размерность равна $2n$. Тогда комплексная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}$ равна $[n(n-1)]/2$, а значит, вещественная размерность равна $n(n-1)$, в то время как вещественная размерность пространства $\Lambda^2\vec{E}_{\mathbb{R}}$ равна $[2n(2n-1)]/2=n(2n-1)$. Впрочем, для $\vec{e}\in\vec{E}$ векторы $\vec{e}$ и $i\vec{e}$ являются зависимыми в $\mathbb{C}$, а следовательно, $\vec{e}\wedge_{\mathbb{C}} i\vec{e}=\vec{0}$ (теорема 9). Однако эти векторы независимы в $\mathbb{R}$, а значит, $\vec{e}\wedge_{\mathbb{R}} i\vec{e}\neq\vec{0}$.

Чаще всего используются p-формы и редко p-векторы.

§ 2. ОРИЕНТАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД $\mathbb{R}$

Напомним, что если u — линейное отображение n-мерного векторного пространства $\vec{E}$ в себя, то можно говорить об определителе отображения u. Если задан некоторый базис в $\vec{E}$, то отображение u определяется относительно этого базиса некоторой матрицей. Определитель отображения u совпадает с определителем этой матрицы при любом выборе базиса.

Определитель произведения (композиции) двух линейных отображений равен произведению определителей. Определитель тождественного отображения равен единице, а определители двух взаимно обратных биекций взаимно обратны друг другу.

Все эти свойства справедливы для любого поля скаляров.

В этом параграфе $\vec{E}$ будет представлять собой N-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Если это пространство задано как n-мерное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то его можно будет рассматривать как векторное пространство размерности $N=2n$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Напомним, что упорядоченным базисом в $\vec{E}$ называется такое отображение e множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ в $\vec{E}$: $i\to\vec{e}_i$, при котором векторы $(\vec{e}_i)_{i=1,2,\ldots,N}$ линейно независимы в $\vec{E}$.

В множестве этих базисов можно установить отношение эквивалентности. Будем говорить, что базис e' *эквивалентен* базису e, если определитель e' относительно e положителен. Этот определитель является определителем однозначно определенного линейного отображения $\vec{E}$ в $\vec{E}$, при котором образом каждого базисного вектора $\vec{e}_i$ является вектор $\vec{e}'_i$. Установленное таким образом отношение действительно представляет собой некоторое отношение эквивалентности. В самом деле:

1°) Оно рефлексивно: если $e' = e$, то определитель равен $1 > 0$.

2°) Оно симметрично: определитель базиса e' относительно базиса e обратен определителю базиса e относительно базиса e', поскольку они являются определителями двух взаимно обратных отображений. Если один из них > 0, то таким же будет и другой.

3°) Оно транзитивно: пусть e, e', e'' — три упорядоченных базиса $\vec{E}$. Тогда линейное отображение $\vec{E}$ в $\vec{E}$, переводящее $\vec{e}_i$ в $\vec{e}''_i$, есть произведение линейного отображения, переводящего $\vec{e}_i$ в $\vec{e}'_i$, и линейного отображения, переводящего $\vec{e}'_i$ в $\vec{e}''_i$. Значит, определитель e'' относительно e является произведением определителя e' относительно e на определитель e'' относительно e'. Если оба последних определителя > 0, то таким же будет и первый определитель.

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество всевозможных упорядоченных базисов $\vec{E}$ на два класса.

В самом деле, в $\vec{E}$ можно найти два неэквивалентных базиса e и e' (например, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ и $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N$). Пусть e'' — какой-либо третий базис. Тогда отношение определителей e'' относительно e и e' равно определителю e' относительно e, который, очевидно, отрицателен. Следовательно, хотя бы один из этих двух определителей положителен, а значит, базис e'' эквивалентен либо e, либо e' [1]).

Говорят, что векторное пространство $\vec{E}$ ориентировано, если один из классов упорядоченных базисов в $\vec{E}$ выбран в качестве положительного класса, а другой считается отрицательным.

