2°) Все, что было определено в этом параграфе, зависит, вообще говоря, не только от евклидовой структуры пространства $\vec{E}$, *но также и от его ориентации*. Если ориентацию $\vec{E}$ заменить на противоположную, то изменится знак фундаментальной N-формы, смешанного произведения N векторов, $(N-p)$-формы, соответствующей p векторам, векторного произведения $N-1$ векторов. Напротив, связь между векторами и формами (линейная биекция $\vec{E}$ на $\overleftarrow{E}'$, рассмотренная на стр. 190 т. I) зависит только от евклидовой структуры пространства и не зависит от его ориентации точно так же, как это было в случае скалярного произведения двух векторов! Часто говорят, что скалярное произведение двух векторов является полярной, или прямой, или четного рода величиной, в то время как смешанное произведение N векторов является аксиальной, или закрученной (sic!), или нечетного рода величиной.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E и $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство. *Дифференциальной формой степени p на Ω со значениями в $\vec{F}$* называется отображение $\vec{\omega}$[1]) множества Ω в пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ p-линейных антисимметричных непрерывных отображений из $\vec{E}$ в $\vec{F}$. Это отображение каждой точке x из Ω ставит в соответствие некоторый элемент $\vec{\omega}(x)$ пространства $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$, т. е. некоторый p-ковектор на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$. Можно также сказать, что дифференциальная форма степени p является *полем p-ковекторов на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$*, полем, определенным на Ω. При $p=0$ получаем поле векторов из $\vec{F}$, т. е. просто некоторую функцию на Ω со значениями в $\vec{F}$. Если $\vec{F}=\mathbb{K}$, то мы получаем поле скаляров или скалярную функцию. Для $p=1$ это — поле линейных непрерывных отображений $\vec{E}$ в $\vec{F}$, т. е. отображение Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Если x

---

[1]) Стрелка над ω ставится потому, что $\vec{\omega}$ является некоторой формой со значениями в $\vec{F}$. Стрелка опускается, если $\vec{F}$ представляет собой поле скаляров. В этом частном случае ω является некоторой функцией на Ω со значениями в $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$, или некоторым полем p-ковекторов, определенных в Ω.

является точкой множества Ω и $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — некоторые векторы из $\vec{E}$, то через $\vec{\omega}(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \in \vec{F}$ обозначается значение $\vec{\omega}(x) \in A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ на $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \in \vec{E}^p$. *Если пространство E имеет размерность N и если $p > N$, то дифференциальная форма степени p тождественно равна нулю.*

Часто для краткости дифференциальную форму степени p называют просто *формой степени p* или *p-формой*, что приводит к смешению p-форм, определенных в § 1, и дифференциальных форм, являющихся полями таких p-форм или отображениями множества Ω в пространство p-форм. Для того чтобы избежать этого смешения, *предпочтительнее, вообще говоря, для p-форм, встречающихся в § 1, использовать термин p-ковектор, а дифференциальными p-формами называть формы, рассматриваемые в этом параграфе.*

Говорят, что дифференциальная p-форма m раз дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^m, $m \geqslant 0$), если $\vec{\omega}$ является m раз дифференцируемой функцией (соответственно принадлежащей классу C^m) на Ω со значениями в нормированном векторном пространстве $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$.

Теорема 12. *Если пространство E имеет конечную размерность N и снабжено некоторой системой координат, а через (ξ_i) обозначена линейная форма «i-я координата», то каждая дифференциальная p-форма однозначно представляется в виде*

$$\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots j_p \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}), \quad \text{(VI, 3; 1)}$$

или

$$\overset{p}{\vec{\omega}}(x) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(x) (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}),$$

или

$$\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{J \in \mathfrak{P}_p(\{1, 2, \ldots, N\})} \vec{\omega}_J (\xi_J),$$

где $\vec{\omega}_J$ являются функциями на Ω со значениями в $\vec{F}$. Эта дифференциальная p-форма m раз дифференцируема (соответственно принадлежит классу C^m) тогда и только тогда, когда m раз дифференцируемы (соответственно принадлежат классу C^m) функции $\vec{\omega}_J$, определенные на Ω со значениями в $\vec{F}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно для каждой точки x записать, что $\vec{\omega}(x)$ является p-ковектором со значениями в $\vec{F}$, и применить затем формулы (VI, 1; 23) и (VI, 1; 36). Эти формулы и замечание, следующее за теоремой 5, показывают, что векторное пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p;\vec{F})$ может быть отождествлено с произведением $\binom{N}{p}$ векторных нормированных пространств, совпадающих с $\vec{F}$. Из теоремы 8_4 гл. III следует, что функция со значениями в произведении векторных нормированных пространств принадлежит классу C^m тогда и только тогда, когда каждая из ее составляющих принадлежит классу C^m. Это означает, что отображение $\vec{\omega}$ множества Ω в пространство $A\mathscr{L}^p(\vec{E}^p;\vec{F})$ принадлежит классу C^m тогда и только тогда, когда каждая из функций $\vec{\omega}_J$, определенных на Ω со значениями в $\vec{F}$, принадлежит классу C^m. Кроме того, согласно той же теореме гл. III, любая производная $\vec{\omega}$ имеет в качестве составляющих соответствующие производные функций $\vec{\omega}_J$. Другими словами, если $D^{\vec{p}}$ является символом дифференцирования порядка $\vec{p}$ (формула (III, 6; 26)), то имеет место следующая формула дифференцирования:

$$D^{\vec{p}}\vec{\omega}=\sum_J D^{\vec{p}}\vec{\omega}_J(\xi_J). \qquad \text{(VI, 3; 2)}$$

