ГЛАВА VI

Внешнее дифференциальное исчисление

§ 1. МУЛЬТИЛИНЕЙНЫЕ АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть J — конечное множество и $\mathfrak{S}$ — множество его перестановок, т. е. множество биекций J на себя. Если через $\sigma\tau$ обозначить композицию $\sigma \circ \tau$ перестановок σ и τ, то, как известно, закон композиции $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$ превращает множество $\mathfrak{S}$ в группу, называемую группой перестановок множества J.

Теорема 1. *Существует, и притом единственное, отображение* ε: $\sigma \to \varepsilon_\sigma$ *группы* $\mathfrak{S}$ *перестановок конечного множества* J *в двухэлементное множество* $\{+1, -1\}$, *обладающее следующими свойствами*:

1°) $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$;

2°) $\varepsilon_I = +1$, *если* I — *тождественная перестановка множества* J;

3°) $\varepsilon_\sigma = -1$, *если* σ — *транспозиция, т. е. перестановка, оставляющая инвариантными все элементы, кроме двух, которые она меняет местами.*

Двухэлементное множество $\{+1, -1\}$, снабженное законом умножения, является группой с единичным элементом $+1$. Условия 1°) и 2°) выражают тот факт, что отображение ε сохраняет групповую структуру $\mathfrak{S}$ и $\{+1, -1\}$. В самом деле, это отображение сохраняет закон умножения и единичный элемент, а поскольку

$$\varepsilon_{\sigma^{-1}} \varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma^{-1}\sigma} = \varepsilon_I = +1, \qquad \text{(VI, 1; 1)}$$

то оно сохраняет и переход к обратному элементу.

Доказательство. Единственность функции ε очевидна. В самом деле, эта функция известна на всех элементах σ, представляющих собой транспозиции множества J. Поскольку каждая перестановка есть произведение конечного числа транспозиций, то из условия 1°) вытекает, что функция ε определена для всех элементов $\mathfrak{S}$ и, следовательно, единственна. Остается доказать существование функции ε. Для этой цели мы можем считать, что J — это множество $\{1, 2, \ldots, N\}$. Рассмотрим произведение

$$P = \prod_{i, j \in J,\ i < j} (j - i). \qquad \text{(VI, 1; 2)}$$

Если σ: $i \to \sigma_i = \sigma(i)$ есть некоторая перестановка J, то положим

$$\sigma(P) = \prod_{i,\, j \in J,\, i<j} (\sigma_j - \sigma_i) = \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)). \qquad (\text{VI}, 1; 3)$$

Тогда, очевидно, имеет место соотношение

$$\sigma(P) = \varepsilon_\sigma P \quad \text{с} \quad \varepsilon_\sigma = (-1)^{\nu(\sigma)}, \qquad (\text{VI}, 1; 4)$$

где $\nu(\sigma)$ можно назвать *числом инверсий перестановки* σ, т. е. числом таких пар (i, j), что $1 \leqslant i < j \leqslant N$ и $\sigma_i > \sigma_j$. Отсюда следует, что если f является произвольным отображением множества N первых целых чисел $\geqslant 1$ на себя, то

$$\prod_{i<j} (f(\sigma_j) - f(\sigma_i)) = \varepsilon_\sigma \prod_{i<j} (f(j) - f(i))\,^{1)}. \qquad (\text{VI}, 1; 5)$$

Для двух перестановок σ и τ справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{\sigma\tau} P = (\sigma\tau)(P) = \prod_{i<j} ((\sigma\tau)_j - (\sigma\tau)_i) =$$
$$= \prod_{i<j} (\sigma(\tau_j) - \sigma(\tau_i)) = \varepsilon_\tau \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))\,^{2)} =$$
$$= \varepsilon_\tau \sigma(P) = \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma P, \qquad (\text{VI}, 1; 6)$$

откуда следует соотношение 1°).

Условие 2°) проверяется тривиально.

Так же легко проверяется условие 3°). В самом деле, если σ представляет собой транспозицию, меняющую местами α и β и оставляющую неизменными остальные члены, и если предполагается, например, что $\alpha < \beta$, то σ не приводит к инверсии для таких пар (i, j), у которых i и j либо оба $\leqslant \alpha$, либо оба $\geqslant \beta$. Инверсия возникает для пары (α, k) и пары (k, β) при $\alpha < k < \beta$. Все рассмотренные до сих пор варианты давали лишь четное число инверсий. Поскольку при этой транспозиции пара (α, β) переходит в пару (β, α), то она дает одну инверсию. В итоге получается нечетное число инверсий, и, следовательно, если σ — некоторая транспозиция, то $\varepsilon_\sigma = -1$.

Величина ε_σ называется *сигнатурой перестановки* σ. Это некоторое число, равное $+1$ или -1 в зависимости от того, может ли σ быть выражено в виде четного или нечетного числа транспозиций. Отсюда следует, что четность числа транс-

---

[1]) Если брать все члены произведения левой части, то с точностью до знака мы получим один и только один раз члены произведения, стоящего в правой части. Число же изменений знака в точности равно $\nu(\sigma)$.

[2]) Здесь использовано соотношение (VI, 1; 5), в котором f заменено на σ, а σ — на τ.

позиций, приводящих к одной и той же заданной перестановке σ, всегда одна и та же[1]). Если $\varepsilon = +1$ (соответственно -1), то говорят, что перестановка σ четна (соответственно нечетна).

