функции $\vec{f}$ класса C^1, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношениям совместности

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \qquad \text{(VI, 4; 52)}$$

В этом случае функция $\vec{f}$ определяется с точностью до постоянной и принадлежит классу C^2. Кроме того, если функции $\vec{A}_i$ принадлежат классу C^m, то функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^{m+1} [1]).

Если E является евклидовым аффинным трехмерным ориентированным пространством, то, используя понятие векторного поля, можно сформулировать следующее следствие:

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество аффинного евклидова ориентированного трехмерного пространства, обладающего указанными в теореме свойствами. Тогда*

1°) *Для того чтобы векторное поле, определенное на Ω и принадлежащее классу C^1, было градиентом вещественной функции класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его ротор равнялся нулю. В этом случае функция f будет определена с точностью до аддитивной постоянной.*

2°) *Для того чтобы векторное поле класса C^1, определенное на Ω, было ротором некоторого векторного поля класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю. В этом случае поле, ротор которого задан, определяется с точностью до некоторого векторного поля, являющегося градиентом произвольной функции класса C^2.*

3°) *Каждая функция класса C^1, определенная на Ω, есть дивергенция некоторого векторного поля класса C^1. Это векторное поле определяется с точностью до векторного поля класса C^1, являющегося ротором некоторого векторного поля класса C^1.*

§ 5. ОРИЕНТАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ НАД ПОЛЕМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть V — некоторое многообразие размерности n класса C^1, содержащееся в N-мерном аффинном пространстве E.

Выясним, в каком смысле можно говорить об ориентации

---

[1]) В примечании на стр. 143 мы говорили, что предположение о принадлежности $\vec{A}_i$ классу C^1 вовсе не является естественным. В теории распределений условия совместности записываются для случая непрерывных функций.

многообразия V. Пусть a — некоторая точка V. Тогда V обладает в точке a касательным векторным подпространством размерности n, которое мы обозначили через $\vec{T}(a; V)$. Это некоторое векторное пространство над полем вещественных чисел, и его можно снабдить некоторой ориентацией.

Непрерывная система ориентаций многообразия

Системой ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V мы будем называть выбор для каждого $a \in V$ некоторой ориентации его векторного касательного пространства $\vec{T}(a; V)$. Система ориентаций многообразия V является, следовательно, некоторой функцией $\mathcal{T}$, определенной на V, которая в каждой точке $a \in V$ принимает значение $\mathcal{T}(a)$, принадлежащее двухэлементному множеству, состоящему из двух возможных ориентаций пространства $\vec{T}(a; V)$. Объясним, что мы будем понимать *под непрерывной системой ориентаций* $\mathcal{T}$ *многообразия* V (*или некоторой его части*). Система ориентаций *не является функцией обычного типа*, поскольку множество, в котором она принимает свои значения, в каждой точке a зависит от самой этой точки. Поэтому рассматриваемое понятие не является обычным понятием непрерывной функции.

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ является истинным параметрическим представлением класса C^1 размерности n открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Пусть α — такая точка $\mathcal{O}$, что $\Phi(\alpha) = a$. Мы знаем, что производное отображение $\Phi'(\alpha)$ устанавливает линейную биекцию $\mathbb{R}^n$ на $\vec{T}(a; V)$. Отсюда следует, что оно двум классам базисов в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие два класса базисов в $\vec{T}(a; V)$ [1]). Обозначим теперь через $\theta(\alpha; \Phi; \mathcal{T}) = \theta(\alpha; \Phi) = \theta(\alpha)$ величину, равную $+1$, если отображение Φ' ставит в соответствие положительному классу $\mathbb{R}^n$ (в его обычной канонической ориентации) положительный класс пространства $\vec{T}(a; V)$ в смысле ориентации $\mathcal{T}(a)$, и равную -1 в противоположном случае. Итак, карта Φ определяет некоторую функцию θ: $\alpha \to \theta(\alpha; \Phi)$, определенную на открытом множестве $\mathcal{O}$ со значениями в двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$. Задание этой функции θ на множестве $\mathcal{O}$ определяет систему ориентаций на части $\Phi(\mathcal{O})$ многообразия V. Однако на этот раз функ-

---

[1]) В самом деле, линейная биекция u векторного пространства $\vec{E}$ на другое векторное пространство $\vec{F}$ преобразует два базиса e, e' одного и того же класса (соответственно противоположных классов) в два базиса $u(e)$, $u(e')$, также принадлежащие одному и тому же классу (соответственно противоположным классам). Это следует из того, что определитель $u(e')$ относительно $u(e)$ равен определителю e' относительно e.

ция θ принимает значения в одном и том же двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$.

Говорят, что *система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a относительно карты* Φ, образ которой покрывает a, если функция θ, отвечающая этой системе ориентаций и отображению Φ, непрерывна в точке α. Поскольку эта функция принимает значения в дискретном двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$, то ее непрерывность в точке α означает, что она постоянна в окрестности α.

Говорят, что система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна относительно Φ на каждом открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$, если функция θ, соответствующая Φ, непрерывна на каждом открытом множестве $\mathcal{O}$. Это означает, что каждая точка открытого множества $\mathcal{O}$ имеет окрестность, в которой θ постоянна, или что θ постоянна в каждой открытой связной части $\mathcal{O}$ и, в частности, на самом множестве $\mathcal{O}$, если оно связно. В самом деле, каждая из двух точек $+1$ и -1 является одновременно открытым и замкнутым подмножеством рассматриваемого двухэлементного множества, и, следовательно, непрерывность θ означает, что прообраз любого из этих двух элементов одновременно открыт и замкнут в топологическом пространстве $\mathcal{O}$.

Теорема 20. *Если система ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V непрерывна в точке a относительно некоторой карты Φ, образ которой покрывает a, то она непрерывна в точке a и относительно любой другой карты, образ которой покрывает a.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\Phi_1: \mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2: \mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2)$—две карты, образы которых покрывают точку a, и $\Phi_i(\alpha_i) = a$. Поскольку речь идет о непрерывности в самой точке a, мы можем ограничиться открытыми множествами, меньшими, чем $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Так как в V существует одна и та же окрестность точки a, которая одновременно покрывается образами этих двух карт, мы можем ограничиться прообразами этого открытого множества, обозначая их по-прежнему через $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Это приведет нас к частному случаю, когда образы $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ являются одним и тем же открытым множеством из V. В силу следствия 1 теоремы 33 гл. III отображение $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \Phi_{2,1}$ является диффеоморфизмом класса C^1 множества $\mathcal{O}_1$ на множество $\mathcal{O}_2$.

Рассмотрим теперь некоторый базис пространства $\vec{T}(a; V)$, положительный в системе ориентаций $\mathcal{T}(a)$. Отображения $(\Phi_1'(\alpha_1))^{-1}$ и $(\Phi_2'(\alpha_2))^{-1}$ ставят ему в соответствие два базиса $\mathbb{R}^n$, знаки которых в канонической ориентации $\mathbb{R}^n$ соответственно равны знакам $\theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha_1; \Phi_1)$ и $\theta_2(\alpha_2) = \theta(\alpha_2; \Phi_2)$. От первого базиса $\mathbb{R}^n$ ко второму можно перейти с помощью линейного отображения $\Phi'_{2,1}(\alpha_1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Поэтому они имеют либо один и тот же знак, либо противоположные знаки в соответствии с тем, будет ли якобиан $\det \Phi'_{2,1}(\alpha_1) > 0$ или < 0. Окончательно получаем такую формулу:

$$\theta_2(\alpha_2) = \theta_1(\alpha_1)\,\mathrm{sign}\,(\det(\Phi'_{2,1}(\alpha_1))). \qquad \text{(VI, 5; 1)}$$

Поскольку функция $\Phi_{2,1}$ принадлежит классу C^1 и ее якобиан, не равный нулю в точке α_1, непрерывен, то он сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки. Следовательно, если θ_1 сохраняет знак в некоторой окрестности точки α_1, то найдется такая окрестность точки α_2, в которой θ_2 также сохранит знак. Теорема доказана.

Это позволяет нам ввести следующее определение. Говорят, что *система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a*, если она непрерывна в этой точке относительно любой карты многообразия, образ которой покрывает a. *Система $\mathcal{T}$ ориентаций V непрерывна на части A многообразия V или на самом многообразии V, если она непрерывна в каждой точке a множества A или V.*

Сравнение двух непрерывных систем ориентаций

Рассмотрим две системы ориентаций $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ одного многообразия V. Можно говорить об отношении этих двух систем ориентаций в точке a, равном $+1$ или -1, в зависимости от того, будут ли ориентации $\mathcal{T}_1(a)$ и $\mathcal{T}_2(a)$ касательного пространства $\vec{T}(a; V)$, определяемые этими системами, одинаковыми или противоположными.

Отношение двух систем ориентаций многообразия V является функцией, определенной на этом многообразии со значениями в двухэлементном множестве $\{+1, -1\}$.

Теорема 21. *Если две системы ориентаций $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ многообразия V непрерывны в точке a, то отношение этих систем ориентаций является постоянной функцией в любой окрестности точки a* [1]). *Обратно, если это отношение является постоянной функцией в некоторой окрестности точки a и если одна из двух систем ориентаций непрерывна в a, то другая также непрерывна в этой точке.*

В самом деле, если мы рассмотрим карту Φ, образ которой $\Phi(\mathcal{O})$ содержит точку a, то отношение двух систем ориен-

---

[1]) Это *не так очевидно*, как кажется: система непрерывных ориентаций не является непрерывной функцией в обычном смысле, поскольку ее значение в точке a лежит в множестве, изменяющемся вместе с a. Поэтому сразу же утверждать, что отношение двух таких «непрерывных функций» непрерывно, нельзя.

таций в точке $x \in V$ равно

$$\theta_1(\Phi^{-1}(x);\ \Phi)\,\theta_2(\Phi^{-1}(x);\ \Phi), \qquad \text{(VI, 5; 2)}$$

где θ_1 и θ_2 — функции, ассоциированные с Φ и двумя системами ориентаций. Отсюда вытекает требуемое заключение.

Следствие 1. *Если две системы ориентаций одного многообразия V непрерывны в точке a и совпадают в этой точке, то они совпадают во всей окрестности точки a.*

Следствие 2. *Если многообразие V связно, то две непрерывные системы ориентаций многообразия V либо совпадают на всем V, либо противоположны на всем V.*

В самом деле, их отношение является непрерывной функцией на V со значениями в множестве $\{+1, -1\}$. Прообраз относительно этой функции множества $\{+1\}$ или множества $\{-1\}$ одновременно и открыт, и замкнут, а значит, пуст или совпадает со всем многообразием V.