Для частных производных $\partial/\partial x_k$ относительно координат справедлива формула:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_k}=\sum_J \frac{\partial\vec{\omega}_J}{\partial x_k}(\xi_J). \qquad \text{(VI, 3; 3)}$$

Вместо (ξ_i) *и* (ξ_J) *по причинам, которые будут ясны позже, пишут* dx_i *и* dx_J. Это обозначение будет применяться систематически в дальнейшем. Однако следует понимать, что это может привести к некоторым недоразумениям. До настоящего момента символ dx_i обозначал i-ю координату вектора $\vec{dx}$ векторного пространства $\vec{E}$, а теперь dx_i обозначает *линейную форму на* $\vec{E}$, которая каждому вектору $\vec{X}$ из $\vec{E}$ ставит в соответствие его i-ю координату, так что имеет место формула

$$dx_i(\vec{X})=X_i. \qquad \text{(VI, 3; 4)}$$

Символ dx_i может также обозначать дифференциальную форму степени 1 на $\vec{E}$, значение которой в каждой точке x является линейной формой на $\vec{E}$, ставящей в соответствие каждому вектору из $\vec{E}$ его i-ю координату, так что имеет место соотношение

$$dx_i(x) \cdot \vec{X} = X_i. \tag{VI, 3; 5}$$

Смешение первого и двух последних смыслов символа dx_i в главе, относящейся к дифференциальным формам, может привести к грубым ошибкам. Смешение же второго и третьего смыслов не существенно — не более существенно, чем смешение 1, обозначающей число 1, и 1, обозначающей постоянную функцию, равную 1.

Теперь наиболее общее выражение дифференциальной p-формы $\vec{\omega}$ на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant N} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \\ \overset{p}{\vec{\omega}}(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant N} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},\end{gathered} \tag{VI, 3; 6}$$

что можно записать также в виде

$$\begin{gathered}\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{J \in \mathfrak{P}_p\{1, 2, \ldots, N\}} \vec{\omega}_J\, dx_J, \\ \overset{p}{\vec{\omega}}(x) = \sum_J \vec{\omega}_J(x)\, dx_J.\end{gathered} \tag{VI, 3; 7}$$

Примеры дифференциальных форм

1°) Дифференциальная форма степени 0 на вещественной прямой $\mathbb{R}$ — это функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\vec{F}$. Дифференциальная форма степени 1 записывается в виде $\vec{A}\,dx$, где $\vec{A}$ — некоторая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\vec{F}$, и для каждого вектора X из $\mathbb{R}$ имеет место формула

$$\vec{A}(x)\, dx \cdot \vec{X} = X\vec{A}(x)\,^{1)}. \tag{VI, 3; 8}$$

2°) Дифференциальная форма степени 0 в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ представляет собой некоторую функцию. Диффе-

---

[1]) Произведение вектора $\vec{A}(x) \in \vec{F}$ на вещественный скаляр X. Если $\vec{F} = \mathbb{R}$ — поле скаляров, то мы получаем просто $XA(x) \in \mathbb{R}$

ренциальная форма степени 1 записывается в виде

$$\vec{A}(x, y)\,dx + \vec{B}(x, y)\,dy, \quad \vec{A}(x, y) \in \vec{F}, \quad \vec{B}(x, y) \in \vec{F}. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 8_2)$$

Ее значение в точке (x, y) пространства $\mathbb{R}^2$, на векторе (X, Y) пространства $\mathbb{R}^2$, задается следующей формулой:

$$(\vec{A}(x, y)\,dx + \vec{B}(x, y)\,dy) \cdot (X, Y) = \vec{A}(x, y) X + \vec{B}(x, y) Y. \quad (\mathrm{VI}, 3; 9)$$

Дифференциальная форма степени 2 записывается в виде

$$\vec{A}(x, y)\,dx \wedge dy, \quad \vec{A}(x, y) \in \vec{F}, \qquad (\mathrm{VI}, 3; 10)$$

а ее значение в точке (x, y) пространства $\mathbb{R}^2$, на паре векторов (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) из $\mathbb{R}^2$, определяется формулой

$$\vec{A}(x, y)\,dx \wedge dy \cdot ((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = \vec{A}(x, y)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \qquad (\mathrm{VI}, 3; 11)$$