Замечания. 1°) Существуют две возможные ориентации пространства $\vec{E}$. Если выбрана некоторая ориентация пространства $\vec{E}$, то вторая ориентация, в которой положительным называют класс базисов, считавшийся отрицательным в первой ориентации, называется противоположной. В элементарных курсах анализа часто говорят, что выбор ориентации $\vec{E}$ произволен, но «в случае двумерного векторного пространства предпочтительнее в качестве положительного класса брать такой класс упорядоченных базисов, в которых второй вектор лежит слева от первого».

---

[1]) Именно здесь используется тот факт, что в качестве поля скаляров выбрано поле $\mathbb{R}$.

Совершенно очевидно, что эта фраза бессмысленна. Понятия «правый» и «левый» являются чисто физическими понятиями, имеющими смысл в занимаемой нами относительно небольшой области вселенной [1]). В двумерном векторном пространстве над вещественным полем понятий «правый» и «левый» не существует. Если, например, рассматривается двумерное векторное пространство полиномов степени $\leqslant 1$ относительно x, то совершенно невозможно сказать, какой из полиномов системы x и $1+x$ лежит правее другого.

2°) Если σ — некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, N\}$, то класс, определяемый базисом $i \to \vec{e}_{\sigma_i}$, является классом базиса $i \to \vec{e}_i$, умноженным на сигнатуру ε_σ перестановки σ.

3°) Если u — линейная биекция пространства $\vec{E}$ на себя и если $(\vec{e}_i)_{i=1, 2, \ldots, N}$ является базисом пространства $\vec{E}$, то базис $(u(\vec{e}_i))_{i=1, 2, \ldots, N}$ принадлежит тому же классу или нет в зависимости от того, будет ли определитель биекции $u > 0$ или < 0. Часто говорят, что в этом заключается «геометрическая интерпретация» знака определителя, но это не совсем точно, *поскольку ориентация не является внутренним геометрическим понятием* — она вытекает из свойств определителей линейных отображений.

Другие методы ориентации векторного пространства

Рассмотрим сначала одномерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Любые два его отличных от нуля элемента пропорциональны, и их отношение либо > 0, либо < 0.

Поэтому дополнение к 0 в векторном пространстве можно разложить на два класса, считая два элемента эквивалентными, или принадлежащими одному и тому же классу, если их отношение > 0. Ориентировать векторное пространство — это значит выбрать один из этих двух классов в качестве положительного. Заметим теперь, что если $\vec{E}$ является векторным пространством произвольной конечной размерности N, то пространство $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$, состоящее из N-линейных антисимметричных форм на $\vec{E}$, одномерно (следствие 2 теоремы 5) и, следовательно, может быть ориентировано. В этом случае за ориентацию про-

[1]) Если бы нам удалось установить связь с инженерами планеты, расположенной от нас на расстоянии миллиарда световых лет, то не ясно, как бы мы объяснили им, что мы понимаем под словами «правый» и «левый».

странства $\vec{E}$ берется по определению ориентация одномерного векторного пространства $\Lambda^N \overleftarrow{E'}$. Ориентировать $\vec{E}$ — значит выбрать те N-линейные антисимметричные формы $\neq 0$, которые считаются положительными.

Покажем, что эти два метода ориентации векторного пространства эквивалентны.

В самом деле, пусть e — некоторый базис. Этот базис определяет координатные функции (ξ_i) и, следовательно, определяет некоторую N-форму — внешнее произведение $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$. Точно так же если e' есть некоторый другой базис, то ему можно поставить в соответствие другую N-форму $(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N)$. Обозначим через Δ определитель второго базиса относительно первого. Согласно определению внешнего произведения форм (формулы (VI, 1; 35_2)), имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N) \cdot (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_N) = \Delta, \\ &(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N) \cdot (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_N) = 1. \end{aligned}\right. \qquad \text{(VI, 2; 1)}$$

Из выписанных формул следует, что между N-формами (обязательно пропорциональными), соответствующими двум этим базисам, имеет место соотношение

$$(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N) = \frac{1}{\Delta} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N). \qquad \text{(VI, 2; 2)}$$

Два базиса эквивалентны (в смысле установленного выше отношения эквивалентности между базисами) тогда и только тогда, когда отношение соответствующих N-форм положительно, т. е. если эти формы эквивалентны в смысле отношения эквивалентности, установленного ранее в пространстве N-форм.

