Однако последние открытия в физике, относящиеся к радиоактивному β-распаду, как будто указывают на то, что пространство ориентируемо.

Рассмотрим атомное ядро, имеющее спин, т. е. имеющее заданное собственное вращение. Его вектор углового момента является векторным произведением — некоторым аксиальным вектором, т. е. вектором, зависящим от ориентации. Предположим, что это ядро радиоактивно и что опытным путем доказано, что при β-распаде имеется бóльшая вероятность испускания электрона в одно из двух полупространств, определяемых плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения. Это явление не зависит от ориентации пространства. Теперь можно определить привилегированную ориентацию пространства, например такую, при которой угловой момент ядра будет лежать в том полупространстве, вероятность испускания в которое меньше. (Это та ориентация, которой на Земле соответствует право-левая ориентация человеческого тела. Она была экспериментально установлена физиком Ву в опыте с кобальтом-60, проведенном в 1956 г. и подтвердившем теоретические соображения Янга и Ли.)

Тем не менее, это физическое явление не достаточно убедительно, поскольку ничто не доказывает, что в очень удаленных от нас областях вселенной нет кобальта-60, «симметричного» по отношению к нашему, для которого имели бы место противоположные явления. Добавим ко всему этому, что наши представления о всей вселенной, быть может, так далеки от действительности, что вопрос об ориентации не имеет никакого смысла.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ НА ОРИЕНТИРОВАННОМ МНОГООБРАЗИИ

Мера Радона, определенная непрерывной дифференциальной формой $\vec{\omega}$ степени n на ориентированном n-мерном многообразии класса C^1

Пусть $\vec{V}$ — *ориентированное* n-мерное многообразие класса C^1 над полем вещественных чисел (абстрактное или содержащееся в аффинном пространстве), счетное в бесконечности [1]).

Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — некоторая карта V. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма максимальной степени n, непрерывная

ствие некоторый полярный вектор (электрическое поле) и некоторый аксиальный вектор (магнитное поле).

[1]) В этом параграфе мы предполагаем, что все рассматриваемые в нем многообразия счетны в бесконечности. Непрерывное многообразие, содержащееся в аффинном пространстве, счетно в бесконечности.

на V и принимающая значения в *банаховом пространстве* $\vec{F}$[1]).

Рассмотрим теперь прообраз формы $\vec{\omega}$ при отображении Φ: $\Phi^*\vec{\omega}$. Так как форма $\vec{\omega}$ непрерывна и отображение Φ принадлежит классу C^1, то этот прообраз является непрерывной дифференциальной формой на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$ (теорема 14_2). Степень этой формы равна размерности n пространства $\mathbb{R}^n$, так что ее можно записать в виде

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n. \qquad (\text{VI}, 6; 1)$$

Свяжем с этой формой меру Радона, определенную на открытом множестве $\mathcal{O}$ со значениями в $\vec{F}$[2]), по формуле

$$\vec{\mu}, \text{ или } \vec{\mu}_{\Phi}, \text{ или } \vec{\mu}_{\vec{\omega}, \Phi} =$$

$$= \vec{f}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, \theta(u_1, u_2, \ldots, u_n; \Phi)\, du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n, \quad (\text{VI}, 6; 2)$$

где θ — функция, связанная с ориентацией V с помощью карты Φ. Поскольку Φ является гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на $\Phi(\mathcal{O})$, то $\vec{\mu}_{\Phi}$ имеет образ $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$, являющийся мерой на открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$ из V.

Таким образом, задание многообразия V, ориентации этого многообразия, дифференциальной формы $\vec{\omega}$ на многообразии и его карты Φ определяет некоторую меру Радона $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$ на $\Phi(\mathcal{O})$.

Теорема 31. *Пусть $\vec{V}$ — ориентированное многообразие и $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма, определенная на V*[3]). *Пусть Φ_1: $\mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и Φ_2: $\mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2)$ — две карты V, образы которых $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение Ω.*

---

[1]) Можно будет для простоты в качестве $\vec{F}$ взять поле скаляров.

[2]) В силу того, что пространство $\vec{F}$ предполагается полным, формула (VI, 6; 2) определяет меру со значениями в $\vec{F}$ как произведение меры Лебега $du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n$ на непрерывную функцию со значениями в $\vec{F}$: $\vec{f}\theta$. Определение дано в формуле (IV, 5; 6). С этого момента мы не будем напоминать, что $\vec{F}$ является банаховым пространством.

[3]) Очень часто V будет лежать в некотором открытом множестве аффинного пространства, а $\vec{\omega}$ будет определена и непрерывна в этом открытом множестве.

Тогда две меры $\Phi_1\vec{\mu}_1$ и $\Phi_2\vec{\mu}_2$, определенные картами Φ_1 и Φ_2 исходя из ориентированного многообразия $\vec{V}$ и дифференциальной формы $\vec{\omega}$, совпадают в открытом множестве Ω.

Доказательство. Пусть Ω_1 и Ω_2 — прообразы Ω при отображениях Φ_1 и Φ_2 соответственно. Отбросив $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, мы в дальнейшем ограничимся множествами Ω_1 и Ω_2. Поскольку $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ является C^1-диффеоморфизмом Ω_1 на Ω_2 (следствие 1 теоремы 33 гл. III), то он дает одновременно образы и прообразы для функций, дифференциальных форм, мер и т. д. Будет удобным использовать символ $\sim$ для математических объектов, определенных на множествах Ω_1 и Ω_2 и соответствующих друг другу при отображении $\Phi_{2,1}$.

Покажем, что

$$\vec{\mu}_2 = \Phi_{2,1}\vec{\mu}_1 \quad \text{или} \quad \vec{\mu}_1 \sim \vec{\mu}_2. \qquad \text{(VI, 6; 3)}$$

Тогда в силу равенства $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Phi_{2,1}$ будет иметь место соотношение $\Phi_1\vec{\mu}_1 = \Phi_2\vec{\mu}_2$.

Мы видели, что отображение $\Phi_{2,1}$ принадлежит классу C^1. Предположим, что это отображение определено формулой

$$\begin{gathered} u \to v = \Phi_{2,1}(u) = v(u), \\ v_i = v_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \qquad \text{(VI, 6; 4)}$$

Прообраз дифференциальной формы $dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n$ при отображении $\Phi_{2,1}$ равен (формула (VI, 3; 40))

$$\Phi_{2,1}^*(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n) = (\det \Phi'_{2,1}(u))\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n, \qquad \text{(VI, 6; 5)}$$

или

$$(\det \Phi'_{2,1}(u))\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 6)}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \vec{f}_1\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n &= \Phi_1^*\vec{\omega} = (\Phi_2 \circ \Phi_{2,1})^*\vec{\omega} = \\ &= \Phi_{2,1}^*(\Phi_2^*\vec{\omega}) = \Phi_{2,1}^*(\vec{f}_2\, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n), \end{aligned} \qquad \text{(VI, 6; 7)}$$

или

$$\vec{f}_1\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim \vec{f}_2\, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 8)}$$

Из (VI, 6; 6) и (VI, 6; 8) путем деления находим, что

$$\frac{\vec{f}_1(u)}{\left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right)} \sim \vec{f}_2(v)^{1)}. \qquad \text{(VI, 6; 9)}$$

Согласно (VI, 5; 1), для функций θ_1 и θ_2, связанных с ориентацией V, и отображений Φ_1 и Φ_2 справедливо соотношение

$$\theta_1(u)\operatorname{sgn}\left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right) \sim \theta_2(v). \qquad \text{(VI, 6; 10)}$$

Перемножая (VI, 6; 9) и (VI, 6; 10), получаем

$$\frac{\vec{f}_1(u)\,\theta_1(u)}{\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right|} \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v). \qquad \text{(VI, 6; 11)}$$

Согласно формуле замены переменных в кратных интегралах (следствие 1 теоремы 102 гл. IV), образ меры $\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right| du$ при отображении $\Phi_{2,1}$ является мерой dv:

$$\left|\det \Phi'_{2,1}(u)\right| du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n \sim dv_1 \otimes dv_2 \otimes \ldots \otimes dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 12)}$$

Перемножая почленно (VI, 6; 11) и (VI, 6; 12), получаем искомое соотношение $\vec{\mu}_1 \sim \vec{\mu}_2$:

$$\vec{f}_1(u)\,\theta_1(u)\,du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v)\,dv_1 \otimes dv_2 \otimes \ldots \otimes dv_n. \qquad \text{(VI, 6; 13)}$$

Следствие. *Если $\vec{V}$ является ориентированным n-мерным многообразием класса C^1 и $\vec{\omega}$ представляет собой непрерывную на V дифференциальную форму степени n со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то на V существует, и притом единственная, мера Радона $[\vec{\omega}]_{\vec{V}} = [\vec{\omega}]$*[2]) *со значениями в $\vec{F}$, такая, что для каждой карты Φ мера $[\vec{\omega}]$ равна в открытом множе-*

[1]) Если заменить v на $\Phi_{2,1}(u)$, то знак $\sim$ для функций будет обозначать знак $=$.

[2]) Обозначение $[\vec{\omega}]$ является упрощенным, поскольку мера определяется заданием $\vec{\omega}$ и *ориентированного* многообразия $\vec{V}$.

В итоге возможность определения меры Радона $[\vec{\omega}]$, исходя из $\vec{\omega}$ и некоторой ориентации V, а также возможность определения интеграла от $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$ (формула (VI, 6; 14)) вытекает из того, что замена переменных в форме степени n использует якобиан, замена переменных в кратных интегралах использует модуль якобиана, а знак якобиана связан с ориентацией.

