§ 4. КОГРАНИЦА ИЛИ ВНЕШНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВНЕШНЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть Ω — открытое множество N-мерного аффинного пространства E и $\vec{\omega}$ — дифференцируемая дифференциальная форма степени p, определенная на Ω со значениями в $\vec{F}$. Если в E выбрана некоторая система координат $\mathcal{R}$, то эта форма может быть выражена с помощью формулы (VI, 3; 7).

Будем называть *дифференциалом* или *кограницей дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *относительно системы координат* $\mathcal{R}$ дифференциальную форму степени $p+1$, определенную на Ω со значениями в $\vec{F}$ соотношением

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{J,\,\alpha} \frac{\partial \vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_J = \sum_J d\vec{\omega}_J \wedge dx_J,$$

или (VI, 4; 1)

$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_\alpha dx_\alpha \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_\alpha}.$$

Напомним, что в этой формуле $\vec{\omega}_J$ есть функция, определенная на Ω со значениями в $\vec{F}$, и, следовательно, $d\vec{\omega}_J$ имеет смысл как дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной этой функции. При таких условиях $d\vec{\omega}_J \wedge \wedge dx_J$ является внешним произведением формы степени 1 и формы степени p и, значит, является формой степени $p+1$.

Заметим, что формула (VI, 4; 1) включает $dx_\alpha \wedge dx_J$, а не противоположное ему выражение $dx_J \wedge dx_\alpha$. Здесь необходимо раз и навсегда выбрать одну из двух равноправных возможностей, а именно ту, которая чаще будет встречаться в дальнейшем.

Полученное таким способом выражение не является каноническим представлением (VI, 3; 7) относительно формы $d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$ степени $p+1$, поскольку дифференциалы координат расположены не в обычном порядке, но такая перестановка легко выполняется.

Приведем несколько примеров.

Прежде всего, если речь идет о дифференциальной форме степени 0, т. е. о функции $\vec{f}$, то $d_{\mathcal{R}}\vec{f}$ является не чем иным, как дифференциалом этой функции $d\vec{f}$.

Рассмотрим теперь дифференциальную форму степени 1 на открытом множестве из $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy + \vec{C}\,dz) = d\vec{A} \wedge dx + d\vec{B} \wedge dy + d\vec{C} \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz\right) \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{C}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{C}}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\right)dx \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial y} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} - \frac{\partial\vec{C}}{\partial x}\right)dz \wedge dx. \qquad \text{(VI, 4; 2)}$$

Если взять дифференциальную форму степени 2, то мы получим

$$d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dy \wedge dz + \vec{B}\,dz \wedge dx + \vec{C}\,dx \wedge dy) =$$

$$= \overrightarrow{dA} \wedge dy \wedge dz + \overrightarrow{dB} \wedge dz \wedge dx + \overrightarrow{dC} \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{C}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{C}}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{C}}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz. \qquad \text{(VI, 4; 3)}$$

Разумеется, что кограница формы степени N на Ω, будучи формой степени $N+1$, тождественно равна нулю.

Теорема 15. *Операция $d_{\mathcal{R}}$, определенная формулой* (VI, 4; 1), *обладает следующими четырьмя свойствами:*

1°) *Если $\vec{f}$ — дифференцируемая функция на Ω, рассматриваемая как дифференциальная форма степени 0, то $\overrightarrow{df}$ — дифференциальная форма степени 1, соответствующая производной функции $\vec{f}$ по формуле* (VI, 3; 23).

2°) *Операция $d_{\mathcal{R}}$ линейна:*

$$\left.\begin{aligned} d_{\mathcal{R}}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) &= d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_1 + d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_2, \\ d_{\mathcal{R}}(k\vec{\omega}) &= k\,d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 4; 4)}$$

где k — скаляр.

3°) *Если* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ — *дифференцируемые дифференциальные формы степени соответственно p и q на* Ω *со значениями соответственно в векторных нормированных пространствах* $\vec{F}$ *и* $\vec{G}$ *и если, кроме того,* $\vec{B}$ *является непрерывным билинейным отображением* $\vec{F}\times\vec{G}$ *в векторное нормированное пространство* $\vec{H}$, *то для кограницы произведения имеет место следующая формула:*

$$d_{\mathscr{R}}(\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v}) = d_{\mathscr{R}}\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v} + (-1)^p \overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} d_{\mathscr{R}}\vec{v}. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 5)$$

В частности, если u и v — скалярные дифференциальные формы, то

$$d_{\mathscr{R}}(\overset{p}{u} \wedge v) = d_{\mathscr{R}}\overset{p}{u} \wedge v + (-1)^p \overset{p}{u} \wedge d_{\mathscr{R}} v\,^{1)}. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 6)$$

4°) *Если* $\vec{\omega}$ — *дважды дифференцируемая дифференциальная форма на* Ω, *то*

$$d_{\mathscr{R}} d_{\mathscr{R}} \vec{\omega} = \vec{0}. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 7)$$

Доказательство. Свойства 1°) и 2°) очевидны. Прежде чем доказывать свойство 3°), заметим, что *формула определения* (VI, 4; 1) сохраняет смысл, если считать, что J не обязательно является возрастающей последовательностью элементов $j_1, j_2, \ldots, j_p$ множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. В самом деле, если в этом случае мы через $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$ обозначим последовательность тех же элементов, но расположенных в порядке возрастания, а через σ обозначим сигнатуру перестановки множества элементов $j_1, j_2, \ldots, j_p$, переводящей их в $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$, то получим, что

$$\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p} =$$
$$= \varepsilon_\sigma \vec{\omega}_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_p} dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j'_p}. \qquad (\mathrm{VI}, 4; 8)$$

Непосредственное применение формулы (VI, 4; 1) приводит к такому соотношению:

$$d_{\mathscr{R}}\vec{\omega} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_p \\ \alpha}} \frac{\varepsilon_\sigma \partial \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j'_p}, \qquad (\mathrm{VI}, 4; 9)$$

[1]) Легко запомнить знак $(-1)^p$, если заметить, что он появляется после того, как $d_{\mathscr{R}}$ «перепрыгивает» через форму $\overset{p}{u}$ степени p.

которое можно записать в виде

$$d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}=\sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_p\\ \alpha}} \frac{\partial \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}; \tag{VI, 4; 10}$$

тем самым наше утверждение доказано.