Ориентируемость и ориентация многообразия

Определение. Говорят, что *многообразие V класса C^1 размерности n ориентируемо*, если оно имеет хотя бы одну непрерывную систему ориентаций. Говорят, что это многообразие *ориентировано*, если зафиксирована одна из таких непрерывных систем, которая в этом случае называется *ориентацией многообразия V*. Если многообразие V связно и ориентируемо, то оно обладает двумя возможными ориентациями и выбор ориентации касательного векторного пространства в отдельной точке определяет ориентацию всего многообразия в целом. Например, аффинное пространство является ориентируемым многообразием. Ориентировать аффинное пространство — это значит ориентировать его присоединенное векторное пространство, поскольку оно является касательным векторным пространством в любой точке этого многообразия. В дальнейшем мы приведем примеры как ориентируемых, так и неориентируемых многообразий. Примем такое соглашение: *если некоторое многообразие имеет размерность 0, т. е. если оно является пространством, состоящим из изолированных точек, то ориентация этого многообразия состоит в приписывании каждой из его точек знака + или —*. Если это многообразие связно, т. е. сводится к одной точке, то оно обладает, очевидно, двумя противоположными ориентациями. Если многообразие V ориентируемо, то через $\overset{\frown}{V}$ можно обозначить многообразие, снабженное некоторой ориентацией. В этом случае $\overset{\curvearrowleft}{V}$ будет обозначать многообразие V, снабженное противоположной ориентацией.

Ориентация многообразия кооринтируемыми картами

Пусть Φ_1 и Φ_2 — две карты из некоторого атласа многообразия V. Говорят, что они *коориентируемы*, если их образы либо не пересекаются, либо отображение $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ множества Ω_1 на Ω_2 (где Ω_i является прообразом при отображении Φ_i пересечения $\Omega = \Phi_1(\mathcal{O}_1) \cap \Phi_2(\mathcal{O}_2)$) имеет всюду положительный якобиан.

Теорема 21_2. *Для того чтобы многообразие V было ориентируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовал его атлас, состоящий из попарно коориентируемых карт. Задание такого атласа фиксирует ориентацию многообразия V.*

Доказательство. Предположим, что многообразие V ориентировано. Пусть Φ—такая карта, что множество $\mathcal{O}$ связно. Функция θ относительно Φ будет постоянной на $\mathcal{O}$. Если эта постоянная равна $+1$, то мы ничего менять не будем и положим $\Psi = \Phi$. Если же она равна -1, то рассмотрим новую карту Ψ, определенную по формуле $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Phi(-u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Она отображает некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$ (которое совпадает не с множеством $\mathcal{O}$, а с его образом при отображении $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to (-u_1, u_2, \ldots, u_n)$) на *то же самое открытое множество* из V, а ее функция θ, очевидно, тождественно равна $+1$. В силу (VI, 5; 1) система всех карт Ψ коориентируема. Поскольку множества $\Psi(\mathcal{O}) = \Phi(\mathcal{O})$ покрывают V, они образуют некоторый атлас из попарно коориентируемых карт.

Обратно, предположим, что задан такой атлас. Если для каждой точки x из V мы рассмотрим некоторую ориентацию $\mathcal{T}(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$, то для всех карт Φ, образы которых покрывают точку x, в силу (VI, 5; 1) и предположения о коориентируемости карт соответствующая величина $\theta(\Phi^{-1}(x); \Phi)$ будет одинаковой. Следовательно, можно выбрать ориентацию $\mathcal{T}(x)$ так, чтобы эта величина была всюду равна $+1$. Тем самым определяется некоторая система ориентаций $\mathcal{T}$ многообразия V. Так как функция θ всюду равна $+1$, то эта система непрерывна и, следовательно, задает ориентацию многообразия V.

Ориентация многообразия с помощью непрерывных векторных полей

Теорема 22. *Пусть V — многообразие размерности n, снабженное некоторой системой ориентаций $\mathcal{T}$, и $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ ($\vec{U}_i$: $x \to \vec{U}_i(x)$) суть n векторных полей, определенных на V. Здесь $\vec{U}_i(x)$ — линейно независимые векторы, касательные* *к многообразию V в точке x. Если система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна в точке a, то, какой бы ни была система n векторных полей, непрерывных в точке a, знак базиса $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x)$ в ориентации $\mathcal{T}(x)$ постоянен для всех x, достаточно близких к точке a.*

Обратно, если для некоторой системы n частных векторных полей, непрерывных в точке a, этот знак постоянен в некоторой окрестности точки a, то система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть Φ — карта, образ которой $\Phi(\mathcal{O})$ покрывает некоторую окрестность точки a. Пусть $x=\Phi(\xi)$ и $a=\Phi(\alpha)$. При отображении $(\Phi'(\xi))^{-1}$ вектору $\vec{U}_i(x)$ соответствует некоторый вектор $\vec{\mathcal{U}}_i(\xi)$ из $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по системе n линейно независимых векторных полей $\vec{U}_i$ определяется система линейно независимых векторных полей $\vec{\mathcal{U}}_i$ на $\mathcal{O}$. Из следствия 6 теоремы 33_4 гл. III вытекает, что если $\vec{U}_i$ непрерывны в точке $a=\Phi(\alpha)$, то соответствующие поля $\vec{\mathcal{U}}_i$ на $\mathcal{O}$ непрерывны в точке α. Знак системы n векторов $\vec{\mathcal{U}}_i(x)$ в точке $x \in \mathcal{O}$ (в канонической ориентации $\mathbb{R}^n$) равен знаку определителя этих n векторов. Однако этот определитель непрерывен в точке α (поскольку непрерывны поля) и всегда $\neq 0$. Значит, его знак в некоторой окрестности точки α непрерывен, т. е. постоянен. Знак системы векторов $\vec{U}_i(x)$ в ориентации $\mathcal{T}(x)$ равен произведению предыдущего знака на $\theta(\xi; \Phi)$.

Отсюда вытекает, что знак системы векторов $\vec{U}_i(x)$ для x, близких к a, постоянен тогда и только тогда, когда функция θ постоянна в окрестности точки α, т. е. тогда и только тогда, когда система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a относительно карты Φ, а значит, согласно теореме 20, просто непрерывна в точке a.

Замечание. Всегда можно найти систему n линейно независимых касательных векторных полей $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$, непрерывных в точке a многообразия V. Для доказательства достаточно рассмотреть карту Φ, образ которой покрывает a, и взять в качестве $\vec{U}_i(x)$ образ $\xi=\Phi^{-1}(x)$ при отображении $\Phi'(\xi)$ i-го вектора базиса $\mathbb{R}^n$. Однако, вообще говоря, невозможно построить систему n непрерывных линейно независимых полей на всем многообразии V, *и даже одно непрерывное поле касательных векторов всюду* $\neq \vec{0}$ (см. стр. 321).

Ориентация многообразия с помощью знака вещественных дифференциальных форм

Теорема 23. *Пусть V — многообразие класса C^1 размерности n, снабженное некоторой системой ориентаций $\mathcal{T}$. Рассмотрим вещественную дифференциальную форму ω степени n, определенную на V, сужение которой в каждой точке $x \in V$ определяет на $\vec{T}(x; V)$ некоторую n-линейную антисимметричную ненулевую форму. Если система $\mathcal{T}$ ориентаций многообразия V непрерывна в точке a, то знак n-ковектора, определенный формой ω в точке x на $\vec{T}(x; V)$ относительно ориентации $\mathcal{T}(x)$ этого пространства, постоянен для всех x, достаточно близких к a, независимо от выбора формы ω, непрерывной в точке a.*

Обратно, если для некоторой частной формы ω, непрерывной в точке a, этот знак постоянен в некоторой окрестности точки a, то рассматриваемая система ориентаций $\mathcal{T}$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ — система n векторных полей, касательных к многообразию V, линейно независимых и непрерывных в точке a. В предыдущем замечании мы видели, что такие поля существуют. Вещественная функция $x \to \omega(x) \cdot (\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x))$ непрерывна и $\neq 0$ в точке a. Следовательно, ее знак постоянен в некоторой окрестности точки a. Он равен произведению знака n-ковектора $\omega(x)$ и знака базиса $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$ относительно ориентации $\mathcal{T}(x)$ пространства $\vec{T}(x; V)$. Знак формы будет постоянным в окрестности точки a тогда и только тогда, когда будет постоянным знак системы n векторов, т. е. в силу теоремы 23, когда система ориентаций многообразия V будет непрерывной в точке a.

Замечание. Если в некоторой системе ориентаций многообразия V вещественная дифференциальная форма ω степени n, определенная на V, такова, что в каждой точке x из V n-ковектор $\omega(x)$ неотрицателен на $\vec{T}(x; V)$ (определение неотрицательного n-ковектора см. на стр. 100), то мы будем писать $\omega \geqslant 0$. Это понятие знака дифференциальной формы максимальной степени n на многообразии V размерности n имеет смысл только при заданной ориентации многообразия V.

Пример неориентируемого многообразия. Лист Мёбиуса

Возьмем прямоугольник $ABB'A'$ и склеим две его противоположные стороны AB и $A'B'$. При этом точка A совместится с точкой A' и точка B — с точкой B'. Чтобы получить лист Мёбиуса, надо прямоугольник предварительно перекрутить, т. е. сделать так, чтобы точка A совместилась с точкой B', а точка B — с точкой A'. Если $AM = B'M'$, то точка M должна совпасть с точкой M'. Лист Мёбиуса можно определить как двумерную поверхность класса C^∞ в $\mathbb{R}^3$.

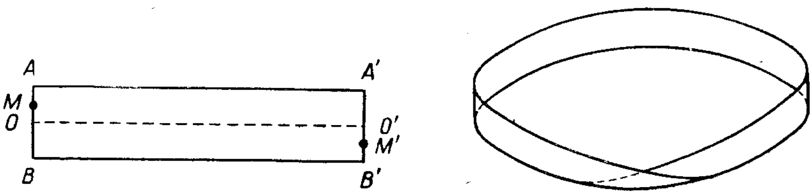

Рис. 1.

В качестве средней окружности листа Мёбиуса возьмем окружность Γ, определенную уравнениями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ или параметрическими уравнениями $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = 0$.

Пусть $m(\varphi) = m$ — точка этой окружности, соответствующая параметру φ. Определим на листе Мёбиуса открытый отрезок длины $2l < 2a$, перпендикулярный этой средней окружности, по формуле

$$M(\varphi, \rho) = m(\varphi) - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\vec{u} + \rho\cos\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3, \quad -l < \rho < l, \qquad \text{(VI, 5; 3)}$$

где $\vec{e}_3$ — единичный вектор оси z, а $\vec{u}$ — единичный вектор оси $\overrightarrow{Om}$: $\overrightarrow{Om} = a\vec{u}$. При $\varphi = 0$ этот отрезок вертикален. Когда угол φ возрастает, отрезок «поворачивается вокруг касательной к средней окружности» на угол $\varphi/2$. Когда m возвращается в исходное положение при $\varphi = 2\pi$, отрезок также возвращается в исходное положение, но «перевернувшись».

