow{\delta f}(x) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x, f_{\lambda_0}(x), \lambda_0\right) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}, \qquad \text{(V, 3; 52)}$$

соответствующим начальному условию

$$\overrightarrow{\delta f}\left(x_0(\lambda_0)\right) = y_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda} - \left(x_0'(\lambda_0) \cdot \overrightarrow{\delta\lambda}\right) \vec{L}\left(x_0(\lambda_0), y_0(\lambda_0), \lambda_0\right), \qquad \text{(V, 3; 53)}$$

что возвращает нас к (V, 3; 44) и (V, 3; 45).

Наконец, если $\vec{L}$ принадлежит классу C^m, а x_0 и y_0 принадлежат классу C^m на Λ, то индукцией проверяется, что $\lambda \to f_\lambda$ принадлежит классу C^m.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Так называют дифференциальные уравнения вида

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}, \qquad \text{(V, 4; 1)}$$

где A — фиксированное непрерывное линейное отображение пространства $\vec{F}$ в себя: $A \in \mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. Здесь $|a, b| = \mathbb{R}$. В качестве поля скаляров для векторного пространства $\vec{F}$ всегда берется поле комплексных чисел.

Решение этого уравнения получается с помощью понятия экспоненты оператора. Рассмотрим ряд

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}. \qquad \text{(V, 4; 2)}$$

Этот ряд абсолютно сходится в пространстве $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. (Если $\vec{F}$ — пространство Банаха, то $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$ есть пространство Банаха.)

В самом деле, так как $\| A^m \| \leqslant \| A \|^m$ (см. т. I, стр. 114), то

$$\| \exp A \| \leqslant e^{\|A\|}. \tag{V, 4; 3}$$

Следовательно, сумма этого ряда является новым непрерывным линейным отображением $\vec{F}$ в себя. Это отображение обозначают через e^A или $\exp A$. Очевидно, $\exp(0) = I$ — тождественное отображение.

Экспонента оператора обладает следующими замечательными свойствами:

1°) Если A и B — *коммутирующие* операторы, т. е. операторы, для которых $AB = BA$, то справедлива формула

$$\exp(A+B) = (\exp A) \circ (\exp B)\,^{1)}. \tag{V, 4; 4}$$

Действительно, если перемножить оба абсолютно сходящихся ряда, представляющих $\exp A$ и $\exp B$, то мы получим

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{p,\ q=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}, \tag{V, 4; 5}$$

откуда после перегруппировки членов приходим к искомому выражению

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!\,q!} A^p B^q \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \exp(A+B)\,^{2)}. \tag{V, 4; 6}$$

В частности, если A — некоторый оператор, а λ и μ — комплексные скаляры, то

$$\exp(\lambda A)\exp(\mu A) = \exp((\lambda+\mu) A). \tag{V, 4; 7}$$

Полагая $\lambda = -\mu$, видим, что оператор $\exp A$ обратим, а его обратный оператор равен $\exp(-A)$.

---

[1]) В качестве символа композиции мы используем $\circ$. Однако напомним, что $\mathscr{L}(\vec{F};\ \vec{F})$ рассматривается как некоторая алгебра и что в ней, вообще говоря, этот символ не вводится. Впрочем, определяя A^m, мы именно так и поступали.

[2]) При переходе от 2-го к 3-му члену равенств (формула бинома) существенно предположение о том, что операторы A и B коммутируют.

Заметим, что операторы A и $\exp A$ всегда коммутируют и при этом

$$A \exp A = (\exp A) A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{m+1}}{m!}. \qquad (V, 4; 8)$$

2°) Пусть A — некоторый оператор. Рассмотрим отображение $x \to \exp(xA)$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$.

Докажем, что это отображение непрерывно и даже дифференцируемо. Для этого, согласно следствию теоремы 111 гл. IV, надо сначала формально почленно продифференцировать рассматриваемый ряд, т. е. написать

$$\frac{d}{dx}(\exp xA) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} A^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} A^{m+1} = A \exp(xA).$$

$$(V, 4; 8_2)$$

После этого достаточно убедиться, что полученный ряд локально равномерно сходится на $\mathbb{R}$. Однако это очевидно, так как для $|x| \leqslant k$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{x^m}{m!} A^{m+1} \right\| \leqslant \frac{k^m}{m!} \| A \|^{m+1} \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \| A \|^{m+1} < +\infty. \qquad (V, 4; 9)$$

Очевидно далее, что предыдущая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(\exp(xA)) = A \exp(xA), \quad \text{или} \quad Y' = A \circ Y = Y \circ A. \qquad (V, 4; 10)$$

Поскольку для $x = 0$ имеет место равенство $\exp(0A) = I$, предыдущая функция является решением дифференциального уравнения для разрешающего оператора (V, 3; 19), соответствующим значению $\xi = 0$. Поэтому для этого разрешающего оператора, согласно теореме 12, имеет место формула

$$R(x, 0) = \exp(xA). \qquad (V, 4; 11)$$

Поскольку мы рассматриваем дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, оно инвариантно относительно сдвига по x, и, следовательно, разрешающий оператор относительно точки ξ выражается через разрешающий оператор относительно точки 0 формулой

$$R(x, \xi) = R(x - \xi, 0) = \exp((x - \xi) A). \qquad (V, 4; 12)$$

Отсюда следует, что единственное решение дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям x_0, $\vec{y}_0$, задается следующим образом:

$$\vec{f}(x) = \exp((x - x_0) A) \cdot \vec{f}(x_0) = \exp((x - x_0) A) \cdot \vec{y}_0. \quad (V, 4; 13)$$