Следует заметить, что *здесь мы должны были воспользоваться* теоремой 102 гл. IV (замена переменных в кратных интегралах), и потому излагаемая теория не предоставляет возможности дать вариант доказательства теоремы 102 гл. IV.

стве $\Phi(\mathcal{O})$ *образу* $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ *меры* $\vec{\mu}_\Phi$, *соответствующей на* $\mathcal{O}$ *многообразию* $\vec{V}$ *и форме* $\vec{\omega}$ *при отображении* Φ.

Доказательство. В самом деле, когда Φ пробегает всевозможные карты V, $\Phi(\mathcal{O})$ образуют открытое покрытие V. Каждой из этих карт ставится в соответствие некоторая мера $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ в открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$, и в пересечении двух этих открытых множеств соответствующие им меры совпадают. Для завершения доказательства достаточно применить теперь теорему 17 гл. IV о склеивании кусков.

Замечания. 1°) Найденная мера $[\omega]$ будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда скалярная дифференциальная форма $\omega \geqslant 0$ относительно ориентации V.

В самом деле, для того чтобы убедиться в том, что $[\omega]$ положительна, достаточно проверить это свойство в каждом открытом множестве $\Phi(\mathcal{O})$. Поскольку Φ является гомеоморфизмом, то достаточно убедиться, что мера $\mu_{\omega,\Phi} \geqslant 0$. Последнее же неравенство будет выполняться тогда и только тогда, когда функция $f\theta \geqslant 0$ [1]).

Это означает, что дифференциальная форма $f\theta\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \ldots \wedge du_n$ неотрицательна относительно канонической ориентации $\mathbb{R}^n$. Так как $f\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n = \Phi^*\omega$, то по определению θ это сводится к утверждению о том, что форма ω неотрицательна относительно ориентации многообразия V.

2°) Если ориентация многообразия V не фиксирована, то *дифференциальная форма* $\vec{\omega}$ *меры на* V *не определяет*. В этом случае допустимо, чтобы форма $\vec{\omega}$ определяла некоторую *полярную меру* на V, т. е. чтобы она каждой ориентации многообразия V ставила в соответствие определенную меру Радона и *двум противоположным ориентациям* V — *две противоположные меры Радона*.

3°) Если открытое множество W из V снабжено ориентацией $\vec{W}$, определенной ориентацией $\vec{V}$, то мера $[\vec{\omega}]_{\vec{W}}$, определенная формой $\vec{\omega}$ на W, является сужением меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на открытое множество W.

В самом деле, пусть Φ является такой картой, что $\Phi(\mathcal{O}) \subset W$. Тогда $[\vec{\omega}]_{\vec{W}}$ и сужение $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на W совпадают в $\Phi(\mathcal{O})$ с $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$.

---

[1]) В действительности в силу следствия теоремы 52 гл. IV тогда и только тогда, когда функция $f\theta$ будет *почти всюду* $\geqslant 0$ (*почти* относительно меры Лебега). Поскольку $f\theta$ непрерывна, то это равносильно утверждению, что она *всюду* $\geqslant 0$.

Следовательно, они совпадают (теорема 13 гл. IV) в объединении таких открытых множеств, как $\Phi(\mathcal{O})$, т. е. в W.

4°) Мера $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ линейно зависит от дифференциальной формы $\vec{\omega}$:

$$\begin{gathered}[\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2]_{\vec{V}}=[\vec{\omega}_1]_{\vec{V}}+[\vec{\omega}_2]_{\vec{V}},\\ [k\vec{\omega}]_{\vec{V}}=k[\vec{\omega}]_{\vec{V}},\quad \text{где}\quad k-\text{скалярная постоянная.}\end{gathered}\tag{VI, 6; 13$_2$}$$

Интеграл от дифференциальной формы степени n на n-мерном ориентируемом многообразии

Определение. Пусть $\vec{V}$ — ориентированное n-мерное многообразие класса C^1 и $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n на V. Говорят, что $\vec{\omega}$ *интегрируема на* V, если при мере Радона $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$, интегрируема по мере $[\vec{\omega}]$ функция 1. В этом случае интеграл называется *интегралом формы* $\vec{\omega}$ *на* $\vec{V}$ и обозначается через $\int_{\vec{V}}\vec{\omega}$:

$$\int_{\vec{V}}\vec{\omega}=\int_V[\vec{\omega}]_{\vec{V}}=[\vec{\omega}]_{\vec{V}}(1)=[\vec{\omega}]_{\vec{V}}(V)\,^{1)}.\tag{VI, 6; 14}$$

Интеграл от $\vec{\omega}$ всегда существует, если $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель на V и тем более если V компактно.

Этот интеграл существует, если норма меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ конечна и пространство $\vec{F}$ конечномерно (следствие теоремы 54_2 гл. IV).

---

[1]) Это интеграл от 1, или мера V относительно *векторной* меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$. Мы считаем, что он имеет смысл согласно (IV, 5; 10). Это означает, что мера $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ имеет базу $\geqslant 0$. Такое условие всегда выполняется, если $\vec{F}$ является скалярным полем или конечномерно (теорема 54 гл. IV). Однако здесь можно даже доказать, что это условие будет выполняться при любом $\vec{F}$. Если V содержится в аффинном пространстве, то его можно наделить евклидовой структурой, а тогда из теоремы 32 следует, что $[\vec{\omega}]$ имеет базой dS-меру n-мерных площадей на V.

Элементарные свойства интеграла

1°) Интеграл меняет знак, если многообразие $\vec{V}$ заменить многообразием $\overleftarrow{V}$, т. е. тем же многообразием, но с противоположной ориентацией.

2°) Интеграл линейно зависит от $\vec{\omega}$:

$$\int\limits_{\vec{V}} (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}_1 + \int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}_2, \tag{VI, 6; 15}$$

$$\int\limits_{\vec{V}} k\vec{\omega} = k \int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}, \quad \text{где} \quad k \text{ — скалярная постоянная.}$$

Существование правой части первой формулы влечет за собой существование ее левой части. Обе части второй формулы существуют одновременно (кроме случая $k=0$, когда из существования правой части следует существование левой, но не наоборот!).

В самом деле, для доказательства достаточно применить (VI, 6; 13_2), а для интегрирования 1 по мерам, входящим в эти формулы, — формулу (IV, 5; 16) (теорема 54 гл. IV).

Практическое вычисление интеграла

Предположим, что $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель K. Будем рассматривать такую конечную систему карт Φ_i, при которой открытые множества $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$ образуют покрытие K.

Обозначим через α_i подчиненное разложение единицы. Тогда мы получим равенство $\vec{\omega} = \sum\limits_i (\alpha_i\vec{\omega})$ и, следовательно, формулу

$$\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega} = \sum_i \int\limits_{\vec{V}} \alpha_i\vec{\omega}. \tag{VI, 6; 16}$$

Нам достаточно будет вычислить каждый из интегралов правой части. Для этого заметим, что, согласно определению меры $\vec{\mu}_{\Phi_i}$ с помощью формулы (VI, 6; 2), эти интегралы можно записать в виде обычных кратных интегралов

$$\int\limits_{\vec{V}} \alpha_i\vec{\omega} = \int\limits_{\Phi_i(\mathcal{O}_i)} \alpha_i\vec{\omega} = \int\limits_{\mathcal{O}_i} \alpha_i(\Phi_i(u))\vec{f}(u)\,\theta(u;\Phi)\,du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n. \tag{VI, 6; 17}$$

Вместо разложения единицы можно, естественно, воспользоваться также представлением многообразия V в виде объединения $\bigcup\limits_i V_i$ (конечного или счетного) непересекающихся $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$-измеримых множеств, достаточно малых для того, чтобы каждое из них содержалось в образе карты. Если V_i содержится в $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, то имеет место формула

$$\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega} = \int\limits_{\vec{V}} [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int\limits_{V_i} [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int\limits_{\Phi_i^{-1}(V_i)} f_i \theta_i \, du_1 \otimes \ldots \otimes du_n, \tag{VI, 6; 18}$$

приводящая нас к вычислению обычных кратных интегралов. Позже мы укажем более конкретные примеры (стр. 194 и далее).

Замечание. Рассмотрим частный случай многообразия V размерности 0, т. е. многообразия, образованного изолированными точками. Тогда форма $\vec{\omega}$ нулевой степени сводится к некоторой функции $\vec{f}$, а мера $[\vec{\omega}]$ будет по определению равна

$$[\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_\nu \pm \vec{f}(a_\nu)\, \delta_{(a_\nu)}, \qquad a_\nu \in V. \tag{VI, 6; 19}$$

Мы знаем, что ориентировать точку — это значит приписать ей определенный знак. Поэтому знак $+$ или $-$ в последнем выражении соответствует ориентации каждой точки a_ν. Таким образом, интеграл будет определяться формулой

$$\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega} = \sum_\nu \pm \vec{f}(a_\nu)\,[1]. \tag{VI, 6; 20}$$

Оценка интеграла

Теорема 32. *Пусть $\vec{V}$ — ориентированное многообразие класса C^1 размерности n, содержащееся в N-мерном аффинном евклидовом пространстве, снабженном ортонормированной системой координат. Пусть $\vec{\omega}$ — определенная и непрерывная на V дифференциальная форма степени n, записанная в виде* (VI, 3; 7) (*где J пробегает множество всех подмножеств, содержащих n элементов множества* $\{1, 2, \ldots, N\}$).