Так можно получить параметрическое представление листа Мёбиуса:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(a - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y &= \left(a - \rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z &= \rho\cos\frac{\varphi}{2}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\varphi \in \mathbb{R}, \quad -l < \rho < l, \\ &a,\ l \text{ заданы}, \quad 0 < l < a. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 5; 4)}$$

Заметим, что если заменить φ на $\varphi+2\pi$ и ρ на $-\rho$, то мы придем к той же точке листа Мёбиуса. Следовательно, предыдущее параметрическое представление является «несобственным параметрическим представлением». Однако локально это истинное параметрическое представление в смысле определения гл. III (стр. 321, т. I). В самом деле, если ограничиться изменением (φ, ρ) в открытом прямоугольнике $\mathcal{O}_{\varphi_0}=\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^2$, определенном неравенствами $\varphi_0-\pi<\varphi<\varphi_0+\pi$, $-l<\rho<+l$, то формула (VI, 5; 4) определит гомеоморфизм Φ

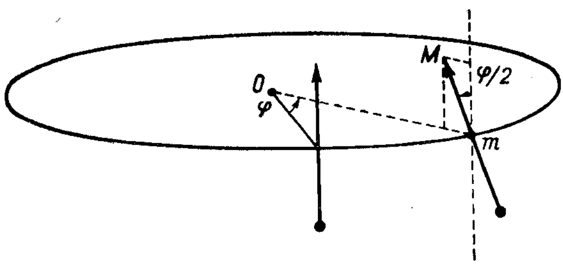

Рис. 2.

класса C^∞ прямоугольника $\mathcal{O}$ на некоторое открытое множество листа Мёбиуса. Для того чтобы доказать, что параметрическое представление Φ является истинным, достаточно показать, что *производное отображение отображения* Φ *в произвольной точке прямоугольника* $\mathcal{O}$ *имеет ранг* 2.

Дифференцирование формулы (VI, 4; 3) по ρ дает соотношение

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial\rho}=-\sin\frac{\varphi}{2}\vec{u}+\cos\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3, \tag{VI, 5; 5}$$

из которого видно, что вектор $\partial\vec{M}/\partial\rho$ не равен $\vec{0}$ (его составляющие $-\sin\varphi/2$ и $\cos\varphi/2$ по взаимно перпендикулярным осям одновременно в нуль не обращаются) и направлен вдоль подвижного отрезка. Дифференцирование по φ приводит к соотношению

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}=\left(a-\rho\sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\vec{u}}{d\varphi}-\frac{\rho}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\vec{u}-\frac{\rho}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\vec{e}_3. \tag{VI, 5; 6}$$

Из геометрических соображений видно, что полученный вектор $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ перпендикулярен предыдущему вектору (это получается сразу, если воспользоваться тем фактом, что $d\vec{u}/d\varphi$, $\vec{u}$ и $\vec{e}_3$ попарно ортогональны), а с другой стороны, он не равен $\vec{0}$, поскольку его составляющие по векторам $\vec{u}$ и $\vec{e}_3$ одновременно в нуль не обращаются.

Таким образом, векторы $\partial\vec{M}/\partial\rho$ и $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ действительно линейно независимы и параметрическое представление Φ является истинным. Лист Мёбиуса есть двумерная поверхность класса C^∞ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Теорема 23_2. *Лист Мёбиуса не ориентируем.*

Доказательство. Докажем, что не существует системы ориентаций $\mathcal{T}$ листа Мёбиуса V, *сужение которой на среднюю окружность* Γ непрерывно (т. е. непрерывно изменяется вдоль Γ). Для этого предположим, что такая система $\mathcal{T}$ существует, и покажем, что это приводит к противоречию.

Рассмотрим карту Φ, соответствующую открытому множеству $\mathcal{O}_{\varphi_0}$. Векторы $\partial\vec{M}/\partial\varphi$ и $\partial\vec{M}/\partial\rho$ образуют систему двух непрерывных векторных полей на $\Phi(\mathcal{O})$. Эта система, согласно теореме 22, должна иметь постоянный знак относительно системы $\mathcal{T}$ ориентаций листа V, которая по предположению непрерывна на *связной* кривой $\Gamma\cap\Phi(\mathcal{O})$. Иначе говоря, базис $\partial\vec{M}/\partial\varphi$, $\partial\vec{M}/\partial\rho$ в точке $M(\varphi, 0)$ имеет постоянный знак, когда φ изменяется в интервале $\varphi_0-\pi<\varphi<\varphi_0+\pi$. Поскольку значение φ_0 произвольно, этот базис имеет постоянный знак *для всех вещественных* φ. Но это невозможно, так как $M(\varphi+2\pi, 0)=$ $=M(\varphi,0)$, причем $\frac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}(\varphi+2\pi,0)=\frac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}(\varphi, 0)$ и $\frac{\partial\vec{M}}{\partial\rho}(\varphi+2\pi, 0)=$ $=-\frac{\partial\vec{M}}{\partial\rho}(\varphi, 0)$, т. е. *два базиса, соответствующие* φ *и* $\varphi+2\pi$, *имеют противоположные знаки*. Мы пришли к противоречию. Этим объясняется следующий факт: когда пытаются ориентировать лист Мёбиуса, выбирают некоторую ориентацию в точке $(\varphi, 0)$, а затем продолжают ее по непрерывности, двигаясь вдоль окружности Γ, но после одного оборота (до $(\varphi+2\pi, 0)$) попадают в исходную точку с ориентацией, противоположной исходной. Это снова говорит о невозможности ориентировать лист Мёбиуса.

Лист Мёбиуса обладает другими интересными топологическими свойствами. Например, *если его разрезать вдоль средней окружности, то он не распадется на две части*. Это означает, что дополнение к средней окружности на V связно и даже линейно связно, что неверно для листа, склеенного обычным способом. Это свойство очевидно. В самом деле, легко найти путь, соединяющий в $V-\Gamma$ точку $M(\varphi_1, \rho_1)$ с точкой $M(\varphi_2, \rho_2)$, где ρ_1 и $\rho_2\neq 0$. Для этого достаточно непрерывно изменять φ от φ_1 к φ_2 и ρ от ρ_1 к ρ_2, не переходя через 0, если только ρ_1 и ρ_2 имеют один и тот же знак. Если же ρ_1 и ρ_2 имеют противоположные знаки, то надо будет непрерывно изменять φ

от φ_1 до $\varphi_2+2\pi$ и ρ от ρ_1 до $-\rho_2$, также не переходя через 0.

Упражнение. Непосредственно доказать предыдущие свойства листа Мёбиуса, определенного как абстрактное многообразие. Для этого надо рассмотреть прямоугольник $ABB'A'$ и совместить точки отрезка AB с точками отрезка $B'A'$, отождествляя точки M и M', расположенные на одинаковом расстоянии от A и B'. Нужно показать, что на фактормножестве легко устанавливается топологическая структура и даже структура абстрактного многообразия размерности 2 класса C^∞. С другой стороны, следует убедиться, что дополнение к OO^1 связно и что не существует системы ориентаций многообразия, которая непрерывно изменялась бы вдоль OO'.

Естественно, имеются многочисленные примеры ориентируемых многообразий. Так, ориентируема сфера аффинного евклидова пространства, ориентируемы как многообразия поверхности 2-го порядка — мы это докажем позже (следствие 2 теоремы 30). В качестве упражнения было бы полезным уже сейчас доказать эти факты.

Ориентируемость комплексных многообразий

Теорема 24. *Любое многообразие V класса C^1 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ ориентируемо и допускает каноническую ориентацию.*

Доказательство. Пусть n — комплексная размерность V и $2n$ — ее вещественная размерность. Касательное векторное пространство $\vec{T}(x; V)$ является векторным пространством над полем комплексных чисел комплексной размерности n и вещественной размерности $2n$. Согласно теореме 10, оно имеет каноническую ориентацию $\mathcal{T}(x)$. Значит, на многообразии V имеется система канонических ориентаций $\mathcal{T}$. Остается доказать ее непрерывность, и тогда она определит каноническую ориентацию V.

Точно так же, как и в замечании, следующем за теоремой 22, можно найти систему n векторных полей $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$, касательных к V, непрерывных в точке $a \in V$ и всюду линейно независимых относительно поля комплексных чисел. Тогда $\vec{U}_1, i\vec{U}_1, \vec{U}_2, i\vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n, i\vec{U}_n$ будут образовывать систему касательных векторных полей, непрерывных в точке a и всюду линейно независимых относительно поля вещественных чисел. Согласно определению канонической ориентации $\mathcal{T}(x)$ комплексного пространства $\vec{T}(x; V)$, ее класс всюду положителен.

Поэтому он имеет постоянный знак в окрестности точки a. Согласно теореме 22, система ориентаций непрерывна в точке a. Так как точка a произвольна, теорема доказана.

Трансверсальная ориентация многообразия Σ размерности $n=N-1$ в аффинном пространстве E размерности N над полем вещественных чисел

Рассмотрим в N-мерном аффинном пространстве E над полем вещественных чисел гиперповерхность Σ класса C^1, т. е. многообразие класса C^1 размерности $n=N-1$. У нас имеется интуитивное представление о том, что представляют собой «две стороны» этой гиперповерхности. Например, их можно было бы покрасить: одну красным, а другую желтым цветом (выбор цветов произвольный). Наша задача теперь состоит в том, чтобы придать точный смысл этому понятию.

Выберем сначала некоторую точку a поверхности Σ. Ее касательное пространство $\vec{T}(a; \Sigma)$ является некоторой гиперплоскостью в пространстве $\vec{E}$. Она делит пространство $\vec{E}$ на два открытых полупространства. Другими словами, в множестве векторов пространства $\vec{E}$ она определяет два класса векторов, трансверсальных к гиперповерхности Σ в точке a, т. е. не лежащих в касательном пространстве $\vec{T}(a; \Sigma)$.

[Если уравнение этого касательного пространства имеет вид $F(x)=0$, где F — некоторая линейная форма на $\vec{E}$, то два эти полупространства будут определяться соответственно неравенствами $F(x)>0$ и $F(x)<0$. Эти полупространства являются прообразами при непрерывном отображении F открытых множеств $\xi>0$ и $\xi<0$ прямой $\mathbb{R}$, а следовательно, они сами открыты в $\vec{E}$, а также в дополнении к гиперплоскости. Следовательно, это дополнение не связно. Каждое из двух полупространств открыто и связно и даже линейно связно. В самом деле, если две точки $\vec{Y}$ и $\vec{Z}$ принадлежат одному и тому же полупространству, то соединяющий их отрезок гиперплоскости не пересекает. Действительно, так как F линейно,

$$F(t\vec{Y}+(1-t)\vec{Z})=tF(\vec{Y})+(1-t)F(\vec{Z}), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{VI,5;7}$$

т. е. F сохраняет постоянный знак на рассматриваемом отрезке.]