Симметричные и антисимметричные отображения

Пусть E и F — два произвольных множества, N — целое число $\geqslant 1$ и f — отображение E^N в F. Если σ — некоторая перестановка множества целых чисел $1, 2, \ldots, N$, то преобразованием f с помощью перестановки σ называется отображение σf множества E^N в F, определяемое следующей формулой:

$$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}). \qquad (\text{VI}, 1; 7)$$

Очевидно,

$$\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f. \qquad (\text{VI}, 1; 7_2)$$

Говорят, что отображение f множества E^N в F *симметрично*, если оно инвариантно относительно любой перестановки σ, т. е., иначе говоря, какова бы ни была перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}$, имеет место равенство $\sigma f = f$ или же, каковы бы ни были элементы $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из E и $\sigma \in \mathfrak{S}$, имеет место равенство

$$f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad (\text{VI}, 1; 8)$$

Пусть теперь $\vec{F}$ — векторное пространство. Говорят, что отображение $\vec{f}$ из E^N в $\vec{F}$ *антисимметрично*, если имеет место соотношение

$$\sigma\vec{f} = \varepsilon_\sigma \vec{f} \text{ для любого } \sigma \in \mathfrak{S}; \qquad (\text{VI}, 1; 9)$$

другими словами, для любых $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из E и $\sigma \in \mathfrak{S}$ справедливо соотношение

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \varepsilon_\sigma \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad (\text{VI}, 1; 10)$$

Это означает, что $\sigma\vec{f} = -\vec{f}$ для любой транспозиции σ. В самом деле, каждая перестановка σ является произведением транспозиций, а $\sigma\vec{f}$ есть произведение $\vec{f}$ на -1 в степени, равной числу этих транспозиций, т. е. на ε_σ.

---

[1]) Это утверждение a priori не очевидно. Не очевиден и тот факт, что тождественную перестановку нельзя представить в виде произведения нечетного числа соответствующим образом подобранных транспозиций. Это доказывается только с помощью теоремы 1, утверждающей существование функции сигнатуры ε!

Симметризацией $S\vec{f}$ отображения $\vec{f}$ множества E^N в векторное пространство $\vec{F}$ называется функция, определенная соотношением

$$S\vec{f}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\sigma\vec{f}, \qquad \text{(VI, 1; 11)}$$

или

$$(S\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}). \qquad \text{(VI, 1; 12)}$$

Антисимметризацией отображения $\vec{f}$ называется функция $A\vec{f}$, определяемая равенством

$$A\vec{f}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\varepsilon_\sigma\sigma\vec{f}, \qquad \text{(VI, 1; 13)}$$

или

$$(A\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\varepsilon_\sigma\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}). \qquad \text{(VI, 1; 14)}$$

Теорема 2. *Для того чтобы отображение множества E^N в векторное пространство $\vec{F}$ было симметричным (соответственно антисимметричным), необходимо и достаточно, чтобы оно было симметризацией (соответственно антисимметризацией) некоторого отображения E^N в $\vec{F}$.*

Доказательство. Приведем доказательство, например, для антисимметричного случая. Прежде всего антисимметричная функция равна своей антисимметризации, умноженной на $1/N!$. В самом деле, для каждой перестановки σ справедливо соотношение (VI, 1; 9), откуда, складывая формулы, соответствующие $N!$ перестановкам, получаем:

$$A\vec{f}=N!\,\vec{f}. \qquad \text{(VI, 1; 15)}$$

Покажем теперь, что антисимметризация некоторой функции сама является антисимметричной функцией. Действительно, это утверждение вытекает из того, что при любой перестановке τ множества N первых целых чисел имеет место формула

$$\tau(A\vec{f})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\varepsilon_\sigma\tau(\sigma\vec{f})\,^{1)}=\varepsilon_\tau\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\varepsilon_{\tau\sigma}((\tau\sigma)\vec{f})=\varepsilon_\tau A\vec{f}\,^{2)}. \qquad \text{(VI, 1; 16)}$$

---

[1]) Оператор $g\to\tau g$ линеен, поэтому

$$\tau\left(\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\sigma f\right)=\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\tau(\sigma f).$$

[2]) Поскольку если σ пробегает $\mathfrak{S}$, то перестановка $\tau\sigma$ также пробегает $\mathfrak{S}$, и притом только один раз.

Отображение E^N в $\vec{F}$ называется *альтернирующим*, если оно принимает значение 0 на любой системе N элементов $x_1, x_2, \ldots, x_N$ пространства E, в которой имеется два совпадающих элемента.

Теорема 3. *Для того чтобы мультилинейное отображение $\vec{E}^N$ в $\vec{F}$, где $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел, было антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы оно было альтернирующим.*

Доказательство. Докажем сначала, что любое антисимметричное отображение E^N, где E—произвольное множество, в векторное пространство $\vec{F}$ всегда является альтернирующим. В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — некоторые элементы из E и если $x_i = x_j$, то

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad \text{(VI, 1; 17)}$$

где через σ обозначена транспозиция, переставляющая элементы i и j и оставляющая неизменными остальные элементы. Однако, согласно соотношению антисимметрии, одновременно должно иметь место равенство

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = -\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad \text{(VI, 1; 18)}$$

Из обоих равенств следует, что обе их части равны нулю.

Покажем теперь, что всякое мультилинейное альтернирующее отображение $\vec{E}^N$ в $\vec{F}$, где $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства, антисимметрично.

В самом деле, если $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ — некоторые векторы из $\vec{E}$, то в силу мультилинейности отображения $\vec{f}$ при $i < j$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{i+1}, \ldots, \vec{X}_{j-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{j+1}, \ldots, \vec{X}_N) = \\ = \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N) + \\ + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N).\end{aligned} \qquad \text{(VI, 1; 19)}$$

Но так как по условию отображение $\vec{f}$ альтернирующее, то некоторые из записанных здесь членов равны нулю, и потому имеет место соотношение

$$\vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) = 0, \tag{VI, 1; 20}$$

доказывающее, что отображение $\vec{f}$ меняет знак, когда над переменными производится некоторая транспозиция. Это означает, что отображение $\vec{f}$ антисимметрично, и теорема доказана.

Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства и $\vec{u}$ является p-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$, то часто принято писать число p над $\vec{u}$ и обозначать это отображение через $\overset{p}{\vec{u}}$. Говорят также, что $\vec{u}$ есть *внешняя p-форма, или форма степени p на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*[1]).

Если пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы, то множество $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ p-линейных антисимметричных непрерывных отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ есть, очевидно, векторное пространство, являющееся векторным подпространством векторного пространства $\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ всевозможных p-линейных непрерывных отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$.

В частном случае, когда $\vec{F}$ — поле скаляров $\mathbb{K}$, вместо $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \mathbb{K})$ пишут также $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$. Если $p = 1$, то $\Lambda^1 \overleftarrow{E}'$ является пространством $\overleftarrow{E}'$, сопряженным к пространству $\vec{E}$. Элемент пространства $\overleftarrow{E}'$ называется также *ковектором на $\vec{E}$*. Элемент пространства $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ называется тогда *p-ковектором на $\vec{E}$*. Элемент пространства $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$ является *p-ковектором на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*.

При $p = 0$ принято считать, что $A\mathscr{L}_0(\vec{E}^0; \vec{F})$ — *это само векторное пространство $\vec{F}$*, в частности поле скаляров, если $\vec{F} = \mathbb{K}$.

Теорема 4. *Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство размерности N с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$. Пусть $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ —*

---

[1]) Допуская вольность речи, мы используем здесь слово «форма». Обычно форма принимает скалярные значения. При $p = 1$ получаем 1-форму, или форму на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$, — элемент пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Также для простоты изложения говорят p-форма … на $\vec{E}$, а не на $\vec{E}^p$.

некоторый элемент пространства $\vec{E}^N$. *Через* X_{ij} *обозначим* j*-ю координату* i*-го вектора* $\vec{X}_i$.

Тогда антисимметризация N*-линейной (скалярной) формы*

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \to X_{1,1} X_{2,2} \ldots X_{N,N} \qquad \text{(VI, 1; 21)}$$

есть детерминантная функция, которая каждой системе из N *векторов ставит в соответствие определитель, составленный из координат этих векторов в рассматриваемом базисе.*

Доказательство. Эта антисимметризация определяется по формуле

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \to \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma X_{\sigma_1, 1} X_{\sigma_2, 2} \ldots X_{\sigma_N, N}; \qquad \text{(VI, 1; 22)}$$

согласно определению, это просто обычный определитель, рассматриваемый в алгебре. В дальнейшем мы будем обозначать его через $\det\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} (X_{i,j})$.

Теорема 5. *Пусть* $\vec{E}$ *и* $\vec{F}$ — *векторные пространства; пространство* $\vec{E}$ N*-мерно и снабжено некоторым базисом. Отображение* $\vec{u}$ *пространства* $\vec{E}^p$ *в* $\vec{F}$ *будет* p*-линейным и антисимметричным тогда и только тогда, когда его можно записать в виде*

$$u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p), \qquad \text{(VI, 1; 23)}$$

где

$$\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \begin{vmatrix} X_{1,j_1} & X_{1,j_2} & \ldots & X_{1,j_p} \\ X_{2,j_1} & X_{2,j_2} & \ldots & X_{2,j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{p,j_1} & X_{p,j_2} & \ldots & X_{p,j_p} \end{vmatrix} = \det_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} (X_{k, j_l}),$$

а величины $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ *являются элементами пространства* $\vec{F}$. *Это выражение единственно, и имеет место равенство*

$$\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} = \vec{u}(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}). \qquad \text{(VI, 1; 24)}$$

Элементы $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ *образуют поэтому некоторый базис в пространстве* $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ p*-линейных антисимметричных форм на* $\vec{E}^p$.

Если пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы, то соответствие, при котором по системе коэффициентов $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \in \vec{F}$ (с числом $\binom{N}{p} = C_N^p$), согласно формуле (VI, 1; 23), *строится отображение $\vec{u}$, является линейной биекцией пространства $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$ на пространство $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$, непрерывной вместе со своей обратной биекцией.*

Доказательство. Мультилинейный характер отображения $\vec{u}$ позволяет записать такое равенство:

$$\vec{u}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) =$$
$$= \sum_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_p} X_{1, j'_1} X_{2, j'_2} \ldots X_{p, j'_p} \vec{u}\left(\vec{e}_{j'_1}, \vec{e}_{j'_2}, \ldots, \vec{e}_{j'_p}\right), \quad \text{(VI, 1; 24}_2\text{)}$$

где сумма распространяется *на всевозможные системы индексов* $(j'_1, j'_2, \ldots, j'_p)$. Если два из этих индексов j'_k окажутся равными, то соответствующее выражение будет равно нулю, поскольку отображение $\vec{u}$ альтернирующее.

Зададимся теперь числовой последовательностью, имеющей неравные индексы $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, расположенные в порядке возрастания. Соберем все члены, у которых система $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$ является некоторой перестановкой индексов $j_1, j_2, \ldots, j_p$. Учитывая соотношение (VI, 1; 10), получаем, что все найденные члены составляют сумму [1])

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\tau X_{1, j_{\tau_1}} X_{2, j_{\tau_2}} \ldots X_{p, j_{\tau_p}} \vec{u}\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}\right) =$$
$$= \vec{u}\left(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}\right) \det_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \left(X_{k, j_l}\right). \quad \text{(VI, 1; 25)}$$

Изменяя теперь систему индексов $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$, можно получить формулу (VI, 1; 23) вместе с соотношением (VI, 1; 24).

Обратно, каждая функция вида (VI, 1; 23) с произвольными коэффициентами $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, очевидно, p-линейна и антисимметрична. В самом деле, она является суммой функций, каждая из которых пропорциональна некоторому определителю, а выше мы видели, что определитель является мультилинейной антисимметризацией, т. е. антисимметричен.