Ориентировать пространство в смысле выбора положительного класса базисов — это значит, следовательно, ориентировать его в смысле выбора положительного класса N-форм; N-форма $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, соответствующая базису e: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$, принадлежит положительному классу N-форм тогда и только тогда, когда базис e принадлежит положительному классу. Если u является N-формой $\neq 0$, положительной в ориентации $\vec{E}$, то можно писать $u > 0$. Если $u = 0$ или $u > 0$, то пишут $u \geqslant 0$. *Это понятие знака N-формы на $\vec{E}$ имеет смысл лишь в том случае, если $\vec{E}$ ориентировано.*

Выше мы видели, что в векторных пространствах существуют две возможные ориентации, ни одна из которых не обладает какими-либо преимуществами по сравнению с другой. Однако, как мы сейчас увидим, это вовсе не так, когда речь идет о векторных пространствах над полем комплексных чисел.

Теорема 10. *Пусть $\vec{E}$ — векторное n-мерное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторый $\mathbb{C}$-базис в $\vec{E}$. Тогда $\vec{e}_1, i\vec{e}_1, \vec{e}_2, i\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\vec{E}$ (рассматриваемом как векторное $2n$-мерное пространство над полем вещественных чисел). Класс этого $\mathbb{R}$-базиса не зависит от выбора исходного $\mathbb{C}$-базиса.*

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что из нее вытекает существование «привилегированной» ориентации векторного пространства над полем комплексных чисел. *Исходя из векторного базиса, можно построить некоторый $\mathbb{R}$-базис, и класс всех таким образом построенных $\mathbb{R}$-базисов вседа один и тот же. Его можно считать положительным классом. Так определенная ориентация называется канонической ориентацией векторного пространства над полем комплексных чисел.* В случае одномерного векторного пространства над полем комплексных чисел это утверждение сводится к тому, что положительным считается базис $\vec{e}, i\vec{e}$, где $\vec{e}$ — произвольный вектор $\neq 0$. В частности, ориентация самого поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ является такой ориентацией, в которой базис, образованный числами 1 и i, считается положительным.

Доказательство. Рассматриваемый $\mathbb{C}$-базис определяет комплексные координатные функции, которые мы будем обозначать через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Соответствующий $\mathbb{R}$-базис определяет вещественные координатные функции, которые мы обозначим через $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n$. При этом $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\bar{\zeta}_j = \xi_j - i\eta_j$. Пусть теперь задан другой комплексный базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$, определяющий координаты $\xi'_j, \eta'_j, \zeta'_j$.

Мы хотим доказать, что

$$\frac{(\xi'_1) \wedge (\eta'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge (\eta'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_n) \wedge (\eta'_n)}{(\xi_1) \wedge (\eta_1) \wedge (\xi_2) \wedge (\eta_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_n) \wedge (\eta_n)} = \frac{1}{D} > 0, \qquad (\text{VI}, 2; 3)$$

где D — определитель второго $\mathbb{R}$-базиса, соответствующего второму $\mathbb{C}$-базису, относительно первого базиса.

Согласно (VI, 1; 56), можно записать, что

$$\frac{(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n) \wedge (\bar{\zeta}'_1) \wedge (\bar{\zeta}'_2) \wedge \ldots \wedge (\bar{\zeta}'_n)}{(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n) \wedge (\bar{\zeta}_1) \wedge (\bar{\zeta}_2) \wedge \ldots \wedge (\bar{\zeta}_n)} = \frac{1}{D}. \qquad (\text{VI}, 2; 4)$$

Однако линейные формы ζ_j не только $\mathbb{R}$-линейны, но и $\mathbb{C}$-линейны. Отсюда следует, что внешние произведения форм $(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n)$ и $(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n)$ пропорциональны с комплексным коэффициентам пропорциональности: можно снова повторить выкладки, которые мы делали для получения формулы (VI, 2; 1), проводя рассуждения над полем комплексных чисел так же, как в случае поля вещественных чисел. При этом мы получим, что

$$(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n) = \frac{1}{\Delta} (\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n), \qquad \text{(VI, 2; 5)}$$