Говорят, что *гиперповерхность Σ трансверсально ориентирована в точке a или что зафиксированы соответствующие знаки двух сторон Σ в точке a*, если одно из двух полупространств, определенных гиперплоскостью $\vec{T}(a; \Sigma)$ в пространстве $\vec{E}$, снабжено знаком $+$, а другое знаком $-$. О векторе из положительного класса, трансверсальном в точке a, говорят, что «он пересекает векторное пространство, касательное к Σ в точке a» в положительном направлении или что он расположен на положительной стороне гиперповерхности Σ в точке a. Это означает также и то, что рассматривается факторпространство пространства $\vec{E}$ по гиперплоскости $\vec{T}(a; \Sigma)$. Это векторное факторпространство является *одномерным пространством над полем вещественных чисел*. Говорить о трансверсальной ориентации V в точке a все равно, что говорить об ориентации этого факторпространства в прежнем смысле.

Системой $\mathcal{N}$[1]) *трансверсальных ориентаций гиперповерхности* Σ называется такое отображение, которое каждой точке x из Σ ставит в соответствие некоторую трансверсальную ориентацию $\mathcal{N}(x)$ поверхности Σ в точке x. Это некоторая функция, определенная на Σ, которая в каждой точке x принимает значение в множестве, состоящем из двух элементов (которое зависит от точки x), а именно в множестве из двух возможных ориентаций векторного факторпространства $\vec{E}$ по $\vec{T}(x; \Sigma)$.

Выясним, как можно определить непрерывность системы трансверсальных ориентаций $\mathcal{N}$ многообразия Σ в точке $a \in \Sigma$.

Говорят, что поле X векторов пространства $\vec{E}$, определенных на Σ, трансверсально, если для каждой точки x из Σ вектор $\vec{X}(x)$ трансверсален в точке x к гиперповерхности Σ. Трансверсальные поля, непрерывные в точке $a \in \Sigma$, очевидно, существуют. В самом деле, существует окрестность точки a, в которой многообразие может быть записано в виде уравнения вида $x_1 = g(x_2, \ldots, x_N)$, где g принадлежит классу C^1, относительно подходящим образом выбранной системы координат. В этой окрестности постоянное векторное поле, равное вектору $\vec{e}_1$, непрерывно и трансверсально.

Определение. Говорят, что *система $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций гиперповерхности Σ непрерывна в точке $a \in \Sigma$*, если, каково бы ни было определенное на Σ непрерывное в точке a и трансверсальное векторное поле $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$, знак век-

---

[1]) Французские слова tangentiel (касательная) и transversal (трансверсаль) оба начинаются с буквы t. Мы заменили трансверсаль на нормаль и через $\mathcal{T}$ обозначили систему обычных (тангенциальных или касательных) ориентаций, а через $\mathcal{N}$ — систему трансверсальных или нормальных ориентаций. Понятие нормали имеет смысл только тогда, когда в E введена евклидова структура. — *Прим. перев.*

тора $\vec{X}(x)$ относительно трансверсальной ориентации $\mathcal{N}(x)$ является непрерывной функцией x в точке a, т. е. постоянной в некоторой окрестности точки a.

Теорема 25. *Если на Σ заданы две системы непрерывных в точке a трансверсальных ориентаций, то их отношение (функция, определенная на Σ и всюду равная $+1$ или -1*[1]*) непрерывно в точке a, т. е. постоянно в некоторой окрестности этой точки. Обратно, если это отношение непрерывно и одна из двух систем трансверсальных ориентаций непрерывна, то непрерывной будет и вторая система.*

Теорема очевидна.

Следствие. *Если гиперповерхность Σ связна и две системы трансверсальных ориентаций V непрерывны, то они либо всюду совпадают на V, либо всюду на V противоположны.*

В самом деле, их отношение непрерывно на Σ и может принимать только значения $+1$ и -1. Поскольку V связно, это отношение постоянно.

Говорят, что *гиперповерхность Σ пространства E трансверсально ориентируема*, если она допускает непрерывную систему трансверсальных ориентаций. Гиперповерхность называется *трансверсально ориентированной*, если задана одна из таких систем.

Если гиперповерхность Σ связна и если она трансверсально ориентируема, то она допускает две возможные трансверсальные ориентации, противоположные друг другу. Трансверсальная ориентация Σ будет фиксированной, если задать трансверсальную ориентацию в одной точке гиперповерхности Σ[2].

Трансверсальная ориентация с помощью непрерывных полей нормальных векторов

Приведем теперь некоторые теоремы относительно трансверсальной ориентации гиперповерхностей с помощью ориентации их нормалей в аффинном *евклидовом* пространстве.

Теорема 26. *Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 в аффинном евклидовом пространстве E. Для каждой точки a из Σ*

[1] В некоторой точке V это отношение равно $+1$, если положительные классы трансверсальных векторов, определенных двумя системами трансверсальных ориентаций, совпадают в ней. В противном случае оно равно -1.

[2] *Тангенциальная* ориентация многообразия, рассмотренная ранее, является внутренним свойством многообразия; многообразие может быть абстрактным. *Трансверсальная* ориентация относится к многообразию, лежащему в окружающем его пространстве. Можно определить две стороны кривой на плоскости, но это невозможно сделать ни для кривой, лежащей в $\mathbb{R}^3$, ни для абстрактной кривой.

в некоторой ее окрестности существует непрерывное поле единичных нормальных векторов.

Система трансверсальных ориентаций $\mathscr{N}$ поверхности Σ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда указанное поле имеет постоянный знак в некоторой окрестности точки a относительно трансверсальной ориентации $\mathscr{N}$.

Доказательство. В силу следствия теоремы 33_2 гл. III существует некоторая окрестность точки a, в которой гиперповерхность определяется нормальным уравнением $f(x)=0$, где f — некоторая функция класса C^1. Векторное поле, определенное векторами $\vec{\nu}(x)=\frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)\|}$, является непрерывным полем единичных нормальных векторов. Если непрерывная система трансверсальных ориентаций $\mathscr{N}$ задана в окрестности точки a, то по определению такое непрерывное поле должно иметь постоянный знак относительно $\mathscr{N}$ в некоторой окрестности точки a.

Обратно, предположим, что рассматриваемое поле имеет постоянный знак в некоторой окрестности точки a относительно некоторой системы трансверсальных ориентаций $\mathscr{N}$ поверхности Σ в окрестности точки a. Пусть X — произвольное непрерывное трансверсальное поле, определенное в некоторой окрестности точки a. Тогда скалярное произведение $(\vec{X}(x)\,|\,\vec{\nu}(x))$ непрерывно в точке a. Это произведение всюду $\neq 0$, а потому оно сохраняет постоянный знак в окрестности точки a, откуда следует, что в этой окрестности $\vec{X}(x)$ и $\vec{\nu}(x)$ имеют либо одинаковые, либо противоположные знаки относительно любой системы трансверсальных ориентаций, непрерывной или нет. Если рассматриваемая система ориентаций $\mathscr{N}$ такова, что поле $\vec{\nu}$ имеет постоянный знак в окрестности точки a, то то же самое будет верно для поля $\vec{X}$, а это по определению влечет за собой непрерывность системы $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций в точке a.

Следствие 1. *Для того чтобы система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций гиперповерхности Σ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы поле $\vec{\nu}_+$ нормальных к Σ единичных векторов, положительных относительно системы $\mathscr{N}$, было непрерывным в точке a.*

Действительно, если поле единичных нормальных положительных относительно $\mathscr{N}$ векторов непрерывно в точке a, то мы имеем непрерывное поле единичных нормальных векторов постоянного знака, а значит, система ориентаций $\mathscr{N}$ непрерывна в точке a.

Обратно, предположим, что система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a. Мы уже рассматривали непрерывное поле $\vec{\nu}$ единичных нормальных векторов. Это поле сохраняет постоянный знак относительно $\mathscr{N}$ в некоторой окрестности точки a. Следовательно, само это поле или его противоположное является полем $\vec{\nu}_+$ единичных нормальных положительных векторов и непрерывно в точке a.

Следствие 2. *Для того чтобы гиперповерхность Σ евклидова пространства E была трансверсально ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы на Σ существовало непрерывное поле единичных нормальных векторов. Если поверхность Σ трансверсально ориентируема, то поле единичных нормальных векторов, положительных в трансверсальной ориентации, непрерывно.*

В самом деле, если существует непрерывное поле $\vec{\nu}$ единичных нормальных векторов и если в каждой точке x многообразия Σ мы зафиксируем трансверсальную ориентацию $\mathscr{N}(x)$ так, чтобы вектор $\vec{\nu}(x)$ был положителен в ориентации $\mathscr{N}(x)$, то из теоремы следует, что определенная таким образом система ориентаций $\mathscr{N}$ непрерывна, а следовательно, гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема.

Обратно, если гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема, то, согласно следствию 1, поле единичных нормальных положительных векторов непрерывно.

Следствие 3. *Каждая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства E, глобально определенная одним нормальным уравнением $f(x)=0$, где f принадлежит классу C^1 в E, трансверсально ориентируема. Каждая замкнутая гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства трансверсально ориентируема. Сферы евклидова пространства трансверсально ориентируемы.*

Если E снабжено некоторой евклидовой структурой, то при первом предположении существует непрерывное поле единичных нормальных векторов, а именно $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f / \| \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \|$. Теперь достаточно применить следствие 2.

Мы видели (замечание 2°) на стр. 808 т. I), что каждая замкнутая гиперповерхность класса C^∞ может быть определена одним нормальным уравнением. Поэтому она всегда трансверсально ориентируема. Можно доказать, что результат сохраняется в случае гиперповерхности класса C^1 [1]).

[1]) Доказательство очень сложно, и мы этот результат примем без доказательства.