[1] Казалось бы a priori, что в случае нулевой размерности и степени знаки $\pm$ просто излишни. На *неориентированном* многообразии V форма $\vec{\omega}$ определяет меру по формуле (VI, 6; 19) всюду со знаком $+$ и имеет всюду интеграл (VI, 6; 20) со знаком $+$. Однако принятые соглашения для $n=0$ будут необходимы при рассмотрении *формулы Стокса*, с которой мы встретимся позднее (теоремы 37 и 39).

Тогда мера $[\vec{\omega}]$, *определенная формой* $\vec{\omega}$ *на* $\vec{V}$, *имеет базой* dS-*меру* n-*мерных площадей на* V. *При этом*

$$[\vec{\omega}] = \vec{p}(x)\,dS, \quad \text{где } \vec{p} \text{ непрерывна на } V, \qquad \|\vec{p}(x)\| \leqslant \sum_J \|\vec{\omega}_J(x)\|. \tag{VI, 6; 21}$$

Доказательство. Пусть Φ: $u \to x = \Phi(u)$ является некоторой картой V. Тогда $\Phi^*\vec{\omega}$ представляет собой дифференциальную форму степени n на открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^n$, которую, согласно следствию 2 теоремы 14, можно записать в виде

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}\,du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n =$$
$$= \left(\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}(\Phi(u)) \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right) \times$$
$$\times\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n. \tag{VI, 6; 22}$$

Мера Радона $\vec{\mu} = \mu_{\vec{\omega}, \Phi}$, связанная с $\vec{\omega}$ с помощью $\vec{V}$ и Φ, определяется на $\mathcal{O}$ по формуле

$$d\vec{\mu} = \left(\theta \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right) \times$$
$$\times\, du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n. \tag{VI, 6; 23}$$

С другой стороны, мера Радона, соответствующая n-мерной площади на V, запишется на $\mathcal{O}$ как $D(u)\,du$, где $D(u)$ является n-площадью параллелепипеда, определенного n векторами $\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_i}(u)$, и $du = du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n$.

Эта площадь не меньше площади ее ортогональной проекции на подпространство, порожденное векторами $\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_n}$ базиса $\vec{E}$ [1]). Следовательно, имеет место неравенство

$$D(u) \geqslant \left| \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right|. \tag{VI, 6; 24}$$

[1]) Это вытекает из теоремы 100 гл. IV при $n = N - 1$ (проекция площадей гиперплоскостей). Для произвольного n это следует из результата (не доказанного) упражнения, приведенного на стр. 757 т. I, ибо площадь параллелепипеда равна квадратному корню из суммы квадратов площадей его проекций на подпространства, определяемые n векторами базиса. Указанный результат здесь почти очевиден. Его можно получить индукцией по n, выражая площадь в виде произведения площади основания на длину высоты (теорема 104 гл. IV).

Теперь можно записать

$$d\vec{\mu} = \vec{q}(u)(D(u)\,du), \qquad \text{(VI, 6; 25)}$$

где

$$\vec{q}(u) = \theta(u;\,\Phi)\left[\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_n\leqslant N} \vec{\omega}_{j_1,\,j_2,\,\dots,\,j_n}(\Phi(u))\times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{D(u)} \frac{D\left(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_n}\right)}{D(u_1,\,u_2,\,\dots,\,u_n)}\right]. \qquad \text{(VI, 6; 26)}$$

Функция $\vec{q}$ непрерывна на $\mathcal{O}$ и, согласно (VI, 6;24), допускает оценку:

$$\|\vec{q}(u)\| \leqslant \sum_J \|\vec{\omega}_J(\Phi(u))\|. \qquad \text{(VI, 6;27)}$$

Поскольку Φ является гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на $\Phi(\mathcal{O})$, то для открытого множества $\Phi(\mathcal{O})$ из V можно записать, что

$$[\vec{\omega}] = \vec{p}(x)\,dS, \text{ где } \vec{p}(x) = \vec{q}\left(\Phi^{-1}(x)\right). \qquad \text{(VI, 6;28)}$$

Функция $\vec{p}$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (VI, 6;21). Она определена на $\Phi(\mathcal{O})$ относительно карты Φ. Однако, если Φ_1 и Φ_2 — две карты, а $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ и $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ имеют непустое пересечение Ω, то *соответствующие функции $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ совпадают на Ω*. Для того чтобы в этом убедиться, надо доказать, что если сузить Φ_1 и Φ_2 на прообразы Ω_1 и Ω_2 множества Ω, то в обозначениях, введенных при доказательстве теоремы 31, имеет место соотношение

$$\theta_1(u)\frac{D\left(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_n}\right)}{D(u_1,\,u_2,\,\dots,\,u_n)}\cdot\frac{1}{D_1(u)} \sim \theta_2(v)\frac{D\left(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_n}\right)}{D(v_1,\,v_2,\,\dots,\,v_n)}\cdot\frac{1}{D_2(v)}, \qquad \text{(VI, 6; 29)}$$

где D_1 и D_2 — множители, определяющие n-мерные площади относительно карт Φ_1 и Φ_2. Это очевидно, поскольку

$$\theta_2(v) \sim \theta_1(u)\,\mathrm{sign}\,(\det\Phi_{2,1}'(u)), \text{ согласно (VI, 6;10),}$$

$$\frac{D\left(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_n}\right)}{D(v_1,\,v_2,\,\dots,\,v_n)} \sim \frac{D\left(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_n}\right)}{D(u_1,\,u_2,\,\dots,\,u_n)}\cdot\frac{1}{\det\left(\Phi_{2,1}'(u)\right)}, \qquad \text{(VI, 6;30)}$$

где $\det \Phi'_{2,1}(u) = \frac{D(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$. Теперь, согласно (VI, 10;19),

$$D_2(v) \sim \frac{D_1(u)}{|\det \Phi'_{2,1}(u)|}\ ^{1)}.$$

Функции $\vec{p}_i$, соответствующие различным картам Φ_i, определяют одну и ту же функцию $\vec{p}$ на V; последняя непрерывна, принимает значения в $\vec{F}$ и допускает оценку (VI, 6;21). С другой стороны, мера $[\vec{\omega}] - \vec{p}\,dS$ равна нулю в семействе открытых множеств $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, образующих покрытие V, а следовательно, равна нулю на V (теорема 13 гл. IV). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы коэффициенты $\vec{\omega}_J$ формы $\vec{\omega}$ ограничены по норме на V и если V имеет конечную площадь, то интеграл от $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$ существует и имеет место оценка*

$$\left\| \int_{\vec{V}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\sum_J \||\vec{\omega}_J\|| \right) S, \qquad \text{(VI, 6; 31)}$$

где S — площадь V.

Доказательство. Функция 1 интегрируема относительно $[\vec{\omega}] = \vec{p}\,dS$ тогда и только тогда, когда $\vec{p}$ является dS-интегрируемой (определение в формуле (IV, 5; 10)). Результат теперь вытекает из следствия 2 теоремы 39 гл. IV.

Следствие 2. *Если W является подмногообразием многообразия V размерности $< n$, то оно имеет нулевую меру по мере $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей дифференциальной форме $\vec{\omega}$ на $\vec{V}$.*

Предположим для простоты, что V лежит в конечномерном аффинном пространстве E. Снабдим E произвольной евклидовой структурой. Из следствия 3 теоремы 107 гл. IV вытекает, что W имеет нулевую меру по n-площади dS.

---

1) Это доказательство совпадения функций $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ в Ω с помощью (VI, 6;30) может быть заменено прямым применением теоремы Лебега — Никодима (теорема 52 гл. IV). В самом деле, в Ω должны выполняться равенства $[\vec{\omega}] = \vec{p}_1\,dS = \vec{p}_2\,dS$, а следовательно, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ должны быть dS-почти всюду равны. Так как обе функции непрерывны, то они равны всюду.

Применение к практическим вычислениям

Предположим, что надо вычислить интеграл $\int \vec{\omega}$ от некоторой непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени $N-1$ на сфере $\vec{\Sigma}$ с центром в начале координат радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^N$, которая снабжена своей канонической ориентацией (соответствующей трансверсальной ориентации, в которой выходящие векторы положительны; см. следствие 2 теоремы 30). Экватор $x_N=0$ является многообразием размерности, строго меньшей, чем размерность сферы, и, следовательно, в силу следствия 2 *в интеграле его можно отбросить*. Значит, интеграл равен сумме двух интегралов, соответствующих верхней полусфере $\vec{\Sigma}_+$ и нижней полусфере $\vec{\Sigma}_-$:

$$\int_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \int_{\Sigma} [\vec{\omega}] = \int_{\Sigma_+} [\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}} + \int_{\Sigma_-} [\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}} = \int_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega}, \qquad (\mathrm{VI}, 6; 32)$$

где Σ_+ определяется неравенством $x_N>0$, а Σ_- определяется неравенством $x_N<0$. [Существование интеграла от $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}}$ на Σ в силу компактности сферы Σ влечет за собой существование этих интегралов на любой dS-измеримой части Σ, а значит, на Σ_+ и Σ_-, т. е. существование последних интегралов в (VI, 6;31).]