где Δ является определителем $\mathbb{C}$-базиса $\vec{e}'_j$ относительно $\mathbb{C}$-базиса $\vec{e}_j$. Поэтому окончательно мы приходим к такому соотношению:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{\overline{\Delta}}, \quad \text{или} \quad D = \Delta\overline{\Delta} = |\Delta|^2 > 0, \qquad \text{(VI, 2; 6)}$$

которое и доказывает наше утверждение.

Замечание. Формула $D = |\Delta|^2$ естественно распространяется и на якобианы. Пусть f — некоторое отображение аффинного пространства E размерности m над полем комплексных чисел в аффинное пространство F размерности m над полем комплексных чисел. Предположим, что отображение f дифференцируемо относительно поля комплексных чисел. Тогда оно тем более дифференцируемо относительно поля вещественных чисел.

Если в E и F выбраны системы координат относительно поля комплексных чисел, то этот выбор автоматически определяет некоторую систему координат относительно поля вещественных чисел, если воспользоваться методом, с помощью которого мы по $\mathbb{C}$-базису строили соответствующий $\mathbb{R}$-базис. Теперь можно, с одной стороны, рассмотреть якобиан $J_{\mathbb{C}}$ отображения f в точке a относительно системы координат над полем комплексных чисел, а с другой — его якобиан $J_{\mathbb{R}}$ относительно системы координат над полем вещественных чисел. Эти определители являются определителями образов при отображении $f'(a)$ базисов $\vec{E}$ относительно базисов $\vec{F}$. Только что доказанное может быть, следовательно, записано в следующем виде:

$$J_{\mathbb{R}} = |J_{\mathbb{C}}|^2 \geqslant 0\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 2; 7)}$$

[1] Наши прежние вычисления были проведены для случая $J_{\mathbb{C}} \neq 0$. Однако если $J_{\mathbb{C}} = 0$, то отображение $f'(a)$ будет переводить пространство $\vec{E}$ в некоторое векторное подпространство пространства $\vec{F}$, отличное от $\vec{F}$, и тогда $J_{\mathbb{R}} = 0$.

Особые свойства антисимметричных p-форм над евклидовым ориентированным N-мерным пространством E

Пусть e — *ортонормированный положительный базис* в $\vec{E}$. Он определяет некоторую N-форму $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$. Если e' — другой ортонормированный положительный базис в $\vec{E}$, то из формулы (VI, 2; 1) следует, что

$$(\xi_1') \wedge (\xi_2') \wedge \ldots \wedge (\xi_N') = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N). \qquad \text{(VI, 2; 8)}$$

В самом деле, так как речь идет об ортонормированных базисах, то определитель второго базиса относительно первого обязательно равен ± 1 или, точнее, $+1$, поскольку оба базиса принадлежат положительному классу.

Иначе говоря, *N-форма $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, соответствующая ортонормированному положительному базису пространства $\vec{E}$, не зависит от этого базиса.* Эта N-форма, определенная раз и навсегда заданием евклидовой структуры и ориентации в $\vec{E}$, называется *фундаментальной N-формой пространства $\vec{E}$*. Мы будем обозначать ее через $\overset{N}{\xi}$. Нетрудно уточнить ее значение на системе N векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$. Этим значением является, согласно (VI, 1; 35_2), определитель N векторов относительно произвольного ортонормированного положительного базиса $\vec{E}$. Его абсолютная величина равна объему параллелепипеда с вершиной в начале координат, определенного этими N-векторами (следствие 5_2 теоремы 102 гл. IV). Если этот объем не равен нулю, то его знак определяет класс базиса, состоящего из этих N векторов, относительно заданной ориентации $\vec{E}$. Часто говорят, что это значение является *алгебраическим объемом параллелепипеда, определенного векторами* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, в ориентированном пространстве $\vec{E}$ (такой алгебраический объем может быть определен только после корректного определения понятия ориентации).