Докажем теперь утверждение 3°). Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — дифференцируемые дифференциальные формы на Ω степени p и q соответственно, представленные в виде

$$\vec{u}=\sum_J \vec{u}_J\, dx_J, \quad \vec{v}=\sum_K \vec{v}_K\, dx_K. \tag{VI, 4; 11}$$

Тогда форма $\vec{u}\wedge_{(B)}\vec{v}$ (степени $p+q$) запишется в виде

$$\vec{u}\wedge_{(B)}\vec{v}=\sum_{J, K} B(\vec{u}_J, \vec{v}_K)\, dx_J \wedge dx_K. \tag{VI, 4; 12}$$

В силу сделанного выше замечания результат применения операции $d_{\mathscr{R}}$ к этому произведению вычисляется без труда даже тогда, когда в произведении $dx_J \wedge dx_K$ последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_p, k_1, k_2, \ldots, k_q$ из $J \cup K$ не расположена в порядке возрастания. В любом случае имеет место формула

$$d_{\mathscr{R}}(\vec{u}\wedge_{(B)}\vec{v})=\sum_{J, K, \alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \vec{B}(\vec{u}_J, \vec{v}_K)\, dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K. \tag{VI, 4; 13}$$

С помощью формулы дифференцирования билинейной непрерывной функции (теорема 12 гл. III) последнюю формулу можно записать так:

$$\sum_{J, K, \alpha} \vec{B}\left(\frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha}, \vec{v}_K\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K + \\ + \sum_{J, K, \alpha} \vec{B}\left(\vec{u}_J, \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial x_\alpha}\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K = \\ = \left(\sum_{J, \alpha} \frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dx_J\right) \wedge_{(B)} \sum_K \vec{v}_K\, dx_K + \\ + (-1)^p \left(\sum_J \vec{u}_J\, dx_J\right) \wedge_{(B)} \left(\sum_{K, \alpha} \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dx_K\right)^{1)} = \\ = d_{\mathscr{R}}\vec{u}\wedge_{(B)}\vec{v}+(-1)^p\,\vec{u}\wedge_{(B)} d_{\mathscr{R}}\vec{v}, \tag{VI, 4; 14}$$

и утверждение 3°) доказано.

---

[1]) Знак $(-1)^p$ появляется вследствие того, что $dx_J \wedge dx_\alpha = (-1)^p\, dx_\alpha \wedge dx_J$ (формула антикоммутативности (VI, 1; 41)).

Докажем теперь утверждение 4°). Пусть $\vec{\omega}$ — дважды дифференцируемая дифференциальная форма степени p на Ω. Тогда последовательно получаем такие формулы:

$$
\begin{gathered}
d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}=\sum_{J,\,\alpha}\frac{\partial\vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha}\,dx_\alpha\wedge dx_J,\\
d_{\mathscr{R}}(d_{\mathscr{R}}\vec{\omega})=\sum_{J,\,\alpha,\,\beta}\frac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\beta\,\partial x_\alpha}\,dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J.
\end{gathered}
\qquad \text{(VI, 4; 15)}
$$

В этой сумме сохраняются только системы α, β, J, в которых $\alpha\neq\beta$ и в которых ни один из двух элементов α, β не принадлежат J, так как в противном случае $dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J=0$. Если для одной и той же системы α, β при $\alpha<\beta$ мы сгруппируем члены с $dx_\alpha\wedge dx_\beta\wedge dx_J$ и $dx_\beta\wedge dx_\alpha\wedge dx_J$, то в силу свойства симметрии частных производных $\dfrac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\dfrac{\partial^2\vec{\omega}_J}{\partial x_\beta\,\partial x_\alpha}$ (теорема 16 гл. III) получим выражение, равное нулю. Этим и заканчивается доказательство теоремы[1]).

Следствие 1. *Если u, v, w — скалярные дифференциальные формы степени p, q и r соответственно, то*

$$
\begin{aligned}
d_{\mathscr{R}}(u\wedge v\wedge w)=d_{\mathscr{R}}u\wedge v\wedge w+(-1)^p\,u\wedge d_{\mathscr{R}}v\wedge w+{}\\
+(-1)^{p+q}\,u\wedge v\wedge d_{\mathscr{R}}w.
\end{aligned}
\qquad \text{(VI, 4; 16)}
$$

Мы получим эту формулу, если положим $u\wedge v\wedge w=(u\wedge v)\wedge w$ и дважды применим третье утверждение теоремы.

Следствие 2. *Если $\vec{\omega}$ является дифференцируемой формой на Ω и выражается в виде* (VI, 3; 25), *где $\vec{\omega}_{i_1,\,i_2,\,\dots,\,i_p}$ — дифференцируемые функции, а f_i — скалярные дважды дифференцируемые функции, то справедливо соотношение*

$$
d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}=\sum_{i_1<i_2<\dots<i_p}d\vec{\omega}_{i_1,\,i_2,\,\dots,\,i_p}\wedge df_{i_1}\wedge df_{i_2}\wedge\dots\wedge df_{i_p}.
\qquad \text{(VI, 4; 17)}
$$

---

[1]) Более тонкими методами можно доказать, что $d_{\mathscr{R}}d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}=\vec{0}$ даже в том случае, когда $\vec{\omega}$ не является дважды дифференцируемой формой, лишь бы только обе формы $\vec{\omega}$ и $d_{\mathscr{R}}\vec{\omega}$ принадлежали классу C^1.

Доказательство. В самом деле, согласно свойствам 1°) — 3°) имеем

$$d_{\mathscr{R}}\vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \Big[d\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p} \wedge df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots df_{i_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p} df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_{k-1}} \wedge d_{\mathscr{R}}\, df_{i_k} \wedge \\ \wedge df_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge df_{i_p} \Big]. \quad (\text{VI}, 4; 17_2)$$

Результат теперь следует из того факта, что, согласно свойству 4°), $d_{\mathscr{R}}\, df_{i_k} = d_{\mathscr{R}} d_{\mathscr{R}} f_{i_k} = 0$.

Теорема 16 (обратная к теореме 15). *Операция $d_{\mathscr{R}}$, которая каждой дифференцируемой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на Ω со значениями в нормированном векторном пространстве $\vec{F}$, ставит в соответствие дифференциальную форму степени $p+1$, является единственной операцией, обладающей свойствами* 1°) — 4°) *теоремы* 15.