Естественно, что при этом имеет место соотношение антикоммутативности

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 12)$$

3°) В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ дифференциальная форма степени 0 есть некоторая функция. Дифференциальная форма степени 1 записывается так:

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx + \vec{B}(x, y, z)\,dy + \vec{C}(x, y, z)\,dz. \quad (\mathrm{VI}, 3; 13)$$

Ее значение в точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, на векторе $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, определяется по формуле

$$(\vec{A}(x, y, z)\,dx + \vec{B}(x, y, z)\,dy + \vec{C}(x, y, z)\,dz) \cdot (X, Y, Z) = \\ = \vec{A}(x, y, z) X + \vec{B}(x, y, z) Y + \vec{C}(x, y, z) Z. \quad (\mathrm{VI}, 3; 14)$$

Дифференциальная форма степени 2 записывается с помощью циклических перестановок так:

$$\vec{A}(x, y, z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x, y, z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x, y, z)\,dx \wedge dy\,^{1)}. \qquad (\mathrm{VI}, 3; 15)$$

---

[1]) Формула (VI, 3; 6) должна приводить к применению $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$ и $dy \wedge dz$. Здесь из соображений симметрии мы вместо $dx \wedge dz$ предпочитаем пользоваться выражением $dz \wedge dx$.

Ее значение в точке (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$, на системе двух векторов (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) из $\mathbb{R}^3$, определяется по формуле

$$[\vec{A}(x, y, z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x, y, z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x, y, z)\,dx \wedge dy] \cdot$$
$$\cdot ((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) = \vec{A}(x, y, z)(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) +$$
$$+ \vec{B}(x, y, z)(Z_1X_2 - Z_2X_1) + \vec{C}(x, y, z)(X_1Y_2 - X_2Y_1). \quad \text{(VI, 3; 16)}$$

Естественно, что справедливо правило антикоммутативности

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz. \quad \text{(VI, 3; 17)}$$

Наконец, дифференциальная форма степени 3 задается формулой

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz, \quad \vec{A}(x, y, z) \in \vec{F}. \quad \text{(VI, 3; 18)}$$

Ее значение в точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, на системе трех векторов (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) пространства $\mathbb{R}^3$, определяется формулой

$$\vec{A}(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz \cdot ((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)) =$$
$$= \vec{A}(x, y, z) \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(VI, 3; 19)}$$

Внешнее произведение дифференциальных форм

Дифференциальные формы степени p над открытым множеством Ω из E со значениями в $\vec{F}$ образуют векторное пространство. Как раз в смысле сложения элементов в этом векторном пространстве мы использовали символ $\sum$ в таких формулах, как (VI, 3; 6).

Если $\vec{\omega}$ и $\vec{\varpi}$ — две дифференциальные формы степени p над Ω и пространство E снабжено системой координат, относительно которой эти формы выражаются в виде $\sum\limits_J \vec{\omega}_J\,dx_J$ и

$\sum\limits_J \vec{\varpi}_J \, dx_J$, то имеют место очевидные формулы

$$\vec{\omega} + \vec{\varpi} = \sum_J (\vec{\omega}_J + \vec{\varpi}_J) \, dx_J, \quad k\vec{\omega} = \sum (k\vec{\omega}_J) \, dx_J, \qquad \text{(VI, 3; 20)}$$

где k — скаляр.

Кроме того, существует операция внешнего умножения дифференциальных форм. Рассматривая умножение, мы ограничимся случаями, уже изученными в § 1: речь будет идти или о скалярных дифференциальных формах ($\vec{F}$ является полем скаляров $\mathbb{K}$), или же если полем скаляров является $\mathbb{R}$, то $\vec{F}$ будет полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемым как двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, или же внешнее умножение будет применяться к дифференциальным формам, одна из которых принимает векторные значения, а все другие — скалярные.

Запишем несколько формул, предполагая для простоты, что все дифференциальные формы скалярны.

Пусть $\overset{p}{u}$ и $\overset{q}{v}$ — скалярные дифференциальные формы над Ω степени p и q соответственно. Определим их внешнее произведение $\overset{p}{u} \wedge \overset{q}{v}$ следующим образом.

Говорят, что значением этого произведения в точке x является $(p+q)$-ковектор, равный внешнему произведению p-ковектора $\overset{p}{u}(x)$ на q-ковектор $\overset{q}{v}(x)$:

$$(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x). \qquad \text{(VI, 3; 21)}$$

Теперь видно, что написанное ранее выражение $dx_{i_1} \wedge \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ является внешним произведением, где dx_i рассматриваются, согласно формуле (VI, 3; 5), как дифференциальные формы степени 1.