Существование фундаментальной N-формы позволит нам установить замечательные соотношения между векторами и формами.

1°) Между пространством N-форм над $\vec{E}$ и полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно установить биекцию. Для этого достаточно каждой N-форме поставить в соответствие отношение этой формы к фундаментальной N-форме. Таким образом, будет установлено соответствие между вещественным числом X и N-ковектором $X\overset{N}{\xi}$.

2°) Каждой системе из N векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ можно поставить в соответствие вещественное число, называемое смешанным произведением этих векторов. Это просто значение $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ фундаментальной N-формы на заданной системе векторов. Смешанное произведение равно определителю системы векторов относительно произвольного ортонормального положительного базиса, или алгебраическому объему параллелепипеда, образованного этими N векторами. Отображение «смешанное произведение», которое векторам $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ ставит в соответствие их смешанное произведение, является N-формой на $\vec{E}$, совпадающей с $\overset{N}{\xi}$.

Более общо, если задана система p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ из $\vec{E}$, то ей можно поставить в соответствие некоторую $(N-p)$-форму $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$, определенную следующим образом. Значение $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ на системе $N-p$ векторов $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots$ $\ldots, \vec{Y}_{N-p}$ является смешанным произведением N векторов $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$[1]):

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}) = \overset{N}{\xi} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \quad \text{(VI, 2; 9)}$$

Так определенная на $\vec{E}^{N-p}$ функция $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ является $(N-p)$-линейной антисимметричной формой, т. е. $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ является элементом пространства $\Lambda^{N-p}\overleftarrow{E}'$.

Кроме того, отображение α, ставящее в соответствие p векторам $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ ассоциированную с ними форму, т. е. отображение $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p \to \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$, является p-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^p$ в $\Lambda^{N-p}\overleftarrow{E}'$.

---

[1]) Можно было выбрать другой порядок: $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}$. Это привело бы к умножению на $(-1)^{p(N-p)}$. Такой выбор избавлял бы нас от степеней (-1) в одних формулах, но приводил бы к степеням (-1) в других формулах!

Для $p=N$ получаем N-линейное отображение $\vec{E}^N$ в поле скаляров $\Lambda^0\overleftarrow{E}'$: это отображение ставит в соответствие N векторам их смешанное произведение, т. е. фундаментальное отображение $\overset{N}{\xi}$. Если e является ортонормированным положительным базисом в $\vec{E}$, а в качестве p векторов берутся векторы $\vec{e}_{N-p+1}, \vec{e}_{N-p+2}, \ldots, \vec{e}_N$ из самого базиса, то, как это можно видеть из соотношения (VI, 2; 9), соответствующая форма определяется по формуле

$$\alpha_{\vec{e}_{N-p+1}, \ldots, \vec{e}_N} = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{N-p}). \qquad \text{(VI, 2; 10)}$$

Если J — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, состоящее из элементов $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, а $K = \complement J$ состоит из элементов $k_1 < k_2 < \ldots < k_{N-p}$, то

$$\alpha_{\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}} = \pm \left(\overset{N-p}{\xi_k} \right) = \pm \left(\xi_{k_1}\right) \wedge \left(\xi_{k_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\xi_{k_{N-p}}\right),$$
$$\text{(VI, 2; 11)}$$

где $\pm$ является сигнатурой перестановки, преобразующей $1, 2, \ldots, N$ в $k_1, k_2, \ldots, k_{N-p}, j_1, j_2, \ldots, j_p$.

В частности, для $p=1$ имеет место формула

$$\alpha_{\vec{e}_j} = (-1)^{N-j}(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \ldots \wedge (\xi_N).$$
$$\text{(VI, 2; 11}_2\text{)}$$

Если X_j — координаты вектора $\vec{X}$, то

$$\alpha_{\vec{X}} = \sum_{j=1}^{N} \left((-1)^{N-j} X_j (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)\right).$$
$$\text{(VI, 2; 11}_3\text{)}$$

Эта формула показывает, что для $p=1$ отображение α является линейной биекцией $\vec{E}$ на $\Lambda^{N-1}\overleftarrow{E}'$.