Наконец, такое выражение, как (VI, 1; 23), заведомо единственно, т. е. *обязательно* имеет место равенство (VI, 1; 24).

---

[1]) Где $\mathfrak{S}_p$ есть группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, p\}$.

В самом деле, если в (VI, 1; 23) положить $\vec{X}_i=\vec{e}_{k_i}$ для $i=1, 2, \ldots, p$ $(k_1<k_2<\ldots<k_p)$, то мы получим

$$\Delta_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\left(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \ldots, \vec{e}_{k_p}\right)=\delta_{l_1, k_1}\delta_{l_2, k_2}\ldots\delta_{l_p, k_p}$$

(символы Кронекера), откуда $\vec{u}\left(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \ldots, \vec{e}_{k_p}\right)=\vec{a}_{k_1, k_2, \ldots, k_p}$, т. е. мы пришли к соотношению (VI, 1; 24).

Предположим, теперь, что пространства $\vec{E}$ и $\vec{F}$ нормированы. Поскольку пространство $\vec{E}$ конечномерно, то всякое мультилинейное отображение $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ непрерывно. Следовательно, $\vec{u}\in A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$. Число коэффициентов $\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}$ равно числу подмножеств по p элементов множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, т. е. равно $C_N^p=\binom{N}{p}$. Система коэффициентов $\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}$ есть, следовательно, элемент множества $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$, и, значит, соответствие между системой $\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}$ и $\vec{u}$ есть биекция $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$ на $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p; \vec{F})$. Эта биекция, очевидно, линейна. Она также непрерывна, поскольку

$$\|\vec{u}\|=\sup_{\|\vec{X}_i\|\leqslant 1}\|\vec{u}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\left\|\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\right\|\left\|\Delta_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\right\|, \qquad (\text{VI}, 1; 25_2)$$

где $\|\Delta_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\|$ является нормой p-линейной формы $\Delta_{l_1, l_2, \ldots, l_p}$. Так как речь идет о p-линейной форме на конечномерном пространстве $\vec{E}^p$, то эта форма непрерывна, а ее норма конечна.

Поэтому имеет место оценка вида

$$\|\vec{u}\|\leqslant\text{const}\sum\left\|\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\right\|, \qquad (\text{VI}, 1; 25_3)$$

а значит, рассматриваемая биекция непрерывна. Так как

$$\left\|\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}\right\|\leqslant\left\|\vec{e}_{l_1}\right\|\left\|\vec{e}_{l_2}\right\|\ldots\left\|\vec{e}_{l_p}\right\|\|u\|\leqslant\text{const}\,\|\vec{u}\|, \qquad (\text{VI}, 1; 25_4)$$

то обратная биекция также непрерывна, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы доказали, что *если отождествить отображение* $\vec{u}$ *с системой его коэффициентов* $\vec{a}_{l_1, l_2, \ldots, l_p}$, *то тем* *самым будет произведено отождествление пространств* $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p;\ \vec{F})$ *и* $\vec{F}^{\binom{N}{p}}$, *сохраняющее векторные структуры и нормы с точностью до эквивалентности.*

Это отождествление, естественно, не является каноническим, поскольку оно зависит от выбора базиса в пространстве $\vec{E}$.

Пример. Рассмотрим случай $p=2$. Изменяя соответствующим образом обозначения, можно убедиться в том, что если в $\vec{E}$ выбран некоторый базис, то любое билинейное антисимметричное отображение $\vec{E}^2$ в $\vec{F}$ имеет вид

$$\vec{u}(\vec{X},\vec{Y})=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\vec{a}_{i,j}(X_iY_j-X_jY_i),\quad \text{где}\quad \vec{a}_{i,j}=\vec{u}(\vec{e}_i,\vec{e}_j). \tag{VI, 1; 26}$$

Следствие 1. *При* $p>n$ *всякое* p*-линейное альтернирующее отображение* $\vec{E}^p$ *в* $\vec{F}$ *равно нулю. При этом пространство* $A\mathscr{L}_p(\vec{E}^p;\ \vec{F})$ *сводится к элементу* $\vec{0}$.

Следствие 2. *Каждая* N*-линейная антисимметричная форма, действующая из* $\vec{E}^N$ *в* $\vec{F}$, *является произведением определителя (указанного в теореме 4) на фиксированный вектор из* $\vec{F}$. *Функция «определитель системы* N *векторов относительно некоторого базиса» есть единственное* N*-линейное антисимметричное отображение* $\vec{E}^N$ *в поле скаляров, принимающее значение* 1 *на системе* N *векторов базиса.*

Размерность пространства $\Lambda^N\overleftarrow{E}'$ *равна* 1.

Следствие 3. *Размерность пространства* $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$ *равна размерности пространства* $\mathbb{K}^{\binom{N}{p}}$, *т. е. равна* $\binom{N}{p}=C_N^p$ [1].

Таким образом, размерности пространств $\Lambda^0\overleftarrow{E}'=\mathbb{K}$, $\Lambda^1\overleftarrow{E}'=\overleftarrow{E}'$, ..., $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$, ..., $\Lambda^N\overleftarrow{E}'$ равны числам $1=C_N^0$, $N=C_N^1$, ..., C_N^p, ..., $1=C_N^N$, 0, 0, ...

[1] При доказательстве следствия 3 мы пользовались некоторым фиксированным базисом в $\vec{E}$, существование которого непосредственно следует из определения векторных пространств. Поэтому следствие 3 может служить для доказательства того факта, что *все базисы пространства* $\vec{E}$ *имеют одно и то же число элементов.* Это число — размерность N — является таким наименьшим целым числом, при котором $\Lambda^{N+1}\overleftarrow{E}'=\{0\}$.