Рассмотрим, например, интеграл по верхней полусфере. Карта этой полусферы определяется отображением Φ, задаваемым соотношением

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_N),\\ x_N=\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{N-1}^2},\end{gathered} \qquad (\mathrm{VI}, 6; 33)$$

где $\mathcal{O}$ — открытый шар $\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 < R^2$ в $\mathbb{R}^{N-1}$. Сначала надо найти прообраз $\vec{\omega}$, определяемый этой картой. Для этого достаточно записать $\vec{\omega}$ в виде (VI, 3; 6) и заменить соответственно x_N и dx_N соотношением (VI, 6; 33) и соотношением, полученным из него дифференцированием:

$$dx_N = \frac{-x_1\,dx_1 - x_2\,dx_2 - \ldots - x_{N-1}\,dx_{N-1}}{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{N-1}^2}}. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 34)$$

Так получается дифференциальная форма $\Phi^*\vec{\omega}$, имеющая вид

$$\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{N-1}, \qquad (\mathrm{VI}, 6; 35)$$

где $\vec{f}$ — непрерывная функция на открытом шаре $\mathcal{O}$. Затем надо вычислить функцию $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; \Phi)$. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ положительна в канонической ориентации пространства $\mathbb{R}^{N-1}$. Ее образ при отображении $\Phi'(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ представляет собой систему векторов, касательных к верхней полусфере в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, проекции которых равны предыдущим векторам. Обозначим эти векторы через $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$. Заметим, что в каждой точке верхней полусферы вектор e_N — выходящий. Знак базиса $\vec{e}\,'_N, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$ в $\mathbb{R}^N$ (являющийся также знаком базиса $\vec{e}_N, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ [1]), т. е. $(-1)^{N-1}$) равен знаку базиса $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$ в касательной ориентации сферы. Окончательно функция θ равна $(-1)^{N-1}$. Поэтому имеет место формула

$$\int_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} = (-1)^{N-1} \int_{\mathcal{O}} \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{N-1}, \qquad \text{(VI, 6; 36)}$$

сводящая вычисление интеграла от дифференциальной формы к вычислению обычного кратного интеграла.

Такими же будут вычисления, относящиеся к нижней полусфере, однако в формулах (VI, 6; 33), (VI, 6; 34) следует писать знак —, а именно:

$$x_N = -\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2},$$
$$dx_N = +\frac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + \ldots + x_{N-1}\,dx_{N-1}}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{N-1}^2}}. \qquad \text{(VI, 6; 37)}$$

В каждой точке нижней полусферы вектор $\vec{e}_N$ является *входящим*, и, следовательно, соответствующая функция θ равна $(-1)^N$.

Рассмотрим частный случай, когда размерность $N = 3$. Предположим, что $\vec{\omega}$ имеет вид:

$$\vec{\omega} = \vec{A}\,dy \wedge dz + \vec{B}\,dz \wedge dx + \vec{C}\,dx \wedge dy. \qquad \text{(VI, 6; 38)}$$

С помощью формул (VI, 6; 33) и (VI, 6; 34) формулу (VI, 6; 35) можно записать в виде

$$\Phi^*\vec{\omega} = -\vec{A}\,dy \wedge \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - \vec{B}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \wedge dx + \vec{C}\,dx \wedge dy =$$
$$= \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x + \vec{B}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) dx \wedge dy. \qquad \text{(VI, 6; 39)}$$

[1]) Так как $\vec{e}\,'_i = \vec{e}_i + \lambda_i \vec{e}_N$, то определитель одного из базисов относительно другого равен 1.

Здесь $\theta=(-1)^2=+1$; поэтому

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} = \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x+\vec{B}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx\,dy. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 40)$$

Далее,

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega} = -\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} - \frac{\vec{A}x+\vec{B}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx\,dy. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 41)$$

Окончательно будем иметь

$$\int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \int\limits_{\vec{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int\limits_{\vec{\Sigma}_-} \vec{\omega}.$$

Совершенно ясно, что в (VI, 6; 40) [соответственно (VI, 6; 41)] в выражениях для $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, являющихся функциями от x, y, z, следует заменить z на $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (соответственно на $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$). Кроме того, в полярных координатах имеется карта $\Phi=P$ сферы, определяемая соотношением (IV, 9; 33). Здесь $\mathcal{O}$ представляет собой прямоугольник $\mathbb{R}^2$, определенный неравенствами $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$ (считаем $r=\mathbb{R}$). Дополнение к образу $P(\mathcal{O})$ этой карты является меридиональной полуокружностью и имеет, следовательно, согласно предыдущему следствию, нулевую меру относительно меры $[\vec{\omega}]$, соответствующей форме $\vec{\omega}$. Значит, легко вычисляется интеграл на образе карты. В (VI, 6; 38) следует заменить x, y, z их выражениями (IV, 9; 33), а dx, dy, dz их дифференциалами (где $r=R$, $dr=0$). При этом мы получим равенство

$$P^*\vec{\omega} = \vec{f}(\theta, \varphi)\, d\theta \wedge d\varphi. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 42)$$

Теперь надо вычислить функцию ориентации θ [1]). Для этого нужно в определенной точке (θ, φ) прямоугольника $\mathcal{O}$ вычислить ориентацию системы из двух векторов $\frac{\partial\vec{P}}{\partial\theta}(\theta, \varphi)$ и $\frac{\partial\vec{P}}{\partial\varphi}(\theta, \varphi)$ на сфере. Их геометрическое расположение (изученное на стр. 750 т. I) говорит о том, что система этих двух векторов положительна в той ориентации сферы, функция ориентации которой равна $+1$ [1]). Окончательно вычисление сводится к вычислению

[1]) Речь идет здесь о функции ориентации $\theta(u; \Phi)$, *не имеющей никакого отношения к широте* θ — одной из полярных координат. Печальное следствие того факта, что алфавит конечен.

обычного двойного интеграла

$$\int_{\vec{\Sigma}} \vec{\omega} = \iint_{\mathcal{O}} \vec{f}(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi. \qquad \text{(VI, 6; 43)}$$

Рассмотрим в качестве частного примера интеграл

$$\int_{\vec{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}, \qquad \text{(VI, 6; 44)}$$

где $\vec{\Gamma}$ — тригонометрическая окружность, снабженная канонической ориентацией. Существует, очевидно, карта этой окружности, определенная отображением Φ: $\varphi \to (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Здесь $\mathcal{O}$ — открытое множество $0 < \varphi < 2\pi$ прямой $\mathbb{R}$. Образ $\Phi(\mathcal{O})$ является на Γ дополнением к точке, т. е. к множеству нулевой меры по мере $[\vec{\omega}]$. Мы видим, таким образом, что прообраз дифференциальной формы является формой $d\varphi$ на $\mathbb{R}$.

---

[1]) В этот момент, наши не посвященные в тайны ориентации читатели, мы не обратили никакого внимания на то, является ли триэдр $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ положительным или нет. Поэтому мы доказали лишь, что $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$ равно ± 1, а этого вполне достаточно для замены переменных в кратных интегралах.

1-*е доказательство.* Непосредственным дифференцированием функций x, y, z можно вычислить якобиан и из неравенства $+r^2 \sin\theta > 0$ получить, что $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют положительный базис. Недостаток этого метода заключается в том, что при его использовании теряются все преимущества, получаемые при геометрическом определении модуля якобиана.

2-*е доказательство.* Проведем сначала рассуждение для *плоских* полярных координат ρ и φ. Согласно выбору положительного направления на тригонометрической окружности в *ориентированной плоскости* (направления углов), в касательной ориентации этой окружности, соответствующей той трансверсальной ориентации, в которой выходящие векторы являются положительными, базис $\vec{u}, \vec{v}$ (где $\vec{u}$ — выходящая нормаль, а $\vec{v}$ — касательная в прямом направлении) положителен.

Если мы перейдем к канонически ориентированному пространству $\mathbb{R}^3$, то увидим, что векторы $\vec{i}$ и $\varepsilon\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — третий вектор базиса (ось z) и $\varepsilon = \operatorname{sign} z$, $z \neq 0$, являются выходящими относительно сферы. Так как векторы $\vec{j}$ и $\vec{k}$ касательны к сфере, то базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет тот же знак, что и базис $\varepsilon\vec{e}_3, \vec{j}, \vec{k}$. Но тогда он совпадает со знаком $\varepsilon\vec{e}_3, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ или $\vec{j}_0, \vec{k}_0, \varepsilon\vec{e}_3$, где $\vec{j}_0$ и $\vec{k}_0$ — горизонтальные проекции векторов $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Векторы $\vec{j}_0$ и $\vec{k}_0$ с точностью до положительного множителя совпадают с векторами $\varepsilon\vec{u}$ и $\vec{v}$, где $\vec{u}$ и $\vec{v}$ соответствуют полярным координатам в (x, y)-плоскости. Окончательно тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет знак системы векторов $\varepsilon\vec{u}, \vec{v}, \varepsilon\vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$ или знак системы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$, где $\vec{u}, \vec{v}$ лежат в $\mathbb{R}^2$, т. е. положительна. Этот результат, доказанный для $z \neq 0$, останется по непрерывности справедливым при $z = 0$. Так как тогда вектор $\vec{i}$ является выходящей нормалью, то $\vec{j}, \vec{k}$ образуют положительный базис в касательной ориентации сферы.