Замечание. *Соотношения* 1°) *и* 2°) *в действительности зависят не от евклидовой структуры и ориентации $\vec{E}$, а от задания фундаментальной формы $\overset{N}{\xi}$.* Если на N-мерном векторном пространстве $\vec{E}$ задана некоторая *фундаментальная форма* $\overset{N}{\xi} \neq 0$ (т. е. некоторая мера объемов и ориентация без евклидовой структуры), то свойства 1°) и 2°) остаются в силе. Когда фундаментальный N-ковектор умножают на вещественное число k, то тем самым умножают оператор α на k. Если в $\vec{E}$ выбрать *произвольный* базис и положить $\overset{N}{\xi}\cdot(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N)=\Delta$, где $\overset{N}{\xi}=\Delta(\xi_1)\wedge(\xi_2)\wedge\ldots\wedge(\xi_N)$, то формулы (VI, 2; 11_2) и (VI, 2; 11_3) останутся справедливыми, если только их правую часть умножить на Δ.

3°) Известно, что в трехмерном ориентированном евклидовом векторном пространстве каждой системе из двух векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$ можно поставить в соответствие третий вектор, называемый векторным произведением двух данных. Это свойство может быть обобщено следующим образом.

Если $\vec{E}$ является N-мерным ориентированным евклидовым пространством, то каждой системе из $N-1$ векторов можно поставить в соответствие новый вектор $\vec{Z}$, называемый *векторным произведением* данных $N-1$ векторов и обозначаемый через $\vec{Z}=[\vec{X}_1\wedge\vec{X}_2\wedge\ldots\wedge\vec{X}_{N-1}]$[1]. Этот вектор определяется так. При соответствии, указанном в п. 2°), системе $N-1$ векторов отвечает некоторая 1-форма, т. е. некоторая линейная форма на $\vec{E}$. В гл. III (формула (III, 1; 19)) мы видели, что в этом случае каждой линейной форме на $\vec{E}$, т. е. каждому элементу сопряженного пространства $\overleftarrow{E}'$, можно поставить в соответствие определенный элемент $\vec{Z}$ из $\vec{E}$. Этот элемент $\vec{Z}$ и называют векторным произведением $N-1$ векторов. Отображение, которое $N-1$ векторам ставит в соответствие их векторное произведение, является $(N-1)$-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^{N-1}$ в $\vec{E}$.

Форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ определяется здесь следующим образом. Если $\vec{Y}$ — произвольный вектор в $\vec{E}$, то

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y})=\overset{N}{\xi}(\vec{Y}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}). \qquad \text{(VI, 2; 12)}$$

Вектор $\vec{Z}$ определяется из тех соображений, что для произвольного вектора $\vec{Y}\in\vec{E}$ должна иметь место формула (III, 1; 19):

$$\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}\cdot(\vec{Y})=(\vec{Z}\mid\vec{Y}). \qquad \text{(VI, 2; 13)}$$

[1]) Это обозначение не совсем корректно. В принципе символ $\wedge$ внешнего произведения надо было бы использовать только для обозначения произведений, не зависящих от евклидовой структуры и ориентации пространства.

Эта формула означает, что смешанное произведение векторов $\vec{Y}, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ совпадает со скалярным произведением вектора $\vec{Y}$ на векторное произведение $\vec{Z} = [\vec{X}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}]$. Изменяя обозначения и учитывая правила антикоммутации, мы можем написать следующие равенства:

$$\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) = (\vec{X}_1 \,|\, [\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N]) =$$
$$= (-1)^{N-1} \overset{N}{\xi}(\vec{X}_N, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}) = (-1)^{N-1}([\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}] \,|\, \vec{X}_N).$$