Решив однородное уравнение, можно решить дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и свободным членом:

$$y' = A \cdot \vec{y} + \vec{B}(x). \quad (V, 4; 14)$$

Решение, соответствующее начальным значениям x_0, $\vec{y}_0$, будет иметь вид

$$\vec{f}(x) = \exp((x - x_0) A) \cdot \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \exp((x - \xi) A) \cdot \vec{B}(\xi)\, d\xi. \quad (V, 4; 15)$$

Подводя итог предыдущим результатам, получаем следующую теорему:

Теорема 16. *Ряд* (V, 4; 2) *определяет элемент* $\exp A$ *пространства* $\mathscr{L}(\vec{F}; \vec{F})$. *Имеет место соотношение* (V, 4; 7), *а если* A *и* B *коммутируют, то и соотношение* (V, 4; 4). *Справедливо дифференциальное уравнение* (V, 4; 10). *Разрешающий оператор уравнения* (V, 4; 1) *задается формулой* (V, 4; 12). *Единственное решение дифференциального уравнения* (V, 4; 14), *соответствующее начальным значениям* x_0, $\vec{y}_0$, *определяется формулой* (V, 4; 15).

Практически все затруднения при решении тех или иных задач сводятся к умению вычислять экспоненту оператора.

Частный случай, когда пространство $\vec{F}$ является n-мерным. Построение экспоненты оператора

Даже в этом случае построение экспоненты оператора не является столь уж простым делом. Предположим для определенности, что в $\vec{F}$ выбран некоторый базис. Тогда оператор A можно представить в виде некоторой матрицы M, и мы будем искать экспоненту этой матрицы, определенную рядом (V, 4; 2). Однако этот ряд не приспособлен для прямых вычислений, поскольку для его построения надо уметь вычислять последовательные степени матрицы M. Если нам не удается тем или иным способом узнать собственные значения этой матрицы, то практические вычисления экспоненты будут нелегкими. Если же собственные значения матрицы A — это различные числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то, *используя в качестве базиса набор соответ-*

ствующих собственных векторов, можно привести матрицу оператора A к диагональному виду

$$M=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}. \qquad (V, 4; 16)$$

Тогда для последовательных степеней матрицы имеем:

$$M^m=\begin{pmatrix} r_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n^m \end{pmatrix} \qquad (V, 4; 17)$$

и, следовательно, экспонента такой матрицы будет диагональной матрицей вида

$$\exp M=\begin{pmatrix} e^{r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{r_3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{r_n} \end{pmatrix}. \qquad (V, 4; 18)$$

В частности, если A — гомотетия с отношением λ, $A=\lambda I$, то $\exp A=e^{\lambda}I$. Рассмотрим теперь общий случай, когда характеристические корни оператора A не обязательно различны.

Обозначим корни характеристического уравнения через $r_1, r_2, \dots, r_l$, считая, что r_j — корень кратности p_j: $\sum\limits_{j=1}^{l} p_j=n$. Тогда, согласно теории жордановых представлений матрицы линейного отображения конечномерного векторного пространства в себя, каждому корню r_j соответствует однозначно определенное векторное подпространство $\vec{F}_j$ размерности p_j пространства $\vec{F}$, содержащее все собственные векторы, отвечающие собственному значению r_j [1]) оператора A, и такое, что опера-

[1]) Существует по крайней мере один такой собственный вектор. Собственные векторы, соответствующие собственному значению r_j, образуют некоторое подпространство пространства $\vec{F}_j$.

тор $(A - r_j I)^{p_j}$ равен нулю в этом подпространстве. Кроме того, пространство $\vec{F}$ является прямой суммой векторных подпространств $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_l$ [1]).

Зададим теперь для дифференциального уравнения начальное условие $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. Вектор $\vec{y}_0$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\vec{y}_0 = \sum_{j=1}^{l} \vec{u}_j$, где векторы $\vec{u}_j$ принадлежат $\vec{F}_j$. Решение, соответствующее этому начальному условию, теперь может быть записано в виде

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} \exp((x - x_0) A) \cdot \vec{u}_j. \qquad (V, 4; 19)$$

Дальнейшие рассуждения мы проведем следующим образом. Для простоты мы положим $x - x_0 = t$. Тогда

$$\exp(tA) \cdot \vec{u}_j = \exp(t(A - r_j I)) \cdot [\exp(tr_j I) \cdot \vec{u}_j]. \qquad (V, 4; 20)$$

Квадратную скобку можно записать в виде $e^{tr_j}\vec{u}_j$. С другой стороны, учитывая изложенное выше, заметим, что разложение $\exp t(A - r_j I)$ по последовательным степеням оператора $A - r_j I$ содержит лишь конечное число членов и может быть записано в виде

$$\exp t(A - r_j I) = \sum_{m=0}^{p_j - 1} \frac{t^m}{m!}(A - r_j I)^m. \qquad (V, 4; 21)$$

Поэтому окончательно решение $\vec{f}(x)$ записывается в виде

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{m=0}^{p_j - 1} \frac{t^m}{m!}(A - r_j I)^m e^{tr_j}\vec{u}_j \right), \quad t = x - x_0. \qquad (V, 4; 22)$$

Мы видим, что каждое решение дифференциального уравнения может быть записано в форме

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{l} e^{r_j x}\vec{P}_j(x), \qquad (V, 4; 23)$$

---

[1]) Иначе говоря, каждый вектор из $\vec{F}$ выражается, и притом единственным образом, в виде суммы некоторого вектора из $\vec{F}_1$, некоторого вектора из $\vec{F}_2$, ... и некоторого вектора из $\vec{F}_l$.