Сферы евклидова пространства и поверхности второго порядка (без особых точек) имеют нормальное уравнение, а значит, трансверсально ориентируемы. Для сферы с уравнением $\|x - O\|^2 - R^2 = 0$ поле, определенное предыдущим способом, имеет такой вид: $x \to \frac{\overrightarrow{x-O}}{R}$. Это «выходящее» нормальное поле, направленное по продолжению радиус-вектора с началом в центре. Говорят, что сферу можно трансверсально ориентировать так, что выходящие векторы будут положительными.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{N}$ — система трансверсальных ориентаций на гиперповерхности Σ N-мерного аффинного пространства E. Если в некоторой окрестности точки a существует хотя бы одно непрерывное поле $\vec{X}$ трансверсальных векторов, имеющее постоянный знак в этой окрестности относительно $\mathcal{N}$, то система $\mathcal{N}$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зафиксируем на E некоторую евклидову структуру; например, выбрав некоторую систему координат, отождествим E с $\mathbb{R}^N$. Пусть $\vec{\nu}$ — непрерывное поле единичных нормальных векторов в окрестности a. Тогда скалярное произведение $(\vec{X} \mid \vec{\nu})$ непрерывно, и, следовательно, как мы видели в теореме 26, поле $\vec{X}$ и поле $\vec{\nu}$ всегда имеют либо один и тот же знак, либо противоположные знаки относительно произвольной, непрерывной или нет, системы трансверсальных ориентаций в окрестности точки a. Однако так как поле $\vec{X}$ имеет постоянный знак относительно $\mathcal{N}$ в окрестности a, то то же самое будет верно для поля $\vec{\nu}$, а из теоремы 26 будет следовать, что система $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a.

Замечание. Когда в физике говорят о двух сторонах связной гиперповерхности Σ евклидова пространства, то считают, что Σ «утолщена», т. е. ей придают некоторый объем $\mathcal{U}$, ограниченный двумя гиперповерхностями Σ' и Σ'', «параллельными Σ» и полученными откладыванием на нормали к Σ в каждой ее точке a двух малых векторов $\pm \varepsilon\vec{\nu}(a)$ с одной и другой стороны от этой точки. Локально это не приводит к трудностям [1]). Однако есть ли у нас уверенность в том, что глобально эти поверхности Σ' и Σ'' «различны»? Они будут такими, т. е.

[1]) Необходимо также, чтобы точки $x \pm \varepsilon\vec{\nu}(x)$ действительно описывали некоторые многообразия. Если поверхность Σ компактна и принадлежит классу C^2, то это утверждение можно доказать.

граница $\mathcal{U}$ имеет две, а не одну связные составляющие тогда и только тогда, когда Σ трансверсально ориентируема. Если же это не так, то $a+\varepsilon\vec{\nu}(a)$ и $a-\varepsilon\vec{\nu}(a)$ могут быть соединены некоторым путем (не расположенным целиком в окрестности точки a).

Мы заменим подход, в котором участвует «утолщение» $\mathcal{U}$ и точки $a\pm\varepsilon\vec{\nu}(a)$, более удобным изучением поля нормалей $\vec{\nu}$.

Разбиение пространства на области с помощью гиперповерхностей

Дадим теперь другое определение двух сторон гиперповерхности E, обращаясь к более непосредственному представлению о разделении пространства гиперповерхностью на две части.

Предположим для определенности, что поверхность Σ является некоторой сферой евклидова пространства. Тогда она разделяет пространство E на две области, которые называются обычно, кстати говоря довольно неудачно, внутренностью и внешностью сферы. Можно сказать, что из двух сторон сферы одна «смотрит внутрь сферы», а другая «смотрит вне сферы». Однако совершенно очевидно, что такое описание в общем случае невозможно.

Предположим, например, что в плоскости $\mathbb{R}^2$ гиперповерхность Σ является открытым отрезком $]0, 1[$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Ясно, что эта гиперповерхность трансверсально ориентируема, однако Σ не делит пространства на две области, и метод, примененный для сфер, в этом случае непригоден.

Однако локально такой отрезок еще может разделить пространство на две области. Иначе говоря, если взять произвольную точку рассматриваемого отрезка $]0, 1[$ и маленькую окрестность этой точки, то эта окрестность, если она хорошо выбрана, делится отрезком на две области.

Определение. Говорят, что *связное топологическое пространство E делится множеством A на k «областей»* (k конечно или бесконечно), если дополнение к A состоит из k связных компонент. Эти связные компоненты называются *областями, определенными в E множеством A*.

В случаях, которые мы собираемся рассмотреть, пространство E будет локально связным (например, аффинным нормированным пространством, или открытым множеством аффинного нормированного пространства, или многообразием), а множество A замкнутым в E. Тогда $\complement A$ открыто в E и локально связно. В дополнении по общей топологии связных пространств (теоремы 36_6 и в следующих за ней замечаниях гл. II тома I) отмечалось, что каждая связная компонента $\complement A$ открыта в $\complement A$, а следовательно, и в E, поскольку дополнение $\complement A$ открыто в E. Таким образом, $\complement A$ является объединением k непустых открытых связных непересекающихся частей.

Теорема 27. *Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 в E. Тогда, какова бы ни была точка a из Σ, существует открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки a в E, обладающая следующими свойствами:*

1°) *Окрестность $\mathscr{V}$ гомеоморфна некоторому открытому шару.*

2°) *Пересечение $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто в окрестности $\mathscr{V}$ и делит ее на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Любая точка пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ является точкой прикосновения каждой из этих двух областей*[1].

3°) *Гиперповерхность Σ имеет в $\mathscr{V}$ нормальное уравнение $f(x) = 0$, и обе области определяются неравенствами $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.*

Доказательство. Согласно следствию 2_2 теоремы 32 гл. III, существует C^1-диффеоморфизм Φ открытого множества $\mathscr{O}$ из $\mathbb{R}^N$ на окрестность $\Phi(\mathscr{O})$ точки a в E, такую, что пересечение $\Sigma \cap \Phi(\mathscr{O})$ является образом при отображении Φ пересечения $\mathscr{O}$ с гиперповерхностью $u_1 = 0$. Если $\Phi(\alpha) = a$, то достаточно будет выбрать в $\mathscr{O}$ некоторый открытый шар с центром α и мы получим открытое множество из $\mathscr{O}$, разделенное гиперповерхностью $u_1 = 0$ на две области.

Если теперь в качестве $\mathscr{V}$ взять образ этого шара при отображении Φ, то, поскольку Φ является гомеоморфизмом, мы получим искомое открытое множество. Функция f является результатом преобразования функции $u \to u_1$ на $\mathbb{R}^N$ с помощью отображения Φ, т. е. $f(x) =$ первая координата отображения $\Phi^{-1}(x)$.

---

[1]) Это свойство показывает, что гиперповерхность имеет не очень сложный вид. Если рассмотреть замкнутое множество A, изображенное на рис. 3, то можно заметить, что оно делит плоскость на две области. Однако

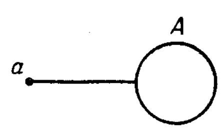

Рис. 3.

имеются такие его точки, как точка a, которые являются точками прикосновения только одной из этих областей.

Сформулируем теперь глобальную теорему, которая применима в случае замкнутой гиперповерхности Σ.

Теорема 28. *Каждая замкнутая непустая гиперповерхность Σ класса C^1 аффинного пространства E разделяет его по крайней мере на две области, и точно на две области, если гиперповерхность Σ связна.*

Доказательство. 1°) Доказательство того, что $\Omega = \complement\Sigma$ состоит *по крайней мере* из двух областей, довольно сложно, и потому мы его опускаем.

2°) Напротив, относительно легко убедиться в том, что если гиперповерхность Σ связна, то имеется не более двух областей. В самом деле, пусть $(\Omega_i)_{i \in I}$ — связные компоненты области $\Omega = \complement\Sigma$.

Докажем, что множество точек гиперповерхности Σ, являющихся точками прикосновения одного из Ω_i, одновременно открыто и замкнуто в Σ. Это множество, очевидно, замкнуто в Σ, поскольку оно является пересечением Σ с замкнутым множеством $\overline{\Omega}_i$ из E. Докажем, что оно открыто в Σ. В самом деле, пусть a — точка из Σ, являющаяся точкой прикосновения множества Ω_i. Пусть $\mathscr{V}$ — окрестность точки a в E, обладающая указанными в теореме 27 свойствами. Поскольку a является точкой прикосновения для Ω_i, то хотя бы одно из двух открытых множеств $\mathscr{V}_1$ или $\mathscr{V}_2$ пересекается с Ω_i. Если, например, $\mathscr{V}_1$ пересекается с Ω_i, то множество $\mathscr{V}_1 \cup \Omega_i$ является объединением двух связных подмножеств, имеющих непустое пересечение, а следовательно, согласно теореме 36_2 (стр. 92 т. I), связно. Однако Ω_i является связной компонентой Ω, а следовательно, не существует связной части множества Ω, строго большей, чем Ω_i. Значит, $\Omega_i \cup \mathscr{V}_1 = \Omega_i$ или $\mathscr{V}_1 \subset \Omega_i$. В этом случае все точки, близкие к a (точки пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}_i$), являются точками прикосновения окрестности $\mathscr{V}_1$, а значит, и Ω_i.

Поскольку гиперповерхность Σ по предположению связна, то каждая точка Σ является точкой прикосновения множества Ω_i или же в Σ нет ни одной точки прикосновения этого множества. Однако второй случай не может иметь места. В самом деле, пусть m_i — некоторая точка Ω_i. Известно (стр. 83 т. I), что в Σ имеется точка a_i, расстояние от которой до m_i минимально. Отрезок $]a_i, m_i]$ и множество Ω_i связны и имеют непустое пересечение, поскольку оба они содержат точку m_i. Следовательно, их объединение связно, и так как Ω_i является связной компонентой Ω, то $]a_i, m_i] \subset \Omega_i$. Но тогда $a_i \in \Sigma$ является точкой прикосновения отрезка $]a_i, m_i]$, а значит, и множества Ω_i. *Отсюда следует, что каждая точка гиперповерхности Σ является точкой прикосновения множества Ω_i.*

Однако точка из Σ может быть точкой прикосновения не более чем двух из этих множеств. В самом деле, возьмем снова точку $a \in \Sigma$ и уже рассмотренное открытое множество $\mathscr{V}$, которое делится множеством $\Sigma \cap \mathscr{V}$ на два открытых множества $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Мы видели, что если a является точкой прикосновения Ω_i, то хотя бы одно из открытых множеств $\mathscr{V}_1$ или $\mathscr{V}_2$ целиком лежит в Ω_i, чем и доказывается наше утверждение.

Таким образом, мы показали, что точка $a \in \Sigma$ является точкой прикосновения каждого множества Ω_i и не может быть точкой прикосновения более чем двух из этих множеств. Отсюда вытекает, что Ω состоит не более чем из двух областей. Теорема доказана.

Замечания. 1°) Теорему можно распространить на недифференцируемые гиперповерхности, но эта задача еще сложнее.

Например, множество аффинного N-мерного пространства E, гомеоморфное сфере в $\mathbb{R}^N$, *без условия дифференцируемости*, делит E на две области. [При $N=2$ это утверждение является теоремой Жордана: «Замкнутая простая (без двойных точек) кривая, т. е. множество, гомеоморфное окружности, делит плоскость на две области». При $N=3$ — это теорема Лебега.]