Функция θ ориентации равна $+1$, иными словами, отображение Φ переводит положительное направление обхода $\mathbb{R}$ в положительное направление обхода тригонометрической окружности. Поэтому имеет место формула

$$\int_{\vec{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{]0,\,2\pi[} d\varphi = 2\pi. \qquad \text{(VI, 6; 45)}$$

Эти рассуждения основаны в большой степени на интуиции. *При приобретении некоторого опыта рассмотренные операции выполняются очень быстро. Весь этот формализм удачно сочетает в себе интуицию и автоматизм. Однако всегда надо обращать некоторое внимание на знаки, которые порождает введенная ориентация.*

Следствие 3. *Если в условиях теоремы некоторая непрерывная дифференциальная форма $\vec{\omega}_\nu$ при ν, стремящемся к бесконечности, сходится к дифференциальной форме $\vec{\omega}$ равномерно на каждом компакте из V, то мера $[\vec{\omega}_\nu]$, соответствующая $\vec{\omega}_\nu$, локально сходится по норме, и тем более широко, к мере $[\vec{\omega}]$, соответствующей $\vec{\omega}$.*

Доказательство. Мы говорим, что $\vec{\omega}_\nu$ сходится к $\vec{\omega}$, если в выражении (VI, 3; 7) каждая из функций $(\vec{\omega}_\nu)_J$ сходится к функции $(\vec{\omega})_J$. (В этом определении предполагается, что многообразие V задано в открытом множестве аффинного пространства, а форма $\vec{\omega}$ определена и непрерывна в открытом множестве.)

Оценка (VI, 6; 21), примененная к $\vec{\omega}_\nu - \vec{\omega}$, показывает, что функция $\vec{p}_\nu$, соответствующая $\vec{\omega}_\nu$, сходится к функции $\vec{p}$, соответствующей $\vec{\omega}$, равномерно на каждом компакте из V. Следовательно, на каждом компакте K из V

$$\| \vec{p}_\nu\,dS - \vec{p}\,dS \|_K \leqslant \left(\sup_{x \in K} \| \vec{p}_\nu(x) - \vec{p}(x) \|\right) \int_K dS \qquad \text{(VI, 6; 46)}$$

сходится к 0. Теорема Лебега (теорема 35 гл. IV) дает значительно менее ограничительные условия для получения такого же результата (см. пример на стр. 631 т. I): если $\vec{\omega}_\nu$ просто сходится dS-почти всюду к $\vec{\omega}$ и имеет место оценка $\sum_J \| (\vec{\omega}_\nu)_J(x) \| \leqslant$ $\leqslant g(x)$, где g — некоторая локально dS-интегрируемая функция $\geqslant 0$ на V, то $[\vec{\omega}_\nu]$ локально сходится по норме к $[\vec{\omega}]$. Если функция g ограничена на V и если V имеет конечную площадь, то из теоремы Лебега следует, что $\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}_\nu$ сходится к $\int\limits_{\vec{V}} \vec{\omega}$.

Случай гиперповерхности евклидова пространства

Вычислим явно функцию $\vec{p}$ формулы (VI, 6; 21) для случая гиперповерхности Σ евклидова пространства.

Теорема 33. *Пусть E есть N-мерное ориентированное аффинное евклидово пространство, снабженное ортонормированным положительным базисом. Пусть Σ — ориентированная гиперповерхность класса C^1 из E. Если $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени $N-1$ в E, определенная формулой*

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}_j(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N, \tag{VI, 6; 47}$$

то соответствующая мера $[\vec{\omega}]$ на $\vec{\Sigma}$ определяется по формуле

$$[\vec{\omega}] = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \vec{\omega}_j(x) \cos\alpha_j(x)\, dS, \tag{VI, 6; 48}$$

где $\alpha_j(x)$ — угол, образованный j-м вектором базиса пространства $\vec{E}$ с положительной нормалью к Σ в точке x (в трансверсальной ориентации, соответствующей касательной ориентации в ориентации пространства $\vec{E}$).

Доказательство. Пусть Φ — некоторая карта V. Согласно (VI, 5; 7), можно определить на нормали положительный в трансверсальной ориентации вектор. Соответствующий единичный вектор нормали определяется по формуле

$$\vec{\nu} = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}(u) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(u)\right], \tag{VI. 6; 49}$$

где $D(u)$ — площадь параллелепипеда, образованного векторами $\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_i}(u)$, т. е. длина их векторного произведения.

Согласно формуле (VI, 2; 16), он имеет координаты

$$\cos\alpha_j = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)}(-1)^{j-1}\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})}. \tag{VI, 6; 50}$$

Используя формулу (VI, 6; 26), получаем

$$\vec{q}(u)=\sum \omega_j(\Phi(u))(-1)^{j-1}\cos\alpha_j, \qquad \text{(VI, 6; 51)}$$

откуда в силу (VI, 6; 28) вытекает соотношение (VI, 6; 48).

Следствие. *В условиях теоремы интеграл* $\int_{\vec{\Sigma}}\vec{\omega}$ *вычисляется как интеграл по поверхности*:

$$\int_{\vec{\Sigma}}\vec{\omega}=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\int_{\Sigma}\vec{\omega}_j\cos\alpha_j\,dS. \qquad \text{(VI, 6; 52)}$$

Из существования одной из частей этого равенства вытекает существование другой.

Пример. В $\mathbb{R}^3$ справедлива формула

$$\int_{\vec{\Sigma}}(A\,dy\wedge dz+B\,dz\wedge dx+C\,dx\wedge dy)=$$

$$=\int_{\Sigma}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)\,dS. \qquad \text{(VI, 6; 53)}$$

Замечание. В силу формулы (VI, 3; 43) форму $\vec{\omega}$ степени $N-1$ часто пишут в виде

$$\vec{\omega}=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{N-j}\vec{A}_j\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\ldots\wedge dx_N. \qquad \text{(VI, 6; 53}_2\text{)}$$

Тогда

$$\int_{\vec{\Sigma}}\vec{\omega}=(-1)^{N-1}\int_{\Sigma}\sum_{j=1}^{N}\vec{A}_j\cos\alpha_j\,dS. \qquad \text{(VI, 6; 53}_3\text{)}$$

Преобразование с помощью диффеоморфизма

Теорема 34. *Пусть* $\vec{V}$ *и* $\vec{V}'$ — *два n-мерных ориентированных многообразия класса* C^1. *Пусть* H — *некоторый* C^1-*диффеоморфизм* V *на* V', *сохраняющий ориентацию*[1]). *Если* $\vec{\omega}$ *является непрерывной дифференциальной формой степени* n *на* V *и* $H\vec{\omega}$ — *ее образ на* V'[2]), *то мера* $[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'}$, *соответствующая* $H\vec{\omega}$,

[1]) Это означает, что образ при отображении $H'(x)$ некоторого положительного в ориентации $\vec{V}$ базиса из $\vec{T}(x;\,V)$ является положительным в ориентации $\vec{V}'$ базисом из $\vec{T}(H(x);\,V')$.

[2]) Поскольку H является C^1-диффеоморфизмом, то имеются как образы, так и прообразы.

является образом при отображении H меры $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, соответствующей $\vec{\omega}$, а для интегралов имеет место следующая формула:

$$\int_{\vec{V}'} H\vec{\omega} = \int_{\vec{V}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 6; 54)}$$

Существование одной из частей этого равенства эквивалентно существованию другой.

Доказательство. Достаточно рассмотреть карту Φ относительно V, так что $H \circ \Phi$ будет картой относительно V'. При этом мы сразу же получаем следующие формулы:

$$\Phi^*\vec{\omega} = \Phi^* H^* H\vec{\omega} = (H \circ \Phi)^* (H\vec{\omega}). \qquad \text{(VI, 6; 55)}$$

Следовательно, форма $\vec{f}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n$ из (VI, 6; 1) одна и та же для формы $\vec{\omega}$ на V и формы $H\vec{\omega}$ на V'; кроме того, справедливо равенство

$$(\theta(u;\ \Phi))_V = (\theta(u;\ H \circ \Phi))_{V'}, \qquad \text{(VI, 6; 56)}$$

поскольку отображение H сохраняет ориентацию.

Согласно (VI, 6; 2), меры $\vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi}$ и $\vec{\mu}_{H\vec{\omega},\,H\circ\Phi}$ совпадают. Поэтому

$$[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'} = (H \circ \Phi)\, \vec{\mu}_{H\vec{\omega},\,H\circ\Phi} = (H \circ \Phi)\, \vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi} = \\ = H\left(\Phi \vec{\mu}_{\vec{\omega},\,\Phi}\right) = H\left([\vec{\omega}]_{\vec{V}}\right), \qquad \text{(VI, 6; 57)}$$

т. е. мера, соответствующая $H\vec{\omega}$ на $\vec{V}'\left([H\vec{\omega}]_{\vec{V}'}\right)$, равна образу при отображении H меры, соответствующей $\vec{\omega}$ на $\vec{V}\left(H\left([\vec{\omega}]_{\vec{V}}\right)\right)$. Далее в силу теоремы 60 гл. IV интегралы от 1 по мерам $[\vec{\omega}]$ и $[H\vec{\omega}]$ совпадают, что дает соотношение (VI, 6; 54).

Можно также исходить из непрерывной дифференциальной формы $\vec{\varpi}$ степени n на V'; тогда

$$\int_{\vec{V}} H^*\vec{\varpi} = \int_{\vec{V}'} \vec{\varpi}. \qquad \text{(VI, 6; 58)}$$

Обе части этой формулы остаются справедливыми, когда H является только отображением класса C^1, *а не диффеоморфизмом. Но тогда не верна сама формула, поскольку обе ее части, вообще говоря, не совпадают. (Они будут совпадать, если H будет C^1-диффеоморфизмом, не сохраняющим ориентации!)*

Например, если $\vec{V}=\vec{V}'$ является отрезком $]-1, +1[$ прямой $\mathbb{R}$ в ее канонической ориентации, H является отображением $x \to y = x^2$ и $\varpi = dy$, то $H^*\varpi = 2x\,dx$ и

$$\begin{aligned}\int_{\vec{V}} \varpi &= \int_{]-1,+1[} dy = 2,\\ \int_{\vec{V}} H^*\varpi &= \int_{]-1,+1[} 2x\,dx = 0.\end{aligned} \qquad \text{(VI, 6; 59)}$$

Интеграл от дифференциальной формы по особому ориентированному многообразию

Рассмотрим в открытом множестве Ω аффинного конечномерного пространства E особое n-мерное многообразие класса C^1, определенное отображением H класса C^1 истинного n-мерного многообразия V класса C^1 в Ω. Мы будем обозначать это особое многообразие через $H|V$. Если V снабжено ориентацией $\vec{V}$, то в этом случае имеют дело с особым ориентированным многообразием, которое обозначают через $H|\vec{V}$.

Пусть $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n в Ω со значениями в некотором банаховом пространстве. Эта форма имеет прообразом непрерывную дифференциальную форму $H^*\vec{\omega}$ степени n на V, определяющую некоторую меру Радона $[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ на V, соответствующую ориентации $\vec{V}$. Если нет опасности смешения, то ее будет удобнее обозначать через $[\vec{\omega}]_{H|\vec{V}}$ или даже $[\vec{\omega}]$.

Интегралом от $\vec{\omega}$ на особом ориентированном многообразии $H|\vec{V}$, если он существует, называется интеграл от прообраза $H^*\vec{\omega}$ на ориентированном многообразии $\vec{V}$. Таким образом, по определению

$$\int_{H|\vec{V}} \vec{\omega} = \int_{\vec{V}} H^*\vec{\omega} = \int_{V} [H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}. \qquad \text{(VI, 6; 60)}$$

Естественно, что этот интеграл существует всегда, если прообраз при отображении H носителя $\vec{\omega}$ является компактом многообразия V. Это заведомо так, если $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель и отображение H собственное (см. стр. 618 т. I) или если V компактно.

Пример. Вернемся к формуле (VI, 6; 59). Интеграл $\int\limits_{\vec{V}} H^*\omega = 0$ является по определению интегралом от $\varpi = dy$ на особом многообразии, определенном отображением H: $x \to x^2$ интервала $]-1, +1[$ в прямую $\mathbb{R}$. *Поэтому всегда имеют место равенства*

$$0 = \int\limits_{\overrightarrow{]-1, +1[}} 2x\,dx = \int\limits_{H\,|\,\overrightarrow{]-1, +1[}} dy. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 60_2)$$

Однако нет никаких оснований заменять особое многообразие $H\,|\,]-1, +1[$ многообразием $]-1, +1[$.

Теорема 35. *Интегралы от дифференциальной формы на двух особых ориентированных эквивалентных многообразиях существуют одновременно и равны между собой.*

Доказательство. Пусть V_1 и V_2 — два n-мерных многообразия класса C^1 и H_1, H_2 — отображения V_1 и V_2 в E, определяющие два особых многообразия в E. Будем считать, что эти многообразия эквивалентны, т. е. что существует такой C^1-диффеоморфизм K многообразия V_1 на V_2, что $H_1 = H_2 \circ K$.

Многообразия V_1 и V_2 по предположению ориентированы. Чтобы иметь два *ориентированных* особых эквивалентных многообразия, необходимо предполагать, что отображение K переводит ориентацию $\vec{V}_1$ в ориентацию $\vec{V}_2$ в смысле теоремы 34.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени n на E. Эта форма имеет прообраз $H_1^*\vec{\omega}$ на V_1, который в силу ориентированности $\vec{V}_1$ определяет на V_1 некоторую меру Радона $[\vec{\omega}]_{H\,|\,\vec{V}_1}$. Точно так же $H_2^*\vec{\omega}$ определяет на V_2 некоторую меру Радона $[\vec{\omega}]_{H\,|\,\vec{V}_2}$.

Кроме того, в силу приведенных выше соотношений

$$H_1^*\vec{\omega} = (H_2 \circ K)^*\vec{\omega} = K^*(H_2^*\vec{\omega}), \text{ или } K(H_1^*\vec{\omega}) = H_2^*\vec{\omega}. \qquad (\mathrm{VI}, 6; 61)$$

Поэтому из теоремы 34 следует, что мера $[H_2^*\vec{\omega}]_{\vec{V}_2}$ является образом меры $[H_1^*\vec{\omega}]_{\vec{V}_1}$ при отображении K, а из формулы (VI, 6; 54) следует, что $\int\limits_{\vec{V}_1} H_1^*\vec{\omega} = \int\limits_{\vec{V}_2} H_2^*\vec{\omega}$, а значит, $\int\limits_{H_1\,|\,\vec{V}_1} \vec{\omega} = \int\limits_{H_2\,|\,\vec{V}_2} \vec{\omega}$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть H — отображение класса C^1 ориентированного n-мерного многообразия $\vec{V}$ в аффинное пространство E, определяющее особое ориентированное многообразие. Если образ $H(V)$ является n-мерным многообразием V_0 класса C^1 в пространстве E и отображение H является C^1-диффеоморфизмом V на V_0, то интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n на E на особом многообразии $H|\vec{V}$ есть не что иное, как интеграл от $\vec{\omega}$ на образе V_0, снабженном ориентацией $\vec{V}_0$, перенесенной отображением H из $\vec{V}$.*

Доказательство. В самом деле, особое многообразие $H|V$ эквивалентно особому многообразию $I|V_0$, где I — тождественное отображение. Здесь $K=H$, а тогда $H=I\circ K$.

Свойства интеграла от формы на особом многообразии

1°) Если ориентацию особого многообразия $\vec{V}$ заменить противоположной ориентацией $\overleftarrow{V}$, то интеграл изменит знак.

2°) Интеграл линейно зависит от $\vec{\omega}$.

3°) Теорема 32 остается справедливой в следующих предположениях. Если пространство E евклидово, то особое многообразие $H|V$ (где H — отображение V в E) имеет меру n-мерных площадей; эта мера $dS\geqslant 0$ *находится на* V (гл. IV, теорема 107). Мера на V, $[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$, имеет базу dS и равна $\vec{p}\,ds$, где функция $\vec{p}$ непрерывна на V, и имеет место неравенство

$$\|\vec{p}(\xi)\|\leqslant\sum_J\|\vec{\omega}_J(H(\xi))\|,\quad \xi\in V. \qquad \text{(VI, 6; 62)}$$

Отсюда вытекает, в частности, что $\int\limits_{H|\vec{V}}\vec{\omega}$ заведомо существует, если коэффициенты $\vec{\omega}_J$ формы $\vec{\omega}$ ограничены и если n-площадь V конечна.

Если n-мерное многообразие V имеет образ $H(V)$, лежащий в подмногообразии класса C^1 размерности $<n$ из E, имеющем, согласно следствию 3 теоремы 107 гл. IV, равную нулю n-площадь, то интеграл от $\overset{n}{\vec{\omega}}$ по особому многообразию $H|\vec{V}$ равен нулю. Так же легко обобщается теорема 33.

Интеграл от дифференциальных форм на многообразиях, имеющих особенности

Рассмотрим для примера множество Σ пространства $\mathbb{R}^3$, представляющее собой объединение круга

$$z=0, \quad x^2+y^2 \leqslant 1 \tag{VI, 6; 63}$$

и конической поверхности вращения

$$x^2+y^2=(z-1)^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \tag{VI, 6; 64}$$

(см. рис. 4). Множество Σ компактно.

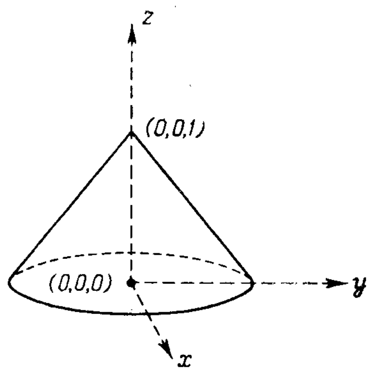

Рис. 4.

Конечно, множество Σ не является гиперповерхностью класса C^1. Оно представляет собой объединение открытого круга Σ_1: $z=0$, $x^2+y^2<1$ — гиперповерхности класса C^∞, конической поверхности Σ_2 (без вершины и основания): $x^2+y^2=$ $=(z-1)^2$, $0<z<1$ — гиперповерхности класса C^∞, точки с координатами (0, 0, 1) и окружности $z=0$, $x^2+y^2=1$ — одномерного многообразия класса C^∞. Имеются, таким образом, «особые точки» (вершина конуса и точки окружности), вследствие чего Σ не может быть многообразием. Можно сказать, что Σ является «многообразием с особыми точками, или псевдомногообразием», класса C^∞ размерности 2.

Попытаемся дать общее определение этому понятию. Говорят, что часть многообразия класса C^1 *n-мерно пренебрежима*, если она является объединением конечного или счетного множества подмногообразий (класса C^1) размерности $<n$. Если $n=1$, 1-мерно пренебрежимая часть является конечным или счетным множеством точек. Если $n=0$, 0-мерно пренебрежи-

мая часть пуста. Определенные выше n-мерно пренебрежимые части представляют интерес по той причине, что интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n по любой n-мерно пренебрежимой части n-мерного многообразия V класса C^1 обязательно равен нулю (следствие 2 теоремы 32). Пусть теперь $\tilde{V}$ — многообразие класса C^m произвольной размерности. Говорят, что некоторая часть V многообразия $\tilde{V}$ является *псевдомногообразием*, или *многообразием с особыми точками*, класса C^m размерности n, если существует часть $\mathcal{U}$ множества V, открытая относительно V и являющаяся подмногообразием $\tilde{V}$ класса C^m размерности n, и если дополнение $V - \mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}$ в V n-мерно пренебрежимо. Выбор этого открытого множества $\mathcal{U}$ в V, естественно, довольно произволен, поскольку если взять одно такое множество, то затем можно выбрать меньшее, отбрасывая какое-либо замкнутое подмногообразие размерности $< n$. Однако существует множество $\mathcal{U}$, которое является наибольшим среди других множеств этого типа: множество точек V, в окрестности которых V является истинным многообразием класса C^m размерности n. Это открытое множество $\mathcal{U}$ называется регулярной частью множества V. Множество $V - \mathcal{U}$ называется особой частью. Псевдомногообразие V называется ориентированным, если ориентировано подмногообразие $\mathcal{U}$.

В случае определенного выше псевдомногообразия Σ имеем $\mathcal{U} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Особая часть $\Sigma - \mathcal{U}$ представляет собой объединение окружности и точки. Мы можем ориентировать Σ, например, следующим образом. В каждой точке круга Σ_1 касательное векторное подпространство есть подпространство $\mathbb{R}^2$, определенное двумя первыми координатными осями. В качестве ориентации мы выберем ориентацию, *противоположную канонической ориентации*. Векторное касательное пространство в каждой точке конической поверхности Σ мы будем ориентировать, считая, что два вектора образуют базис положительного знака, если их горизонтальная проекция на пространство $\mathbb{R}^2$, образованное двумя первыми координатными осями, является базисом положительного знака *в канонической ориентации* $\mathbb{R}^2$. Псевдомногообразие Σ делит пространство на две области, которые можно назвать внутренней (ограниченной) областью и внешней областью (бесконечная область). *Трансверсальной ориентацией* Σ, соответствующей предыдущей ориентации, будет та, в которой положительными считаются векторы, входящие во внешнюю область (или выходящие из внутренней области). Третий вектор базиса $\vec{e}_3$ трансверсально отрицателен в каждой точке Σ_1 и трансверсально положителен в каждой точке Σ_2.

Как было сказано выше, *трансверсальная или касательная ориентация определяются только на регулярной части* Σ. *В точках окружности и в вершине конуса, в которых не существует касательной плоскости, никакой ориентации не определялось.*

Интегралом от дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени n на $\vec{V}$ мы будем теперь называть интеграл на регулярной части $\widehat{\mathcal{U}}$. Это определение вполне оправдано, поскольку $V - \mathcal{U}$ n-мерно пренебрежимо.

В рассмотренном примере мы получим интеграл на $\vec{\Sigma}_1 \cup \vec{\Sigma}_2$. Если форма $\vec{\omega}$ непрерывна в окрестности псевдомногообразия Σ в $\mathbb{R}^3$, то она ограничена на компактном множестве Σ, а, поскольку Σ_1 и Σ_2 имеют конечные площади, рассматриваемый интеграл имеет смысл.

Пусть теперь V — псевдомногообразие класса C^m размерности n с регулярной частью $\mathcal{U}$ и H — непрерывное отображение V в открытое множество Ω аффинного пространства. Говорят, что $H|V$ является особым псевдомногообразием класса C^m из Ω, если существует такое открытое подмножество $\mathcal{U}_H$ в $\mathcal{U}$, что H на $\mathcal{U}_H$ принадлежит классу C^m, а множество $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$ n-мерно пренебрежимо. Выбор множества $\mathcal{U}_H$ здесь довольно произволен, однако среди этих множеств имеется наибольшее: это множество точек из $\mathcal{U}$, в окрестности которых отображение H принадлежит классу C^m. Если V ориентировано, то интегралом от $\vec{\omega}$ по $H|\vec{V}$ называется, если он существует, интеграл от $\vec{\omega}$ по $H|\widehat{\mathcal{U}}_H$, т. е. интеграл от $H^*\vec{\omega}$ по $\widehat{\mathcal{U}}_H$.

Криволинейный интеграл

Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени 1, определенная и непрерывная на некотором многообразии, представляющем собой открытое множество N-мерного аффинного пространства E. Тогда ее можно проинтегрировать по параметрически ориентированной кривой класса C^1, если, например, эта кривая имеет конечную длину, а форма $\vec{\omega}$ ограничена на этой кривой.

Форма $\vec{\omega}$ по отношению к произвольно выбранной системе координат в E записывается в виде

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_i, \qquad \text{(VI,6; 65)}$$

где A_i — функции, определенные на множестве Ω со значениями в пространстве $\vec{F}$.

Рассмотрим особое ориентированное многообразие, определенное следующим образом. Пусть $[\alpha, \beta]$ — компактный интервал вещественной прямой $\mathbb{R}$, причем разность $\beta - \alpha \neq 0$ имеет произвольный знак. Пусть $t \to M(t)$ — некоторый путь на Ω, определенный отображением M класса C^1 интервала $[\alpha, \beta]$ в Ω. Выберем на $[\alpha, \beta]$ направление от α к β, что приведет к ориентации прямой $\mathbb{R}$, если $\alpha < \beta$, и противоположной ориентации, если $\alpha > \beta$. Тогда $[\overrightarrow{\alpha, \beta}]$ будет ориентированным псевдомногообразием размерности 1 с регулярной частью $]\alpha, \beta[$, а $M \mid [\overrightarrow{\alpha, \beta}]$ будет ориентированным особым псевдомногообразием $\vec{\Gamma}$ размерности 1 конечной длины. Пусть $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — координаты точки $M(t)$.

Согласно определению,

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \int\limits_{]\overrightarrow{\alpha, \beta}[} M^* \vec{\omega} = \int\limits_{]\overrightarrow{\alpha, \beta}[} \vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_{]\overrightarrow{\alpha, \beta}[} \left(\sum_{j=1}^{N} A_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))\, x'_j(t) \right) dt. \qquad \text{(VI, 6; 66)}$$

Поясним подробно эти формулы. Прежде всего нам надо найти дифференциальную форму $M^*\vec{\omega}$ (второй член предыдущей формулы). Она определяется по формуле (VI, 3; 30):

$$(M^*\vec{\omega})(t) \cdot 1 = \vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)} \quad (1 \in \mathbb{R}), \qquad \text{(VI, 6; 66}_2\text{)}$$

где $\vec{\omega}(M(t)) \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и $\overrightarrow{M'(t)} \in \vec{E}$, так что обе части соотношения (VI, 6; 66_2) являются элементами пространства $\vec{F}$ [1]). Искомый прообраз является дифференциальной формой на $]\alpha, \beta[$ со значениями в $\vec{F}$, равной $\vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)}\, dt$. Последний член в (VI, 6; 66) получается переходом к выбранной системе координат.

В этих формулах dt рассматривается как некоторая *дифференциальная форма на* $\mathbb{R}$, а интеграл вычисляется по ориентированному интервалу $]\overrightarrow{\alpha, \beta}[$. Функция θ, определяющая ориентацию, в данном случае равна $+1$, если $\alpha < \beta$, и -1,

[1]) Напомним, что во всем этом параграфе форма $\vec{\omega}$ принимает значения в банаховом пространстве $\vec{F}$.

если $\alpha > \beta$. Поэтому интеграл равен $\pm \int\limits_{]\alpha, \beta[} \ldots dt$, где dt является теперь *мерой Лебега на* $\mathbb{R}$. В конце концов мы приходим к определенному интегралу $\int\limits_\alpha^\beta \ldots dt$ относительно меры Лебега dt на $\mathbb{R}$, определяемому в курсе математического анализа по формуле (IV, 9; 1)[1]). Окончательно получаем

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \int\limits_\alpha^\beta \vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\sum_{i=1}^N \vec{A}_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))\,x_i'(t) \right) dt. \qquad \text{(VI, 6; 67)}$$

Это определение хорошо согласуется с обычным определением *криволинейного интеграла*, приводимым в курсе математического анализа. Мы снова приходим к выводу, что такой криволинейный интеграл может вычисляться только на ориентированных кривых, т. е. на кривых, снабженных направлением обхода, и что замена ориентации кривой приводит к изменению знака интеграла[2]).

Криволинейный интеграл можно вычислить на пути класса C^1, а также на пути, кусочно принадлежащему классу C^1 (например, на ориентированной ломаной линии). В этом случае через M мы будем обозначать непрерывное отображение $[\alpha, \beta]$ в Ω, для которого можно найти конечное число точек $t_0 = \alpha$, $t_1, t_2, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n = \beta$, образующих такую конечную по-

[1]) Имеется большая путаница в написании этих формул. Принято (к сожалению!) одним и тем же символом dt обозначать совершенно разные вещи: дифференциальную форму 1-й степени (дифференциал тождественной функции $t \to t$) и меру Радона (меру Лебега на $\mathbb{R}$). Если производится преобразование $t \to -t$, то форма заменяется на противоположную, в то время как мера остается неизменной. Впрочем, согласно следствию теоремы 31, мера связана с формой при канонической ориентации $\mathbb{R}$. Было бы лучше меру Лебега обозначить через $|dt|$ [согласно формуле замены переменной (IV; 9; 72)], а обозначение $dx = |\xi'(t)|\,dt$ записать в виде $|dx| = |\xi'(t)|\,|dt|$. Мы видели также, что символ $\int\limits_\alpha^\beta$ является интегралом от некоторой дифференциальной формы степени 1 на некотором ориентированном многообразии.

[2]) Это приводит в формуле (VI, 6; 67) к замене $\int\limits_\alpha^\beta$ на $\int\limits_\beta^\alpha$.

следовательность (возрастающую или убывающую в зависимости от того, будет ли $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$), чтобы отображение M принадлежало классу C^1 в каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. В каждой точке t_i отображение M непрерывно, но его производные слева и справа в этих точках не обязательно совпадают. Тогда $M \mid [\alpha, \beta]$ будет особым псевдомногообразием в смысле определения, данного на стр. 206. Множество $\mathcal{U}_M$ является дополнением к множеству $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ в $[\alpha, \beta]$. Криволинейный интеграл $\int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega}$ теперь определяется равенством

$$\int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{M \mid]t_i, t_{i+1}[} \vec{\omega}, \qquad \text{(VI, 6; 68)}$$

где каждый член представляет собой интеграл на ориентированном особом многообразии класса C^1. Вычисления, производимые по формуле (VI, 6; 66) для каждого интервала $[t_i, t_{i+1}]$, приводят к выражениям (VI, 6; 67), имеющим смысл для функции $\vec{M}'$, определенной всюду, кроме конечного числа точек, т. е. dt-почти всюду, и правильной, а значит, dt-интегрируемой (и даже интегрируемой по Риману).

Криволинейный интеграл по произвольному пути конечной длины

1°) Определение. Пусть M — путь, определенный непрерывным отображением отрезка $[\alpha, \beta]$ прямой $\mathbb{R}$ в открытое множество Ω конечномерного аффинного пространства E. Будем считать, что этот путь (не обязательно принадлежащий классу C^1!) имеет конечную длину, т. е. что функция M имеет ограниченную вариацию (стр. 701 т. I). Пусть, кроме того, $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени 1, непрерывная на множестве Ω. Интеграл от $\vec{\omega}$ по ориентированному пути M (где $[\alpha, \beta]$ ориентирован так, как было указано на стр. 208) определим по формуле

$$\int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \int_\alpha^\beta \vec{\omega}(M) \cdot d\vec{M} = \int_\alpha^\beta \vec{\omega}(M(t)) \cdot d\vec{M}(t). \qquad \text{(VI, 6; 69)}$$

Речь идет о выражении $\int B(\vec{f}, \overrightarrow{d\mu})$, определенном в формуле (IV, 5; 13). Здесь $t \to \vec{\omega}(M(t))$ является непрерывным отображением $\vec{f}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в пространство $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$; $d\vec{M} = d\vec{\mu}$ есть мера на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\vec{E}$, для которой функция M является неопределенным интегралом (теорема 88 гл. IV). Что же касается отображения B, то оно является непрерывным каноническим билинейным отображением $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F}) \times \vec{E}$ в $\vec{F}$, определенным по формуле $(u, \vec{X}) \to u \cdot \vec{X}$.

Если пространство E снабжено системой координат, относительно которой $\vec{\omega}$ допускает представление (VI, 6; 65), а функция M имеет координаты $t \to x_i(t)$, то рассматриваемый выше интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_{M \mid \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{A}_i(M(t))\, dx_i(t). \tag{VI, 6; 70}$$

Здесь мы рассматриваем интегралы от непрерывных функций $t \to \vec{A}_i(M(t))$, определенных на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\vec{F}$, относительно мер dx_i на $[\alpha, \beta]$, соответствующих в силу теоремы 88 гл. IV функциям ограниченной вариации $t \to x_i(t)$. Если окажется, что M принадлежит классу C^1 или кусочно принадлежит этому классу, то можно в силу следствия 1 теоремы 89 гл. IV написать, что $d\vec{M}(t) = \overrightarrow{M'(t)}\, dt$, $dx_i(t) = x_i'(t)\, dt$. Так мы вернемся к формуле (VI, 6; 67), а это означает, что определенный нами интеграл от непрерывной дифференциальной формы $\vec{\omega}$ степени 1 *по пути конечной длины* является обобщением уже известного интеграла по пути класса C^1 или по пути, кусочно принадлежащему этому классу.

2°) Оценка. Если пространство $\vec{E}$ нормировано, то интеграл (VI, 6; 69) можно оценить следующим образом:

$$\left\| \int\limits_{M \mid \widehat{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha, \beta]} \| \vec{\omega}(M(t)) \| \right) L, \tag{VI, 6; 71}$$

где $\| \ \|$ — норма в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ и L — полная вариация функции M на $[\alpha, \beta]$, т. е. длина пути $M \mid [\alpha, \beta]$ в метрическом пространстве E. В самом деле, согласно следствию 2 теоремы 90 и его доказательству, $d\vec{M}(t) = \vec{q}(t)\, ds(t)$, где ds, мера длин относительно пути, есть неотрицательная мера на $[\alpha, \beta]$ и норма $\vec{q}$ равна 1. Путь ds-почти всюду имеет касательную, и $\vec{q}(t)$ является единичным вектором касательной в точке $M(t)$, ориентированной в направлении возрастания значений t (а следовательно, при $\alpha > \beta$, имеющей направление, противоположное пробеганию пути).

Тогда, согласно определению (IV, 5; 13),

$$\int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{q}(t)\, ds(t). \tag{VI, 6; 72}$$

Так как $\|\vec{q}(t)\| = 1$, то $\|\vec{\omega}(M(t)) \cdot \vec{q}(t)\| \leqslant \|\vec{\omega}(M(t))\|$, откуда следует (VI, 6; 71). Эта оценка напоминает оценку (VI, 6; 31).

Если пространство E евклидово, то через $\cos \alpha_j(t)$ можно обозначить направляющие косинусы касательной в точке $M(t)$. Поэтому $dx_j(t) = (\cos \alpha_j(t))\, ds(t)$. Теперь в силу соотношения (VI, 6; 70) получаем оценку

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha, \beta]} \left\| \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j(M(t)) \cos \alpha_j(t) \right\| \right) L, \tag{VI, 6; 73}$$

которую с помощью неравенства Коши — Шварца можно усилить:

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{[\alpha, \beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\max_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \| \vec{A}_j(M(t)) \|^2} \right) L. \tag{VI, 6; 74}$$

3°) Вычисление интеграла путем перехода к пределу. Пусть Δ — разбиение $t_0 = \alpha$, t_1, t_2, ..., t_i, t_{i+1}, ..., $t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, где наибольшая из длин отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ равна η. Вычислим разность между интегралом (VI, 6; 69) и суммой

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot (\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}), \quad \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{VI, 6; 75}$$

Выражение (VI, 6; 75) можно записать в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{\varpi}(t) \cdot d\overrightarrow{M}(t), \tag{VI, 6; 76}$$

где $\vec{\varpi}$ — функция на $[\alpha, \beta]$ со значениями в $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$, равная $\vec{\omega}(M(\theta_i))$ в интервале $]t_i; t_{i+1}[$. Таким образом, имеем

$$\left\| \int\limits_{M \mid \overrightarrow{]\alpha, \beta[}} \vec{\omega} - \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot (\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)) \cdot d\overrightarrow{M}(t) \right\|. \tag{VI, 6; 77}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем η настолько малым, чтобы при всех $|t' - t''| \leqslant \eta$ выполнялось неравенство $\|\vec{\omega}(M(t')) - \vec{\omega}(M(t''))\| \leqslant \leqslant \varepsilon/L$, где L — длина пути (это возможно, так как функция $t \to \vec{\omega}(M(t))$, непрерывная на компакте $[\alpha, \beta]$, равномерно непрерывна на нем). Тогда $\|\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)\| \leqslant \varepsilon/L$ и правая часть неравенства (VI, 6; 77) не превосходит числа $\frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$. Отсюда следует, что интеграл от $\vec{\omega}$ по пути $M|\overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ является пределом сумм Римана (VI, 6; 75) при η, стремящемся к нулю. Из этого утверждения видно, что интеграл не зависит от параметризации пути. Две эквивалентные параметризации пути дают один и тот же интеграл; этот факт распространяет теорему 35 на случай, когда путь M имеет только конечную длину. Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 36. *Интеграл от дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *первой степени, определенной и непрерывной на открытом множестве* Ω *аффинного конечномерного пространства* E, *по пути* $M|\overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ *класса* C^1 *в* Ω *выражается в виде* (VI, 6; 67). *Если путь конечной длины не обязательно принадлежит классу* C^1, *то интеграл можно обобщить в соответствии с формулами* (VI, 6; 69) *и* (VI, 6; 70). *Этот интеграл не зависит от параметризации пути: два эквивалентных пути дают один и тот же интеграл. Интеграл допускает оценки* (VI, 6; 71), (VI, 6; 73) и (VI, 6; 74). *Он является пределом сумм Римана* (VI, 6; 75), *когда наибольшая из длин отрезков разбиения* Δ *интервала* $[\alpha, \beta]$ *стремится к нулю.*

§ 7. ФОРМУЛА СТОКСА

Многообразия с краем

Введем сначала понятие многообразия с краем. Прототипом такого многообразия может служить замкнутый шар евклидова аффинного пространства, границей которого служит соответствующая сфера.

Многообразием с краем класса C^m *размерности* n называется замкнутая часть V многообразия $\widetilde{V}$ класса C^m размерности n, совпадающая с замыканием своей внутренности, $V = \overline{\overset{\circ}{V}}$, граница которой $\dot{V} = \Sigma$ является гиперповерхностью в $\widetilde{V}$, т. е. подмногообразием класса C^m размерности $n-1$. Эта граница Σ называется *краем*, или *границей*, многообразия V и обозначается через bV. Многообразие с краем V является