Отметим также, что в формуле (VI, 3; 6) такое выражение, как $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, можно интерпретировать как внешнее произведение $p+1$ форм: $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ — дифференциальной формы степени 0 и $dx_{i_1}, dx_{i_2}, \ldots, dx_{i_p}$ — скалярных дифференциальных форм степени 1. Таким образом, использование различных символов для обозначения суммы и произведения в формуле (VI, 3; 6) теперь полностью обосновано, тогда как до настоящего момента они применялись чисто формально. Однако значение символа d будет полностью разъяснено лишь позже (см. § 4). Естественно, что внешнее умножение дифференциальных форм является ассоциативной мультилинейной операцией, обладающей свойством антикоммутативности (теоремы 7, 8 и формула (VI, 1; 41)).

Примеры. В трехмерном векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеют место следующие формулы:

$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) = \\ = (BC' - CB')\,dy \wedge dz + (CA' - AC')\,dz \wedge dx + (AB' - BA')\,dx \wedge dy;$$

$$(A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) = \\ = (AA' + BB' + CC')\,dx \wedge dy \wedge dz; \qquad \text{(VI, 3; 22)}$$

$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) \wedge \\ \wedge (A''\,dx + B''\,dy + C''\,dz) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Дифференциальная форма, соответствующая производной функции

Пусть $\vec{f}$ — дифференцируемая функция на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Тогда $\vec{f}'(a)$ — то, что мы называли ее производной в точке a, — является элементом пространства $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Следовательно, производная является в терминологии § 1 линейной формой на $\vec{E}$ со значениями в $\vec{F}$, и, значит, производная функция $\vec{f}'$ определяет некоторую дифференциальную форму степени 1 на Ω со значениями в $\vec{F}$ или отображение Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ (именно в этом смысле мы всегда рассматривали производную функцию функции $\vec{f}$ [1])). Соответствующая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ определяется по формуле

$$\overset{1}{\vec{\omega}}(x) \cdot (\vec{X}) = \vec{f}'(x) \cdot \vec{X}. \qquad \text{(VI, 3; 23)}$$

Эту дифференциальную форму удобно обозначать через $d\vec{f}$. Если пространство $\vec{E}$ N-мерно и в нем введены система координат и координатные функции, то, согласно формуле (VI, 3; 6),

[1]) Напротив, производная порядка $p \geqslant 2$ функции $\vec{f}$ является отображением Ω в пространство p-линейных *симметричных* отображений $\vec{E}^p$ в $\vec{F}$, и следовательно, она не определяет дифференциальной формы.

дифференциал $d\vec{f}$ записывается в виде

$$d\vec{f} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} dx_i,$$

$$d\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x) dx_i, \qquad (\text{VI}, 3; 24)$$

$$d\vec{f}(x) \cdot \vec{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x) X_i.$$

Мы пришли, таким образом, к обозначениям формулы (III, 3; 18), объясняющим введенное обозначение $d\vec{f}$.

При таком обозначении выражение dx_i кажется полностью обоснованным. Если через x_i обозначить функцию, определенную на E, которая каждой точке E ставит в соответствие ее i-ю координату, то дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной функции, является дифференциальной формой dx_i, удовлетворяющей равенству (VI, 3; 5). Мы разовьем эти соображения в § 4. Естественно, что это побуждает нас вместо записи дифференциальной формы в виде формулы типа (VI, 3; 6) пользоваться, если это необходимо, формулой вида

$$\overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} df_{j_1} \wedge df_{j_2} \wedge \ldots \wedge df_{j_p}, \qquad (\text{VI}, 3; 25)$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — скалярные дифференцируемые функции на Ω, производные которых в каждой точке являются независимыми линейными формами на $\vec{E}$.

Теорема 13. *Если $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — скалярные дифференцируемые функции на Ω, то дифференциальная форма $df_1 \wedge \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p$ относительно некоторой системы координат в E может быть представлена в виде*

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p = \\ = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant N} \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p})} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}. \qquad (\text{VI}, 3; 26)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить формулу (VI, 1; 23), заменив в ней $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j}$ на

$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$ (формула (VI, 1; 35_2)). Согласно (VI, 1; 24), имеем

$$a_{j_1, j_2, \ldots, j_p} =$$
$$= (df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \ldots \wedge df_p(x))(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}) =$$
$$= \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} (df_i(x)\vec{e}_{j_k})\,^{1)} = \det_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_k}}(x)\right), \quad \text{(VI, 3; 27)}$$

откуда и вытекает необходимый результат.

Этот результат, впрочем, можно получить и непосредственно: следует заменить df_i на $\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} dx_l$ и образовать произведение, применяя правила антикоммутативности!

Примеры. Найдем выражение дифференциальной формы в полярных координатах r, θ, φ пространства $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим открытое множество Ω — дополнение к полуплоскости $y = 0$, $x \geqslant 0$. Возьмем $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Величины r, θ, φ можно рассматривать как *функции* класса C^∞ на Ω. Хорошо известны выражения их дифференциалов dr, $d\theta$, $d\varphi$ как функций dx, dy, dz, и обратно. Например,

$$\begin{aligned}
dx &= dr \sin\theta \cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi, \\
dy &= dr \sin\theta \sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi, \\
dz &= dr \cos\theta \qquad\qquad\quad - r\sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \quad \text{(VI, 3; 28)}$$

Теперь можно записать формулу

$$dx \wedge dy \wedge dz = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi. \quad \text{(VI, 3; 29)}$$

В этой формуле $dx \wedge dy \wedge dz$ является фундаментальной дифференциальной 3-формой.