Доказательство. В самом деле, пусть ∂ — произвольная операция, обладающая этими свойствами. Если $\vec{\omega}$ является дифференциальной формой, записанной в виде (VI, 3; 6) относительно некоторой системы координат $\mathscr{R}$, то в силу ее линейности (свойство 2°)) имеем

$$\partial\vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \partial \left[\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right]. \quad (\text{VI}, 4; 18)$$

С другой стороны, согласно формуле, относящейся к произведению (свойство 3°)), это выражение можно записать так:

$$\partial\vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \Big[\partial\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge \partial\, dx_{i_k} \wedge \\ \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \Big]. \quad (\text{VI}, 4; 19)$$

В силу свойства 1°) выражения $\partial\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ являются дифференциальными формами $d\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ степени 1, соответствующими производным функций $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$. Точно так же

$dx_k = \partial x_k$. Наконец, согласно свойству 4°), $\partial\, dx_k = \partial\, \partial x_k$ равны нулю. Отсюда следует, что $\partial\vec{\omega} = d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$. Теорема доказана.

Следствие. *Операция $d_{\mathcal{R}}$, определенная с помощью некоторой системы координат $\mathcal{R}$, не зависит от этой системы координат. Это некоторая операция d, которая каждой дифференцируемой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$, ставит в соответствие некоторую дифференциальную форму степени $p+1$, определенную на Ω со значениями в $\vec{F}$ и обладающую свойствами* 1°) — 4°) *теоремы* 15.

Доказательство. Выберем две системы координат $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ в E. Каждая из операций $d_{\mathcal{R}}$ и $d_{\mathcal{R}'}$ обладает свойствами 1°) — 4°) теоремы 15. Однако, согласно теореме 16, существует только одна операция, обладающая этими свойствами. Поэтому $d_{\mathcal{R}} = d_{\mathcal{R}'}$.

Операция d называется внешним дифференцированием или операцией взятия кограницы дифференциальных форм. Форма, кограница которой равна нулю, называется замкнутой дифференциальной формой[1]*, или коциклом.*

Теорема 17. *Пусть Ω_0 — открытое множество из E_0, Ω — открытое множество из E и H — дважды дифференцируемое отображение Ω_0 в Ω. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференцируемая дифференциальная форма на Ω. Тогда имеет место формула коммутирования прообраза H^* и кограницы d:*

$$dH^*\vec{\omega} = H^*d\vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 4; 20)}$$

Доказательство. Если $\vec{\omega}$ — форма степени 0, то написанная формула совпадает с формулой (VI, 3; 35). В этом случае она остается справедливой, даже если отображение H дифференцируемо только один раз.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ является произвольной дифференцируемой дифференциальной формой степени p. Эта форма всегда может быть записана в виде суммы (VI, 3; 25), где f_j — дважды дифференцируемые скалярные функции, а $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ — дифференцируемые функции со значениями в $\vec{F}$. Достаточно взять, например, в качестве f_j координатные функции x_j относительно

[1]) Если множество Ω связно, то форма степени 0 замкнута тогда и только тогда, когда она является постоянной функцией (теорема 22 гл. III). Дифференциальная форма степени N, равной размерности пространства E, всегда замкнута.

некоторой системы координат в E. При этом имеет место формула (VI, 3; 38). Отсюда получаем, что

$$d H^* \vec{\omega} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \Big[d H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \wedge d H^* f_{i_1} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{i_p} + \\ + \sum_{k=1}^{p} H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} d H^* f_{i_1} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{i_{k-1}} \wedge d d H^* f_{i_k} \wedge \\ \wedge d H^* f_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge d H^* f_{i_p} \Big]. \qquad \text{(VI, 4; 21)}$$

Так как $\vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ — дифференцируемая функция, а $d d H^* f_i = 0$ (f_i и H, а следовательно, и $H^* f_i$ дважды дифференцируемы), то $d H^* \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = H^* d \vec{\omega}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, откуда следует требуемый результат.

Обобщение на абстрактный случай. Если форма $\vec{\omega}$ степени p определена только на многообразии V класса C^2 размерности n, содержащемся в нормированном аффинном пространстве E, или даже если это абстрактное многообразие класса C^2, то *можно определить операцию взятия кограницы* d, которая каждой дифференциальной форме $\vec{\omega}$ степени p, определенной на V, ставит в соответствие некоторую дифференциальную форму $d\vec{\omega}$ степени $p+1$, обладающую четырьмя свойствами теоремы 15 (одно из свойств требует, чтобы ω принадлежала классу C^2, а значит, V — классу C^3; это может привести к некоторым незначительным трудностям). Но мы не будем подробно останавливаться на этих фактах, представляющих большой интерес в теории дифференциальных форм.

Градиент, дивергенция, ротор в аффинном евклидовом ориентированном N-мерном пространстве E

1°) *Оператор градиента*: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$. Вещественная дифференцируемая функция f имеет кограницу df. Согласно п. 1°) на стр. 126, ей можно поставить в соответствие некоторое векторное поле. Так определяется градиент функции f. Эта операция зависит не от ориентации, а только от евклидовой структуры пространства E. С ней мы уже встречались в формуле (III, 3; 23).

2°) *Дивергенция векторного поля*: div. Когда рассматривается дифференцируемое векторное поле, то с ним можно связать дифференцируемую дифференциальную форму степени $N-1$. Эта форма имеет кограницу, представляющую собой дифференциальную форму степени N, которой можно в свою очередь поставить в соответствие некоторую скалярную функцию. Эта функция, умноженная на $(-1)^{N-1}$, называется *дивергенцией* векторного поля [1]).

Дивергенция не зависит ни от евклидовой структуры, ни от ориентации пространства E. Она связана непосредственно с аффинной структурой этого пространства. В самом деле, для ее построения применяются две операции, зависящие от выбора фундаментального N-ковектора $\overset{N}{\xi} \neq 0$ на $\vec{E}$, и *эти операции*, как это видно из формулы (VI, 4; 24), *«нейтрализуют» друг друга.*

Если составляющими векторного поля относительно *произвольной* системы координат являются функции $x \to A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то соответствующая дифференциальная форма определяется, согласно (VI, 3, 42_2), по формуле

$$\omega = \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} A_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N, \tag{VI, 4; 22}$$

где Δ является значением N-формы $\overset{N}{\xi}$ в выбранной системе координат:

$$\Delta = \overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N), \qquad \overset{N}{\xi} = \Delta \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N. \tag{VI, 4; 22_2}$$

(Можно было ограничиться случаем, когда E является евклидовым ориентированным пространством, а система координат — положительная и ортонормированная. Тогда $\Delta = 1$.)