Укажем геометрический способ построения векторного произведения. Так как правая часть формулы (VI, 2; 12) при линейно зависимых $N-1$ векторах равна нулю для любого $\vec{Y}$, то равна нулю форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$. Следовательно, в этом случае обращается в нуль вектор $\vec{Z}$. Обратно, если вектор $\vec{Z}$ равен нулю, то это означает, что равна нулю и форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ [1]), а тогда векторы $\vec{X}_j$ обязательно линейно зависимы. В самом деле, если они линейно независимы, то можно найти некоторый базис $\vec{E}$, образованный векторами $\vec{X}_j$ и вектором $\vec{Y}$, а тогда правая часть формулы (VI, 2; 12) $\neq 0$, что противоречит тому факту, что форма $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ равна нулю. Таким образом, *векторное произведение $N-1$ векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.*

Предположим теперь, что векторы $\vec{X}_j$ линейно независимы. Если вектор $\vec{Y}$ лежит в векторном подпространстве, порожденном этими векторами, то $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y})$, согласно (VI, 2; 12), обязательно равно нулю. Значит, $(\vec{Z} \,|\, \vec{Y}) = 0$. Следовательно, вектор $\vec{Z}$ ортогонален векторному подпространству, порожденному векторами $\vec{X}_j$.

Выберем теперь единичный вектор $\vec{\nu}$, ортогональный векторному подпространству, порожденному векторами $\vec{X}_j$, так, чтобы базис $\vec{\nu}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ был положительным относи-

---

[1]) На стр. 190 т. I мы видели, что соответствие между формой $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}$ и вектором $\vec{Z}$ является биекцией.

тельно ориентации $\vec{E}$. Определитель этого базиса (относительно положительных ортонормированных базисов), являющийся положительным числом, равен объему параллелепипеда, образованного векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{X}_j$ (следствие 5_2 теоремы 102 гл. IV). Этот определитель равен также произведению площади основания на высоту (теорема 104 гл. IV). Поскольку по условию $\vec{\nu}$ является единичным вектором, рассматриваемый определитель равен площади основания. Этот же определитель равен $(\vec{Z}\,|\,\vec{\nu})$. Это говорит о том, что *вектор $\vec{Z}$ равен произведению вектора $\vec{\nu}$ на некоторое число > 0, равное $(N-1)$-мерной площади параллелепипеда, определенного векторами $\vec{X}_j$.*

Если мы рассмотрим в пространстве $\vec{E}$ произвольный положительный ортонормированный базис, то нетрудно будет найти составляющие векторного произведения данных $N-1$ векторов. Если эти составляющие обозначить через Z_j, а через Y_j обозначить составляющие произвольного вектора $\vec{Y}$ и если, как обычно, через $X_{i,j}$ обозначить координаты векторов $\vec{X}_i$, то мы получим такую формулу:

$$\sum_{j=1}^{N} Z_jY_j = (\vec{Z}\,|\,\vec{Y}) = \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}}(\vec{Y}) = \overset{N}{\xi}(\vec{Y}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}), \tag{VI, 2; 14}$$

из которой следует, что Z_j является коэффициентом при Y_j в разложении определителя

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_N \\ X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \ldots & X_{N-1,N} \end{vmatrix} \tag{VI, 1; 15}$$

по элементам первой строки. Поэтому имеет место формула

$$Z_j = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,j-1} & X_{1,j+1} & \ldots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,j-1} & X_{2,j+1} & \ldots & X_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \ldots & X_{N-1,j-1} & X_{N-1,j+1} & \ldots & X_{N-1,N} \end{vmatrix}. \tag{VI, 2; 16}$$

Все результаты п. 3°) зависят одновременно от евклидовой структуры и ориентации пространства $\vec{E}$.