где каждый член $e^{r_j x}\vec{P}_j(x)$ представляет собой произведение экспоненты $e^{r_j x}$ на некоторый полином относительно x степени $<p_j$ с коэффициентами, принадлежащими векторному подпространству $\vec{F}_j$ пространства $\vec{F}$. Если все собственные значения различны, то размерность каждого из подпространств $\vec{F}_j$ равна 1 и мы возвращаемся к найденной ранее классической форме общего решения:

$$\vec{f}(x)=\sum_{j=0}^{n}\vec{c}_j e^{r_j x}. \qquad (V, 4; 24)$$

На практике решение уравнения начинается с отыскания характеристических корней оператора A. Для этого рассматривается уравнение

$$\det(A-rI)=0, \qquad (V, 4; 25)$$

которое легко записать после выбора некоторого базиса в $\vec{F}$. Затем определяется порядок кратности p_j каждого из характеристических корней r_j. После этого решение ищется в неопределенной форме (V, 4; 23), где коэффициенты $\vec{P}_j$ считаются принадлежащими пространству $\vec{F}_j$, и остается лишь определить каждый полином $\vec{P}_j$. Свободный член полинома $\vec{P}_j$ берется в $\vec{F}_j$ произвольно, а остальные его коэффициенты ищутся в подпространстве $\vec{F}_j$, исходя из данного уравнения. Если свободный член $\vec{P}_j$ обозначить через $\vec{c}_{j0}$, то решение, выраженное в виде (V, 4; 23), имеет в качестве начального значения, соответствующего $x=0$, вектор

$$\vec{f}(0)=\sum_{j=1}^{l}\vec{c}_{j0}. \qquad (V, 4; 26)$$

Этот начальный вектор можно выбирать произвольно; его составляющие $\vec{c}_{j0}$ являются произвольными векторами в различных подпространствах $\vec{F}_j$. Он определяет единственное решение рассматриваемого уравнения. Полиномы $\vec{P}_j$, очевидно, нельзя выбирать произвольно. Это полиномы степени $<p_j$ *с произвольным свободным членом*. Каждый свободный член пробегает некоторое векторное подпространство размерности p_j, т. е. полином $\vec{P}_j$ зависит в действительности от p_j произвольных скалярных постоянных. Поэтому, окончательно, решение диф-

ференциального уравнения зависит от $n=\sum_{j=1}^{l} p_j$ произвольных скалярных постоянных.

Замечание. Может оказаться, что характеристические корни кратны, но, несмотря на это, решение имеет вид (V, 4; 24), т. е. полиномы сводятся к их свободным членам. (Как мы увидим позже, согласно следствию теоремы 18, этого не случится, если речь идет о скалярном дифференциальном уравнении порядка p.) Такое обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда все подпространство $\vec{F}_j$ является собственным векторным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению r_j, т. е. для каждого вектора $\vec{c}_j \in \vec{F}_j$ имеет место соотношение $A \cdot \vec{c} = r_j \vec{c}$, ибо тогда для каждого $\vec{c} \in \vec{F}_j$ мы имеем $\frac{d}{dx}\left(\vec{c} e^{r_j x}\right) = \vec{c} r_j e^{r_j x} = (A \cdot \vec{c}) e^{r_j x}$. В этом случае экспонента оператора A в $\vec{F}_j$ сводится к гомотетии с отношением e^{r_j}.

В случае когда $\vec{F} = \mathbb{R}^n$ и дифференциальное уравнение имеет вид

$$y_i' = r y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{V, 4; 27}$$

существует единственный характеристический корень r кратности n. Решение тогда выражается в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} e^{rx}. \tag{V, 4; 28}$$

Полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы:

Теорема 17. *Пусть задано дифференциальное уравнение* (V, 4; 1). *Тогда каждому собственному значению r_j кратности p_j матрицы A можно поставить в соответствие векторное подпространство $\vec{F}_j$ пространства $\vec{F}$ размерности p_j, содержащее все собственные векторы, соответствующие собственному значению r_j, в котором матрица $(A - r_j I)^{p_j}$ равна нулю. Пространство $\vec{F}$ является прямой суммой подпространств $\vec{F}_j$. Общее решение уравнения записывается в виде* (V, 4; 23), *где $\vec{P}_j$ — по-*

лином степени $< p_j$ *с коэффициентами, лежащими в* $\vec{F}_j$. *В* $\vec{F}_j$ *можно произвольно выбирать свободный член этого полинома, и тогда* $\vec{P}_j$ *определен однозначно.*

Случай скалярного дифференциального уравнения порядка p с постоянными коэффициентами

Запишем такое уравнение в виде

$$Dy = y^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} A_i y^{(i)} = 0 \text{ [1]}, \qquad (V, 4; 29)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ — некоторые постоянные. Если произвести замену функций $z=(y, y', \ldots, y^{(p-1)})$, то мы получим функцию z со значениями в $\mathbb{R}^p$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (V, 4; 1), где A — матрица вида (V, 3; 39) с постоянными элементами A_i. Теперь можно было бы для решения полученного уравнения применить уже разработанную теорию, но в этом случае целесообразнее воспользоваться следующим независимым методом исследования.

Пусть P — некоторый полином с комплексными коэффициентами относительно произвольной переменной z:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{p} c_i z^i. \qquad (V, 4; 30)$$

Тогда через $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ мы будем обозначать дифференциальный оператор

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \sum_{i=0}^{p} c_i \left(\frac{d}{dx}\right)^i. \qquad (V, 4; 31)$$

Двум полиномам P и Q соответствуют два дифференциальных оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ и $Q\left(\frac{d}{dx}\right)$. Сумме полиномов $R=P+Q$ отвечает дифференциальный оператор $R\left(\frac{d}{dx}\right) = P\left(\frac{d}{dx}\right) + Q\left(\frac{d}{dx}\right)$, называемый суммой операторов, а произведению полиномов $S=PQ$ соответствует композиция дифференциальных операторов $S\left(\frac{d}{dx}\right) = P\left(\frac{d}{dx}\right) \circ Q\left(\frac{d}{dx}\right)$, также обозначаемая в виде произведения $P\left(\frac{d}{dx}\right) Q\left(\frac{d}{dx}\right)$.