Внешнее произведение мультилинейных антисимметричных форм

Предположим сначала, что F есть поле скаляров. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ суть p линейных форм на $\vec{E}$. Исходя из этих форм, можно построить p-линейную антисимметричную форму на $\vec{E}^p$, а именно антисимметризацию p-линейной формы

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to u_1(\vec{X}_1)\, u_2(\vec{X}_2) \ldots u_p(\vec{X}_p). \quad \text{(VI, 1; 27)}$$

Эта антисимметризация определяется такой формулой:

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p}) =$$

$$= \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (u_i(\vec{X}_j)). \quad \text{(VI, 1; 28)}$$

Эту форму условились называть *внешним произведением*[1]) и обозначать через $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$. Поэтому имеет место формула

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (u_i(\vec{X}_j)). \quad \text{(VI, 1; 29)}$$

В частности, для двух линейных форм u и v на $\vec{E}$ имеет место соотношение

$$(u \wedge v) \cdot (\vec{X}, \vec{Y}) = u(\vec{X})\, v(\vec{Y}) - u(\vec{Y})\, v(\vec{X}). \quad \text{(VI, 1; 29}_2\text{)}$$

Рассмотрим теперь $p+q$ линейных форм $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$. Для них можно определить три произведения:

$$\overset{p}{u} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p, \quad \overset{q}{v} = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q,$$

$$\overset{p+q}{w} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q.$$

Согласно определению,

$$\overset{p+q}{w}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p})\, v_1(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}) \ldots v_q(\vec{X}_{\sigma_{p+q}}).$$

(VI, 1; 30)

---

[1]) Это произведение называют *внешним*, поскольку оно принадлежит не пространству множителей $\overleftarrow{E}'$, а некоторому другому пространству $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$.

Обозначим через $\mathfrak{S}'$ (соответственно $\mathfrak{S}''$) подгруппу группы $\mathfrak{S}_{p+q}$, составленную из перестановок, оставляющих инвариантными последние q целых чисел и меняющих местами только p первых (соответственно подгруппу перестановок, оставляющих инвариантными p первых целых чисел и меняющих местами только q последних). Говорят, что перестановка σ принадлежит классу перестановки τ, если она может быть записана в виде $\sigma=\tau\sigma'\sigma''$, где $\sigma'\in\mathfrak{S}'$ и $\sigma''\in\mathfrak{S}''$.

Так составленный класс содержит $p!q!$ перестановок. Теперь сумму $\sum\limits_{\sigma}$ можно записать в виде $\sum\limits_{\tau,\,\sigma',\,\sigma''}$, где σ' пробегает $\mathfrak{S}'$, σ'' пробегает $\mathfrak{S}''$, а τ пробегает множество перестановок T, содержащее по одной и только одной перестановке из каждого класса.

Но тогда по определению p-линейной формы u и q-линейной формы v можно записать, что

$$
\begin{aligned}
&w(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =\\
&\quad=\sum_{\tau\in T}\varepsilon_\tau\Big[\Big(\sum_{\sigma'}\varepsilon_{\sigma'}u_1\big(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}\big)\,u_2\big(\vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}\big)\ldots u_p\big(\vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}\big)\Big)\times\\
&\quad\times\Big(\sum_{\sigma''}\varepsilon_{\sigma''}v_1\big(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}\big)\,v_2\big(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}\big)\ldots v_q\big(\vec{X}_{\tau(\sigma''_q)}\big)\Big)\Big]=\\
&=\sum_{\tau\in T}\varepsilon_\tau u\big(\vec{X}_{\tau_1}, \vec{X}_{\tau_2}, \ldots, \vec{X}_{\tau_p}\big)\,v\big(\vec{X}_{\tau_{p+1}}, \vec{X}_{\tau_{p+2}}, \ldots, \vec{X}_{\tau_{p+q}}\big). \quad \text{(VI, 1; 31)}
\end{aligned}
$$

Так как p-линейная форма u антисимметрична, то она равна своей антисимметризации, умноженной на $1/p!$. Аналогично, q-линейная форма v равна своей антисимметризации, умноженной на $1/q!$. Поэтому можно, используя все перестановки, записать

$$
\begin{aligned}
&w(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =\\
&\quad=\frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in T}\varepsilon_\tau\Big[\Big(\sum_{\sigma'}\varepsilon_{\sigma'}u\big(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}, \vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}\big)\Big)\times\\
&\quad\times\Big(\sum_{\sigma''}\varepsilon_{\sigma''}v\big(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+q})}\big)\Big)\Big]=\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\frac{1}{p!\,q!}\varepsilon_\sigma u\big(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}\big)\,v\big(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}\big). \quad \text{(VI, 1; 32)}
\end{aligned}
$$

Это означает, что форма w является антисимметризацией $(p+q)$-линейной формы

$$
\begin{aligned}
&(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q})\to\\
&\quad\to\frac{1}{p!\,q!}u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\,v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}). \quad \text{(VI, 1; 33)}
\end{aligned}
$$

Мы пришли к следующему определению. Если u (соответственно v) является p-линейной (соответственно q-линейной) антисимметричной формой на $\vec{E}^p$ (соответственно на $\vec{E}^q$), то *внешним произведением* этих форм $u \wedge v$ называется $(p+q)$-линейная форма w, определенная как антисимметризация функции (VI, 1; 33), т. е. форма, определенная по формуле (VI, 1; 32). По условию если $p = 0$, а следовательно, если u — некоторый скаляр из $\mathbb{K}$, то $u \wedge v$ представляет собой форму uv, т. е. произведение формы v на скаляр u. То же самое имеет место для $q = 0$.

Из этого определения вытекает, что если u является произведением $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$, а v — произведением $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$, то $u \wedge v$ есть произведение, определяемое просто как $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$.