Кограница формы (VI, 4; 22) вычисляется по формуле

$$d\omega = \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} dA_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N =$$
$$= \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N =$$
$$= \Delta (-1)^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N, \tag{VI, 4; 23}$$

[1]) Сомножитель $(-1)^{N-1}$ вводится для того, чтобы получить формулу (VI 4; 24) без знака минус.

откуда вытекает следующая формула для дивергенции:

$$\operatorname{div}(A_1, A_2, \ldots, A_N) = \\ = \frac{1}{\Delta}\Delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_N}{\partial x_N}. \quad \text{(VI, 4; 24)}$$

3°) *Ротор векторного поля в случае трехмерного пространства.* Существует другая замечательная операция, которую можно определить только в ориентированном евклидовом пространстве размерности $N = 3$.

Будем исходить из дифференцируемого поля $\vec{A}$. Этому полю можно поставить в соответствие некоторую дифференциальную форму степени 1. Кограница этой формы является дифференциальной формой степени 2. Однако тогда $2 = N - 1$, и можно полученной форме поставить в соответствие некоторое векторное поле[1]).

Таким путем определяется оператор, который дифференцируемому векторному полю ставит в соответствие некоторое векторное поле. Этот оператор называют ротором и обозначают через $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$. Пусть A, B, C — три составляющие поля $\vec{A}$ относительно положительного ортонормированного базиса. Дифференциальная форма степени 1, соответствующая $\vec{A}$, имеет вид

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz. \quad \text{(VI, 4; 25)}$$

Ее кограница определяется по формуле (VI, 4; 2). Следовательно, согласно (VI, 3; 42) (для $N = 3$), составляющими векторного поля $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ являются функции

$$A_1 = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad B_1 = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad C_1 = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\,^{2)}. \quad \text{(VI, 4; 26)}$$

Замечание. Часто эти формулы распространяют на комплексные функции и комплексные поля. Если f является комплексной функцией $f = g + ih$, то через $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ обозначают комплексное векторное поле $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + i\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h$. Если $\vec{A}$ является

---

[1]) Здесь *имеется только одна операция*, зависящая от ориентации: переход от формы степени 2 к векторному полю. Следовательно, *полученное поле полярно, т. е. зависит от ориентации.* Оно зависит также, очевидно, и от евклидовой структуры пространства.

[2]) К ротору частично относится замечание 3°), приведенное по другому поводу на стр. 127.

комплексным векторным полем $\vec{A} = \vec{V} + i\vec{W}$, то полагают $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\vec{V} + i\operatorname{div}\vec{W}$ и $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V} + i\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{W}$.

Теорема 18. 1°) *В открытом множестве аффинного евклидова ориентированного трехмерного пространства ротор градиента вещественной дважды дифференцируемой функции и дивергенция ротора дважды дифференцируемого векторного поля равны нулю.*

2°) *Если f является дважды дифференцируемой вещественной функцией, определенной на открытом множестве аффинного евклидова пространства размерности N, то имеет место формула*

$$\Delta f = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f, \tag{VI, 4; 27}$$

где Δ — дифференциальный оператор 2-го порядка, который называется лапласианом и представляется в любой ортонормированной системе координат в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{VI, 4; 28}$$

3°) *Если $\vec{A}$ является дважды дифференцируемым векторным полем, определенным на открытом множестве ориентированного аффинного евклидова трехмерного пространства, то для лапласиана Δ справедлива следующая формула:*

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{A} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}. \tag{VI, 4; 29}$$

Доказательство. Утверждение 1°) вытекает непосредственно из соотношения $d\,d = 0$.

Утверждения 2°) и 3°) очевидны. Достаточно взять ортонормированную систему координат (положительную, если пространство E ориентировано) и применить формулы, определяющие градиент, ротор и дивергенцию.

Замечание. Подведем итог изложенному:

a) Дивергенция векторного поля зависит от аффинной структуры пространства E.

b) Градиент функции зависит от аффинной евклидовой структуры пространства E.

c) Лапласиан Δ зависит от аффинной евклидовой структуры пространства E.

d) Ротор векторного поля существует лишь в том случае, когда пространство E трехмерно, и зависит от аффинной евклидовой ориентированной структуры пространства E.

Механическая интерпретация дивергенции

Рассмотрим течение жидкости в трехмерном аффинном евклидовом пространстве. Выбрав ортонормированную систему координат, мы можем отождествить это пространство с пространством $\mathbb{R}^3$. «Частица», занимавшая в момент времени t_0 положение (x_0, y_0, z_0) в $\mathbb{R}^3$, в момент времени t займет положение

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t). \qquad \text{(VI, 4; 29}_2\text{)}$$

Скорость этой частицы в заданный момент времени t равна $\vec{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) = (\xi, \eta, \zeta)$. Эта скорость является функцией от x_0, y_0, z_0. Однако можно было бы также для заданного t выразить x_0, y_0, z_0 как функции от x, y, z[1]). Подставляя эти значения в (ξ, η, ζ), получим их выражение в виде функции от x, y, z и таким образом определим *в каждый момент времени t поле скоростей.*

Рассмотрим множество частиц, заполняющих в момент времени t_0 заданную область Ω_0. В момент времени t это множество займет область Ω_t, объемная мера которой в силу формулы замены переменных в кратных интегралах (следствие 3 теоремы 102 гл. IV) вычисляется по формуле

$$V_t = \iiint\limits_{\Omega_t} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_0} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)} \right| dx_0\,dy_0\,dz_0. \qquad \text{(VI, 4; 29}_3\text{)}$$

Производная по времени этой объемной меры

$$\frac{dV}{dt} = \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)} \right| dx_0\,dy_0\,dz_0$$

вычисляется дифференцированием под знаком $\iiint$, которое, очевидно, допустимо, если Ω_0 ограничена, x, y, z принадлежат классу C^2 и $\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}$ всюду $\neq 0$ (следствие теоремы 115 гл. IV).

Вычислим эту производную при $t = t_0$. Для t, близких к t_0, имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x_0} &= 1 + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t - t_0) + \ldots, \\
\frac{\partial x}{\partial y_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = \frac{\partial \xi}{\partial y_0}(t - t_0) + \ldots, \qquad \text{(VI, 4; 29}_4\text{)} \\
\frac{\partial x}{\partial z_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z_0\,\partial t}(t - t_0) + \ldots = \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t - t_0) + \ldots
\end{aligned}$$

---

[1]) Всегда предполагается, что переход от момента t_0 к моменту t является некоторым гомеоморфизмом (и даже, вообще говоря, C^1-диффеоморфизмом).

и формулы того же типа для y и z. Якобиан, равный 1 при $t=t_0$, разлагается при бесконечно малом $t-t_0$ по следующей формуле:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}=$$
$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial \xi}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & 1+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial \eta}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_0}(t-t_0)+\ldots & \frac{\partial \zeta}{\partial y_0}(t-t_0)+\ldots & 1+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}(t-t_0)+\ldots \end{vmatrix} \quad \text{(VI, 4; 29}_5\text{)}$$

Если сохранить лишь члены, содержащие $t-t_0$, то мы получим, что

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}=1+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right)(t-t_0)+\ldots, \quad \text{(VI, 4; 29}_6\text{)}$$

откуда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right|\right)_{t=t_0}=\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=\operatorname{div} \vec{v}_0. \quad \text{(VI, 4; 29}_7\text{)}$$

Окончательно получаем формулу

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0}=\iiint_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{v}_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0. \quad \text{(VI, 4; 29}_8\text{)}$$

Однако выбор момента времени t_0 особой роли не играет. Формула (VI, 4; 29_8) записывается для произвольного момента времени t так:

$$\frac{dV}{dt}=\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz=\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v}\, d\tau, \quad \text{(VI, 4; 29}_9\text{)}$$

где $d\tau$ — объемная мера в евклидовом пространстве E.

Рассмотрим предел логарифмической производной объема $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$, взятый в тот момент t, когда рассматриваемая область «равномерно стягивается» к точке $M \in E$. Этот предел вычисляется по формуле

$$\lim_{\Omega_t \to M} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}=\lim_{\Omega_t \to M} \frac{\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v}\, d\tau}{\iiint_{\Omega_t} d\tau}=(\operatorname{div} \vec{v})(M)\,^{1}). \quad \text{(VI, 4; 29}_{10}\text{)}$$

[1]) С рассуждением такого рода мы уже встречались в следствии 6 теоремы 102 гл. IV.

Именно отсюда пришло слово «дивергенция», т. е. расхождение. Тот факт, что жидкость *несжимаема*, означает, что *в каждый момент t дивергенция поля скоростей равна нулю.*

Эти результаты показывают снова, что дивергенция зависит только от аффинной структуры пространства E. Действительно, объемы будут определены с того момента, как будет выбрана некоторая фундаментальная форма $\overset{N}{\xi}$ на $\vec{E}$, но влияние этого выбора исчезает при рассмотрении dV/V.

Вычисления в полярных координатах в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим, как обычно, отображение P области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, определенное формулами (IV, 9; 93).

Векторы $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial r}$, $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta}$, $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}$ были вычислены на стр. 750 т. I, и имеет место формула (IV, 10; 19). Сохраним те же обозначения. Пусть f — скалярная функция класса C^1 в $\mathbb{R}^3$. Если через $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ обозначать частные производные по r, θ и φ композиции $f \circ P$, то они совпадают с производными функции f по трем векторам $\vec{i}$, $r\vec{j}$, $r \sin\theta\vec{k}$.

В самом деле, согласно теореме о сложной функции, например, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(m) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(f \circ P)(m) = f'(P(m)) \cdot \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}(m) =$$
$$= \left(D_{\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}(m)} f\right)(m) = \left(D_{r \sin\theta\vec{k}} f\right)(m). \quad \text{(VI, 4; 30)}$$

Но эти производные в силу формулы (III, 3; 21) являются скалярными произведениями $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ на рассматриваемые векторы, так что окончательно мы получаем такие формулы:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{i}), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{j}), \quad \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \varphi} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{k}), \quad \text{(VI, 4; 31)}$$

и, следовательно, представление градиента в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{k}. \quad \text{(VI, 4; 32)}$$

Найдем теперь дифференциальные формы степени 1, соответствующие векторным полям $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в евклидовой структуре пространства E. По определению формам dr, $d\theta$, $d\varphi$ [1]) отвечают $\overrightarrow{\text{grad}}\, r$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$, т. е., согласно (VI, 4; 32), векторы $\vec{i}$, $\frac{1}{r}\vec{j}$, $\frac{1}{r\sin\theta}\vec{k}$. Поэтому

$$dr \sim \vec{i}, \quad r\,d\theta \sim \vec{j}, \quad r\sin\theta\,d\varphi \sim \vec{k}, \qquad \text{(VI, 4; 33)}$$

где символ $\sim$ означает эквивалентность дифференциальной формы степени 1 и векторного поля, определяемого евклидовой структурой $\mathbb{R}^3$.

Поскольку векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют положительный [2]) ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$, то соответствие между векторными полями и дифференциальными формами степени 2, определяемое формулой (VI, 2; 11_3), запишется в виде

$$\vec{i} \sim r^2\sin\theta\,d\theta \wedge d\varphi, \quad \vec{j} \sim r\sin\theta\,d\varphi \wedge d\theta, \quad \vec{k} \sim r\,dr \wedge d\theta. \quad \text{(VI, 4; 34)}$$

Наконец, соответствие между скалярными функциями и дифференциальными формами 3-й степени запишется так:

$$1 \sim dx \wedge dy \wedge dz = r^2\sin\theta\,dr \wedge d\theta \wedge d\varphi. \qquad \text{(VI, 4; 35)}$$

Зададим теперь векторное поле тремя его составляющими в полярных координатах

$$\vec{A} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}. \qquad \text{(VI, 4; 36)}$$

Согласно (VI, 4; 34), ему отвечает дифференциальная форма степени 2:

$$Ar^2\sin\theta\,d\theta \wedge d\varphi + Br\sin\theta\,d\varphi \wedge dr + Cr\,dr \wedge d\theta. \qquad \text{(VI, 4; 37)}$$

Ее кограница определяется так:

$$\left[\left(2Ar + r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)\sin\theta + \left(B\cos\theta + \frac{\partial B}{\partial\theta}\sin\theta\right)r + r\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right] dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \qquad \text{(VI, 4; 38)}$$

откуда, используя соответствие (VI, 4; 35), получаем дивергенцию [3])

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2A}{r} + \frac{B}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C}{\partial\varphi}. \qquad \text{(VI, 4; 39)}$$

---

[1]) Под dr, $d\theta$, $d\varphi$ здесь понимаются дифференциалы *функций* r, θ, φ на $\mathbb{R}^3$. Например, φ является функцией $M \to$ 3-я координата $P^{-1}(M)$, которая каждой точке M ставит в соответствие ее долготу.

[2]) Это предположение считается здесь выполненным. См. далее примечание на стр. 197.

[3]) Множитель $(-1)^{N-1}$, необходимый при вычислении дивергенции (стр. 136), для $N = 3$ равен $+1$.

Вычислим теперь лапласиан скалярной функции.

Имеет место формула (VI, 4; 27). Поэтому достаточно последовательно применить формулы (VI, 4; 32) и (VI, 4; 39) и получить

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad \text{(VI, 4; 40)}$$

Мы видим, что предлагаемые здесь методы значительно удобнее методов, указанных в гл. III (стр. 246 т. I). Это объясняется тем, что при вычислении лапласиана мы воспользовались тем фактом, что он существенно связан с евклидовой структурой пространства.

Внешняя первообразная дифференциальной формы

Пусть $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени p на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Выясним, при каких условиях существует внешняя первообразная формы $\vec{\omega}$, т. е. некоторая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$, принадлежащая по крайней мере классу C^1 и такая, что $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$.

Естественно, что это возможно лишь в том случае, когда степень p формы $\vec{\omega}$ будет $\geqslant 1$.

Предположим, что $\vec{\omega}$ является кограницей некоторой формы $\vec{\varpi}$, принадлежащей не только классу C^1, но и классу C^2. Тогда $d\vec{\omega} = d\,d\vec{\varpi} = \vec{0}$. Форма $\vec{\omega}$ должна быть замкнутой. Это условие по крайней мере необходимо для того, чтобы форма $\vec{\omega}$ была кограницей некоторой формы $\vec{\varpi}$ класса C^2. Условие это автоматически выполняется, если $p = N$ — размерности пространства E[1]). Докажем следующее обратное утверждение:

[1]) Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит только классу C^1 и является кограницей некоторой формы $\vec{\varpi}$, также принадлежащей только классу C^1, то в силу примечания на стр. 132 имеет место равенство $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Если же форма $\vec{\omega}$ лишь непрерывна, то этим свойством она может не обладать. Однако, для того чтобы выяснить, является ли форма $\vec{\omega}$ кограницей некоторой формы $\vec{\varpi}$, естественно предполагать, что $\vec{\varpi}$ принадлежит классу C^1, но нет никакой необходимости считать форму $\vec{\omega}$ дифференцируемой. Теория распределений эти затруднения снимает.

Теорема 19 (Пуанкаре). *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная замкнутая (т. е. $d\omega = 0$) форма степени $p \geqslant 1$ на открытом множестве Ω пространства E со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ класса C^1. Предположим, что существует такая система координат в E, относительно которой Ω обладает следующими свойствами: каждая параллель к какому-либо вектору базиса пространства $\vec{E}$ пересекает Ω по открытому отрезку, который, если он не пуст, содержит по крайней мере одну точку гиперплоскости, проведенной через начало координат параллельно другим векторам базиса.*

Тогда существуют такие дифференциальные формы $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ класса C^1, что $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$. Все эти формы можно получить, прибавляя к одной из них произвольную дифференциальную замкнутую, т. е. такую, кограница которой равна нулю[1], *форму степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$ класса C^1.*

Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит классу C^m (с конечным или бесконечным $m \geqslant 1$), то форму $\vec{\varpi}$ можно выбрать в классе C^m[2]. *При $p = 0$ форма $\vec{\varpi}$ принадлежит классу C^{m+1}.*

Условия, налагаемые нами на Ω, являются, очевидно, слишком ограничительными. Они выполняются, например, если Ω представляет собой открытый параллелепипед, стороны которого параллельны базисным векторам, или если Ω — открытый шар относительно некоторой подходящей нормы в E.

Легко видеть, однако, что если предыдущие ограничения слишком сильны, то *некоторые ограничения топологического характера, налагаемые на Ω, неизбежны.* Предположим, например, что E — плоскость $\mathbb{R}^2$ и что ω — дифференциальная форма степени 1, обычно обозначаемая через $d\varphi$, — «дифференциал аргумента или полярного угла», т. е.

$$d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \qquad \text{(VI, 4; 41)}$$

Форма ω является дифференциальной формой степени 1 класса C^∞, определенной в дополнении Ω к началу координат. Она замкнута: $d\omega = 0$. *Однако легко видеть, что она не является в Ω кограницей некоторой функции* (т. е. обычным дифференциалом функции класса C^1 на Ω). Пусть A — некоторая точка $\mathbb{R}^2$.

---

[1]) Такая замкнутая форма является постоянной функцией, если $p-1=0$, и кограницей произвольной формы степени $p-2$ класса C^1, если $p-1 \geqslant 1$.

[2]) Однако все решения не принадлежат классу C^m!

Для любой точки M из $\mathbb{R}^2$ обозначим через $\Phi(A; M)$ угол, на который надо повернуть плоскость вокруг начала координат, чтобы точка A попала на полупрямую OM. Если наложить ограничение $-\pi \leqslant \Phi(A, M) < \pi$, то этот угол определится однозначно. Обозначим через $\mathscr{V}$ множество точек M из Ω, для которых $-\pi < \Phi(A; M) < \pi$. Это множество является открытой окрестностью точки A в Ω.

В этой окрестности точки A существуют первообразные формы ω, а именно функции $\varphi(M) = \varphi_0 + \Phi(A; M)$. Так как множество $\mathscr{V}$ связно, эти функции единственны. *Однако во всей области Ω первообразной не существует, т. е. не существует единого непрерывного определения полярного угла.* В самом деле, любая первообразная в Ω является тем более первообразной в $\mathscr{V}$. Следовательно, ее можно представить в $\mathscr{V}$ так, как указано выше. Пусть M стремится, оставаясь в множестве $\mathscr{V}$, к такой точке M_0, что $\Phi(A; M_0) = -\pi$. Когда она стремится к M_0 с одной и другой стороны от полупрямой AM_0, то $\varphi(M)$ стремится соответственно к $\varphi_0 - \pi$ и $\varphi_0 + \pi$, а следовательно, φ не может быть продолжена до непрерывной функции на Ω.

На этом примере видно, что *обозначение $d\varphi$ неудачно*, поскольку ω не является кограницей функции. Оно имеет смысл только в меньших открытых множествах, таких, как $\mathscr{V}$, в которых можно определить функцию φ. Конечно, если Ω не обладает свойствами, достаточными для обеспечения существования первообразной дифференциальной формы $\vec{\omega}$, то всегда можно утверждать, что каждая точка $a \in \Omega$ имеет такую окрестность $\mathscr{V}$ в Ω, в которой такая первообразная существует. Достаточно в качестве окрестности взять открытый параллелепипед или открытый шар.

Доказательство. Если существует некоторая внешняя первообразная $\vec{\varpi}$, то совершенно ясно, что все другие первообразные можно получить, добавляя к ней произвольную замкнутую форму $\vec{\theta}$, ибо тогда $d(\vec{\varpi} + \vec{\theta}) = d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$. При этом имеется бесконечное множество первообразных (поскольку существует бесконечное множество замкнутых форм: каждая дифференциальная форма с постоянными коэффициентами замкнута. Для нулевой степени в силу связности Ω единственными замкнутыми формами являются постоянные; для степеней высокого порядка имеется много других замкнутых форм!).

Мы будем доказывать теорему индукцией по размерности N пространства E. Выводы теоремы верны для $N \leqslant p - 1$, поскольку тогда форма $\vec{\omega}$ тождественно равна нулю в силу того, что ее степень $p \geqslant N + 1$.

Предположим, что теорема верна для всех аффинных пространств размерности 1, 2, ..., $N-1$, и докажем ее справедливость для размерности N. Хотя в условии теоремы полем скаляров может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, мы приведем здесь доказательство только для поля $\mathbb{R}$. Случай поля $\mathbb{C}$ может быть разобран только после того, как будет развита теория функций комплексной переменной.

Мы можем выбрать в пространстве E некоторую систему координат и тем самым отождествить его с $\mathbb{R}^N$.

В форме $\vec{\omega}$, представленной в виде (VI, 3; 6), выделим все члены, содержащие dx_1. Тогда можно записать, что

$$\vec{\omega} = dx_1 \wedge \vec{L} + \vec{M}, \qquad \text{(VI, 4; 42)}$$

где $\vec{L}$ и $\vec{M}$ — дифференциальные формы степени $p-1$ и p соответственно, которые, если их представить в виде (VI, 3; 6), не содержат дифференциала dx_1.

Рассмотрим теперь дифференциальную форму $\vec{\Lambda}$ степени $p-1$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_1} = \vec{L}. \qquad \text{(VI, 4; 43)}$$

В силу предположений относительно Ω такую форму достаточно определить с помощью интеграла

$$\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int_0^{x_1} \vec{L}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi. \qquad \text{(VI, 4; 44)}$$

Этот интеграл имеет смысл. В самом деле, для каждой точки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ из Ω отрезок, соединяющий эту точку с точкой $(0, x_2, \ldots, x_N)$, полностью принадлежит Ω, и, следовательно, форма $\vec{L}$ на нем определена и непрерывна. Для фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ величина, стоящая в правой части под знаком $\int$, является непрерывной функцией ξ со значениями в $\mathcal{AL}^p(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$. Поскольку пространство $\vec{F}$ по условию полно, то $\mathcal{AL}^{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$ является банаховым пространством; значит, интеграл имеет смысл и определяет $\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ как некоторый элемент пространства $\mathcal{AL}^{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$, а $\vec{\Lambda}$ как некоторую дифференциальную форму степени $p-1$ на Ω со значениями в $\vec{F}$. Теперь видно, что $\vec{\Lambda}$ имеет частную производную по x_1, совпадающую с $\vec{L}$.

Кроме того, видно, что если $\vec{L}$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 1$, то то же самое будет верно для $\vec{\Lambda}$. В самом деле, каждая частная производная $\vec{\Lambda}$, не содержащая дифференцирования по x_1, вычисляется в силу следствия теоремы 115 гл. IV непосредственно под знаком $\int$. Каждая частная производная, содержащая дифференцирование по x_1, вычисляется дифференцированием относительно $x_2, \ldots, x_N$ под знаком $\int$, в то время как частное дифференцирование по x_1 производится по правилу дифференцирования интеграла по его верхнему пределу (теорема 89 гл. IV).

В частности, так как форма $\vec{L}$ по предположению принадлежит классу C^1, то форма $\vec{\Lambda}$ также принадлежит классу C^1 и имеет кограницу $d\vec{\Lambda}$, которая вычисляется по формуле

$$d\vec{\Lambda} = dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_j} = dx_1 \wedge \vec{L} + d'\vec{\Lambda}, \qquad \text{(VI, 4; 45)}$$

где d' — операция взятия кограницы «относительно $x_2, \ldots, x_N$», т. е. частная кограница, равная $d' = \sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$. Кроме того,

$$(d\vec{\Lambda})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ + \int_0^{x_1} ((d'\vec{L})(\xi, x_2, \ldots, x_N))\, d\xi. \qquad \text{(VI, 4; 46)}$$

Однако форма $\vec{\omega}$ не произвольна, поскольку она замкнута. Поэтому имеет место соотношение

$$\vec{0} = d\vec{\omega} = d(dx_1 \wedge \vec{L}) + d\vec{M} = (ddx_1 \wedge d\vec{L} - dx_1 \wedge d\vec{L}) + d\vec{M} = \\ = -dx_1 \wedge d'\vec{L} + dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} + d'\vec{M}. \qquad \text{(VI, 4; 47)}$$

Если, в частности, мы соберем все члены, содержащие dx_1, затем члены, не содержащие dx_1, то в обоих случаях мы должны получить $\vec{0}$. Поэтому

$$dx_1 \wedge \left(-d'\vec{L} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}\right) = 0, \quad d'\vec{M} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 4; 48)}$$

Заключенное в скобки выражение в первом равенстве не содержит члена с dx_1. Следовательно, его внешнее произведение на dx_1 может обращаться в нуль только тогда, когда оно само равно нулю. Отсюда

$$d'\vec{L} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}, \quad d'\vec{M} = \vec{0}. \tag{VI, 4; 48$_2$}$$

Поэтому в силу (VI, 4; 46) и первой формулы (VI, 4; 48$_2$)

$$\begin{aligned} d\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ &+ \int_0^{x_1} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \\ &+ \vec{M}(x_1, x_2, \ldots, x_N) - \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N). \end{aligned} \tag{VI, 4; 49}$$

Следовательно, *классу C^m принадлежит не только форма $\vec{\Lambda}$, но также и форма $d\vec{\Lambda}$.* (Последнее вовсе не означает, что $\vec{\Lambda}$ должна быть из класса C^{m+1}! Кограница $d\vec{\Lambda}$ включает только часть частных производных формы $\vec{\Lambda}$! Например, форма максимальной степени класса C^1 всегда замкнута, и потому ее равная нулю кограница принадлежит классу C^∞, а это ничего не дает для самой формы.)

Таким образом, имеет место следующее равенство (в силу соотношений (VI, 4; 42) и (VI, 4; 49)):

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} - d\vec{\Lambda})(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= \vec{P}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \\ &= \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N). \end{aligned} \tag{VI, 4; 50}$$

Если мы сможем доказать, что $\vec{P}$ есть кограница некоторой дифференциальной формы степени $p-1$, и поскольку то же самое имеет место для формы $d\vec{\Lambda}$ кограницы $\vec{\Lambda}$, то форма $\vec{\omega}$ будет обладать тем же свойством. Если, кроме того, форма $\vec{P}$ принадлежит классу C^m, то мы должны будем показать, что она является кограницей некоторой дифференциальной формы класса C^m.

Однако $\vec{P}$ — это дифференциальная форма, в которую не входят ни x_1, ни dx_1. Действительно, dx_1 в $\vec{M}$ не входит, а так как $\vec{M}$ вычисляется в точке $(0, x_2, \ldots, x_N)$, то x_1 также не входит в $\vec{M}$. Форма P замкнута, поскольку в силу формулы (VI, 4; 48) имеют место равенства

$$d\vec{P} = d'\vec{M} = \vec{0}. \tag{VI, 4; 51}$$

Значит, $\vec{P}$ можно рассматривать как замкнутую дифференциальную форму класса C^m степени p на открытом множестве Ω_1 пространства $\mathbb{R}^{N-1}$, обладающем теми же свойствами, что и исходное открытое множество Ω в пространстве $\mathbb{R}^N$, так как Ω_1 является следом Ω на гиперплоскости $x_1 = 0$. Из предположения индукции следует, что существует дифференциальная форма $\vec{\theta}$ степени $p-1$ класса C^m на этом открытом множестве Ω_1, для которой $\vec{P}$ является кограницей. Этим заканчивается доказательство существования формы $\vec{\varpi}$.

Это доказательство в то же время содержит практический способ вычисления $\vec{\varpi}$. С этой целью надо переходить к дифференциальным формам, содержащим все меньшее и меньшее число переменных. Тогда на некотором шаге мы придем к дифференциальной форме степени p от p переменных, а на следующем шаге — к форме степени $p-1$, т. е. форме, тождественно равной нулю. Полезно подробнее посмотреть, что же происходит в этот момент. Предположим, что мы получили дифференциальную форму $\vec{\omega}$ класса C^m степени p, зависящую от p переменных, которые мы будем обозначать через $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Тогда ее можно представить в виде (VI, 4; 42), где вместо dx_1 следует написать dy_1. Здесь $\vec{M} = \vec{0}$, т. е.

$$\vec{\omega} = \vec{f}\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_p = \\ = dy_1 \wedge (\vec{f}\, dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_p) = dy_1 \wedge \vec{L}. \qquad \text{(VI, 4; 51}_2\text{)}$$

Теперь достаточно найти $\vec{\Lambda}$, используя предыдущий метод, и задача будет решена, поскольку $\vec{\omega} = d\vec{\Lambda}$.

Пусть $p = 1$. Если форма $\vec{\omega}$ принадлежит классу C^m, то полученная функция $\vec{\varpi} = \vec{f}$, очевидно, будет принадлежать классу C^{m+1}, поскольку она является функцией, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$, производная которой является отображением класса C^m множества Ω в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$. Таким образом, теорема полностью доказана. Сформулируем в виде следствия ее частный случай при $p = 1$.

Следствие 1. *Для того чтобы функции $A_1, A_2, \ldots, A_N$ класса C^1, определенные на открытом множестве Ω аффинного N-мерного пространства, которое обладает указанными свойствами, и принимающие значения в банаховом пространстве $\vec{F}$, были частными производными $\vec{A}_i = \partial\vec{f}/\partial x_i$ некоторой* *функции $\vec{f}$ класса C^1, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношениям совместности*

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{VI, 4; 52}$$

В этом случае функция $\vec{f}$ определяется с точностью до постоянной и принадлежит классу C^2. Кроме того, если функции $\vec{A}_i$ принадлежат классу C^m, то функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^{m+1} [1]).

Если E является евклидовым аффинным трехмерным ориентированным пространством, то, используя понятие векторного поля, можно сформулировать следующее следствие:

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество аффинного евклидова ориентированного трехмерного пространства, обладающего указанными в теореме свойствами. Тогда*

1°) *Для того чтобы векторное поле, определенное на Ω и принадлежащее классу C^1, было градиентом вещественной функции класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его ротор равнялся нулю. В этом случае функция f будет определена с точностью до аддитивной постоянной.*

2°) *Для того чтобы векторное поле класса C^1, определенное на Ω, было ротором некоторого векторного поля класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю. В этом случае поле, ротор которого задан, определяется с точностью до некоторого векторного поля, являющегося градиентом произвольной функции класса C^2.*

3°) *Каждая функция класса C^1, определенная на Ω, есть дивергенция некоторого векторного поля класса C^1. Это векторное поле определяется с точностью до векторного поля класса C^1, являющегося ротором некоторого векторного поля класса C^1.*

§ 5. ОРИЕНТАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ НАД ПОЛЕМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть V — некоторое многообразие размерности n класса C^1, содержащееся в N-мерном аффинном пространстве E.

Выясним, в каком смысле можно говорить об ориентации

---

[1]) В примечании на стр. 143 мы говорили, что предположение о принадлежности $\vec{A}_i$ классу C^1 вовсе не является естественным. В теории распределений условия совместности записываются для случая непрерывных функций.