2°) Если гиперповерхность Σ не замкнута, то ее дополнение в E может быть связным. Так будет, например, если Σ является открытым отрезком $]0, 1[$ вещественной оси в $\mathbb{R}^2$.

3°) Если связная поверхность Σ не компактна (например, если это гиперплоскость), то ни одна из областей, определенных поверхностью Σ, не является «привилегированной» по сравнению с другой.

Если же связная гиперповерхность Σ компактна в E, то она ограничена. Пусть B — замкнутый шар, содержащий Σ. Дополнение к B является открытым связным множеством в E, не имеющим общих точек с Σ, и следовательно, целиком лежит в одной из двух областей Ω_1 и Ω_2, определенных в E гиперповерхностью Σ. Пусть это будет область Ω_2. Она не зависит от выбора шара B. В самом деле, если B' — другой замкнутый шар, содержащий Σ, и если $\complement B'$ содержится в Ω_1, то мы получили бы, что для замкнутого шара B'', содержащего одновременно B и B', дополнение $\complement B''$ будет одновременно лежать в Ω_1 и Ω_2, что невозможно.

Область Ω_2 называется *областью, содержащей бесконечно удаленную точку*, или *связной компонентой бесконечности в* $\complement\Sigma$, или *внешней областью, определяемой поверхностью* Σ, а область Ω_1 — *внутренней областью*. Так как Ω_1 содержится в каждом замкнутом шаре, содержащем Σ, то область Ω_1 ограничена.

Трансверсальная ориентация гиперповерхности и разбиение пространства на области

С помощью двух областей, определенных поверхностью Σ в пространстве E, можно определить трансверсальную ориентацию нового типа.

Определение. Пусть Σ — гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства E, и пусть $\mathscr{V}$ — такое открытое множество в E, что $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто и делит $\mathscr{V}$ на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Пусть a — точка Σ, являющаяся одновременно точкой прикосновения для $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Вектор $\vec{X}$ пространства $\vec{E}$, трансверсальный к Σ в точке a, называется *входящим в область* $\mathscr{V}_1$, если он является вектором «начальной скорости» для некоторой траектории M: $t \to M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $M(0) = a$, класса C^1, целиком лежащей при $t > 0$ в области $\mathscr{V}_1$. (Напомним, что вектором скорости в точке t траектории M класса C^1 является производный вектор $d\vec{M}/dt$. Здесь предполагается, что $M(0) = a$ и $d\vec{M}/dt(0) = \vec{X}$.) Вектором, *выходящим из области* $\mathscr{V}_1$, называют по определению вектор, входящий в область $\mathscr{V}_2$. (Вовсе *не очевидно*, что трансверсальный вектор не может быть одновременно входящим и выходящим или ни тем, ни другим! Мы в этом убедимся позже в теореме 29, п. 4°).)

Дадим другое определение входящих и выходящих векторов.

Теорема 29. *Пусть Σ — некоторая гиперповерхность класса C^1 аффинного пространства E. Пусть a — некоторая точка Σ и $\mathscr{V}$ — открытая окрестность точки a в E, обладающая свойствами, указанными в теореме 27. Тогда:*

1°) *Для того чтобы трансверсальный вектор $\vec{X}$ в точке $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ был входящим в $\mathscr{V}_1$, необходимо и достаточно, чтобы для достаточно малого $t > 0$ точка $x + t\vec{X}$ лежала в $\mathscr{V}_1$.*

2°) *Если $f(x) = 0$ — нормальное уравнение гиперповерхности Σ в $\mathscr{V}$, такое, что область $\mathscr{V}_1$ определяется неравенством $f(x) > 0$, то вектор $\vec{X}$ будет трансверсальным в точке $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ и входящим в $\mathscr{V}_1$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$.*

3°) *Если вектор $\vec{X}$ является трансверсальным в x и входящим в $\mathscr{V}_1$, то для каждой вещественной функции φ класса C^1, определенной в $\mathscr{V}$, равной нулю на Σ и $\geqslant$ на $\mathscr{V}_1$, имеет место неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Обратно, если вектор $\vec{X}$ трансверсален и если для некоторой функции φ этого типа имеет место неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} > 0$, то $\vec{X}$ является входящим в $\mathscr{V}_1$ в точке x.*

4°) *В каждой точке* $x \in \Sigma \cap \mathscr{V}$ *множество трансверсальных векторов, входящих в* $\mathscr{V}_1$, *и множество трансверсальных векторов, входящих в* $\mathscr{V}_2$, *образуют два класса трансверсальных векторов, определенных гиперплоскостью* $\vec{T}(x; \Sigma)$ *в* E. *Если класс векторов, входящих в* $\mathscr{V}_1$, *назвать положительным, то тем самым на* $\Sigma \cap \mathscr{V}$ *будет определена непрерывная система трансверсальных ориентаций.*

Доказательство. 1°) a) Пусть $\vec{X}$ — трансверсальный вектор к Σ в точке x, такой, что при некотором $t > 0$ точка $x + t\vec{X}$ лежит в $\mathscr{V}_1$. Тогда мы имеем траекторию $x + t\vec{X}$, для которой вектор $\vec{X}$ является вектором начальной скорости, так что, согласно определению, $\vec{X}$ является входящим в $\mathscr{V}_1$. Обратное утверждение будет доказано несколько позже.

3°) a) Докажем, что если вектор $\vec{X}$ является трансверсальным к Σ в x и входящим в $\mathscr{V}_1$, а функция φ класса C^1 равна нулю на Σ и $\geqslant 0$ на $\mathscr{V}_1$, то $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Пусть M — некоторая траектория в $\mathscr{V}_1$, для которой $\vec{X}$ является вектором начальной скорости. Тогда функция $\varphi \circ M$ неотрицательна для $t \geqslant 0$, равна нулю при $t = 0$ и принадлежит классу C^1. Ее производная при $t = 0$, очевидно, $\geqslant 0$. Согласно теореме о производной сложной функции, это приводит к неравенству $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$.

2°) a) Функция f является частным случаем функции φ. Поэтому если вектор $\vec{X}$ трансверсален и входит в $\mathscr{V}_1$ в точке x, то $f'(x) \cdot \vec{X} \geqslant 0$. Но $f'(x) \cdot \vec{X} = \vec{0}$ является уравнением касательного векторного подпространства. Вектор $\vec{X}$, будучи трансверсальным, не лежит в этом подпространстве, а следовательно, $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$.

2°) b) Обратно, пусть $\vec{X}$ — такой вектор, что $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Тогда функция $t \to f(x + t\vec{X})$ принадлежит классу C^1 и равна нулю при $t = 0$, а ее производная $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$ при $t = 0$. Следовательно, при достаточно малом $t > 0$ эта функция > 0. Отсюда вытекает, что точка $x + t\vec{X}$ при достаточно малом $t > 0$ лежит в $\mathscr{V}_1$, а значит, согласно 1°) a), вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$. Тем самым утверждение 2°) полностью доказано.

4°) Если заменить $\mathscr{V}_1$ на $\mathscr{V}_2$ и f на $-f$, то, согласно 2°), каждый трансверсальный вектор входит или в $\mathscr{V}_1$, или в $\mathscr{V}_2$: $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$ (соответственно в $\mathscr{V}_2$) в точке x, если $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$

(соответственно <0). Множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$, и множество трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_2$, являются двумя полупространствами, определенными гиперплоскостью $\vec{T}(x; \Sigma)$, уравнение которой имеет вид $f'(x) \cdot \vec{X} = \vec{0}$.

Назовем положительным класс трансверсальных векторов, входящих в $\mathscr{V}_1$. Тем самым будет определена некоторая система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций. Если $\vec{X}$: $x \to \vec{X}(x)$ является непрерывным *полем* трансверсальных векторов, то $x \to f'(x) \cdot \vec{X}(x$ будет вещественной непрерывной функцией на $\Sigma \cap \mathscr{V}$, всюду $\neq 0$, а значит, сохраняющей знак в окрестности каждой точки Это говорит о том, что вектор $\vec{X}$ сохраняет постоянный знак относительно $\mathscr{N}$. Значит, система трансверсальных ориентаций $\mathscr{N}$ непрерывна, и тем самым доказано утверждение 4°).

1°) b) Если вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$ в точке x, то, согласно 2°) a), $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Следовательно, согласно доказанному в 2°) b), точка $x + t\vec{X}$ для достаточно малого $t > 0$ лежит в $\mathscr{V}_1$. Этим заканчивается доказательство утверждения 1°).

3°) b) Пусть φ — вещественная функция класса C^1, равная нулю на $\Sigma \cap \mathscr{V}$, $\geqslant 0$ в $\mathscr{V}_1$ и такая, что $\varphi'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Вектор $\vec{X}$ предполагается трансверсальным [1]). Следовательно, согласно 4°), вектор $\vec{X}$ или вектор $-\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$. Во втором случае, согласно 3°) a), выполнялось бы неравенство $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \leqslant 0$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, вектор $\vec{X}$ входит в $\mathscr{V}_1$, чем и заканчивается доказательство утверждения 3°) и всей теоремы.

Замечания. 1°) Утверждения 1°), 3°), 4°) теоремы сохраняются в том случае, когда область $\mathscr{V}$ является *произвольным* открытым множеством пространства E, в котором пересечение $\Sigma \cap \mathscr{V}$ замкнуто и делит $\mathscr{V}$ на две области $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$, для каждой из которых все точки пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ являются точками прикосновения. Если существует нормальное уравнение $f(x) = 0$ пересечения $\Sigma \cap \mathscr{V}$ в $\mathscr{V}$, то справедливым будет и утверждение 2°).

Предположим, что пространство E евклидово и что поверхность Σ является сферой с нормальным уравнением $\| x - O \|^2 - R^2 = 0$. «Внутренней областью» множества $E - \Sigma$ принято называть его часть, содержащую центр сферы O, а «внешней областью» — ту часть, которая этим свойством не обладает.

[1]) Легко видеть, что в силу условия $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \neq 0$ вектор $\vec{X}$ обязательно является трансверсальным.

Неравенства $\|\overrightarrow{x - O}\|^2 < R^2$ и $\|\overrightarrow{x - O}\|^2 > R^2$ являются соответственно уравнениями этих частей. Входящими (соответственно выходящими) векторами в точке сферы называют входящие (соответственно выходящие) векторы относительно внутренней области. Трансверсальной канонической ориентацией сферы называют ту ориентацию, для которой выходящие векторы положительны.

2°) Если Σ — замкнутая связная гиперповерхность пространства E, то она делит это пространство на две области Ω_1 и Ω_2 (теорема 28). Следовательно, гиперповерхность Σ трансверсально ориентируема и можно будет, например, назвать положительными трансверсальные векторы, входящие в Ω_1. Мы снова получаем следствие 3 теоремы 26. Если гиперповерхность Σ компактна, то из замечания 3°) на стр. 171 вытекает, что Ω_1 и Ω_2 играют неодинаковую роль: Ω_1 является внутренней (или ограниченной) областью, а Ω_2—внешней областью (или областью бесконечности). Учитывая замечание 1°), *можно определить «привилегированную» трансверсальную ориентацию гиперповерхности* Σ, в которой входящие в Ω_2 или выходящие из Ω_1 векторы, называемые просто выходящими векторами, положительны.

Связь между трансверсальной и касательной ориентациями

Теорема 30. *Для того чтобы гиперповерхность Σ аффинного пространства была ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была трансверсально ориентируемой. Если, кроме того, пространство E ориентировано, то оно определяет каноническое соответствие между обычными, или касательными, ориентациями гиперповерхности Σ и ее трансверсальными ориентациями.*

Доказательство. Предположим, что пространство E ориентировано и задана система $\mathcal{T}$ касательных ориентаций гиперповерхности Σ.

Построим систему $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций следующим образом. Будем говорить, что трансверсальный в x вектор $\vec{X}$ положителен (соответственно отрицателен), если для некоторого *положительного в ориентации* $\mathcal{T}(x)$ *базиса* $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ *гиперплоскости* $\vec{T}(x; \Sigma)$ базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_n$ пространства $\vec{E}$ положителен (соответственно отрицателен) в смысле ориентации пространства E. Если это свойство выполняется для *некоторого базиса* гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$, то оно выполняется и *для любого другого положительного базиса.*

В самом деле, если U: $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — некоторый базис пространства $\vec{T}(x; \Sigma)$ и U': $\vec{U}'_1, \vec{U}'_2, \ldots, \vec{U}'_{N-1}$ — другой его базис, то определитель U' относительно U равен определителю базиса $\vec{X}, \vec{U}'_1, \ldots, \vec{U}'_{N-1}$ пространства $\vec{E}$ относительно базиса $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$. Следовательно, наше определение не зависит от выбранного положительного базиса в $\vec{T}(x; \Sigma)$.

Определенная нами ориентация является трансверсальной ориентацией Σ в точке x. В самом деле, если $\vec{Y}$ — другой произвольный трансверсальный вектор в точке x, то мы можем записать, что $\vec{Y} = \lambda\vec{X} + \lambda_1\vec{U}_1 + \ldots + \lambda_{N-1}\vec{U}_{N-1}$. При этом в зависимости от того, будет ли $\lambda > 0$ или <0, векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ лежат или нет в одном и том же подпространстве, определенном в $\vec{E}$ гиперплоскостью $\vec{T}(x; \Sigma)$. Здесь λ — это определитель системы векторов $\vec{Y}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ относительно базиса $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$. Следовательно, все векторы, принадлежащие одному из полупространств, имеют в силу предыдущего определения один и тот же знак, а два вектора, принадлежащие различным полупространствам, имеют противоположные знаки. Это означает, что мы определили некоторую трансверсальную ориентацию гиперповерхности Σ в точке x и, следовательно, некоторую систему $\mathcal{N}$ ее трансверсальных ориентаций.

Обратно, если мы будем исходить из системы $\mathcal{N}$ трансверсальных ориентаций гиперповерхности Σ, то сможем сказать, что некоторый базис $\vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$ положителен, если базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ пространства $\vec{E}$ положителен относительно ориентации $\vec{E}$, когда $\vec{X}$ — положительный трансверсальный вектор относительно $\mathcal{N}(x)$.

Рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что это определение не зависит от выбора вектора $\vec{X}$, положительного в ориентации $\mathcal{N}(x)$, и что мы тем самым определили касательную ориентацию Σ в точке x, т. е. систему $\mathcal{T}$ касательных ориентаций. Кроме того, соответствия $\mathcal{T} \to \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ взаимно обратны друг другу. Если вектор $\vec{X}$ трансверсален в точке x к гиперповерхности Σ и $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — базис гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$, то знак системы $\vec{X}, \vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ в ориентации E равен произведению знака вектора $\vec{X}$ в $\mathcal{N}(x)$ на знак системы $\vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ в $\mathcal{T}(x)$.

Остается показать, что если система $\mathscr{T}$ касательных ориентаций непрерывна, то система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций также непрерывна, и обратно.

В некоторой окрестности точки a многообразия Σ можно найти систему $N-1$ касательных к многообразию векторных полей, которые являются непрерывными и линейно независимыми в каждой точке этого многообразия. Обозначим их так: $x \to \vec{U}_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, N-1$. Можно также найти непрерывное поле трансверсальных векторов $x \to \vec{X}(x)$. Система векторов $\vec{X}(x)$, $\vec{U}_1(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$ является системой N линейно независимых и непрерывных в точке a векторных полей. Отсюда следует, что ее знак относительно ориентации $\vec{E}$ постоянен в окрестности точки a, и, изменяя при необходимости поле $\vec{X}$, можно считать, что этот знак в окрестности точки a всюду положителен относительно выбранной ориентации в $\vec{E}$. Из всего сказанного вытекает, что знак системы из $N-1$ векторов $\vec{U}_1(x)$, $\vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$ относительно касательной ориентации $\mathscr{T}(x)$ совпадает со знаком вектора $\vec{X}(x)$ относительно соответствующей трансверсальной ориентации $\mathscr{N}(x)$. Согласно теореме 22, первый знак постоянен в окрестности точки a тогда и только тогда, когда система $\mathscr{T}$ касательных ориентаций непрерывна в точке a, а, согласно следствию 4 теоремы 26, второй знак постоянен в окрестности точки a тогда и только тогда, когда система $\mathscr{N}$ трансверсальных ориентаций непрерывна в точке a. Следовательно, ориентация $\mathscr{T}$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна ориентация $\mathscr{N}$. Тем самым теорема доказана.

Замечания. 1°) Если в качестве гиперповерхности Σ мы возьмем гиперплоскость $x_1=0$, то ориентация этого многообразия, в которой система векторов $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ положительна, находится в соответствии с той трансверсальной ориентацией, в которой положительно векторное поле $\vec{e}_1$.

Если в качестве гиперповерхности взять гиперплоскость $x_k=0$, то ориентация, в которой положительна система векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_N$, находится в соответствии с трансверсальной ориентацией, в которой положительно векторное поле $(-1)^{k-1}\vec{e}_k$.

2°) Пусть $U=\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ — базис гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma)$. Если $\vec{E}$ является ориентированным евклидовым пространством, то можно определить векторное произведение $\vec{X} = [\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{U}_{N-1}]$, нормальное к Σ в точке x (теорема 11). С другой стороны, базис $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ положителен в ориентации пространства $\vec{E}$. Следовательно, *базис U положителен в касательной ориентации тогда и только тогда, когда вектор $\vec{X}$ положителен в соответствующей трансверсальной ориентации.*

Пусть Φ — карта многообразия, образ которой покрывает точку a, где $\Phi(\alpha) = a$, и $\mathcal{T}$ — некоторая система ориентаций гиперповерхности Σ. Система векторов $\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_i}(\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, является образом при отображении $\Phi'(\alpha)$ системы векторов канонического базиса пространства $\mathbb{R}^{N-1}$. Следовательно, если θ — функция, соответствующая системе $\mathcal{T}$ касательных ориентаций (стр. 151), то знак этой системы векторов в $\vec{T}(a; V)$ равен $\theta(\alpha; \Phi)$.

Значит, векторное произведение этих векторов имеет такой же знак относительно соответствующей трансверсальной ориентации. Другими словами, трансверсальной ориентацией $\mathcal{N}$, соответствующей данной касательной ориентации $\mathcal{T}$, будет та, в которой вектор

$$\theta(\alpha; \Phi)\left[\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_1}(\alpha) \wedge \frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_2}(\alpha) \wedge \ldots \wedge \frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u_{N-1}}(\alpha)\right] \qquad (\mathrm{VI}, 5; 8)$$

является нормальным положительным вектором для любой карты Φ и любой точки α.

3°) Возьмем частный случай, когда размерность $N = 1$, и пусть c — некоторая точка пространства E, которую мы будем рассматривать как гиперповерхность. В этом случае соответствие между касательными и трансверсальными ориентациями устанавливается *по определению* следующим образом.

Ориентировать точку c касательно — это значит приписать ей знак $+$ или $-$. Ориентировать ее трансверсально — это значит приписать знак $+$ или $-$ двум полупрямым, определяемым началом в точке c, т. е. значит ориентировать $\vec{E}$. Если $\vec{E}$ снабжено некоторой ориентацией, то мы будем устанавливать соответствие между касательной и трансверсальной ориентациями точки c, приписывая этой точке знак $+$, если ее трансверсальная ориентация совпадает с заданной ориентацией $\vec{E}$.

Следствие 1. *Лист Мёбиуса не ориентируем трансверсально в $\mathbb{R}^3$.*

В самом деле, мы видели, что он не ориентируем (теорема 23_2). Зафиксировать «две стороны» этой поверхности невозможно. *Лист Мёбиуса является односторонней гиперповерхностью пространства* $\mathbb{R}^3$. Например, возьмем точку $\varphi = 0$, $\rho = 0$ и назовем положительной стороной в этой точке ту сторону, которая обращена к началу координат. Затем будем изменять непрерывно параметр φ и снова вернемся к началу координат со значением параметра $\varphi = 2\pi$ и $\rho = 0$. В результате положительной стороной окажется та, которая обращена в противоположную сторону от начала координат. В заданной точке поверхность действительно имеет две стороны, но глобально это утверждение неверно, поскольку можно, непрерывно перемещаясь по поверхности, перейти с одной стороны в некоторой точке к другой стороне в той же самой точке[1]).

Следствие 2. *Каждая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства, полностью определенная нормальным уравнением $f(x) = 0$, ориентируема. Каждая замкнутая гиперповерхность класса C^1 аффинного конечномерного пространства ориентируема. Сферы аффинного евклидова конечномерного пространства ориентируемы.*

Для доказательства достаточно применить следствие 3 теоремы 26[2]). В частности, если гиперповерхность Σ является компактной гиперповерхностью класса C^1, то она допускает привилегированную трансверсальную ориентацию (в которой, согласно замечанию 2°) на стр. 175, выходящие векторы положительны) и, следовательно, привилегированную касательную ориентацию, если пространство $\vec{E}$ ориентировано. Учитывая данное в доказательстве теоремы определение соответствия между трансверсальными и касательными ориентациями, можно видеть, что система $N-1$ линейно независимых векторов, касательных к Σ в точке x, положительна в этой касательной ориентации, если при подстановке перед этой системой

---

[1]) Говорят, что один бородач, не зная, куда класть свою бороду ночью — под одеяло или на него, купил себе последнее в виде листа Мёбиуса, имеющего только одну сторону. Однако ему не удалось выйти из создавшегося положения, поскольку его борода покрыла одеяло не полностью, а локально. В некоторой окрестности каждой точки всякая гиперповерхность трансверсально ориентируема и всегда имеет две стороны!