Точно так же если u, v и w — соответственно p-линейная, q-линейная и r-линейная антисимметричные формы, то их внешнее произведение $u \wedge v \wedge w$ определяется как $(p+q+r)$-линейная форма, являющаяся антисимметризацией функции

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}, \vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}) \to \\ \to \frac{1}{p!\,q!\,r!} u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\, v(\vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \times \\ \times w(\vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}), \qquad \text{(VI, 1; 34)}$$

и, следовательно, определяется по формуле

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}) \to \\ \to \frac{1}{p!\,q!\,r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \varepsilon_\sigma u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p})\, v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}) \times \\ \times w(\vec{X}_{\sigma_{p+q+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q+r}}). \qquad \text{(VI, 1; 35)}$$

Предположим, что пространство $\vec{E}$ имеет конечную размерность N и что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ — некоторый базис в $\vec{E}$. Обозначим через (ξ_i) линейную форму «i-я координата», которая каждому вектору из $\vec{E}$ ставит в соответствие его i-ю координату. Тогда, очевидно, внешнее произведение $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$ представляет собой p-линейную антисимметричную форму $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ из формулы (VI, 1; 23), которая каждой системе из p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ ставит в соответствие определитель, составленный из их координат с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_p$:

$$(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} (X_{i, j_k}). \qquad \text{(VI, 1; 35}_2\text{)}$$

Теперь p-линейная форма, определяемая формулой (VI, 1; 23), может быть записана в виде

$$\vec{u} = \sum \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}). \qquad \text{(VI, 1; 36)}$$

Форма степени p называется *разложимой*, если она представима в виде внешнего произведения p линейных форм.

Теорема 6. *Если пространство $\vec{E}$ конечномерно, то любая p-линейная антисимметричная форма на $\vec{E}^p$ является линейной комбинацией конечного числа разложимых форм. Если $\vec{e}_i$ образуют некоторый базис в $\vec{E}$, то формы $\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_p} = \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, образуют базис в $\Delta^p \overleftarrow{E}'$.*

Обозначим через J некоторую часть из p элементов множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, через (ξ_J) — внешнее произведение $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ — элементы J, а через $\vec{a}_J$ — коэффициент $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$. Формула (VI, 1; 36) в этих обозначениях запишется в виде:

$$u = \sum_{J \in \mathfrak{P}_p(\{1, 2, \ldots, N\})} \vec{a}_J (\xi_J), \qquad \text{(VI, 1; 37)}$$

где $\mathfrak{P}_p(A)$ — множество частей по p элементов множества A.

Теорема 7. *Внешнее умножение мультилинейных форм является мультилинейной и ассоциативной операцией.*

Доказательство. Когда говорят, что отображение мультилинейно, то это означает, например, что отображение $(u, v, w) \to u \wedge v \wedge w$ множества $\Lambda^p \overleftarrow{E}' \times \Lambda^q \overleftarrow{E}' \times \Lambda^r \overleftarrow{E}'$ в поле скаляров $\mathbb{K}$ является трилинейным отображением, т. е. что справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&(u_1 + u_2) \wedge v \wedge w = u_1 \wedge v \wedge w + u_2 \wedge v \wedge w, \\
&u \wedge (v_1 + v_2) \wedge w = u \wedge v_1 \wedge w + u \wedge v_2 \wedge w, \\
&u \wedge v \wedge (w_1 + w_2) = u \wedge v \wedge w_1 + u \wedge v \wedge w_2, \qquad \text{(VI, 1; 37}_2\text{)} \\
&\lambda u \wedge \mu v \wedge \nu w = \lambda\mu\nu (u \wedge v \wedge w); \\
&\qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ — любые скаляры}).
\end{aligned}$$

Эти свойства очевидны.

Когда мы говорим об ассоциативности внешнего умножения, то это означает, например, что для мультилейных антисимметричных форм u, v, w, z имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} u \wedge v \wedge w \wedge z &= (u \wedge v \wedge w) \wedge z = u \wedge (v \wedge w \wedge z) = \\ &= (u \wedge v) \wedge (w \wedge z) = (u \wedge v) \wedge w \wedge z = \\ &= u \wedge (v \wedge w) \wedge z = u \wedge v \wedge (w \wedge z). \qquad \text{(VI, 1; 38)} \end{aligned}$$

Эти формулы очевидны, если u, v, w, z являются разложимыми формами, т. е. представляют собой внешние произведения линейных форм вида

$$\begin{aligned} u &= u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p, \quad v = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q, \\ w &= w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r, \quad z = z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 1; 39)}$$

В самом деле, в этом случае все выписанные в (VI, 1; 38) члены равны

$$\begin{aligned} u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q \wedge \\ \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r \wedge z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 1; 40)}$$

В случае когда пространство $\vec{E}$ конечномерно, согласно теореме 6, каждая мультилинейная антисимметричная форма является конечной комбинацией разложимых форм. Различные члены в равенствах (VI, 1; 38) мультилинейно зависят от u, v, w, z. Поскольку эти формы разложимы, то они равны. Мы не приводили доказательства для случая, когда пространство $\vec{E}$ бесконечномерно, но его легко свести к конечномерному случаю.