---

[1]) Можно было бы при желании положить $-A_i = a_i$ и $a_p = 1$, и тогда $D = \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\frac{d}{dx}\right)^i$.

Дифференциальный оператор D, определяемый формулой (V, 4; 29), может быть записан в виде $L\left(\frac{d}{dx}\right)$, где L — полином:

$$L(z) = z^p - \sum_{i=0}^{p-1} A_i z^i = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i \text{ [1]}. \qquad (V, 4; 32)$$

По теореме Даламбера (теорема 30 гл. II) этот полином может быть представлен единственным образом в виде произведения степеней полиномов первой степени:

$$L(z) = \prod_{j=1}^{l} (z - r_j)^{p_j}. \qquad (V, 4; 33)$$

Характеристическими корнями дифференциального оператора являются по определению корни полинома L, т. е. корни уравнения

$$L(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad (V, 4; 34)$$

причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность[2].

Дифференциальный оператор D может быть записан в виде

$$D = L\left(\frac{d}{dx}\right) = \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{d}{dx} - r_j\right)^{p_j}. \qquad (V, 4; 35)$$

Найдем теперь, при каком условии экспонента e^{rx} является решением дифференциального уравнения (V, 4; 29). Имеем:

$$\frac{d}{dx} e^{rx} = re^{rx}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{rx} = r^k e^{rx}.$$

Значит,

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot e^{rx} = L(r) e^{rx}. \qquad (V, 4; 36)$$

Таким образом, e^{rx} является решением дифференциального уравнения (V, 4; 29) тогда и только тогда, когда r есть характеристический корень дифференциального оператора L.

---

[1]) См. примечание на стр. 66.

[2]) Мы даем здесь *определение* характеристических корней оператора D, которое достаточно для полного решения дифференциального уравнения. Надо было бы *доказать*, что это действительно характеристические корни r_j с порядком кратности p_j, соответствующие матрице A из (V, 4; 39), чтобы связать рассматриваемый здесь частный случай с общим случаем. Мы предлагаем читателю самому провести эти рассуждения. Прямой пользы от этого нет, поскольку в данном частном случае мы используем самостоятельный метод исследования. Необходимый результат вытекает прямо из следствия теоремы 18.

Если все характеристические корни различны, то дифференциальное уравнение имеет p решений, а именно $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_p x}$. Позже мы покажем (теорема 18), что эти решения линейно независимы, и тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{j=1}^{p} c_j e^{r_j x}. \qquad (V, 4; 37)$$

Если же имеются кратные характеристические корни, то знание экспоненциальных решений недостаточно для определения общего решения дифференциального уравнения. В этом случае следует ввести функцию

$$\frac{x^k}{k!} e^{rx} \qquad (V, 4; 38)$$

и вычислить результат действия дифференциального оператора $\frac{d}{dx}-s$ на эту функцию:

$$\left(\frac{d}{dx}-s\right)\frac{x^k}{k!} e^{rx}=(r-s)\frac{x^k}{k!} e^{rx}+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{rx}. \qquad (V, 4; 39)$$

Отсюда при $r=s$ получаем формулу

$$\left(\frac{d}{dx}-r\right)\frac{x^k}{k!} e^{rx}=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{rx} \qquad (V, 4; 40)$$

и, более общо, формулу

$$\left(\frac{d}{dx}-r\right)^q \frac{x^k}{k!} e^{rx}=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad q \geqslant k+1, \\ \dfrac{x^{k-q}}{(k-q)!} e^{rx}, & \text{если} \quad q \leqslant k. \end{cases} \qquad (V, 4; 41)$$

Если же $s \neq r$, то $\left(\frac{d}{dx}-s\right)^q P(x) e^{rx}$ является произведением e^{rx} на некоторый полином степени p.

Предположим, что r_j — корень кратности p_j полинома L. Тогда дифференциальный оператор D может быть записан в виде

$$\begin{gathered} L\left(\frac{d}{dx}\right)=L_j\left(\frac{d}{dx}\right) \circ\left(\frac{d}{dx}-r_j\right)^{p_j}, \\ L_j(z)=\prod_{\nu \neq j}(z-r_\nu)^{p_\nu}. \end{gathered} \qquad (V, 4; 42)$$

Легко видеть, что если этот оператор применить к произвольной функции $\frac{x^k}{k!} e^{r_j x}$ при $k \leqslant p_j-1$, то мы получим 0. Другими словами, p_j таких функций являются решениями рассматриваемого дифференциального уравнения. Отсюда следует, что это уравнение имеет по крайней мере p следующих решений:

$$\frac{x^k}{k!}e^{r_j x},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p_j-1,\qquad j=1,\ 2,\ldots,\ l. \tag{V, 4; 43}$$

Если теперь мы сумеем доказать, что эти решения линейно независимы, то, зная, что пространство решений p-мерно, получим общее решение уравнения (V, 4; 29) в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=0}^{p_j-1} c_{jk}\frac{x^k}{k!}e^{r_j x}\right). \tag{V, 4; 44}$$

Теорема 18. *Совокупность p функций вида* (V, 4; 43) *линейно независима, т. е. функция вида* (V, 4; 44) *может тождественно равняться нулю только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю.*

Первое доказательство. Предположим, что выводы теоремы не верны, и покажем, что это приводит к противоречию. Если не все коэффициенты c_{jk} в соотношении (V, 4; 44) равны нулю, то найдется такой коэффициент $c_{jq_j}\neq 0$, что все коэффициенты c_{jk} при $k>q_j$ равны нулю (это коэффициент наивысшей степени полинома, соответствующего $e^{r_j x}$). Рассмотрим теперь следующий дифференциальный оператор:

$$M_j\left(\frac{d}{dx}\right),\quad \text{где}\quad M_j(z)=\frac{L(z)}{(z-r_j)^{p_j-q_j}}=\prod_{\nu\neq j}(z-r_\nu)^{p_\nu}(z-r_j)^{q_j}. \tag{V, 4; 45}$$

Так как в $M_j(z)$ входит множитель $(z-r_\nu)^{p_\nu}$, то, действуя этим оператором на каждую из функций $\frac{x^k}{k!}e^{r_\nu x}$, где r_ν — характеристический корень $\neq r_j$ и $k\leqslant p_\nu-1$, мы получим нуль (уже встречавшееся рассуждение; см. (V, 4; 42)). Так как в $M_j(z)$ входит множитель $(z-r_j)^{q_j}$, то в результате действия оператора на $\frac{x^k}{k!}e^{r_j x}$ при $k\leqslant q_j-1$ мы также получим нуль. Применим этот оператор к функции $\frac{x^{q_j}}{(q_j)!}e^{r_j x}$. Множитель $\left(\frac{d}{dx}-r_j\right)^{q_j}$ преобразует ее в функцию $e^{r_j x}$, на которую будет действовать оператор $L_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, где

$$L_j(z)=\frac{L(z)}{(z-r_j)^{p_j}}=\prod_{\nu\neq j}(z-r_\nu)^{p_\nu}\quad \text{(формула (V, 4; 42)),} \tag{V, 4; 45$_2$}$$

что даст $L(r_j)e^{r_jx}\neq 0$. Поэтому

$$M_j\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot f(x)=c_{jq_j}L_j(r_j)e^{r_jx}. \qquad (V, 4; 46)$$

Однако если линейная комбинация (V, 4; 44) равна нулю, то, действуя на нее произвольным дифференциальным оператором, мы можем получить только нуль. Отсюда вытекает, что все $c_{jq_j}=0$, что невозможно.

Второе доказательство. Функция $\vec{f}$, определенная по формуле (V, 4; 44), может быть продолжена до некоторой функции класса C^∞ в комплексной плоскости, поскольку такое продолжение возможно как для экспоненциальных функций, так и для полиномов. Кроме того, так как экспоненты разложимы в ряд Тейлора по степеням z, то такое же разложение возможно и для рассматриваемой функции. Так как коэффициенты ряда Тейлора являются последовательными производными разлагаемой функции при $x=0$, то разложение Тейлора по степеням z может быть равным 0 *для любого вещественного* $z=x$ только в том случае, когда все его коэффициенты равны нулю. Следовательно, эта функция, равная по предположению нулю для вещественных значений $z=x$, будет также равняться нулю и для всех *комплексных* значений z. Дальнейшие рассуждения будем проводить методом от противного.

Обозначим через r_j какой-либо максимальный по модулю характеристический корень, входящий эффективно в выражение для f, и пусть q_j — наибольшая степень члена $\frac{x^k}{k!}e^{r_jx}$ в f с не равным нулю коэффициентом. Обозначим через $|r_j|$ его модуль, а через θ_j его аргумент: $r_j=|r_j|e^{i\theta_j}$, и положим $z=\rho e^{-i\theta_j}$. Рассмотрим теперь поведение членов суммы (V, 4; 44) при z, стремящемся к бесконечности при фиксированном аргументе $-\theta_j$. Так как

$$\begin{aligned}
&\left|c_{jq_j}\frac{z^{q_j}}{(q_j)!}e^{r_jz}\right|=|c_{jq_j}|\frac{\rho^{q_j}}{(q_j)!}e^{|r_j|\rho},\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_jz}\right|=|c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_j|\rho},\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_\nu z}\right|\leqslant|c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_\nu|\rho}\quad\text{для}\quad |r_\nu|<|r_j|,\\
&\left|c_{jk}\frac{z^k}{k!}e^{r_\nu z}\right|=|c_{jk}|\frac{\rho^k}{k!}e^{|r_j|\cos(\theta_\nu-\theta_j)\rho}\quad\text{для}\quad r_\nu=|r_j|e^{i\theta_\nu},
\end{aligned}\qquad (V, 4; 47)$$

то модули всех членов при ρ, стремящемся к бесконечности, имеют меньший порядок роста, чем модуль первого члена: второй — потому, что $k < q_j$, третий — потому, что $|r_\nu| < |r_j|$, а четвертый — потому, что $\theta_\nu \neq \theta_j$. Значит, функция $f(\rho e^{-i\theta_j})$ *эквивалентна* при ρ, стремящемся к бесконечности, $c_{jq_j} \frac{z^{q_j}}{(q_j)!} e^{|r_j|\rho}$. Теперь тождество $f(z) \equiv 0$ влечет за собой равенство $c_{jq_j} = 0$, что невозможно по предположению. Теорема доказана.

Следствие. *Если дифференциальное уравнение* (V, 4; 29), *где* $D = L\left(\frac{d}{dx}\right)$, *имеет характеристические корни* $r_1, r_2, \ldots, r_l$ (*корни* $L(z)$) *кратности* $p_1, p_2, \ldots, p_l$ *соответственно, то общее решение уравнения определяется формулой* (V, 4; 44).

Скалярное дифференциальное уравнение порядка p с постоянными коэффициентами и с правой частью

Пусть задано уравнение

$$Dy = y^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} A_i y^{(i)} = B(x), \qquad \text{(V, 4; 48)}$$

где A_i — постоянные, а B — непрерывная комплексная функция.

Согласно изложенному на стр. 51, уравнение будет полностью решено, если мы найдем решение $\eta = \eta_{p-1}(x, \xi)$ дифференциального уравнения, соответствующее начальным значениям $0, 0, 0, \ldots, 1$ в точке ξ. Обозначим через η_{p-1} решение, соответствующее начальным значениям $0, 0, \ldots, 1$ в точке 0. Тогда с помощью сдвига легко убедиться в том, что решение, соответствующее тем же самым начальным значениям в точке ξ, представляет собой функцию $x \to \eta_{p-1}(x - \xi)$. Вместо того чтобы применять метод, указанный в примечании [1]) на стр. 53, удобнее будет воспользоваться разрешающим оператором. С этой целью найдем решения η_i дифференциального уравнения, соответствующие начальным условиям $\eta_i^{(q)}(0) = \delta_i^q$, где δ_i^q — символ Кронекера.

Покажем, что для $h = 1, 2, \ldots, p$

$$\eta_{p-h} = -A_{p-h+1}\eta - A_{p-h+2}\eta' - \ldots - A_{p-1}\eta^{(h-2)} + \eta^{(h-1)}. \qquad \text{(V, 4; 49)}$$

Если дифференциальное уравнение записать в обозначениях, о которых говорится в примечании на стр. 66, то мы получим

$$\begin{aligned}
&\eta_{p-1}=\eta,\\
&\eta_{p-2}=\eta'+a_{p-1}\eta,\\
&\eta_{p-3}=\eta''+a_{p-1}\eta'+a_{p-2}\eta,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\eta_1=\eta^{(p-2)}+a_{p-1}\eta^{(p-3)}+\dots+a_3\eta'+a_2\eta,\\
&\eta_0=\eta^{(p-1)}+a_{p-1}\eta^{(p-2)}+\dots+a_3\eta''+a_2\eta'+a_1\eta
\end{aligned} \quad (V, 4; 49_2)$$ [1].

Это очевидно для $h=1$, когда имеет место равенство $\eta_{p-1}=\eta$. Остальные соотношения докажем по индукции, проверяя, что из справедливости этих соотношений для значения $h-1$ следует их справедливость для значения h. Заметим прежде всего, что функция, определенная формулой (V, 4; 49), является решением рассматриваемого дифференциального уравнения, поскольку любая производная решения сама является решением этого уравнения. Остается показать, что она удовлетворяет требуемым начальным условиям при $x=0$. Поскольку при $x=0$ в нуль обращаются все производные функции η порядков $\leqslant p-2$, то равны нулю производные рассматриваемой функции порядков $\leqslant p-h-1$. Ее производная порядка $p-h$ равна производной $(p-1)$-го порядка функции η, т. е. 1.

Производная порядка $p-h+1$ вычисляется так:

$$\eta_{p-h}^{(p-h+1)}(0)=-A_{p-1}\eta^{(p-1)}(0)+\eta^{(p)}(0)=\\
=(-A_{p-1}\eta+\eta')^{(p-1)}(0)=-\eta_{p-2}^{(p-1)}(0) \quad (V, 4; 50)$$

и обращается в нуль в силу свойства, которое мы считаем доказанным для функции η_{p-2}. Так мы продвигаемся далее до производной порядка $p-2$:

$$\eta_{p-h}^{(p-2)}(0)=-A_{p-h+2}\eta^{(p-1)}(0)-\dots-A_{p-1}\eta^{(p+h-4)}(0)+\\
+\eta^{(p+h-3)}(0)=\eta_{p-h+1}^{(p-1)}(0), \quad (V, 4; 51)$$

которая снова обращается в нуль, поскольку этим свойством по предположению обладает функция $\eta_{p-(h-1)}$. Окончательно для производной порядка $p-1$ получаем следующую формулу:

$$\eta_{p-h}^{(p-1)}(0)=-A_{p-h+1}\eta^{(p-1)}(0)-A_{p-h+2}\eta^{(p)}(0)-\dots\\
\dots-A_{p-1}\eta^{(p+h-3)}(0)+\eta^{(p+h-2)}(0). \quad (V, 4; 52)$$

Преобразуем эту формулу, учитывая, что $\eta^{(h-2)}$ является решением дифференциального уравнения. Пользуясь свойствами

[1] Возьмем, например, уравнение $y'''+ay''+by'+cy=0$. Для него $\eta_2=\eta$, $\eta_1=\eta'+a\eta$, $\eta_0=\eta''+a\eta'+b\eta$.

функции η, получаем

$$A_{p-h}\eta^{(p-2)}(0) + \ldots + A_1\eta^{(h-1)}(0) + A_0\eta^{(h-2)}(0) = 0, \quad (\mathrm{V}, 4; 53)$$

чем и заканчивается доказательство указанного выше свойства. Мы можем теперь сформулировать следующий результат:

Теорема 19. *Решение дифференциального уравнения* (V, 4; 48), *соответствующее начальным значениям* y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(p-1)}$, *записывается в виде*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} y_0^{(i)}\eta_i(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \eta(x - \xi) B(\xi)\, d\xi, \quad (\mathrm{V}, 4; 54)$$

где η — *решение однородного уравнения, соответствующее начальным значениям* 0, 0. ..., 1 [1]) *в точке* 0, *а* η_i *определяются по формуле* (V, 4; 49).

Эта формула показывает, как наличие решения η дифференциального уравнения, соответствующего начальным значениям 0, 0, ..., 1 в начале координат, позволяет полностью определить решение этого уравнения.

Примеры. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + \omega^2 y = B(x), \quad (\mathrm{V}, 4; 55)$$

и соответствующие начальные значения y_0, y'_0 в точке x_0. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x. \quad (\mathrm{V}, 4; 56)$$

Функция η, соответствующая начальным значениям 0, 1, определяется формулой

$$\eta(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad (\mathrm{V}, 4; 57)$$

и, следовательно, искомое решение f уравнения, соответствующее данным начальным условиям, запишется так:

$$\eta_1(x) = \eta(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad \eta_0(x) = \eta'(x) = \cos \omega x, \quad (\mathrm{V}, 4; 58)$$

$$f(x) = y_0 \cos \omega (x - x_0) + y'_0 \frac{\sin \omega (x - x_0)}{\omega} + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin \omega (x - \xi)}{\omega} B(\xi)\, d\xi.$$

Теорема 20 (Хевисайд). *Решение* $\eta = \eta_{p-1}$ *уравнения* (V, 4; 29), *соответствующее начальным значениям* 0, 0, ..., 0, 1 *при* $x = 0$, *определяется по формуле* (V, 4; 44), *где* c_{jk} — *коэф-*

[1]) Для порядка 1, $p = 1$, имеется только одно начальное условие $\eta(0) = 1$.

фициенты разложения на простые дроби рациональной функции $\frac{1}{L(Z)}$ (*L определяется формулой* (V, 4; 32)):

$$\frac{1}{L(Z)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=0}^{p_j-1}\frac{c_{jk}}{(Z-r_j)^{k+1}}\right). \qquad (V, 4; 59)$$

Доказательство. 1°) Рассмотрим разложение типа правой части равенства (V, 4; 59) с *произвольными* коэффициентами c_{jk}. Это разложение на простые дроби рациональной дроби $H(Z)/L(Z)$, где H — некоторый полином степени $\leqslant p$. Коэффициенты c_{jk}, применяемые в соотношении (V, 4; 59), соответствуют тем, которые получаются при $H(Z)\equiv 1$. Они *характеризуются* тем, что разложение правой части по степеням $1/z$ для достаточно большого $Z=z$ *начинается* с $1/z^p$, т. е. коффициенты при $1/z^q$ для $q<p$ равны нулю, а коэффициент при $1/z^p$ равен 1.

2°) Коэффициент при $1/z^q$ разложения функции $\left(\frac{1}{z-r}\right)^{k+1}$ по степеням $1/z$ при z, стремящемся к бесконечности, равен производной порядка $q-1$ функции $x\to\frac{x^k}{k!}e^{rx}$ при $x=0$.

В самом деле, с одной стороны,

$$\left(\frac{1}{z-r}\right)^{k+1}=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^k\left(\frac{1}{z-r}\right)=\sum_{q=k+1}^{\infty}\frac{(q-1)!}{k!\,(q-k-1)!}\frac{r^{q-k-1}}{z^q}, \qquad (V, 4; 60)$$

а с другой —

$$\frac{x^k}{k!}e^{rx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n x^{k+n}}{k!\,n!}=\sum_{q=k+1}^{\infty}\frac{r^{q-k-1}x^{q-1}}{k!\,(q-k-1)!}, \qquad (V, 4; 61)$$

откуда

$$\left[\left(\frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}}\right)\left(\frac{x^k}{k!}e^{rx}\right)\right]_{x=0}=\frac{(q-1)!\,r^{q-k-1}}{k!\,(q-k-1)!}. \qquad (V, 4; 62)$$

Оба коэффициента равны между собой.

3°) Коэффициент при $1/z^q$ в разложении правой части соотношения (V, 4; 59) по степеням $1/z$ при z, стремящемся к бесконечности, равен производной $(q-1)$-го порядка при $x=0$ выражения, стоящего в правой части (V, 4; 44) с теми же самыми коэффициентами c_{jk}. Если мы запишем, как это говорилось в п. 1°), разложение правой части (V, 4; 59) по степеням $1/z$, начиная с $1/z^p$, то увидим, что функция, представимая соотношением (V, 4; 44), удовлетворяет при $x=0$ начальным условиям 0, 0, ..., 1. Этой функцией является $\eta_{p-1}=\eta$, и теорема доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - 5y' + 6 = 0. \qquad (V, 4; 63)$$

Здесь

$$L(Z) = Z^2 - 5Z + 6. \qquad (V, 4; 64)$$

Так как

$$\frac{1}{L(Z)} = \frac{1}{Z-3} - \frac{1}{Z-2}, \qquad (V, 4; 65)$$

то

$$\eta_1(x) = \eta(x) = e^{3x} - e^{2x}. \qquad (V, 4; 66)$$

Приведенное нами доказательство теоремы Хевисайда состоит в прямой проверке высказанного утверждения и не дает возможности понять, *почему* имеют место такие соотношения. Это будет сделано позже в так называемом операционном исчислении.

Замечания. 1°) В некоторых случаях разумнее данное уравнение порядка p свести к системе p дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение которой ищется затем матричным методом, а в других случаях лучше систему дифференциальных уравнений 1-го порядка свести к одному скалярному уравнению порядка p.

2°) В частном случае, когда правая часть B является линейной комбинацией произведения экспонент на полиномы, т. е. имеет вид $B(x) = \sum\limits_{\nu} P_\nu(x) e^{s_\nu x}$, в специальном курсе анализа показывается, как можно найти частное решение дифференциального уравнения в том же самом виде с полиномами более высокой степени, если некоторые из s_ν окажутся корнями характеристического уравнения. Впрочем, для нахождения этого частного решения можно было бы воспользоваться соотношениями, установленными на стр. 68.

После того как найдено частное решение, общее решение уравнения можно получить, добавляя к нему общее решение соответствующего однородного уравнения.

Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Теорема 21. *Для того чтобы любое решение дифференциального уравнения* (V, 4; 1), *когда* $\vec{F}$ *конечномерно (соответственно дифференциального уравнения* (V, 4; 29)), *при* x, *стремящемся к* $+\infty$, *оставалось ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы, с одной стороны, все характеристические корни имели вещественную часть* $\leqslant 0$ *и чтобы, с другой стороны, для характеристических корней с нулевой вещественной* *частью полиномы $\vec{P}_j$ из формулы* (V, 4; 23) *сводились к постоянным (соответственно, чтобы характеристические корни с нулевой вещественной частью были простыми).*

Замечание. Согласно изложенному на стр. 65, последнее свойство означает, что если число r_j является характеристическим корнем кратности p_j и имеет нулевую вещественную часть, то соответствующее ему векторное подпространство $\vec{F}_j$ является собственным подпространством, отвечающим собственному значению r_j.

Доказательство. Доказательство проведем для уравнения (V, 4; 1), когда $\vec{F}$ конечномерно. В этом случае общее решение уравнения имеет вид (V, 4; 23), где r_j — характеристические корни, а $\vec{P}_j$ — некоторые полиномы, свободные члены которых произвольны. Достаточность условий теоремы очевидна; поэтому нам надо лишь доказать их необходимость. Напомним, что любая производная решения дифференциального уравнения (V, 4; 1) также является решением этого уравнения, и, следовательно, если при x, стремящемся к бесконечности, любое решение этого уравнения ограничено, то ограниченной будет каждая производная решения. Поэтому нам достаточно будет показать, что *если некоторая функция $\vec{f}$ вида* (V, 4; 23) *при x, стремящемся к $+\infty$, ограничена вместе со своими производными, то все r_j имеют вещественную часть $\leqslant 0$ и для r_j с нулевой вещественной частью соответствующие полиномы сводятся к их свободным членам.* Пусть $\vec{c}_{jq_j}$ — коэффициент при наиболее высокой степени полинома $\vec{P}_j$, разложенного по $x^k/k!$. Рассмотрим дифференциальный оператор $M_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, определенный в (V, 4; 45) с $L(z)=\prod\limits_{j=1}^{l}(z-r_j)^{p_j}$. Мы показали, что этот дифференциальный оператор преобразует функцию $\vec{f}$ в $\vec{c}_{jq_j}e^{r_jx}$. Это выражение должно оставаться ограниченным при x, стремящемся к $+\infty$. Так как коэффициент $\vec{c}_{jq_j}$ постоянен, то ограниченной должна быть экспонента. Однако это возможно только в том случае, когда вещественная часть числа r_j не положительна.

Рассмотрим теперь другой дифференциальный оператор $L_j\left(\frac{d}{dx}\right)$, определенный в (V, 4; 45_2). Из изложенного на стр. 68

следует, что этот оператор преобразует функцию $\vec{f}$ в выражение $\vec{Q}_j(x)e^{r_jx}$, где $\vec{Q}_j$ — полином *той же степени*, что и $\vec{P}_j$. Если вещественная часть числа r_j равна нулю, то норма $\|\vec{Q}_j(x)e^{r_jx}\| = \|\vec{Q}_j(x)\|$ может быть ограниченной при x, стремящемся к $+\infty$, только в том случае, когда полином $\vec{Q}_j$ сводится к постоянной, т. е. когда полином $\vec{P}_j$ сам сводится к постоянной (к свободному члену). Теорема доказана.

Заметим, что в этом случае *дифференциальное уравнение обладает важным дополнительным свойством устойчивости: малое изменение начальных условий влечет за собой малое изменение решения дифференциального уравнения, и это справедливо не только для ограниченного множества значений x, но и для x, заключенных между x_0 и $+\infty$*. Точнее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\eta > 0$, что из неравенства $\|\vec{y}_0 - \vec{z}_0\| \leqslant \eta$ для решений $\vec{f}$ и $\vec{g}$ уравнения, соответствующих начальным значениям $\vec{y}_0$ и $\vec{z}_0$ в точке x_0, вытекает неравенство $\|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| \leqslant \varepsilon$ независимо от выбора $x \geqslant x_0$. В самом деле, функции $\vec{\eta}_i$, определяемые по формуле (V, 3; 9), обладают свойством ограниченности для $x \geqslant 0$. Резольвентная матрица $R(x, x_0)$, определенная на стр. 44 для $x \geqslant x_0$, тоже имеет ограниченную норму. Функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ определяются формулой (V, 3; 17), где $x_2 = x$, $x_1 = x_0$, а начальные значения равны соответственно $\vec{y}_0$ и $\vec{z}_0$. Предыдущее свойство теперь будет полностью доказано, если учесть, что $\|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| \leqslant \|R(x, x_0)\| \times \|\vec{y}_0 - \vec{z}_0\|$, и при заданном $\varepsilon > 0$ положить $\eta = \varepsilon / \sup\limits_{x \geqslant x_0} \|R(x, x_0)\|$.

Следствие. *Для того чтобы решение уравнения* (V, 4; 1), *если $\vec{F}$ конечномерно* (*соответственно решение уравнения* (V, 4; 29)), *оставалось ограниченным для любого вещественного x, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические корни r_j были чисто мнимыми и чтобы все полиномы $\vec{P}_j$, определяемые в* (V, 4; 23), *сводились к их свободным членам* (*соответственно, чтобы все корни r_j были простыми*).

Рассуждение достаточно провести раздельно для переменной x, стремящейся к $+\infty$ (с применением теоремы), и для x, стремящемся к $-\infty$ (с применением теоремы после замены r_j на $-r_j$). Доказанная теорема и ее следствие имеют важные применения в механике (малые колебания системы около положения устойчивого равновесия).