[2]) Лист Мёбиуса, определенный соотношениями (VI, 5; 4), *не замкнут* (взято *строгое* неравенство $-l < \rho < l$). Если бы было взято расширенное неравенство $-l \leqslant \rho \leqslant l$, то тогда мы бы не получили многообразия, поскольку имелся бы «край». Однако естественно, что в аффинном N-мерном пространстве E могут существовать замкнутые и даже компактные *неориентируемые* многообразия размерности $n < N-1$ (которые, следовательно, не являются гиперповерхностями).

векторов «выходящего» вектора получается положительный базис в ориентации пространства $\vec{E}$.

Если, в частности, положить $N=2$, то это снова дает обычную «прямую» ориентацию некоторой компактной кривой класса C^1 в ориентированной плоскости и «прямую» ориентацию тригонометрической окружности в $\mathbb{R}^2$.

Замечания. 1) Подводя итог результатам теоремы 28, следствия 3 теоремы 26 и следствия 2 теоремы 30, мы можем утверждать следующее:

Связная замкнутая гиперповерхность Σ класса C^1 конечномерного аффинного пространства E касательно и трансверсально ориентируема и делит это пространство на две области. Если гиперповерхность Σ компактна, то эти две области не равноценны (одна из них ограничена). Существуют трансверсальная каноническая ориентация (выходящие векторы положительны) и касательная каноническая ориентация, если $\vec{E}$ ориентировано.

2°) *Задать касательную ориентацию на кривой класса C^1 — значит задать направление обхода этой кривой.* В качестве положительного направления обхода выбирается такой обход, при котором вектор скорости в каждой точке, если он $\neq 0$, является положительным в смысле ориентации в этой точке.

3°) *Ориентировать двумерное многообразие V — значит указать направление обхода компактных кривых в окрестности каждой точки.* В самом деле, если, например, окружающее пространство E наделено евклидовой структурой, то ортогональная проекция многообразия на его касательное подпространство в точке a, суженная на достаточно малую окрестность $\mathscr{V}$ точки a, является C^1-диффеоморфизмом. Следовательно, направление обхода компактных кривых многообразия, содержащихся в окрестности $\mathscr{V}$ точки a, эквивалентно направлению обхода их проекций в касательной плоскости к многообразию в точке a. В силу имеющейся ориентации многообразия V касательная плоскость будет также снабжена ориентацией, а мы только что видели, что ориентация плоскости ориентирует ее компактные кривые, т. е. определяет на них некоторое направление обхода [1]).

4°) Пусть V есть n-мерное многообразие класса C^1 и Σ — гиперповерхность, т. е. некоторое подмногообразие V размерности $n-1$ класса C^1. Тогда сохраняются все *локальные* результаты,

[1]) *Этот результат носит чисто локальный характер*: для каждой точки $a \in V$ можно найти такую окрестность $\mathscr{V}$ этой точки, что ориентация V определяет направление обхода компактных *непрерывных* кривых в $\mathscr{V}$. Однако если сфера в $\mathbb{R}^3$ ориентируема, то это не даст привилегированного направления обхода на «больших кругах» этой сферы.

доказанные начиная с теоремы 25. Если многообразие V ориентируемо, то многообразие Σ касательно ориентируемо тогда и только тогда, когда это многообразие трансверсально ориентируемо. Если многообразие V ориентируемо, то существует взаимно однозначное соответствие между касательными ориентациями многообразия Σ и его трансверсальными ориентациями.

Однако глобальные теоремы относительно ориентации или о разделении на области не имеют места. Если многообразие Σ замкнуто в V, то оно может иметь связное дополнение. Например, параллели или меридианы на торе являются компактными гиперповерхностями, не разделяющими тор на несколько областей. То же самое верно и для средней окружности листа Мёбиуса (см. стр. 160). В дополнении V к началу координат в $\mathbb{R}^2$ полупрямая, выходящая из начала координат, является замкнутой гиперповерхностью, не делящей V на несколько областей. В каждом из этих случаев гиперповерхность не может определяться единственным нормальным уравнением $f(x)=0$ (в противном случае, как это было показано при доказательстве теоремы 28, она делила бы V по крайней мере на две области). Средняя окружность листа Мёбиуса касательно ориентируема, но не ориентируема трансверсально. Приведенные ранее глобальные теоремы носят частный характер и связаны с замкнутыми гиперповерхностями *аффинного пространства*. Все эти свойства относятся к области *алгебраической топологии*.

Является ли наша реальная вселенная ориентируемым многообразием? При изучении этого вопроса мы оставим в стороне точку зрения теории относительности, которая обязывает нас рассматривать четырехмерную вселенную и не вносит существенных усложнений в то, что касается ориентации.

Примем в качестве модели вселенной, в которой мы живем, некоторое трехмерное многообразие класса C^∞ и попытаемся выяснить, будет ли оно ориентируемым, и можно ли, учитывая некоторые физические законы, снабдить его канонической ориентацией. Предположим для определенности, что это многообразие не ориентируемо. Это означает, что существуют некоторые пути, аналогичные средней окружности листа Мёбиуса, такие, что, отправляясь от некоторой исходной ориентации в точке, где мы начинаем движение, и продолжая непрерывно эту ориентацию вдоль таких путей, можно вернуться в исходную точку с противоположной ориентацией [1]). Человек, совершивший такое путешествие, вернувшись на Землю, нашел бы, что его

[1]) В самом деле, можно доказать, что факты, связанные с листом Мёбиуса, являются общими: если некоторое многообразие не ориентируемо, то существуют «пути дезориентации» — компактные кривые, вдоль которых не существует никакой непрерывной системы ориентаций многообразия.

сердце расположено справа, а печень — слева. Если бы он захватил с собой книги на французском языке, то по возвращении оказалось бы, что они напечатаны справа налево, а если бы он взял с собой виннокаменную правовращающую кислоту, то вернулся бы с виннокаменной левовращающей кислотой [1]). *И все это, естественно, при отсутствии каких-либо изменений в каждой точке пути.* Впрочем, этот человек считал бы себя абсолютно нормальным и неизменившимся, а обращенными оказались бы для него все явления, с которыми он встретился на Земле. Для того чтобы вернуть все к прежнему состоянию, ему достаточно было бы совершить такое путешествие еще раз.

Этот простой пример показывает, как шатки те основания, на которых покоятся все понятия ориентации, даваемые в элементарных учебниках по физике и математике.

Амперовское правило буравчика *в его обычной формулировке*, справедливое в трехмерном *ориентированном* многообразии, строго говоря, не имеет смысла, если не выбрана правая или левая ориентация пространства. Рассматривая это правило более внимательно с этой точки зрения, можно заметить, что в определении магнитного поля имеется некоторая неточность. Человек, о котором мы говорили выше, совершивший длительное путешествие для того, чтобы получить другую ориентацию, вернулся бы *с обращенным компасом*, северный полюс которого был бы обозначен буквой S, а южный полюс — буквой N (определение этих полюсов связано с Землей, а ее он с собой в дорогу не брал). Если бы этот человек взял с собой провод, по которому проходит электрический ток, и компас, то для него за время его дальнего странствия ничего бы не изменилось. Но мы бы при его возвращении заметили, что его компас ориентирован в направлении, противоположном амперовскому правилу буравчика. Однако это было бы просто видимостью, поскольку обозначения N и S полюсов его компаса были бы неверными. Мы видим, что магнитное поле не является настоящим вектором. Это — аксиальный вектор, аналогичный векторному произведению. Отсюда следует, что наш путешественник, пройдя по пути, приводящему к изменению ориентации, не нашел бы даже изменений в электромагнитных законах! Эти законы не требуют, чтобы физическое пространство было ориентируемым [2]).

---

[1]) «Способ» непромышленного изготовления виннокаменной левовращающей кислоты.

[2]) В теории относительности разделять электрическое и магнитное поля не разрешается. Имеется некоторое «электромагнитное поле», антисимметричный тензор 2-го порядка (имеющий, следовательно, шесть основных составляющих), который является по сути дела некоторой *дифференциальной формой 2-й степени* в четырехмерной пространственно-временной вселенной. В галилеевской системе координат этой форме можно поставить в соответ-

Однако последние открытия в физике, относящиеся к радиоактивному β-распаду, как будто указывают на то, что пространство ориентируемо.

Рассмотрим атомное ядро, имеющее спин, т. е. имеющее заданное собственное вращение. Его вектор углового момента является векторным произведением — некоторым аксиальным вектором, т. е. вектором, зависящим от ориентации. Предположим, что это ядро радиоактивно и что опытным путем доказано, что при β-распаде имеется бо́льшая вероятность испускания электрона в одно из двух полупространств, определяемых плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения. Это явление не зависит от ориентации пространства. Теперь можно определить привилегированную ориентацию пространства, например такую, при которой угловой момент ядра будет лежать в том полупространстве, вероятность испускания в которое меньше. (Это та ориентация, которой на Земле соответствует право-левая ориентация человеческого тела. Она была экспериментально установлена физиком Ву в опыте с кобальтом-60, проведенном в 1956 г. и подтвердившем теоретические соображения Янга и Ли.)

Тем не менее, это физическое явление не достаточно убедительно, поскольку ничто не доказывает, что в очень удаленных от нас областях вселенной нет кобальта-60, «симметричного» по отношению к нашему, для которого имели бы место противоположные явления. Добавим ко всему этому, что наши представления о всей вселенной, быть может, так далеки от действительности, что вопрос об ориентации не имеет никакого смысла.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ НА ОРИЕНТИРОВАННОМ МНОГООБРАЗИИ

Мера Радона, определенная непрерывной дифференциальной формой $\vec{\omega}$ степени n на ориентированном n-мерном многообразии класса C^1

Пусть $\vec{V}$ — *ориентированное* n-мерное многообразие класса C^1 над полем вещественных чисел (абстрактное или содержащееся в аффинном пространстве), счетное в бесконечности[1]).

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта V. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма максимальной степени n, непрерывная

ствие некоторый полярный вектор (электрическое поле) и некоторый аксиальный вектор (магнитное поле).

[1]) В этом параграфе мы предполагаем, что все рассматриваемые в нем многообразия счетны в бесконечности. Непрерывное многообразие, содержащееся в аффинном пространстве, счетно в бесконечности.