Теорема 8. *Внешнее произведение мультилинейных антисимметричных форм антикоммутативно: если u p-линейна, а v q-линейна, то справедлива формула*

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u. \qquad \text{(VI, 1; 41)}$$

Доказательство. Левая часть определяется по формуле (VI, 1; 30). Обозначим через τ перестановку, с помощью которой от $1, 2, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q$ производится переход к $q+1, q+2, \ldots, q+p, 1, 2, \ldots, q$. Так как эта перестановка имеет pq инверсий, то ее сигнатура равна $(-1)^{pq}$. Замечая, что при перестановке σ, пробегающей группу $\mathfrak{S}_{p+q}$, перестановка $\sigma\tau$ пробегает эту группу один и только один раз, мы можем записать левую часть соотношения (VI, 1; 41) иначе:

$$\begin{aligned}(u \wedge v) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) &= \\ &= \frac{1}{p!\,q!} \varepsilon_\tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma(\tau_1)}, \vec{X}_{\sigma(\tau_2)}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_p)}) \times \\ &\qquad \times v(\vec{X}_{\sigma(\tau_{p+1})}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_{p+q})}) = \\ &= \frac{1}{p!\,q!} (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma_{q+1}}, \vec{X}_{\sigma_{q+2}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{q+p}}) \times \\ &\qquad \times v(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_q}) = \\ &= (-1)^{pq} (v \wedge u) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}). \qquad \text{(VI, 1; 42)}\end{aligned}$$

Следствие 1. *Если u и v — линейные формы или, более общо, если это p-линейная и q-линейная формы, где p и q нечетны, то справедлива такая формула*:

$$u \wedge v = -v \wedge u \text{ [1]}. \qquad \text{(VI, 1; 43)}$$

Если же хотя бы одно из целых чисел p или q четно, то имеет место такая формула:

$$u \wedge v = v \wedge u. \qquad \text{(VI, 1; 44)}$$

Следствие 2. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ суть p линейных форм, и пусть σ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, p$. Тогда имеет место следующее соотношение*:

$$u_{\sigma_1} \wedge u_{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge u_{\sigma_p} = \varepsilon_\sigma u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p. \qquad \text{(VI, 1; 45)}$$

Доказательство. Предположим сначала, что перестановка σ является транспозицией двух последовательных целых чисел. Тогда формулу (VI, 1; 45) можно записать так:

$$\begin{aligned}u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_i \wedge u_{i+1} \wedge \ldots \wedge u_p &= \\ &= -u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_{i+1} \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_p. \qquad \text{(VI, 1; 46)}\end{aligned}$$

Это равенство очевидно, так как в силу ассоциативности оно сводится к равенству $u_{i+1} \wedge u_i = -u_i \wedge u_{i+1}$, вытекающему из формулы (VI, 1; 43).

К случаю произвольной перестановки σ можно перейти, замечая, что она является композицией конечного числа транспозиций двух последовательных элементов и что четность числа таких транспозиций равна четности перестановки σ. Следствие 2

[1] Для $p = q = 1$ это утверждение сразу же следует из формулы (VI, 1; 29_2).

дополняет теорему 7, выражая тот факт, что внешнее умножение *линейных* форм является антисимметричной операцией. Согласно теореме 3, эта операция альтернирующая. Поэтому справедливо

Следствие 3. *Внешнее произведение нескольких линейных форм, среди которых две пропорциональны, равно нулю.*

Естественно, это утверждение не верно, если приходится иметь дело с внешним произведением форм степени $\neq 1$. Например, если в четырехмерном пространстве ($N=4$) с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ через u мы обозначим 2-форму, определенную формулой

$$u=(\xi_1)\wedge(\xi_2)+(\xi_3)\wedge(\xi_4), \tag{VI,1; 47}$$

то ее квадрат не равен нулю:

$$u\wedge u=2(\xi_1)\wedge(\xi_2)\wedge(\xi_3)\wedge(\xi_4). \tag{VI, 1; 48}$$

Впрочем, если степень формы равна 0, то $\Lambda^0\overleftarrow{E}'$ будет полем скаляров $\mathbb{K}$, а квадрат скаляра не всегда равен нулю!

Теорема 9. *Для того чтобы p линейных форм на векторном пространстве $\vec{E}$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы их внешнее произведение $\neq 0$.*

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что эти формы $u_1, u_2, \ldots, u_p$ независимы. Тогда можно найти p таких векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots \vec{X}_p$ в $\vec{E}$, для которых имеют место соотношения

$$u_i(\vec{X}_j)=\delta_{ij}, \tag{VI, 1; 49}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Согласно (VI, 1; 29), имеет место формула

$$u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_p(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)=1, \tag{VI, 1; 50}$$

из которой следует, что внешнее произведение $\neq 0$.

2°) Предположим теперь, что формы зависимы. Тогда хотя бы одна из них, например u_p, является линейной комбинацией остальных форм, а именно:

$$u_p=c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_{p-1}u_{p-1}. \tag{VI, 1; 51}$$

Теперь в силу линейности

$$u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_p=\sum_{i=1}^{p-1}c_iu_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_{p-1}\wedge u_i, \tag{VI, 1; 52}$$

где каждый из членов в силу следствия 3 теоремы 8 равен нулю.

Внешнее произведение мультилинейных отображений

Пусть u есть p-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$ и v есть q-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^q$ в $\vec{G}$. Тогда можно образовать их внешнее произведение $u \wedge_{(B)} v$ относительно билинейного отображения B пространства $\vec{F} \times \vec{G}$ в векторное пространство $\vec{H}$. Это некоторое $(p+q)$-линейное отображение $\vec{E}^{p+q}$ в $\vec{H}$, определенное как антисимметризация функции

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \to$$
$$\to \frac{1}{p!\,q!} B(u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p),\ v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q})), \quad \text{(VI, 1; 53)}$$

т. е. определенное по формуле

$$u \wedge_{(B)} v(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \frac{\varepsilon_\sigma}{p!\,q!} B\big(u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}),\ v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}})\big),$$
$$\text{(VI, 1; 54)}$$

Здесь не возникает, вообще говоря, вопроса об ассоциативности или о правиле антикоммутативности этого произведения. Однако эти свойства будут иметь место в двух следующих случаях, имеющих весьма важные практические приложения:

1°) Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, а $\vec{F}$, $\vec{G}$ и $\vec{H}$ совпадают с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемым как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Если линейное отображение B является обычным умножением в поле комплексных чисел, то, как и ранее, имеют место ассоциативность и антикоммутативность. Внешнее произведение конечного числа произвольных мультилинейных антисимметричных форм со значениями в $\mathbb{C}$ удовлетворяет всем предыдущим соотношениям.