Все вышеизложенное можно сформулировать так:

Теорема 11. *Если $\vec{E}$ является N-мерным ориентированным евклидовым пространством, то в $\vec{E}$ существует фундаментальная N-форма $\overset{N}{\xi}$, представимая в виде $(\xi_1)\wedge(\xi_2)\wedge\ldots\wedge(\xi_N)$, где (ξ_i) — координатные формы относительно произвольного ортонормированного положительного базиса. Существует линейная биекция пространства N-форм $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$ на поле скаляров, которая каждой N-форме ставит в соответствие ее отношение к $\overset{N}{\xi}$. Существует p-линейное антисимметричное отображение $\vec{E}^p$ в $\Lambda^{N-p}\overleftarrow{E}'$, определяемое формулами* (VI, 2; 9), (VI, 2; 10) *и* (VI, 2; 11). *Если $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$ суть N векторов пространства $\vec{E}$, то их смешанное произведение является вещественным числом, равным $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ или определителю этих векторов относительно любого ортонормированного положительного базиса. Смешанное произведение как отображение является линейной антисимметричной формой на $\vec{E}^N$, равной $\overset{N}{\xi}$. Векторное произведение векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ есть вектор $\vec{Z}=[\vec{X}_1\wedge\vec{X}_2\wedge\ldots\wedge\vec{X}_{N-1}]$, равный нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы. Если же они линейно независимы, то вектор $\vec{Z}$ ортогонален к порождаемому им векторному подпространству в том смысле, что система векторов $\vec{Z}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ образует положительный базис, а длина вектора $\vec{Z}$ равна площади параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$. Векторное произведение является $(N-1)$-линейным антисимметричным отображением $\vec{E}^{N-1}$ в $\vec{E}$. Составляющие векторного произведения относительно ортонормированного базиса определяются по формуле* (VI, 2; 16).

Замечания. 1°) Если $\vec{E}$ является, например, двумерным ориентированным евклидовым пространством, то векторное произведение $[\vec{X}]$ можно образовать и из одного вектора $\vec{X}$ $(N-1=1)$. Согласно определению, это вектор $\vec{Z}$, полученный из вектора $\vec{X}$ поворотом на угол $-\pi/2$ [1]).

---

[1]) Внимание! Понятие ориентированного угла *опирается* на понятие ориентации! Угол $(\vec{U}, \vec{V})$ между двумя ортогональными векторами евклидовой ориентированной плоскости считается равным $+\pi/2$, если базис $\vec{U}, \vec{V}$ положителен.

2°) Все, что было определено в этом параграфе, зависит, вообще говоря, не только от евклидовой структуры пространства $\vec{E}$, *но также и от его ориентации*. Если ориентацию $\vec{E}$ заменить на противоположную, то изменится знак фундаментальной N-формы, смешанного произведения N векторов, $(N-p)$-формы, соответствующей p векторам, векторного произведения $N-1$ векторов. Напротив, связь между векторами и формами (линейная биекция $\vec{E}$ на $\overleftarrow{E}'$, рассмотренная на стр. 190 т. I) зависит только от евклидовой структуры пространства и не зависит от его ориентации точно так же, как это было в случае скалярного произведения двух векторов! Часто говорят, что скалярное произведение двух векторов является полярной, или прямой, или четного рода величиной, в то время как смешанное произведение N векторов является аксиальной, или закрученной (sic!), или нечетного рода величиной.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E и $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство. *Дифференциальной формой степени p на Ω со значениями в $\vec{F}$* называется отображение $\vec{\omega}$[1]) множества Ω в пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ p-линейных антисимметричных непрерывных отображений из $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Это отображение каждой точке x из Ω ставит в соответствие некоторый элемент $\vec{\omega}(x)$ пространства $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$, т. е. некоторый p-ковектор на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$. Можно также сказать, что дифференциальная форма степени p является *полем p-ковекторов на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*, полем, определенным на Ω. При $p=0$ получаем поле векторов из $\vec{F}$, т. е. просто некоторую функцию на Ω со значениями в $\vec{F}$. Если $\vec{F}=\mathbb{K}$, то мы получаем поле скаляров или скалярную функцию. Для $p=1$ это — поле линейных непрерывных отображений $\vec{E}$ в $\vec{F}$, т. е. отображение Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Если x

[1]) Стрелка над ω ставится потому, что $\vec{\omega}$ является некоторой формой со значениями в $\vec{F}$. Стрелка опускается, если $\vec{F}$ представляет собой поле скаляров. В этом частном случае ω является некоторой функцией на Ω со значениями в $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$, или некоторым полем p-ковекторов, определенных в Ω.