В правой части равенства (VI, 3; 29) стоит выражение, в котором r, θ, φ рассматриваются как функции x, y, z и в котором dr, $d\theta$, $d\varphi$ являются дифференциальными формами степени 1, определенными через производные функций r, θ, φ по x, y, z. Конечно, необходимо следить за порядком, в котором записываются множители, поскольку, например, $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$ равно $-d\theta \wedge dr \wedge d\varphi$.

Отметим, что вычисления, связанные с дифференциальными формами, чрезвычайно просты: они производятся автоматически

---

1) Здесь использована формула (VI, 1; 29) для внешнего умножения форм.

с учетом мультилинейности, ассоциативности и антикоммутативности внешнего умножения.

Прообраз дифференциальной формы при отображении

Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства E, Ω_0 — открытое множество аффинного нормированного пространства E_0 и H — дифференцируемое отображение Ω_0 в Ω. Для каждой функции f, определенной на Ω и принимающей значения в некотором множестве, можно определить прообраз при отображении H: $H^*f = f \circ H$, являющийся некоторой функцией на Ω_0 со значениями в этом множестве [1]. Более общо, для каждой дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени p на Ω со значениями в $\vec{F}$ мы определим прообраз $H^*\vec{\omega}$ как некоторую дифференциальную форму степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$. Эта форма будет полностью определена своими значениями в каждой точке x множества Ω_0 на системе векторов $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ пространства $\vec{E}_0$. Это значение по определению равно значению $\vec{\omega}$ в точке $H(x)$ на системе образов $\vec{X}_i$ при производном отображении $H'(x)$:

$$(H^*\vec{\omega})(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \\ = \vec{\omega}(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1, H'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_p). \quad \text{(VI, 3; 30)}$$

Убедимся, что таким образом мы действительно определили $H^*\vec{\omega}$ как некоторую дифференциальную форму степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$. С этой целью зафиксируем x. Если $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — векторы пространства $\vec{E}_0$, то правая часть имеет смысл, и тем самым определено $(H^*\vec{\omega})(x)$ как некоторая функция на $\vec{E}_0^p$. Эта функция, очевидно, является p-линейной антисимметричной, поскольку $\vec{\omega}(H(x))$ есть p-линейная антисимметричная функция на $\vec{E}^p$ и $H'(x)$ — линейное отображение $\vec{E}_0$ в $\vec{E}$.

Таким образом, $(H^*\vec{\omega})(x)$ определяется как p-ковектор на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$, и, следовательно, $H^*\vec{\omega}$: $x \to (H^*\vec{\omega})(x)$ опре-

[1]) В этом случае H может быть произвольным отображением. Однако, для того чтобы иметь возможность вычислить прообраз дифференциальной формы степени > 0, отображение H надо считать дифференцируемым.

делена полностью как дифференциальная форма степени p на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$.

При $p=0$ эта формула сводится к равенству

$$H^*f(x)=f(H(x)), \qquad (VI, 3; 31)$$

и мы снова получаем прообраз функции. Впрочем, понятие прообраза дифференциальной формы может быть всегда сведено к понятию прообраза некоторой функции. В самом деле, отображение H множества Ω_0 в Ω определяет также некоторое отображение $\tilde{H}$ множества $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ в множество $\Omega \times \vec{E}^p$:

$$(x, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \to (H(x),\ H'(x)\cdot\vec{X}_1,\ H'(x)\cdot\vec{X}_2,\ \ldots,\ H'(x)\cdot\vec{X}_p). \qquad (VI, 3; 32)$$

Если дифференциальной форме $\vec{\omega}$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ поставить в соответствие функцию $\vec{\tilde{\omega}}$, определенную на $\Omega\times\vec{E}^p$ со значениями в $\vec{F}$ по формуле

$$\vec{\tilde{\omega}}(y, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p)=\vec{\omega}(y)\cdot(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p), \qquad (VI, 3; 33)$$

а ее прообразу — дифференциальной форме $H^*\vec{\omega}$, определенной на Ω_0 со значениями в $\vec{F}$, поставить в соответствие аналогичную функцию $(H^*\vec{\omega})^\sim$, определенную на $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ со значениями $\vec{F}$, то $(H^*\vec{\omega})^\sim$ будет представлять собой прообраз функции $\vec{\tilde{\omega}}$ при отображении $\tilde{H}$: $(H^*\vec{\omega})^\sim=\tilde{H}(\vec{\tilde{\omega}})$.

Замечание. Если H является C^1-диффеоморфизмом Ω_0 на Ω, то можно также определить *прямой образ* при отображении H дифференциальной формы $\vec{\omega}_0$, определенной на Ω_0. Это будет дифференциальная форма на Ω, определенная соотношением

$$H\vec{\omega}_0=(H^{-1})^*\vec{\omega}_0. \qquad (VI, 3; 33_2)$$

Далее, если $x\in\Omega_0$ и $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ — векторы из $\vec{E}_0$, то

$$H\vec{\omega}_0(H(x_0))\cdot(H'(x_0)\cdot\vec{X}_1,\ H'(x_0)\cdot\vec{X}_2,\ \ldots,\ H'(x_0)\cdot\vec{X}_p)=$$
$$=\vec{\omega}_0(x_0)\cdot(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \qquad (VI, 3; 33_3)$$

Теорема 14. *Отображение H^*: $\vec{\omega}\to H^*\vec{\omega}$ является линейной операцией (т. е. сохраняет сложение дифференциальных* *форм и умножение их на скаляры). Кроме того, оно сохраняет внешнее произведение дифференциальных форм, т. е.*

$$H^*(u \wedge v) = H^*u \wedge H^*v. \qquad \text{(VI, 3; 34)}$$

Кроме того, если f — дифференцируемая функция на Ω, а через df обозначена дифференциальная форма степени 1, определенная ее производной, то H коммутирует с дифференциалом, т. е.

$$H^* df = dH^*f. \qquad \text{(VI, 3; 35)}$$

Наконец, если H является отображением класса C^1 множества Ω_1 в Ω_2, K — отображением класса C^1 множества Ω_2 в Ω_3 и $\vec{\omega}$ представляет собой дифференциальную форму на Ω_3, то имеет место соотношение

$$(K \circ H)^* \vec{\omega} = H^*(K^* \vec{\omega}). \qquad \text{(VI, 3; 35}_2\text{)}$$

Доказательство. Линейность отображения H^* очевидна. Покажем, что отображение H^* сохраняет внешнее умножение. Для простоты мы ограничимся обозначениями и понятиями для случая форм со скалярными значениями. Если u (соответственно v) имеет степень p (соответственно q), то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&(H^*(u \wedge v)(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) = \\
&= (u \wedge v)(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1, H'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{p+q}) = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \left[u(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_1}, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_p}) \times \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times\, v(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_{\sigma_{p+q}})\right] = \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \left[(H^*u)(x) \cdot (\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}) \times \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times\, (H^*v)(x) \cdot (\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \vec{X}_{\sigma_{p+2}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}})\right] = \\
&= (H^*u \wedge H^*v)(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}), \qquad \text{(VI, 3; 36)}
\end{aligned}$$

чем и доказывается требуемое утверждение.

Формула (VI, 3; 35) является результатом следующих вычислений:

$$\begin{aligned}
&(H^* df)(x) \cdot \vec{X} = df(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}) = f'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X})\,^{1)} = \\
&= (f'(H(x)) \circ H'(x)) \cdot \vec{X} = (f \circ H)'(x) \cdot \vec{X}\,^{2)} = (dH^*f)(x) \cdot \vec{X}. \quad \text{(VI, 3; 37)}
\end{aligned}$$

[1]) По определению дифференциальной формы df степени 1 (формула (VI, 3; 23)).

[2]) Согласно теореме о сложной функции (теорема 11 гл. III).

Наконец, чтобы доказать равенство (VI, 3; 35_2), заметим, что для $x \in \Omega_1$ и p векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ из $\vec{E}_1$ имеют место такие соотношения:

$$((K \circ H)^* \vec{\omega})(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \vec{\omega}((K \circ H)(x)) \cdot$$
$$\cdot ((K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_1, \quad (K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, (K \circ H)'(x) \cdot \vec{X}_p) =$$
$$= \vec{\omega}(K(H(x))) \cdot (K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1), \; K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_2), \ldots$$
$$\ldots, K'(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_p)) =$$
$$= (K^* \vec{\omega})(H(x)) \cdot (H'(x) \cdot \vec{X}_1, H'(x) \cdot \vec{X}_2, \ldots, H'(x) \cdot \vec{X}_p) =$$
$$= (H^*(K^* \vec{\omega}))(x) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p). \quad \text{(VI, 3; } 37_2)$$

Следствие 1. *Если дифференциальная форма* $\vec{\omega}$ *выражается в виде* (VI, 3; 25), *где* f_i — *скалярные дифференцируемые функции, то ее прообраз представляется в виде*

$$H^* \left(\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_p} \right) =$$
$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} (H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}) d(H^* f_{i_1}) \wedge d(H^* f_{i_2}) \wedge \ldots \wedge (dH^* f_{i_p}),$$
$$\text{(VI, 3; 38)}$$

где $H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ *и* $H^* f_i$ — *прообразы функций* $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ *и* f_i, *т. е. функций* $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \circ H$ *и* $f_i \circ H$.

Следствие 2. *Пусть* H — *отображение открытого множества пространства* $\mathbb{R}^n$ *в пространство* $\mathbb{R}^m$, *определяемое формулами*

$$y = H(x),$$

или

$$y_i = H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad \text{(VI, 3; 39)}$$

Тогда прообраз дифференциальной формы

$$\vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(y) \, dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}$$

при отображении H *определяется формулой*

$$H^* \vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(H(x)) \, dH_{i_1} \wedge dH_{i_2} \wedge \ldots \wedge dH_{i_p} =$$
$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \ldots < i_p \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_p}} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x) \frac{D(H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p})}{D(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p})} dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \ldots \wedge dx_{k_p}.$$
$$\text{(VI, 3; 40)}$$

Доказательство. В силу следствия 1 этот прообраз представим в виде (VI, 3; 38). Но здесь $f_j = y_j$, и поэтому $H^* f_j = H^*(y_j) = H_j$. Переход от 2-й формулы к 3-й производится с помощью (VI, 3; 26).

Из всех этих замечаний вытекает следующее правило вычисления прообраза дифференциальной формы:

Правило. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма на открытом множестве Ω пространства E, выраженная как функция координат y_i и их дифференциалов dy_i. Для вычисления ее прообраза следует, согласно (VI, 3; 39), заменить y_i на выражения H_i, считая последние функциями от x, а dy_i — на дифференциалы dH_i этих выражений. Затем нужно воспользоваться правилами ассоциативности и антикоммутативности внешних произведений. Это правило означает, что операция перехода к прообразам дифференциальных форм проста и носит автоматический характер.

Замечания. 1°) Часто, допуская вольность речи, как это делалось в теории замены переменных (стр. 240 т. I), говорят, что $H^*\vec{\omega}$ является той же дифференциальной формой, что и $\vec{\omega}$ (sic!), но выраженной через переменные x_j вместо переменных y_i. Вместо «прообраза дифференциальной формы» часто говорят «преобразование дифференциальной формы путем замены переменных $y = H(x)$».

2°) Когда мы записываем, например, в полярных координатах, что имеет место формула (VI, 3; 29), то ее можно понимать теперь в двух смыслах:

a) или же в этой формуле, как мы уже говорили, r, θ и φ рассматриваются как функции на $\mathbb{R}^3$, а dr, $d\theta$, $d\varphi$ — как их дифференциалы;

b) или же $dx \wedge dy \wedge dz$ имеет в качестве *прообраза* $r^2 \sin\theta \, dr \wedge \wedge d\theta \wedge d\varphi$ при отображении P пространства $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, определенном формулами

$$P(r, \theta, \varphi) = (x, y, z) = (r \sin\theta \cos\varphi, \ r \sin\theta \ \sin\varphi, \ r \cos\theta).$$

Допущенная вольность речи, о которой говорилось в замечании 1°), отождествляет оба эти смысла и тем оправдывает себя.

Теорема 14_2. *Если отображение H принадлежит классу C^m, а форма $\vec{\omega}$ — классу C^q, то $H^*\vec{\omega}$ принадлежит классу $C^{\min(m-1, q)}$*

(*кроме случая степени* 0, *когда* $H^*\vec{\omega}$ *принадлежит классу* $C^{\min(m,q)}$).

Доказательство. Случай степени 0 сводится к теореме 19 гл. III (теорема о сложных функциях). Для других степеней, используя то, что говорилось относительно формулы (VI, 3; 33), заметим, что отображение $\tilde{H}$ множества $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ в $\Omega \times \vec{E}^p$, определенное формулой (VI, 3; 32), в силу наличия производной H' в этой формуле, принадлежит только классу C^{m-1}. Теперь достаточно к функциям $\vec{\omega}$ и $\tilde{H}\vec{\omega}$ снова применить теорему 19 гл. III.

Отметим, в частности, что *если H принадлежит классу C^1 и форма $\vec{\omega}$ непрерывна, то форма $H^*\vec{\omega}$ также непрерывна. Если H принадлежит классу C^2 и $\vec{\omega}$ принадлежит классу C^1, то $H^*\vec{\omega}$ принадлежит классу C^1.*

Дифференциальные формы на абстрактных многообразиях

Пусть V — многообразие, принадлежащее *по крайней мере классу* C^1, размерности n, содержащееся в аффинном пространстве E размерности N, или даже абстрактное. Тогда на нем можно определить понятие дифференциальной формы. В самом деле, понятие касательного вектора к такому многообразию нам уже известно. Ограничиваясь, например, случаем многообразия из E, можно также определить p-ковектор в точке $x \in V$ со значениями в $\vec{F}$ как некоторое p-линейное антисимметричное отображение пространства $(\vec{T}(x; V))^p$ в $\vec{F}$, где $\vec{T}(x; V)$ — векторное пространство, касательное к многообразию V в точке x. Точно таким же способом можно теперь определить дифференциальную форму $\vec{\omega}$ степени p на V со значениями в векторном нормированном пространстве $\vec{F}$ как поле p-ковекторов на V со значениями в $\vec{F}$, т. е. как отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in V$ некоторый p-ковектор $\vec{\omega}(x)$ в точке $x \in V$ со значениями в $\vec{F}$.

Нетрудно определить сумму и внешнее произведение дифференциальных форм, а также обобщить бо́льшую часть рассмотренных ранее свойств. В дальнейшем мы будем часто говорить о дифференциальных формах на многообразии V, не уточняя его характера. Можно ограничиться многообразием V, лежащим в аффинном пространстве E, и формами, определенными в окрестности Ω многообразия V в E.

Дифференциальные формы и поля в ориентированном евклидовом N-мерном пространстве

1°) Рассмотрим в евклидовом пространстве E вещественную дифференциальную форму степени 1. Эта форма является полем ковекторов. На стр. 190 т. I мы видели, что можно установить взаимно однозначное соответствие между ковекторами и элементами из $\vec{E}$. Следовательно, дифференциальной форме степени 1 можно поставить в соответствие некоторое векторное поле. Если в некоторой ортонормированной системе координат дифференциальная форма будет определена формулой $\sum\limits_i A_i\,dx_i$, то векторное поле будет определяться соотношением $x \to (A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x))$. *Это соответствие зависит только от евклидовой структуры пространства E и не зависит от его ориентации.*

2°) Если же пространство E ориентировано, то между N-ковекторами и скалярами можно установить взаимно однозначное соответствие (теорема 11). Следовательно, можно установить взаимно однозначное соответствие между скалярными дифференциальными формами степени N и полями скаляров, т. е. скалярными функциями. Относительно положительно ориентированной ортонормированной системы координат дифференциальная форма $f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N$ соответствует функции f.

3°) Наконец, можно установить взаимно однозначное соответствие между $(N-1)$-ковекторами и векторами из E (формула (VI, 2; 11_3)), а следовательно, взаимно однозначное соответствие между вещественными дифференциальными формами степени $N-1$ и векторными полями. Относительно положительной ортонормированной системы координат дифференциальной форме

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N \qquad \text{(VI, 3; 41)}$$

отвечает векторное поле

$$x \to \left((-1)^{N-1}\omega_1(x),\ (-1)^{N-2}\omega_2(x),\ \ldots,\ (-1)^{N-j}\omega_j(x),\ \ldots,\ \omega_N(x)\right). \qquad \text{(VI, 3; 42)}$$

В частном случае трехмерного пространства дифференциальной форме $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$ соответствует векторное поле с составляющими A, B, C.

Соответствия 2°) и 3°) зависят не от задания евклидовой структуры пространства и его ориентации, а от задания на $\vec{E}$ некоторого фундаментального N-ковектора $\overset{N}{\xi} \neq 0$ (мера объемов и ориентация). Предыдущие формулы тогда имеют место для любого такого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$, что $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) = 1$. Если взять *произвольный* базис, то будет иметь место равенство $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) = \Delta$, или $\overset{N}{\xi} = \Delta\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N$, а поле (VI, 3; 42) ассоциируется с дифференциальной формой

$$\Delta \sum_{j=1}^{N} \omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N. \qquad \text{(VI, 3; 42}_2\text{)}$$

Обозначая символом $\sim$ [1]) установленные выше соответствия между дифференциальными формами и полями, получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\overset{1}{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i\, dx_i \sim \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_N), \\
f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N \sim f, \\
\overset{N-1}{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (\omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N) \sim \\
\sim \vec{A}\left((-1)^{N-1} \omega_1, (-1)^{N-2} \omega_2, \ldots, (-1)^{N-j} \omega_j, \ldots, \omega_N\right).
\end{gathered} \qquad \text{(VI, 3; 43)}$$

З а м е ч а н и я. 1°) *Установленное соответствие сохраняется при умножении на скалярную функцию.* Например, если $\overset{1}{\omega} \sim \vec{A}$ и g — вещественная функция на $\Omega \subset E$, то $g\overset{1}{\omega} \sim g\vec{A}$.

2°) В некоторых случаях оказывается полезным изучать это соответствие, выбирая для каждой точки из $\vec{E}$ базис, меняющийся вместе с этой точкой. Это как раз то, что мы делали в случае полярных координат на стр. 119.

3°) *В какой-то мере эти соответствия носят как «акробатический», так и «архаический» характер.* Они *часто* приносят большую пользу, *но меньшую, чем это принято думать*, ибо являются наследием того времени, когда теории дифференциальных форм еще не существовало.

---

[1]) Обозначение $\sim$ не удобно, но, пренебрегая этим, мы используем его, что чревато опасностями. Если $N = 2$, то $1 = N - 1$, а потому 1-я и 3-я формулы в этом случае одной форме степени 1 ставят в соответствие ортогональные векторные поля. Было бы нецелесообразным обозначать оба соответствия одним способом.