Кроме того, внешнее произведение даже мультилинейно относительно поля комплесных чисел в том смысле, что последняя формула (VI, 1; 37_2) остается верной, если λ, μ и ν — комплексные числа.

2°) Предположим, что $\vec{G}$ — поле скаляров $\mathbb{K}$, $\vec{H}$ совпадает с $\vec{F}$, а билинейное отображение B есть обычное умножение вектора на скаляр. Тогда, очевидно, можно образовать внешнее произведение нескольких мультилинейных форм, значение одной из которых лежит в $\vec{F}$, а остальные принимают скалярные значения. Образованные таким образом произведения также удовлетворяют предыдущим соотношениям.

Примеры. В первом случае выберем в качестве $\vec{E}$ и $\vec{F}$ поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемое как векторное двумерное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Обозначим через ξ и η формы «первая и вторая координаты», т. е. формы, ставящие в соответствие комплексному числу $z = x + iy$ его вещественную часть x и мнимую часть y. Можно также рассмотреть $\mathbb{R}$-линейные отображения в $\mathbb{C}$: $\zeta = \xi + i\eta$ и $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, определенные формулами

$$\zeta(z) = z \quad \text{и} \quad \bar{\zeta}(z) = \bar{z}\,[1]. \tag{VI, 1; 55}$$

При этом имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \xi \wedge \eta(z, z') = xy' - yx', \\ \zeta \wedge \bar{\zeta} = (\xi + i\eta) \wedge (\xi - i\eta) = -2i\xi \wedge \eta, \\ \zeta \wedge \bar{\zeta}(z, z') = z\bar{z}' - z'\bar{z} = -2i(xy' - yx'). \end{gathered} \tag{VI, 1; 56}$$

Внешняя алгебра пространства $\vec{E}'$

Для пространства $\overleftarrow{E}'$, сопряженного к $\vec{E}$, мы определили ранее пространство $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$. Однако если $\vec{E}$ конечномерно, то его можно рассматривать как сопряженное к $\overleftarrow{E}'$. Поэтому можно определить пространство $\Lambda^p \vec{E}$ — пространство p-линейных антисимметричных форм на $\overleftarrow{E}'$. Алгебраическая структура внешней алгебры пространства $\vec{E}$ аналогична структуре внешней алгебры пространства $\overleftarrow{E}'$. Элемент пространства $\Lambda^p \vec{E}$ называется p-вектором.

Следует обратить особое внимание на поля скаляров. Векторное пространство $\vec{E}$ над полем $\mathbb{C}$ определяет некоторое векторное пространство $\vec{E}_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$. Однако сопряженное пространство $\overleftarrow{E}'$ (пространство $\mathbb{C}$-линейных отображений $\vec{E}$ в $\mathbb{C}$) не связано с пространством $(\vec{E}_{\mathbb{R}})'$ (пространством $\mathbb{R}$-линейных отображений $\vec{E}$ в $\mathbb{R}$). Следовательно, $\Lambda^p E$ и $\Lambda^p E_{\mathbb{R}}$ не совпадают и даже имеют разные размерности. Например, если комплексная размерность пространства $\vec{E}$ равна n, то его вещественная

[1]) Отображение ζ также $\mathbb{C}$-линейно, но $\bar{\zeta}$ уже не $\mathbb{C}$-линейно.

размерность равна $2n$. Тогда комплексная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}$ равна $[n(n-1)]/2$, а значит, вещественная размерность равна $n(n-1)$, в то время как вещественная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}_{\mathbb{R}}$ равна $[2n(2n-1)]/2 = n(2n-1)$. Впрочем, для $\vec{e} \in \vec{E}$ векторы $\vec{e}$ и $i\vec{e}$ являются зависимыми в $\mathbb{C}$, а следовательно, $\vec{e} \wedge_{\mathbb{C}} i\vec{e} = \vec{0}$ (теорема 9). Однако эти векторы независимы в $\mathbb{R}$, а значит, $\vec{e} \wedge_{\mathbb{R}} i\vec{e} \neq \vec{0}$.

Чаще всего используются p-формы и редко p-векторы.

§ 2. ОРИЕНТАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД $\mathbb{R}$

Напомним, что если u — линейное отображение n-мерного векторного пространства $\vec{E}$ в себя, то можно говорить об определителе отображения u. Если задан некоторый базис в $\vec{E}$, то отображение u определяется относительно этого базиса некоторой матрицей. Определитель отображения u совпадает с определителем этой матрицы при любом выборе базиса.

Определитель произведения (композиции) двух линейных отображений равен произведению определителей. Определитель тождественного отображения равен единице, а определители двух взаимно обратных биекций взаимно обратны друг другу.

Все эти свойства справедливы для любого поля скаляров.

В этом параграфе $\vec{E}$ будет представлять собой N-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Если это пространство задано как n-мерное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то его можно будет рассматривать как векторное пространство размерности $N = 2n$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Напомним, что упорядоченным базисом в $\vec{E}$ называется такое отображение e множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ в $\vec{E}$: $i \to \vec{e}_i$, при котором векторы $(\vec{e}_i)_{i=1, 2, \ldots, N}$ линейно независимы в $\vec{E}$.

В множестве этих базисов можно установить отношение эквивалентности. Будем говорить, что базис e' *эквивалентен* базису e, если определитель e' относительно e положителен. Этот определитель является определителем однозначно определенного линейного отображения $\vec{E}$ в $\vec{E}$, при котором образом каждого базисного вектора $\vec{e}_i$ является вектор $\vec{e}'_i$. Установленное таким образом отношение действительно представляет собой некоторое отношение эквивалентности. В самом деле: