Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем η настолько малым, чтобы при всех $|t' - t''| \leqslant \eta$ выполнялось неравенство $\|\vec{\omega}(M(t')) - \vec{\omega}(M(t''))\| \leqslant \varepsilon/L$, где L — длина пути (это возможно, так как функция $t \to \vec{\omega}(M(t))$, непрерывная на компакте $[\alpha, \beta]$, равномерно непрерывна на нем). Тогда $\|\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)\| \leqslant \varepsilon/L$ и правая часть неравенства (VI, 6; 77) не превосходит числа $\frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$. Отсюда следует, что интеграл от $\vec{\omega}$ по пути $M|\widehat{[\alpha, \beta]}$ является пределом сумм Римана (VI, 6; 75) при η, стремящемся к нулю. Из этого утверждения видно, что интеграл не зависит от параметризации пути. Две эквивалентные параметризации пути дают один и тот же интеграл; этот факт распространяет теорему 35 на случай, когда путь M имеет только конечную длину. Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 36. *Интеграл от дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *первой степени, определенной и непрерывной на открытом множестве* Ω *аффинного конечномерного пространства* E, *по пути* $M|\widehat{[\alpha, \beta]}$ *класса* C^1 *в* Ω *выражается в виде* (VI, 6; 67). *Если путь конечной длины не обязательно принадлежит классу* C^1, *то интеграл можно обобщить в соответствии с формулами* (VI, 6; 69) *и* (VI, 6; 70). *Этот интеграл не зависит от параметризации пути: два эквивалентных пути дают один и тот же интеграл. Интеграл допускает оценки* (VI, 6; 71), (VI, 6; 73) и (VI, 6; 74). *Он является пределом сумм Римана* (VI, 6; 75), *когда наибольшая из длин отрезков разбиения* Δ *интервала* $[\alpha, \beta]$ *стремится к нулю.*

§ 7. ФОРМУЛА СТОКСА

Многообразия с краем

Введем сначала понятие многообразия с краем. Прототипом такого многообразия может служить замкнутый шар евклидова аффинного пространства, границей которого служит соответствующая сфера.

Многообразием с краем класса C^m *размерности* n называется замкнутая часть V многообразия $\tilde{V}$ класса C^m размерности n, совпадающая с замыканием своей внутренности, $V = \overline{\overset{\circ}{V}}$, граница которой $\dot{V} = \Sigma$ является гиперповерхностью в $\tilde{V}$, т. е. подмногообразием класса C^m размерности $n - 1$. Эта граница Σ называется *краем*, или *границей*, многообразия V и обозначается через bV. Многообразие с краем V является

довольно частным случаем псевдомногообразия класса C^m размерности n. Двумерное псевдомногообразие класса C^∞, определенное в (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64), многообразием с краем не является. Некоторые топологические свойства, относящиеся к случаю, когда V — шар евклидова пространства и bV — соответствующая сфера, переносятся на общий случай. Если граница Σ пуста, то V становится обычным многообразием без края. Рассмотрим поэтому случай, когда граница Σ не пуста. Ее дополнение $C\Sigma$ в $\tilde{V}$ является объединением двух непересекающихся открытых множеств: внутренности $\overset{\circ}{V}$ множества V и дополнения CV, внешней части V. Ни одно из этих двух открытых множеств не может быть пустым. В самом деле, если бы $\overset{\circ}{V}$ было пусто, то $V = \overline{\overset{\circ}{V}}$ также было пусто. С другой стороны, если CV пусто, то множество V совпадает с $\tilde{V}$ и, следовательно, его граница Σ пуста. Отсюда следует, что $C\Sigma$ есть объединение двух открытых непересекающихся и непустых множеств, а следовательно, оно не связно и содержит не менее двух областей.

Обозначим через $(\Omega_i)_{i \in I}$ связные компоненты $C\Sigma$; каждая из них, если она имеет общие точки одновременно с $\overset{\circ}{V}$ и CV, согласно теореме 36 гл. II, должна иметь общие точки с Σ, а это невозможно, так как она лежит в дополнении к Σ. Следовательно, каждая из областей Ω_i содержится полностью в $\overset{\circ}{V}$ или полностью в CV. Другими словами, множество I можно представить в виде объединения двух дополнительных множеств J и K, так что $\overset{\circ}{V} = \bigcup\limits_{i \in J} (\Omega_i)$ и $CV = \bigcup\limits_{i \in K} \Omega_i$. Внутренность и внешняя часть V являются объединением областей, дополнительных к Σ. Если окажется, что Σ делит V ровно на две части, то обе эти области равны $\overset{\circ}{V}$ и CV. Рассуждение, аналогичное проведенному в теореме 28, показывает, что если $\tilde{V}$ и Σ связны, то Σ делит $\tilde{V}$ не более чем на две области [1]). Однако так как в сделанных предположениях (Σ является границей V) существует не менее двух областей, то Σ делит $\tilde{V}$ ровно на две области $\overset{\circ}{V}$ и CV.

---

[1]) Поскольку при доказательстве теоремы 28 $\tilde{V}$ предполагалось аффинным пространством, то можно было использовать отрезок прямой, соединяющей точку области с точкой Σ. Здесь $\tilde{V}$ связно, а следовательно, линейно связно (т. I, гл. II, § 10, теорема 36_7). Поэтому точку области и точку Σ можно соединить некоторым путем, а этого достаточно для проведения необходимых рассуждений.

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество из $\tilde{V}$. Тогда пересечение $V \cap \mathcal{O}$ представляет собой в $\mathcal{O}$ многообразие с краем, и его граница есть не что иное, как $\Sigma \cap \mathcal{O}$.

[Это чисто топологическое свойство, вытекающее из того, что $\mathcal{O}$ — открытое множество. Когда говорят, что точка $a \in \mathcal{O}$ является внутренней в $V \cap \mathcal{O}$ относительно $\mathcal{O}$, это означает, что $V \cap \mathcal{O}$ является окрестностью a в $\mathcal{O}$. Однако, так как множество $\mathcal{O}$ открыто, это утверждение сводится к следующему: V является окрестностью a в $\tilde{V}$ и, значит, a лежит в пересечении внутренности $\overset{\circ}{V}$ множества V и множества $\mathcal{O}$. Следовательно, $(V \cap \mathcal{O})^\circ = \overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$. С другой стороны, для того чтобы точка $a \in \mathcal{O}$ принадлежала границе множества $V \cap \mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы каждая окрестность a в $\mathcal{O}$ содержала точки V и точки $\mathcal{C}V$. Это утверждение равносильно тому, что каждая окрестность точки a в V обладает тем же свойством, поскольку $\mathcal{O}$ открыто, т. е. a лежит на границе множества V, а значит, в $\Sigma \cap \mathcal{O}$. Таким образом, получаем $(V \cap \mathcal{O})^\cdot = \dot{V} \cap \mathcal{O} = \Sigma \cap \mathcal{O}$. Множество $\Sigma \cap \mathcal{O}$ является многообразием класса C^m размерности $n-1$. Наконец, каждая точка множества $V \cap \mathcal{O}$ является точкой прикосновения в $\tilde{V}$ для $\overset{\circ}{V}$, а следовательно, в $\mathcal{O}$ для $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$. Значит, $V \cap \mathcal{O}$ является в $\mathcal{O}$ замыканием своей внутренности.]

Если окажется, что граница Σ делит $\mathcal{O}$ на две области, то этими областями будут $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$ и $\mathcal{C}V \cap \mathcal{O}$. В теореме 27 мы видели, что каждая точка a из Σ обладает открытыми окрестностями $\mathscr{V}$, которые делятся поверхностью Σ на две области, для каждой из которых точка a является точкой прикосновения. Отсюда вытекает, что каждая точка a из Σ является одновременно точкой прикосновения для $\overset{\circ}{V}$ и для $\mathcal{C}V$.

Многообразие с псевдокраем

Для формулы Стокса нам понадобятся множества, представляющие собой только многообразия с псевдокраем.

Говорят, что множество V есть *многообразие с псевдокраем класса C^m размерности n*, если оно является частью некоторого многообразия $\tilde{V}$ класса C^m размерности n, замкнутой в $\tilde{V}$ и совпадающей с замыканием своей внутренности, граница которого Σ является псевдомногообразием класса C^m размерности $n-1$[1]).

[1]) Эта граница называется псевдограницей. — *Прим. ред.*

Так, например, множество точек (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих неравенствам

$$x^2 + y^2 \leqslant (1 - z)^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad \text{(VI, 7; 1)}$$

образует многообразие с псевдокраем класса C^∞ размерности 3, внутренность которого $\overset{\circ}{V}$ является множеством точек, удовлетворяющих неравенствам

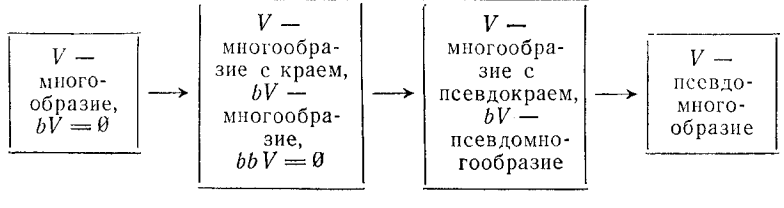
$$x^2 + y^2 < (1 - z)^2, \quad 0 < z < 1, \qquad \text{(VI, 7; 2)}$$

а граница которого Σ является псевдогиперповерхностью, определенной соотношениями (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64). Точно так же если в плоскости мы рассмотрим выпуклый многоугольник, то он будет представлять собой многообразие с псевдокраем класса C^∞ размерности 2, внутренность которого является внутренней частью многоугольника, а его граница — контур многоугольника — является объединением конечного числа отрезков прямых, т. е. псевдомногообразием класса C^∞ размерности 1. Более общо, полиэдральное тело является многообразием с псевдокраем.

Многообразие с псевдокраем является частным случаем псевдомногообразия [поверхность Σ, определенная соотношениями (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64), не является многообразием с псевдокраем; однако мы только что видели, что она является псевдограницей некоторого многообразия с псевдокраем].

Если V является многообразием с краем, то его граница Σ есть истинное многообразие без края. Поэтому $bbV = \emptyset$. Напротив, если V — многообразие с псевдокраем, то его псевдограница Σ — всего лишь некоторое псевдомногообразие.

В итоге мы получаем следующие импликации[1]):



Пусть теперь V — многообразие с псевдокраем класса C^m размерности n и H — отображение класса C^m некоторой окрестности V из $\tilde{V}$ в многообразие Ω (которое здесь, вообще говоря, будет некоторым открытым множеством аффинного пространства). Тогда $H|V$ является особым много-

[1]) Все эти «варварские» понятия вводятся не ради удовольствия! Обычно на практике приходится вводить формулу Стокса для пространств, аналогичных полиэдрам, т. е. для многообразий с псевдокраем.

образием с псевдокраем в Ω класса C^m размерности n. Его псевдокрай является особым псевдомногообразием $H \mid bV$ класса C^m размерности $n-1$.

Ориентация псевдокрая

Пусть сначала $V \subset \tilde{V}$ — некоторое многообразие с краем класса C^1. Предположим, что $\tilde{V}$ ориентировано. Тогда V также будет ориентированным в смысле ориентации псевдомногообразий: его регулярная часть $\overset{\circ}{V}$ — открытое множество из $\tilde{V}$ — ориентирована. Кроме того, *край* Σ *можно снабдить канонической ориентацией.*

В самом деле, границу можно снабдить трансверсальной ориентацией, в которой выходящие относительно $\overset{\circ}{V}$ векторы считаются положительными (теорема 29). Поскольку граница Σ является гиперповерхностью в ориентированном многообразии $\tilde{V}$, то теперь ее можно снабдить соответствующей касательной ориентацией (теорема 30 и замечание на стр. 177). Базис касательного векторного пространства в точке x поверхности Σ будет положительным в этой ориентации, если после присоединения к нему впереди вектора, выходящего относительно $\overset{\circ}{V}$ в точке x, он будет положительным в ориентации $\tilde{V}$. В этом случае говорят, что ориентированное многообразие $\vec{\Sigma}$ является краем ориентированного многообразия с краем $\vec{V}$ и пишут: $\vec{\Sigma} = \widehat{b\vec{V}}$. Если $\vec{V}$ заменить на $\hat{V}$, т. е. на V с противоположной ориентацией, то $\vec{\Sigma}$ заменится на $\hat{\vec{\Sigma}}$. Уместно заметить, что $\mathbf{C}\overset{\circ}{V}$ также является многообразием с краем с внутренней частью $\mathbf{C}V$ и тем же самым краем Σ. Если $\mathbf{C}\overset{\circ}{V}$ ориентировано в соответствии с ориентацией $\tilde{V}$, то *ориентация* Σ *как границы* $\mathbf{C}\overset{\circ}{V}$ *противоположна ее ориентации как границы* V. Если, например, V является замкнутым шаром $\|x\| \leqslant R$ некоторого аффинного евклидова пространства, то ориентация Σ как границы V является канонической ориентацией сфер евклидова пространства (стр. 179). Ориентация Σ как границы множества $\|x\| \geqslant R$ противоположна предыдущей ориентации.

Если рассматривается ориентированное особое многообразие с краем $H \mid \vec{V}$, определенное отображением H класса C^1 некоторого ориентированного многообразия с краем $\vec{V}$, то границей этого особого многообразия называется сужение $H \mid \widehat{b\vec{V}} = H \mid \vec{\Sigma}$ отображения H на границу $\vec{\Sigma}$ многообразия $\vec{V}$.

Если $\vec{V}$ является лишь ориентированным многообразием с псевдокраем, то можно тем же самым методом ориентировать регулярную часть $\mathcal{U}$ псевдокрая Σ. Это то же самое, что мы называли ориентацией Σ. Следовательно, здесь псевдограница ориентированного многообразия с псевдокраем является ориентированным псевдомногообразием. Например, если V — полиэдр, то ориентация V определяет ориентацию граней полиэдра. Если $\vec{V}$ — множество, определенное формулой (VI, 7; 1) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и снабженное канонической ориентацией $\mathbb{R}^3$, то его псевдокрай является псевдогиперповерхностью $\vec{\Sigma}$, определенной формулами (VI, 6; 63) и (VI, 6; 64) и снабженной ранее определенной ориентацией. То же самое можно сделать для особого многообразия с псевдокраем.

Ориентированное многообразие (без края) называют также *циклом*. Например, ориентированная сфера евклидова пространства является компактным циклом. Отображение H цикла является особым циклом. Таким образом, край многообразия (соответственно особого многообразия) с краем является циклом (соответственно особым циклом).

Теорема Стокса

Пусть $\vec{V} \subset \tilde{\vec{V}}$ — ориентированное многообразие класса C^1 размерности n с краем или псевдокраем. Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1 на V.

Имеет место формула Стокса

$$\int\limits_{\vec{V}} d\vec{\omega} = \int\limits_{\widehat{b\vec{V}}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 3)}$$

Согласно этой формуле, допустима перестановка операции взятия границы многообразия $\vec{V}$ и операции взятия кограницы дифференциальной формы $\vec{\omega}$. (Именно отсюда произошло название «кограница», естественно согласующееся с понятием границы многообразия.) В этой формуле, с одной стороны, интегрируется дифференциальная форма $\vec{\omega}$ степени $n-1$ на ориентированном псевдомногообразии $\widehat{b\vec{V}}$ размерности $n-1$ и, с другой, — дифференциальная форма $d\vec{\omega}$ степени n на ориентированном псевдомногообразии $\vec{V}$ размерности n.

Эта теорема применима только при некоторых весьма ограничительных условиях. Ее можно, естественно, обобщить на особые многообразия с краем или псевдокраем (см. формулу (VI, 7; 4)).

Элементарная теорема Стокса

Теорема 37. *Пусть $V \subset \tilde{V}$ — ориентированное многообразие с краем Σ класса C^2 размерности n. Пусть H — отображение класса C^2 некоторой окрестности многообразия V из $\tilde{V}$ в многообразие Ω класса C^2, определяющее некоторое ориентированное особое многообразие с краем $H|\vec{V}$ многообразия Ω* [1]). *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1, определенная в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Если V пересекает прообраз при отображении H носителя $\vec{\omega}$ по некоторому компакту (а это так, когда V компактно [2]) *или когда $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель и отображение H является собственным на V), то имеет место формула Стокса*

$$\int_{H|\vec{V}} d\vec{\omega} = \int_{H|b\vec{V}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 4)}$$

Эта теорема называется *элементарной* теоремой Стокса по той причине, что многообразие V имеет край bV, являющийся истинным многообразием.

Доказательство. 1-*й случай*. Пусть $\Omega = \tilde{V} = V = \mathbb{R}^n$ (следовательно, $\Sigma = \emptyset$), H — тождественное отображение и форма $\vec{\omega}$ имеет компактный носитель. Предполагается, что пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено своей канонической ориентацией.

Можно считать, что дифференциальная форма $\vec{\omega}$ записана в виде (VI, 3; 41):

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 5)}$$

Тогда

$$d\vec{\omega} = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 6)}$$

Нам достаточно будет показать, что формула (VI, 7; 3) справедлива в случае, когда сумма сводится к *одному* члену,

---

[1]) В дальнейшем в этом курсе многообразие Ω будет открытым множеством конечномерного аффинного пространства. Именно так будет в том случае, когда V лежит в конечномерном аффинном пространстве и H — тождественное преобразование.

[2]) Это случай, с которым мы будем встречаться чаще всего.

т. е. доказать ее для формы $\vec{\omega} = \vec{\omega}_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

При $V = \mathbb{R}^n$, снабженном канонической ориентацией, функция ориентации θ, указанная на стр. 151, равна $+1$, и поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\int \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \qquad \text{(VI, 7; 7)}$$

является обычным кратным интегралом. Написанные интегралы имеют смысл, поскольку $\vec{\omega}$ непрерывна и имеет компактный носитель.

Так как край Σ пуст, то интеграл на $\vec{\Sigma}$ равен нулю, и доказываемая формула запишется в виде

$$\int\int \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0. \qquad \text{(VI, 7; 8)}$$

Применим теорему Фубини (теорема 77 гл. IV):

$$\int\int \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j. \qquad \text{(VI, 7; 9)}$$

В теореме Фубини указывается, что последний интеграл имеет смысл только для $(dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n)$-почти всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ и что он определяет $(dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n)$-интегрируемую функцию. Однако так как для $\vec{\omega}$ с компактным носителем имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j =$$

$$= [\vec{\omega}_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_n)]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = \vec{0}, \qquad \text{(VI, 7; 10)}$$

то *последний интеграл всегда существует и равен нулю.*

2-й случай. Многообразие V является замкнутым полупространством $x_1 \leqslant 0$ пространства $\tilde{V} = \Omega = \mathbb{R}^n$, H — тождественное отображение и $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Мы предполагаем, что $\mathbb{R}^n$ снабжено канонической ориентацией. В этом случае Σ представляет собой гиперпло-

скость $x_1 = 0$, и, как это указывалось на стр. 177, ориентация Σ является канонической ориентацией, в которой базис $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ положителен. Как и в первом случае, предположим, что $\vec{\omega}$ имеет вид (VI, 7; 6), где сумма $\sum$ сводится к одному члену. Левая часть равенства (VI, 7; 4) является интегралом, равным интегралу, стоящему в левой части равенства (VI, 7; 8), но вычисленному не на $\mathbb{R}^n$, а на V — полупространстве $x_1 \leqslant 0$. Правая часть равенства (VI, 7; 4) вычисляется следующим образом. Для многообразия Σ берется тождественная карта. Прообраз формы $\vec{\omega}$ на $\mathbb{R}^n$ является формой на $\mathbb{R}^{n-1}$, полученной в результате замены x_1 и dx_1 на 0 в форме $\vec{\omega}$, т. е. является дифференциальной формой вида $\vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \wedge dx_3, \ldots, dx_n$.

Поскольку Σ имеет каноническую ориентацию пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, функция ориентации θ снова равна 1, и мы получаем:

$$\int\limits_{\Sigma} \ldots dx_2 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int \ldots dx_2 dx_3 \ldots dx_n. \tag{VI, 7; 11}$$

Таким образом, формула Стокса запишется в виде

$$\int\int \ldots \int\limits_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 0 \quad \text{для} \quad j \neq 1 \tag{VI, 7; 12}$$

и

$$\int\int \ldots \int\limits_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots \int \vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{VI, 7; 13}$$

Формула (VI, 7; 12) доказывается так же, как доказывалась формула (VI, 7; 8). Согласно теореме Фубини (формула (IV, 8; 35)),

$$\int\int \ldots \int\limits_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{x_1 \leqslant 0} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_j, \tag{VI, 7; 14}$$

причем последний интеграл равен нулю.

Для формулы (VI, 7; 13) снова воспользуемся теоремой Фубини, которая даст на этот раз с другими пределами интегри-

рования такое равенство:

$$\int\int \dots \int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int dx_2 \dots dx_n \int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}\, dx_1. \qquad \text{(VI, 7; 15)}$$

Но последний интеграл равен

$$\int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 =$$

$$= [\vec{\omega}_1(\xi, x_2, \dots, x_n)]_{\xi=-\infty}^{\xi=0} = \vec{\omega}_1(0, x_2, \dots, x_n). \qquad \text{(VI, 7; 16)}$$

Подставляя его в (VI, 7; 15), получаем (VI, 7; 13).

3-*й случай.* Многообразие V произвольно, $\Omega = \tilde{V}$, H — тождественное отображение, носитель дифференциальной формы $\vec{\omega}$ пересекает многообразие V по некоторому компакту.

Пусть a — точка V. Если эта точка лежит в $\overset{\circ}{V}$, то она имеет связную окрестность $\mathscr{V}_a$ в $\overset{\circ}{V}$, являющуюся образом карты Φ_a множества $\overset{\circ}{V}$. Карта Φ_a отображает открытое множество $\mathscr{O}_a$ из $\mathbb{R}^n$ в V, так что $\Phi_a(\mathscr{O}_a) = \mathscr{V}_a$.

Если же точка a принадлежит Σ, то, согласно следствию 2_2 теоремы 32 гл. III, можно найти такой C^2-диффеоморфизм Φ_a открытого шара $\mathscr{O}_a$ из $\mathbb{R}^n$ на открытую область $\mathscr{V}_a$ в V, содержащую a, что пересечение $\Sigma \cap \mathscr{V}_a$ будет образом при отображении Φ_a пересечения $\mathscr{O}_a$ с гиперповерхностью $u_1 = 0$ пространства $\mathbb{R}^n$. Эта гиперповерхность разрезает шар на две области $u_1 < 0$ и $u_1 > 0$, образы которых при отображении Φ_a являются двумя областями, определенными в $\mathscr{V}_a$ поверхностью Σ. На стр. 215 мы видели, что эти области обязательно равны $\overset{\circ}{V} \cap \mathscr{V}_a$ и $\mathrm{C}V \cap \mathscr{V}_a$. Заменяя, если это необходимо, u_1 на $-u_1$ (что означает, очевидно, замену карты), можно считать, что образом $u_1 < 0$ при отображении Φ_a является пересечение $\overset{\circ}{V} \cap \mathscr{V}_a$.

Множество построенных окрестностей $\mathscr{V}_a$ образует некоторое покрытие V и тем более покрытие компактного по условию пересечения V и носителя формы $\vec{\omega}$. Значит, существует конечное число окрестностей $\mathscr{V}_a$, покрывающих это пересечение (пусть это будут $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$, соответствующие точкам a_i). Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ — подчиненное разложение единицы, образованное функциями класса C^2. Так как $\tilde{V}$ по предположению принадлежит классу C^2, такое разложение в силу теоремы 11 гл. IV возможно.

Формула Стокса теперь запишется в виде

$$\sum_{i\in I}\int\limits_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega}) = \sum_{i\in I}\int\limits_{\widehat{bV}} \alpha_i\vec{\omega}, \qquad \text{(VI, 7; 17)}$$

поскольку $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i$ равна 1 на пересечении V и носителя $\vec{\omega}$.

Докажем, что каждый член первой суммы равен соответствующему члену второй суммы. Поскольку отображение Φ_i является C^2-*диффеоморфизмом*, то оно перестановочно с кограницей d (теорема 17) и $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$ принадлежит классу C^1 в $\mathcal{O}_i$ (теорема 14_2). Поэтому

$$\int\limits_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega}) = \int\limits_{\mathcal{O}_i} \Phi_i^* d(\alpha_i\vec{\omega}) = \int\limits_{\mathcal{O}_i} d(\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})),$$
$$\int\limits_{\widehat{bV}} \alpha_i\vec{\omega} = \vec{0}, \qquad \text{(VI, 7; 18)}$$

если $a_i \in \overset{c}{V}$, и

$$\int\limits_{\vec{V}} d(\alpha_i\vec{\omega}) = \int\limits_{\vec{\mathcal{O}}_i \cap \{u_1 < 0\}} d(\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})),$$
$$\int\limits_{\widehat{bV}} \alpha_i\vec{\omega} = \int\limits_{\mathcal{O}_i\cap\{u_1=0\}} \Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega}), \qquad \text{(VI, 7; 19)}$$

если $a_i \in \Sigma$.

Продолжим форму $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$, определенную только в $\mathcal{O}_i$, нулем $\vec{0}$ в $\mathbf{C}\mathcal{O}_i$. Она будет тогда равна нулю в $\mathbf{C}K_i$, где K_i — носитель $\Phi_i^*\alpha_i$. Продолженная таким образом на $\mathbb{R}^n$ форма принадлежит классу C^1, что очевидно, так как она принадлежит этому классу в *двух открытых* множествах $\mathcal{O}_i$ и $\mathbf{C}K_i$, дающих в объединении $\mathbb{R}^n$. Если условиться обозначать попрежнему через $\Phi_i^*(\alpha_i\vec{\omega})$ продолженную форму, то в формулах (VI, 7; 18) и (VI, 7; 19) можно заменить $\mathcal{O}_i$ на $\mathbb{R}^n$.

Ориентация, которой надо снабдить $\mathbb{R}^n$, является канонической ориентацией или противоположной ей (в зависимости от функции ориентации θ_i, связанной с Φ_i; постоянство знака обеспечивается связностью множества $\mathcal{O}_i$). Впрочем, это особой роли не играет и можно взять, например, каноническую ориентацию $\mathbb{R}^n$, поскольку при этом одновременно сохранятся или изменятся знаки обеих частей.

Равенство обеих строк в формуле (VI, 7; 18) вытекает из 1-го доказанного случая, а равенство обеих строк в (VI, 7; 19)

вытекает из 2-го случая. Таким образом, (VI, 7; 17), а значит, и 3-й случай доказаны.

4-*й случай*: *общий случай*. Пусть теперь отображение H произвольно. Согласно определению интеграла от дифференциальной формы по особому многообразию, формула Стокса эквивалентна соотношению

$$\int_{\vec{V}} H^* d\vec{\omega} = \int_{\widehat{bV}} H^*\vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 20)}$$

Так как отображение H по предположению принадлежит классу C^2, то отображение H^* коммутирует с кограницей d (теорема 17), а это приводит к равенству

$$\int_{\vec{V}} d\,(H^*\vec{\omega}) = \int_{\widehat{bV}} H^*\vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 21)}$$

Но по предположению носитель $H^*\vec{\omega}$ пересекается с V по компакту, и полученная формула получается из 3-го случая относительно $H^*\vec{\omega}$. Тем самым элементарная теорема Стокса полностью доказана.

Замечание. В большинстве случаев можно ограничиться предположением о том, что H и $\tilde{V}$ принадлежат не классу C^2, а лишь классу C^1. Мы не будем приводить здесь точные условия для этого случая. Иногда это не вносит никаких серьезных дополнительных трудностей; иногда переход от C^2 к C^1 сам по себе является новой и тонкой теорией.

Общая теорема Стокса

В случае, *когда многообразие* V *имеет псевдограницу* Σ, *сформулированы условия применимости формулы Стокса*, которые могут охватить хотя бы наиболее часто встречающиеся случаи. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая более или менее удовлетворительной общности.

Пусть Σ — замкнутая псевдогиперповерхность класса C^1 из $\mathbb{R}^n$ или некоторый открытый шар из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\vec{F}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, порожденное базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n$.

Пусть P_j — операция «проектирования на F_j параллельно $\vec{e}_j$»: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Это линейное непрерывное отображение $\mathbb{R}^n$ на $\vec{F}_j = \mathbb{R}^{n-1}$. Пусть b — некото-

рая точка F_j. Предположим, что в подпространстве $\vec{F}_j$ существует окрестность $\mathscr{B}$ точки b, проектирующий цилиндр которой $P_j^{-1}\mathscr{B}$ пересекает Σ в конечном числе l (возможно, и нулевом) связных компонент Σ_k, $k=1, 2, \ldots, l$, каждая из которых имеет явное уравнение $x_j = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, причем функции F_k принадлежат классу C^1 на $\mathscr{B}$. Отсюда следует, что $P_j^{-1}\mathscr{B} \cap \Sigma$ лежит в регулярной части $\mathscr{U}$ поверхности Σ. В этом случае говорят, что точка b из $\vec{F}_j$ является P_j-регулярной для Σ.

Будем называть поверхность Σ регулярной для проекции P_j, если каждая точка b из $\vec{F}_j$ является P_j-регулярной для Σ, кроме, быть может, точек b исключительного множества $\mathscr{F}_j$ из $\vec{F}_j$ лебеговой меры нуль в пространстве $\vec{F}_j$, проектирующий цилиндр которого $P^{-1}\mathscr{F}_j$ пересекает регулярную часть $\mathscr{U}$ множества Σ по множеству нулевой $(n-1)$-мерной площади. Среди точек этого пересечения фигурируют точки «видимого контура» части $\mathscr{U}$, т. е. такие точки из $\mathscr{U}$, в которых касательная гиперплоскость параллельна $\vec{e}_j$ (и все точки пересечения $\mathscr{U}$ с проектирующим цилиндром видимого контура). Предполагается, что множество этих точек видимого контура имеет, в частности, нулевую $(n-1)$-мерную площадь. (Это не тот случай, когда, например, Σ является псевдограницей куба с ребрами, параллельными координатным осям. Однако теорема Стокса применима к кубу! Простое изменение системы координат делает псевдограницу куба P_j-регулярной для каждого $j=1, 2, \ldots, n$, а этого нам достаточно.)

Теорема 38. *Пусть $\tilde{V}$ — многообразие с псевдокраем класса C^1 некоторого ориентированного n-мерного многообразия $\overset{c}{\tilde{V}}$ класса C^1. Предположим, что для каждой точки a особой части псевдограницы Σ существует C^1-диффеоморфизм Φ_a некоторого открытого шара $\mathscr{O}_a$ пространства $\mathbb{R}^n$ (или самого пространства $\mathbb{R}^n$) на некоторую открытую окрестность $\Phi_a(\mathscr{O}_a)$ точки a в $\tilde{V}$, такой, что область $\Phi_a^{-1}(\Sigma)$ является P_j-регулярной в $\mathscr{O}_a$ для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ и имеет регулярную часть $\Phi_a^{-1}(\mathscr{U})$ конечной $(n-1)$-мерной площади.*

Пусть H — отображение класса C^1 открытой окрестности V из $\tilde{V}$ в некоторое многообразие Ω класса C^2.

Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени $n-1$ класса C^1 в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если пересе-

чение V и прообраза при отображении H носителя $\vec{\omega}$ компактно, то имеет место формула Стокса (VI, 7; 4).

Конечно, эта теорема содержит как частный случай предыдущую. Можно было бы доказать ее сразу. Однако мы предпочли дать сначала элементарное доказательство элементарного случая. Точно так же, как и в предыдущей теореме, мы приведем доказательство только для значительно более простого случая, когда C^1 всюду заменено на C^2.

Доказательство. 1-*случай.* Пусть $\tilde{V}$ — открытый шар из $\mathbb{R}^n$ или само пространство $\mathbb{R}^n$. Для упрощения технической стороны доказательства положим $\tilde{V}=\mathbb{R}^n$. Псевдограница Σ многообразия V P_j-регулярна для каждого $j=1, 2, \ldots, n$, а ее регулярная часть $\mathcal{U}$ имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь. Пусть $\Omega=\tilde{V}$, H — тождественное отображение и носитель формы $\vec{\omega}$ компактен. В этом первом случае предположение о том, что $\mathcal{U}$ принадлежит классу C^1, не усложняет задачу. Мы будем считать, что форма $\vec{\omega}$ задана в виде (VI, 7; 5) с единственным членом $\vec{\omega}_j$ в сумме $\sum$.

Нам достаточно для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ показать, что

$$(-1)^{j-1}\int\int\ldots\int_V \frac{\partial\vec{\omega}_j}{\partial x_j}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{\vec{\Sigma}}\vec{\omega}_j\,dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\ldots\wedge dx_n, \quad \text{(VI, 7; 22)}$$

где интеграл $\int_{\vec{\Sigma}}$ равен $\int_{\vec{\mathcal{U}}}$, а $\mathcal{U}$ — регулярная часть Σ.

Различные значения j здесь играют одинаковую роль. Поэтому достаточно провести доказательство, например, для $j=1$.

А) Левую часть можно вычислить по формуле Фубини, что дает интеграл

$$\int\ldots\int dx_2\,dx_3\ldots dx_n\int_{V(x_2,\ldots,x_n)}\frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1, \quad \text{(VI, 7; 23)}$$

где $V(x_2, \ldots, x_n)$ — множество из $\mathbb{R}$, образованное такими значениями x_1, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in V$ [след многообразия V на прямой, параллельной оси x_1, с координатами $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — см. формулу (IV, 8; 35)]. Теорема Фубини утверждает только, что последний интеграл имеет смысл для $(dx_2\,dx_3\ldots dx_n)$-почти всех значений $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и определяет некоторую

$(dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n)$-интегрируемую функцию. Больше здесь ничего нельзя сказать, как это было в первом или втором случаях доказательства теоремы 37.

Обозначим последний интеграл через $\vec{J}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Он $(dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n)$-интегрируем, и, следовательно, на $\mathbb{R}^{n-1}$ мера $\vec{J}(x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_n$ имеет конечную норму. Обозначим эту меру через $\vec{\nu}$. Тогда левая часть соотношения (VI, 7; 23) будет равна $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu}$. Таким образом,

$$\vec{J}(x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{V(x_2, \ldots, x_n)} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1,$$

$$d\vec{\nu} = \vec{J}(x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\,\ldots\,dx_n, \qquad \text{(VI, 7; 24)}$$

$$\int\limits_{\hat{V}} d\vec{\omega} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu}.$$

В) Рассмотрим теперь дифференциальную форму $\vec{\omega}$. На регулярной части $\hat{\mathcal{U}}$ (ориентированной как граница множества V) поверхности Σ она определяет некоторую меру $[\vec{\omega}] = [\vec{\omega}]_{\hat{\mathcal{U}}}$. Поскольку форма $\vec{\omega}_1$ со значениями в $\vec{F}$ непрерывна и имеет компактный носитель, ее норма ограничена. С другой стороны, так как часть $\mathcal{U}$ по предположению имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь, из теоремы 32 следует, что $[\vec{\omega}]$ является мерой с конечной нормой и базой dS, являющейся мерой $\geqslant 0$ с конечной нормой. Теперь в силу непрерывности проекции P_1: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \to (x_2, x_3, \ldots, x_n)$ образ $\vec{\mu} = P[\vec{\omega}]$ существует и является мерой конечной нормы на $\mathbb{R}^{n-1}$ (теорема 59 гл. IV и ее обобщение на случай векторных мер; см. стр. 627 т. I[1])). Правая часть соотношения (VI, 7; 4) равна $\int\limits_{\hat{\mathcal{U}}} [\vec{\omega}]_{\hat{\mathcal{U}}}$.

---

[1]) В противоположность тому, что говорилось ранее на стр. 627 т. I, теперь нет необходимости предполагать пространство $\vec{F}$ конечномерным, поскольку *мы уже знаем*, что $[\vec{\omega}]_{\mathcal{U}}$ имеет базу dS и плотность, ограниченную величиной $\|\vec{\omega}_1\| < +\infty$.

Напротив, нам неизвестно, будет ли образ $P_1[\vec{\omega}]$ меры $[\vec{\omega}]$ при отображении P_1 иметь базу $\geqslant 0$. Значит, мы не можем применить к нему теорию продолжения Лебега (стр. 610 т. I), а потому должны помнить о том, что

C) Пусть $b=(b_2, \ldots, b_n)$ — точка пространства $\vec{F}_1=\mathbb{R}^{n-1}$, P_1-регулярная для Σ, и пусть $\mathscr{B}$ — некоторая открытая связная окрестность точки b в $\vec{F}_1$, обладающая свойствами, указанными на стр. 225.

Покажем, что $\vec{\mu}=\vec{\nu}$ *в окрестности* $\mathscr{B}$. Если ограничиться только значениями образа $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$ при отображении P_1, лежащими в $\mathscr{B}$, то $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$ можно заменить на $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathcal{U}}}$ — меру, соответствующую форме $\vec{\omega}$ на ориентированном многообразии $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathcal{U}}$ [1]).

Здесь $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathcal{U}}=\vec{\Sigma}_1\cup\vec{\Sigma}_2\cup\ldots\cup\vec{\Sigma}_l$.

Рассмотрим меру $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$, определенную формой $\vec{\omega}$ на $\vec{\Sigma}_k$. Сужение $P_{1,k}$ проекции P_1 на Σ_k является C^1-диффеоморфизмом Σ_k на $\mathscr{B}$, поскольку это сужение допускает обратное отображение

$$P_{1,k}^{-1}\colon (x_2, \ldots, x_n)\to(x_1=F_k(x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(VI, 7; 26)}$$

класса C^1 окрестности $\mathscr{B}$ в $\mathbb{R}^n$.

Кроме того, можно сказать, что $P_{1,k}^{-1}\colon \mathscr{B}\to\Sigma_k$ является некоторой картой множества Σ_k. Согласно определению меры, соответствующей дифференциальной форме на ориентированном многообразии и построенной по карте этого многообразия (формула (VI, 6; 2)), $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$ является образом при отображении $P_{1,k}^{-1}$ меры

$$\vec{\mu}_k=\theta_k\vec{\omega}_1(F_k(x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\ldots dx_n, \qquad \text{(VI, 7; 27)}$$

эта теория здесь неприменима. Однако *мы настоятельно рекомендуем читателю* не обременять себя трудностями, связанными, возможно, с бесконечномерностью или даже с векторной природой пространства $\vec{F}$. Используя другие методы (слабые интегралы, теорему Хана — Банаха), можно свести случай дифференциальной формы с векторными значениями *непосредственно* к случаю формы со скалярными значениями!

[1]) Это вовсе не так очевидно, как кажется! На стр. 187 мы видели, что мера $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathcal{U}}}$ является сужением на $P_1^{-1}\mathscr{B}\cap\mathcal{U}$ меры $[\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$. С другой стороны, легко доказать свойство образов мер, не упоминавшееся в § 6 гл. IV: если P_1 является непрерывным λ-собственным отображением $X=\mathcal{U}$ в $Y=\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mathscr{B}$ является открытым множеством в Y, то сужение образа меры $P_1\lambda$ на открытое множество $\mathscr{B}$ совпадает с образом при отображении P_1 сужения λ на открытое множество $P_1^{-1}\mathscr{B}$.

определенной на $\mathscr{B}$. Здесь θ_k — функция ориентации, связанная с картой $P_{1,k}^{-1}$. Так как окрестность $\mathscr{B}$ по предположению связна, эта функция постоянна (равна ± 1). Следовательно, образ меры $[\vec{\omega}]_{\vec{\Sigma}_k}$ при отображении P_1 равен $\vec{\mu}_k$. Окончательно образ меры $[\vec{\omega}]_{P^{-1}\mathscr{B}\cap\vec{\mathscr{Q}}_l}$ при отображении P_1, т. е. сужение меры $\vec{\mu}$ на $\mathscr{B}$, является мерой $\sum\limits_k \vec{\mu}_k$. Таким образом, в окрестности $\mathscr{B}$

$$\vec{\mu} = \sum_{k=1}^{l} \vec{\mu}_k =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{l} \theta_k \vec{\omega}_1 (F_k(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)\right) dx_2 \ldots dx_n. \qquad \text{(VI, 7; 28)}$$

Для того чтобы закончить вычисление $\vec{\mu}$ в $\mathscr{B}$, уточним θ_k. Рассмотрим в точке x из Σ_k векторы $\vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \ldots, \vec{e}'_n$ касательной гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma_k)$, проекциями которых на $\vec{F}_1$ служат векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$ базиса $\vec{F}_1$.

[Поскольку уравнение касательной гиперплоскости $\vec{T}(x; \Sigma_k)$, согласно формуле (III, 3; 19_2), имеет вид

$$X_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_2, \ldots, x_n) X_j \qquad \text{(VI, 7; 29)}$$

и $\vec{e}_j$ является вектором, j-я координата которого равна 1, а все остальные — нули, то первой составляющей вектора $\vec{e}'_j$ будет $\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$, и мы получим

$$\vec{e}'_j = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)\vec{e}_1 + \vec{e}_j.] \qquad \text{(VI, 7; 30)}$$

По определению, θ_k — это знак базиса $\vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ касательной гиперплоскости $T(x; \vec{\Sigma}_k)$. В силу (VI, 7; 30) базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ имеет такой же знак, что и канонический базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т. е. этот знак положителен. Следовательно, θ_k — это также знак вектора $\vec{e}_1$ в трансверсальной ориентации $\vec{\Sigma}_k$, соответствующей касательной ориентации поверхности $\vec{\Sigma}_k$. Однако поверхность $\vec{\Sigma}_k$ имеет ориентацию границы V. Значит, функция θ_k равна $+1$, если вектор $\vec{e}_1$ *выходит* из $\vec{V}$ в точках Σ_k, и равна -1, если этот вектор *входит*

в $\overset{\circ}{V}$ в точках поверхности Σ_k. Формула (VI, 7; 28) теперь полностью объяснена.

Рассмотрим теперь меру $\vec{\nu}$ в окрестности $\mathscr{B}$. Для точки $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathscr{B}$ параллель $D = D_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$ к оси x_1, проходящая через эту точку, пересекает $\overset{\circ}{V}$ и $\tilde{V} - V = \mathbf{C}V$ по некоторым открытым множествам. Граничными точками этих открытых множеств могут быть только точки пересечения $D \cap \Sigma_k$ (или $D \cap \dot{\tilde{V}}$, где $\dot{\tilde{V}}$ является граничной сферой шара $\tilde{V}$, если только $\tilde{V}$ — шар; как уже отмечалось выше, мы проведем доказательство для случая, когда $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$). Обратно, если точка $A_k \in D \cap \Sigma_k$ и $\mathscr{W}_k$ является окрестностью точки A_k в $P^{-1}\mathscr{B}$, обладающей относительно Σ_k свойствами, указанными в теореме 27, то, как мы видели на стр. 215, две области, определяемые окрестностью $\mathscr{W}_k$ в Σ_k, равны $\overset{\circ}{V} \cap \mathscr{W}_k$ и $\mathbf{C}V \cap \mathscr{W}_k$. Параллель D, трансверсальная к Σ_k в A_k, проходит от одной до другой области в A_k (теорема 29). Следовательно, A_k действительно является граничной точкой одновременно для $D \cap \overset{\circ}{V}$ и для $D \cap \mathbf{C}V$ [1]).

Расположим точки A_k в порядке возрастания координаты x_1, а именно $A'_1, A'_2, \ldots, A'_l$. Они делят прямую D на $l+1$ открытых интервалов (из которых два полупрямые). Каждое из множеств $D \cap \overset{\circ}{V}$ и $D \cap \mathbf{C}V$ представляет собой объединение некоторых из этих интервалов (рассуждение, проведенное на стр. 214). Один из двух последовательных интервалов лежит в $D \cap \overset{\circ}{V}$, а другой — в $D \cap \mathbf{C}V$, а их общие концы не являются граничными точками. Если договориться через $A'_{-\infty}$ обозначать точку пополненной прямой $\overline{D}$ с координатой $x_1 = -\infty$, то $D \cap \overset{\circ}{V}$ будет представлять собой объединение интервалов $[A'_{-\infty}, A'_1]$, $[A'_2, A'_3]$, $[A'_4, A'_5]$, ... или объединение интервалов $[A'_1, A'_2]$, $[A'_3, A'_4]$, ...

Теперь $\vec{J}(x_2, \ldots, x_n)$ вычисляется сразу (формула (VI, 7; 24)). Если $[A'_i, A'_{i+1}]$ является интервалом из $V_{x_2, \ldots, x_n}$, то

$$\int \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 = \vec{\omega}_1(x'_{i+1}, x_2, \ldots, x_n) - \vec{\omega}_1(x'_i, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{(VI, 7; 31)}$$

[1]) На стр. 215 мы видели, что $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$, $\mathbf{C}V \cap \mathcal{O}$ и $\Sigma \cap \mathcal{O}$ являются внутренней, внешней и граничной частями множества $V \cap \mathcal{O}$ относительно $\mathcal{O}$, если только множество $\mathcal{O}$ открыто. Это топологическое свойство. Здесь D не является открытым множеством, но указанное свойство, как мы только что видели, сохраняется, поскольку Σ_k представляют собой гиперповерхности класса C^1, по отношению к которым прямая D трансверсальна.

где x_i' есть 1-я координата точки A_i' с $\vec{\omega}_1(x_i', x_2, \ldots, x_n) = 0$, если $x_i' = \pm\infty$, поскольку $\vec{\omega}_1$ имеет компактный носитель.

Суммируя по различным интервалам, получаем

$$\vec{J}(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{l} \eta_k \vec{\omega}_1(F_k(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{(VI, 7; 32)}$$

где η_k равно $+1$, если прямая D пересекает поверхность Σ_k, переходя из $\overset{\circ}{V}$ в $\mathrm{C}V$, когда x_1 возрастает, т. е. если вектор $\vec{e}_1$ выходит из $\overset{\circ}{V}$ в точке A_k. В противном случае $\eta_k = -1$. Согласно изложенному выше, это означает, что $\eta_k = \theta_k$. Сравнивая формулы (VI, 7; 32) и (VI, 7; 28), мы теперь видим, что $\vec{\mu} = \vec{\nu}$ в окрестности $\mathscr{B}$.

D) Согласно теореме 13 гл. IV, мера $\vec{\mu} - \vec{\nu}$, равная нулю во всех открытых множествах $\mathscr{B}$ пространства $\vec{F}_1$, равна нулю в их объединении. Но это объединение является открытым множеством $\mathrm{C}\mathscr{F}_1 = \mathcal{O}_1$ точек b из $\vec{F}_1$, являющихся P_1-регулярными для Σ. В этом открытом множестве $\mathcal{O}_1$ мера $\vec{\mu} - \vec{\nu}$ равна нулю.

Мы видели, что в множестве $\mathcal{O}_1$ мера $\vec{\mu}$ имеет базой меру $dx_2 dx_3 \ldots dx_n \geqslant 0$, ибо ту же базу имеет мера $\vec{\nu}$. К ней можно применить теорию продолжения Лебега и интегрировать ее по $\mathcal{O}_1$. Поскольку мера $\vec{\mu}$ является образом $P_1[\vec{\omega}]_{\mathscr{U}}$, мы получаем

$$\int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\mu} = \int_{P_1^{-1}\mathcal{O}_1 \cap \mathscr{U}} [\vec{\omega}]_{\mathscr{U}}. \qquad \text{(VI, 7; 33)}$$

Это соотношение теперь позволит нам доказать формулу Стокса. В самом деле, поскольку поверхность Σ P_1-регулярна, то $\mathscr{F}_1 = \mathrm{C}\mathcal{O}_1$ имеет нулевую меру относительно $dx_2 \ldots dx_n$. Следовательно, $\int_{\mathscr{F}_1} d\vec{\nu} = \vec{0}$ и, согласно (VI, 7; 24),

$$\int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu} = \int_{\vec{V}} d\vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 34)}$$

Аналогично, поскольку поверхность Σ P_1-регулярна, $P^{-1}\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{U}$ имеет нулевую $(n-1)$-мерную площадь, а так

как $[\vec{\omega}]_{\widehat{\mathcal{U}}}$ имеет базой dS, то $\int\limits_{P_1^{-1}\mathcal{F}_1\cap\mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\widehat{\mathcal{U}}} = \vec{0}$, так что

$$\int\limits_{P_1^{-1}\mathcal{O}_1\cap\mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\widehat{\mathcal{U}}} = \int\limits_{\mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\widehat{\mathcal{U}}} = \int\limits_{\widehat{bV}} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 7; 35)}$$

Подставляя теперь (VI, 7; 34) и (VI, 7; 35) в (VI, 7; 33), получаем (VI, 7; 3).

2-*й случай.* Многообразие $\tilde{V}$ произвольно, $\Omega = \tilde{V}$, H — тождественное отображение, носитель $\vec{\omega}$ пересекает V по некоторому компакту.

В этом случае для каждой точки $a \in \overset{\circ}{V}$ или регулярной части $\mathcal{U}$ поверхности Σ можно найти открытое множество $\mathcal{O}_a$ в $\mathbb{R}^n$ и отображение Φ_a, обладающее свойствами, указанными в доказательстве третьего случая *элементарной* теоремы Стокса. Если a является особой точкой поверхности Σ, то можно найти шар $\mathcal{O}_a$ в R^n и отображение Φ_a, обладающие свойствами, указанными в условии настоящей теоремы. Доказательство заканчивается с помощью разложения единицы точно так же, как в третьем случае элементарной теоремы с той разницей, что здесь надо будет перейти либо к первому случаю (при $a \in \overset{\circ}{V}$), или ко второму случаю (при $a \in \mathcal{U}$) элементарной теоремы, либо к первому случаю настоящей теоремы (при $a \in \Sigma - \mathcal{U}$).

3-*й случай. Общий случай* точно такой же, как и четвертый случай элементарной теоремы. Таким образом, *общая теорема Стокса* полностью доказана (по крайней мере, если всюду заменить C^1 на C^2).

Упражнения. 1°) Доказать, что компактный полиэдр V аффинного конечномерного пространства удовлетворяет условиям теоремы. Выбирая систему координат, ни один из базисных векторов которой не параллелен ни одной из граней полиэдра, мы придем к первому случаю доказательства. В этом случае можно провести и прямое доказательство даже тогда, когда базисные векторы выбранной системы координат параллельны граням полиэдра. Достаточно взять, например, в качестве V куб с ребрами, параллельными базисным векторам, и проверить, что теорема Стокса тогда непосредственно следует из теоремы Фубини.

2°) Предположим, что V представляет собой многообразие с компактным псевдокраем на плоскости $\tilde{V} = E$, где псевдокрай является некоторой кривой Σ, кусочно принадлежащей

классу C^1. Это означает, что псевдомногообразие Σ класса C^1 имеет только конечное число особых точек, в окрестности которых кривая Σ является объединением конечного числа дуг класса C^1, пересекающихся в этой точке. Таким образом, мы оказываемся в условиях применимости рассмотренной теории. (Для каждой особой точки кривой Σ достаточно выбрать систему координат, оси которой не параллельны касательным в этой точке.)

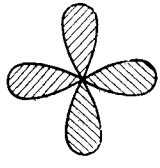


Рис. 5.
V — заштрихованная область.

Изучение частного случая $n = 1$

Теорема 39. *Если $M|[\alpha, \beta]$ является путем конечной длины в открытом множестве Ω аффинного конечномерного пространства E, ориентированном в направлении пробегания $\alpha \to \beta$, а $\vec{f}$ является функцией класса C^1 в Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, то имеет место формула Стокса*

$$\int_{M|[\alpha, \beta]} \vec{df} = \vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha))\ ^1). \qquad \text{(VI, 7; 36)}$$

Здесь многообразие V — интервал $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, снабженный ориентацией, соответствующей направлению от α к β, и H — отображение M интервала $[\alpha, \beta]$ в Ω.

Мы видим, что трансверсальная ориентация границы $\{\alpha, \beta\}$ получается в том случае, когда положительными в точке α считаются векторы, имеющие направление $\beta \to \alpha$, а положительными в точке β — векторы, имеющие направление $\alpha \to \beta$. Соответствующая касательная ориентация, как мы это видели на стр. 178, заключается в приписывании точке β знака $+$ и точке α знака $-$. Особым многообразием, границей $\overset{\frown}{M|[\alpha, \beta]}$,

---

[1]) В конечном счете формула Стокса является обобщением классической формулы $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = \vec{f}(\beta) - \vec{f}(\alpha)$, соответствующей $E = \mathbb{R}$, где M — тождественное отображение.

будет $M|\{(\alpha, -), (\beta, +)\}$. Согласно определению (VI, 6; 20), интеграл от $\vec{f}$ на этом особом многообразии равен правой части равенства (VI, 7; 36).

Доказательство. Формула (VI, 7; 36) не является частным случаем общей формулы Стокса, поскольку в случае $n = 1$ речь идет (теорема 36) об интеграле от дифференциальной формы по пути, не принадлежащему, вообще говоря, классу C^1 и даже кусочно не принадлежащему классу C^1, а имеющему лишь конечную длину.

Выберем в $\vec{E}$ какую-либо норму. К функции $\vec{f}$ применим формулу конечных приращений (следствие 1 теоремы 13 гл. III) относительно точки $x = M(t')$ и приращения $\vec{h} = \overrightarrow{M(t'') - M(t')}$. Так получается следующая формула:

$$\|\vec{f}(M(t'')) - \vec{f}(M(t')) - f'(M(t')) \cdot \overrightarrow{(M(t'') - M(t'))}\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta \|\overrightarrow{M(t'') - M(t')}\|, \qquad \text{(VI, 7; 37)}$$

где δ допускает такую оценку:

$$\delta \leqslant \sup_{P \in [M(t'),\, M(t'')]} \|f'(P) - f'(M(t'))\|. \qquad \text{(VI, 7; 38)}$$

Для любого заданного $\varepsilon > 0$ теперь можно найти такое число $\zeta > 0$, что неравенство $\|P - M(t')\| \leqslant \zeta$ ($t \in [\alpha, \beta]$, $P \in \Omega$) влечет за собой неравенство

$$\|f'(P) - f'(M(t'))\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \text{(VI, 7; 39)}$$

где L — длина пути M. Это вытекает из теоремы о равномерной непрерывности непрерывных функций на компакте (теорема 31 гл. II в усиленной форме, приведенная в примечании [2]) на стр. 374 тома I), примененной к непрерывной функции f', определенной на компакте $M([\alpha, \beta])$ — образе интервала $[\alpha, \beta]$ при отображении M метрического пространства Ω.

Применяя затем к непрерывной функции M на компакте $[\alpha, \beta]$ обычную теорему 31 гл. II, и, с другой стороны, теорему 36 настоящей главы, можно найти такое $\eta > 0$, чтобы

1°) из неравенства $|t'' - t'| \leqslant \eta$ следовало неравенство $\|\overrightarrow{M(t'') - M(t')}\| \leqslant \zeta$;

2°) разность между левой частью соотношений (VI, 7; 36) и (VI, 6; 75) при $\theta_i = t_i$ и $\vec{\omega} = d\vec{f}$ была $\leqslant \varepsilon/2$, когда наибольшая из длин разбиения Δ интервала $[\alpha, \beta]$ не превосходит η.

Если теперь мы выберем такое разбиение Δ с наибольшей из длин частных интервалов $\leqslant \eta$, то неравенство (VI, 7; 37) будет справедливым для $t' = t_i$, $t'' = t_{i+1}$ при $\delta \leqslant \varepsilon/2L$.

Тогда

$$\left\| \int\limits_{M\,|\,[\alpha,\,\beta]} d\vec{f} - (\vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha))) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{M\,|\,[\alpha,\,\beta]} d\vec{f} - \sum_{i=0}^{n-1} f'(M(t_i)) \cdot \overrightarrow{(M(t_{i+1}) - M(t_i))} \right\| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \| (f'(M(t_i)) \cdot \overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}) - (\vec{f}(M(t_{i+1})) - \vec{f}(M(t_i))) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \qquad \text{(VI, 7; 40)}$$

Разность между обеими частями соотношения (VI, 7; 36) оказалось $\leqslant \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, это означает, что обе части равны, и теорема доказана.

Частный случай $n = 2$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Формула Римана

Пусть V — компактное многообразие с псевдокраем в $\tilde{V} = \mathbb{R}^2$. Тогда $\overset{\circ}{V}$ будет ограниченным открытым множеством в $\mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что границей является кривая Σ, кусочно принадлежащая классу C^1 [пример 2°), стр. 232], что V снабжено, например, канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$, а кривая Σ имеет каноническую ориентацию псевдограницы многообразия $\vec{V}$.

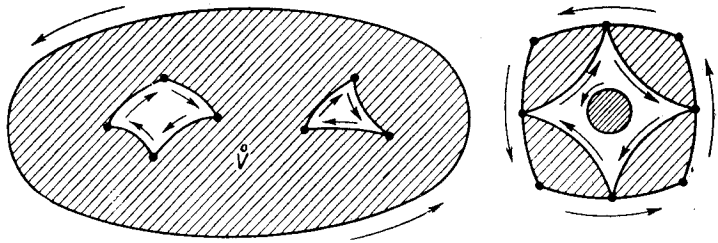


Рис. 6.

В качестве примера можно взять области, изображенные на рис. 6. Мы заштриховали $\overset{\circ}{V}$ и указали направление обхода псевдограницы $\vec{\Sigma}$ многообразия $\vec{V}$:

[В первом примере $\overset{\circ}{V}$ связно, во втором — нет ($\overset{\circ}{V}$ имеет пять связных компонент, а V — две). Впрочем, в качестве V можно взять объединение двух множеств рисунка. Тогда $\overset{\circ}{V}$ будет иметь шесть связных компонент, а V — три.]

Пусть $\vec{\omega} = \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy$ — дифференциальная форма класса C^1, определенная в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{R}^2$, содержащем V, и принимающая значения в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда, учитывая соотношение (VI, 4; 2), приспособленное к $\mathbb{R}^2$ вместо $\mathbb{R}^3$, формулу (VI, 7; 3) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\overset{\circ}{V}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy. \quad \text{(VI, 7; 41)}$$

По определению интеграла от дифференциальной формы интеграл $\iint\limits_{\overset{\circ}{V}} \ldots dx \wedge dy$ можно заменить обычным двойным интегралом $\iint\limits_{V} \ldots dx\,dy$. (Функция ориентации θ, определенная на стр. 151, равна $+1$, поскольку мы ориентировали $\overset{\circ}{V}$ в соответствии с канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$. Безразлично, будем

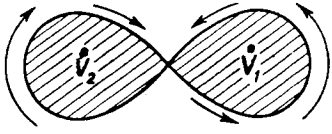


Рис. 7.

ли мы писать $\iint\limits_{\overset{\circ}{V}}$ или $\iint\limits_{V}$, поскольку граница Σ имеет нулевую меру относительно меры $dx\,dy$.) Отсюда вытекает как частный случай формулы Стокса формула Римана

$$\iint\limits_{V} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy. \quad \text{(VI, 7; 42)}$$

Можно было бы попытаться обобщить эту формулу на случай, когда кривая Σ имеет лишь конечную длину и не принадлежит кусочно классу C^1. Мы получили бы теоремы, относящиеся к случаям $n = 2$, $n - 1 = 1$ и выходящие за рамки общей теоремы Стокса. Существует много сложных случаев, о которых мы здесь не упоминали. Они будут изучаться специальными методами.

Возьмем теперь в качестве V фигуру, изображенную на рис. 7, в которой $\overset{\circ}{V}_1$ снабжена канонической ориентацией $\mathbb{R}^2$,

а $\overset{\circ}{V}_2$ — противоположной ориентацией и где Σ имеет ориентацию псевдограницы.

Формула (VI, 7; 41) остается верной, но функция ориентации θ равна $+1$ в $\overset{\circ}{V}_1$ и -1 в $\overset{\circ}{V}_2$, так что $\int\int_{\overset{\rightarrow}{\overset{\circ}{V}}} \ldots dx \wedge dy$ равен $\int\int_{\overset{\circ}{V}_1} \ldots dx\,dy$, а $\int\int_{\overset{\rightarrow}{\overset{\circ}{V}}_2} \ldots dx \wedge dy$ равен $-\int\int_{\overset{\circ}{V}_2} \ldots dx\,dy$.

Формула Римана в этом случае запишется так:

$$\int\int_{\overset{\circ}{V}_1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\,dy - \int\int_{\overset{\circ}{V}_2} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\overset{\rightarrow}{\Sigma}} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy. \tag{VI, 7; 43}$$

Замечательные интегральные формулы векторного анализа

1°) *Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой аффинного евклидова пространства.* Пусть $\vec{X}\colon x \to \vec{X}(x)$ — непрерывное векторное поле на открытом множестве Ω конечномерного аффинного евклидова пространства E. Пусть $\overset{\rightarrow}{\Gamma}$ — ориентированная кривая в Ω, кусочно принадлежащая классу C^1. Обозначим через $\vec{t}(x)$ единичный вектор касательной в точке x, положительный в ориентации $\overset{\rightarrow}{\Gamma}$. Интеграл

$$\mathscr{C} = \int_{\Gamma} (\vec{X}(x) | \vec{t}(x))\,ds, \tag{VI, 7; 44}$$

где ds — неотрицательная мера длин на Γ, называется работой или циркуляцией $\mathscr{C}$ поля X вдоль $\overset{\rightarrow}{\Gamma}$. Часто через $\overrightarrow{ds}$ обозначают меру $\vec{t}\,ds$ на Γ со значениями в $\vec{E}$. Тогда, согласно формуле (IV, 5; 13), интеграл (VI, 7; 44) запишется в виде

$$\mathscr{C} = \int_{\Gamma} (\vec{X} | \overrightarrow{ds}). \tag{VI, 7; 45}$$

Это применение формулы (IV, 5; 13) к непрерывной на Γ со значениями в $\vec{E}$ функции $\vec{X}$, к мере $\overrightarrow{ds}$ (с базой $ds \geqslant 0$) на Γ со значениями в $\vec{E}$ и к билинейной форме B, являющейся евклидовым скалярным произведением на $E \times E$. Если в пространстве E введена ортонормированная система координат и через $\cos \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, обозначены направляющие коси-

нусы положительной полукасательной к Γ, а через X_i — составляющие поля, то

$$\mathscr{C} = \int_{\Gamma} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) ds. \qquad \text{(VI, 7; 46)}$$

Если ω — дифференциальная форма (с вещественными значениями) первой степени, соответствующая полю $\vec{X}$ в евклидовой структуре E:

$$\omega(x) \cdot \vec{Z} = (\vec{X}(z) \mid \vec{Z}),$$

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} X_j \, dx_j, \qquad \text{(VI, 7; 47)}$$

то

$$\mathscr{C} = \int_{\vec{\Gamma}} \omega \; ^{1}). \qquad \text{(VI, 7; 48)}$$

В механике дифференциальная форма ω называется *элементарной работой векторного поля.* Очевидно, элементарная работа — это *не бесконечно малая величина, а некоторая дифференциальная форма.* Часто ее ошибочно записывают в виде $d\mathscr{C}$, что не верно, так как, вообще говоря, это не дифференциал скалярной функции. Если $\vec{X}$ — функция класса C^1, то, для того чтобы $\mathscr{C}$ была таким дифференциалом, необходимо, чтобы $d\omega = 0$ (т. е. в случае, когда размерность E равна 3, чтобы $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{X} = \vec{0}$). Это приводит к классическим условиям (VI, 4; 52), в которых A_j заменены на X_j. Если область Ω имеет вид, указанный в теореме 19 Пуанкаре, то это условие, согласно этой теореме, является и достаточным. Тогда полагают $\omega = -dU$ или $\vec{X} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} U$ и скалярная функция U, определенная с точностью до аддитивной постоянной, является *потенциалом векторного поля* (следствие 2 теоремы 19).

---

[1]) Для того чтобы получить это равенство, достаточно показать, что меры Радона $[\omega]_{\vec{\Gamma}}$ и $(\vec{X} \mid \vec{t})\, ds$ совпадают на Γ. Согласно принципу кусочной склейки, достаточно убедиться, что это верно в окрестности каждой точки Γ. Если $t \to M(t)$ является картой (не надо смешивать параметр t с единичным вектором $\vec{t}$), сохраняющей ориентацию (функция ориентации $\theta = 1$), то в окрестности такой точки две эти меры равны образу при отображении M меры на $\mathbb{R}$: $\sum_{j=1}^{N} X_j x_j' \, dt$, где dt — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Предыдущие результаты можно обобщить, заменяя Г ориентированным путем $M\,|\,\widehat{[\alpha, \beta]}$ конечной длины, как в теореме 36. Затем можно непосредственно применить эту теорему, *определяя* $\mathscr{C}$ по формуле (VI, 7; 48). Если через $\overrightarrow{dM}$ обозначить меру со значениями в $\vec{E}$, для которой функция M является неопределенным интегралом, то в силу теоремы 36 можно записать

$$\mathscr{C} = \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{X} \mid \overrightarrow{dM}) = \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{X} \mid \vec{q})\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \beta_j \right) ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j=1}^{N} X_j\, dx_j \text{ [1]}, \tag{VI, 7; 48$_2$}$$

где $\vec{q}$ — единичный вектор, соответствующий направлению возрастания значений t, а $\cos\beta_j$ — его координаты. (Если $\alpha > \beta$, то $\vec{q} = -\vec{t}$ и $\cos\beta_j = -\cos\alpha_j$. Поскольку $\int_{\alpha}^{\beta} = -\int_{[\alpha, \beta]}$, то мы снова получаем тот же результат, что в (VI, 7; 44) и (VI, 7; 46)).

Если $\vec{X} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} U}$, то, согласно (VI, 7; 36), формула Стокса запишется в виде

$$\int_{M\,|\,\widehat{[\alpha, \beta]}} (\vec{X} \mid dM) = U(M(\alpha)) - U(M(\beta)) = f(M(\beta)) - f(M(\alpha)). \tag{VI, 7; 48$_3$}$$

2°) *Поток векторного поля через трансверсально ориентированную гиперповерхность в аффинном евклидовом конечномерном пространстве.* Будем рассматривать то же самое векторное поле $\vec{X}$. Пусть теперь Σ — гиперповерхность с границей класса C^1, компактная в Ω и *снабженная трансверсальной ориентацией.* Через $\vec{\nu}(x)$ обозначим единичный *положительный* вектор нормали в каждой точке $x \in \Sigma$.

Поток поля $\vec{X}$ через поверхность Σ определяется формулой

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS, \tag{VI, 7; 49}$$

где интеграл берется относительно поверхностной меры dS. В ортонормированной системе координат эта формула может

[1]) Интегрирование ведется по t на $[\alpha, \beta]$. Поэтому $\int_{\alpha}^{\beta}$ равняется $\int_{t=\alpha}^{t=\beta}$.

быть записана в виде

$$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) dS, \qquad \text{(VI, 7; 50)}$$

где α_j — угол, образованный j-й осью координат и положительной нормалью к поверхности Σ. Векторную меру $\vec{\nu}(x)\,dS$ поверхности Σ часто оказывается удобным обозначать через $\overrightarrow{dS}$. При этих условиях поток векторного поля через трансверсально ориентированную поверхность Σ может быть записан в виде

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \overrightarrow{dS}). \qquad \text{(VI, 7; 51)}$$

Этот интеграл является интегралом в смысле формулы (IV, 5; 13), $\vec{X}$ — непрерывная функция на Σ со значениями в $\vec{E}$, $\overrightarrow{dS}$ — мера на Σ со значениями в $\vec{E}$, а B — билинейная форма, скалярное произведение на $\vec{E} \times \vec{E}$. Из определения (IV, 5; 13) непосредственно следует, что интеграл (IV, 7; 51) равен интегралу (IV, 7; 49).

Наконец, если через ω обозначить дифференциальную форму степени $N-1$, полученную по заданному векторному полю в соответствии с формулой (VI, 3; 43), и если пространство E ориентировано, то, используя формулы (VI, 3; 43) и (VI, 6; 52), можно убедиться в том, что поток векторного поля через поверхность Σ, снабженную трансверсальной ориентацией, равен произведению $(-1)^{N-1}$ на интеграл от соответствующей дифференциальной формы ω по поверхности $\vec{\Sigma}$ с касательной ориентацией, соответствующей ее трансверсальной ориентации, определенной, согласно избранной ориентации в E:

$$\Phi = (-1)^{N-1} \int_{\vec{\Sigma}} \omega. \qquad \text{(VI, 7; 51}_2\text{)}$$

Учитывая (VI, 4; 24), для поверхности Σ, являющейся псевдограницей некоторого «объема» V (многообразия с псевдокраем) в $\tilde{V} = E$, с помощью формулы Стокса приходим к соотношениям:

$$\int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = (-1)^{N-1} \int_{\vec{\Sigma}} \omega = (-1)^{N-1} \int_{V} d\omega = \int_{V} (\operatorname{div} \vec{X})\, dx. \qquad \text{(VI, 7; 52)}$$

Мы получили *формулу Остроградского*. В ортонормированной системе координат она имеет такой вид:

$$\int\limits_{\Sigma} \dots \int (\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = \int\int\limits_{V} \dots \int (\operatorname{div} \vec{X})\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Sigma} \dots \int \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) dS = \int\int\limits_{V} \dots \int \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_N. \quad \text{(VI, 7; 53)}$$

Здесь $\vec{\nu}$ — «внешняя нормаль» к V. Формула Остроградского не зависит от ориентации E, поскольку эта ориентация участвует в ней два раза: один раз при переходе от $\vec{X}$ к $\vec{\omega}$, а второй раз при обратном переходе от $\vec{\omega}$ к $\vec{X}$. Формула Римана (VI, 7; 42) является, естественно, частным случаем формулы Остроградского, соответствующей случаю $N = 2$, но с другими обозначениями, поскольку обе они представляют собою формулу Стокса для многообразия с псевдокраем V некоторого N-мерного аффинного пространства $\tilde{V} = E$.

3°) *Первоначальная формула Стокса для поверхности, ограниченной кривой в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве.* Пусть Σ — многообразие с псевдокраем на поверхности $\tilde{\Sigma}$ класса C^1 трехмерного ориентированного аффинного евклидова пространства. Пусть Γ — его псевдограница, кривая, кусочно принадлежащая классу C^1. Предположим, что евклидово пространство E ориентировано, а также что поверхность $\vec{\Sigma}$ ориентирована (а следовательно, трансверсально ориентирована). Пусть $\vec{X}$ — векторное поле класса C^1 на E.

Обозначим через ω форму степени 1, соответствующую полю $\vec{X}$ в евклидовой структуре E. Так как пространство E является евклидовым ориентированным и трехмерным, то форме $d\omega$ соответствует векторное поле $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{X}$ (см. п. 3°), стр. 137). Из формул (VI, 7; 48) и (VI, 7; 51_2) получаем

$$\mathscr{C} = \int\limits_{\Gamma} (\vec{X} \mid \overrightarrow{ds}) = \int\limits_{\vec{\Gamma}} \omega = \int\limits_{\vec{\Sigma}} d\omega = \int\limits_{\Sigma} (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = \Phi, \quad \text{(VI, 7; 54)}$$

т. е. работа поля $\vec{X}$ вдоль кривой Γ равна потоку вектора $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{X}$ через поверхность Σ. Если взять ортонормированную положительную систему координат и через X, Y, Z обозначить составляющие поля $\vec{X}$, а через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие

косинусы положительной нормали к Σ, то

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$

$$= \int\int\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \qquad \text{(VI, 7; 55)}$$

Именно эта формула была доказана Стоксом, и ее название было перенесено на общую формулу Стокса (VI, 7; 3).

Подведем теперь итог результатам 1°) — 3°), не уточняя условий их применимости.

Правила преобразования интегралов в векторном анализе

1°) *Изменение функции при переходе от одной точки к другой в евклидовом аффинном пространстве равно работе ее градиента вдоль дуги, соединяющей начальную точку с конечной* (*формула* (VI, 7; 48)).

2°) *Поток векторного поля через ограничивающую объем V поверхность Σ, который пересекает поверхность в направлении выхода из V, в аффинном евклидовом пространстве равен интегралу от дивергенции поля по V.*

3°) *Работа векторного поля вдоль* (*ориентированной*) *границы $\vec{\Gamma}$ ориентированной поверхности $\vec{\Sigma}$ трехмерного ориентированного аффинного евклидова пространства равна потоку ротора поля через поверхность Σ, снабженную трансверсальной ориентацией, соответствующей ее касательной ориентации.*

Здесь можно повторить сказанное в замечании 3°) на стр. 127: систематическое использование дифференциальных форм и формулы Стокса предпочтительнее употребления многочисленных формул, относящихся к полям.

Вот несколько других формул, в которых обозначения, очевидные сами по себе, выражены через введенные ранее функции (здесь E есть N-мерное ориентированное аффинное евклидово пространство):

$$\int\limits_{V}\int\ldots\int \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U\,dx = \int\limits_{bV}\ldots\int U\,\overrightarrow{dS},$$

$$\int\limits_{V}\int\int \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}\,dx = -\int\limits_{bV}\int\int [\vec{X}\wedge\overrightarrow{dS}]\ ^{1}) \quad (N=3), \qquad \text{(VI, 7; 56)}$$

$$\int\limits_{\Sigma}\int [\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U\wedge\overrightarrow{dS}]\ ^{1}) = -\int\limits_{b\Sigma} U\,dS \quad (N=3).$$

---

[1]) Символ $[\wedge]$ означает векторное произведение; см. стр. 106.

Если ввести ортонормированную систему координат, то доказательства этих формул станут очевидными. Рассмотрим, например, вторую формулу. Относительно первой координаты она записывается так:

$$\int\int\int \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\int\int (Y\cos\gamma - Z\cos\beta)\,dS. \quad \text{(VI, 7; 57)}$$

Эта формула является частным случаем формулы Остроградского, в которой X, Y, Z заменены на O, Z, $-Y$.

Приведем, наконец, формулу Грина, постоянно применяемую в механике и физике:

Теорема 40. *Пусть V есть N-мерное многообразие с псевдокраем класса C^1 в открытом множестве $\tilde{V} = \Omega$ аффинного евклидова N-мерного пространства E. Пусть U, W — вещественные функции класса C^2 в Ω. Обозначим через Σ псевдограницу V и через $\vec{\nu}(x)$ — единичный вектор нормали к Σ, выходящей из V в точке x псевдограницы Σ. Тогда, если относительно V и Σ выполнены условия теоремы* 38, *а носитель функции U пересекает многообразие V по некоторому компакту, справедливы следующие формулы:*

$$\int\limits_{\Sigma} \dots \int \frac{dW}{d\vec{\nu}}\,dS = \int\int\limits_{V} \dots \int \Delta W\,dx, \quad \text{(VI, 7; 58)}$$

$$\int\limits_{\Sigma} \dots \int U\frac{dW}{d\vec{\nu}}\,dS = \int\int\limits_{V} \dots \int (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U \mid \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W\,dx) + \int\int\limits_{V} \dots \int U\,\Delta W\,dx, \quad \text{(VI, 7; 59)}$$

$$\int\limits_{\Sigma} \dots \int U\frac{dU}{d\vec{\nu}}\,dS = \int\int\limits_{V} \dots \int \|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U\|^2 + \int\int\limits_{V} \dots \int U\,\Delta U\,dx, \quad \text{(VI, 7; 60)}$$

$$\int\limits_{\Sigma} \dots \int \left(U\frac{dW}{d\vec{\nu}} - W\frac{dU}{d\vec{\nu}}\right) dS = \int\int\limits_{V} \dots \int (U\,\Delta W - W\,\Delta U)\,dx. \quad \text{(VI, 7; 61)}$$

В этих формулах Δ — лапласиан, а $d/d\vec{\nu}$ — производная по вектору $\vec{\nu}$ [обозначавшаяся в формуле (III, 3; 4) через $D_{\vec{\nu}}$].

Доказательство. Докажем сначала формулу (VI, 7; 59). Для этого достаточно применить формулу Остроградского (VI, 7; 52) относительно векторного поля, определяемого с помощью $U\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W$. В самом деле, из (III, 3; 21) получаем

$$(U\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W \mid \vec{\nu}) = U(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,W \mid \vec{\nu}) = U\frac{dW}{d\vec{\nu}}. \quad \text{(VI, 7; 62)}$$

С другой стороны, если выбрать некоторую ортонормированную систему координат, то мы получим, что

$$\operatorname{div}(U\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, W)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(U\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial W}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{N}U\frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}=(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U\,|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, W)+U\,\Delta W. \quad \text{(VI, 7; 63)}$$

Требуемый результат вытекает теперь из формулы Остроградского.

Формула Остроградского предполагает, что поле $U\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, W$ принадлежит классу C^1, а это верно, если U принадлежит классу C^1, а W принадлежит классу C^2.

Применяя формулу (VI, 7; 59) к $U=1$, можно сразу получить формулу (VI, 7; 58). Если U принадлежит классу C^2, то, полагая $W=U$ в (VI, 7; 59), получаем формулу (VI, 7; 60).

Если U и W принадлежат классу C^2, то, применяя формулу (VI, 7; 59), меняя в ней ролями U и W и вычитая результат из начальной формулы, можно получить формулу (VI, 7; 61).

Предыдущие формулы часто применяются в случае функций с комплексными значениями, как это говорилось в замечании на стр. 137. В этом случае в формуле (VI, 7; 59) обычно W заменяется на $\overline{W}$. Если в (VI, 7; 59) заменить W на $\overline{U}$ (вместо U), то получится равенство, аналогичное равенству (VI, 7; 60), в котором $\|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U\|^2$ заменен на

$$(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U\,|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \overline{U})=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial U}{\partial x_j}\right|^2\geqslant 0 \quad \text{(VI, 7; 64)}$$

относительно некоторой ортонормированной системы координат.

В теории уравнений с частными производными из этих формул выводится большое число следствий. Например, для гармонических функций получается следующая теорема, к которой мы вернемся позже: если функция U класса C^2 в E является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U=0$, и если она равна нулю на границе Σ области V, то она тождественно равна нулю в V.

В самом деле, для доказательства достаточно воспользоваться формулой (VI, 7; 60), в которой функция U заменена функцией $\overline{U}$. Так как функция U по предположению равна нулю на Σ, то интеграл по поверхности равен нулю.

Поскольку U по предположению есть гармоническая функция, то ΔU обращается в нуль и окончательно остается лишь $\int\int \ldots \int_V (\overrightarrow{\operatorname{grad} U} \mid \overrightarrow{\operatorname{grad} \bar{U}})\, dx$.

Подинтегральная функция здесь $\geqslant 0$; поэтому из теоремы 26 гл. IV следует, что ее интеграл может обращаться в нуль только тогда, когда эта функция почти всюду равна нулю (почти всюду по мере Лебега). Однако поскольку она непрерывна, то это может произойти только в том случае, когда она тождественно равна нулю [1]).

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Интегралы дифференциальных замкнутых форм по компактным ориентированным многообразиям без края

Напомним, что коциклом на открытом множестве Ω N-мерного аффинного пространства E называется замкнутая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ [2]) класса C^1, т. е. такая форма, что $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Говорят, что непрерывная дифференциальная форма $\vec{\omega}$ степени p является кограницей, если существует такая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ класса C^1, что $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Из соотношения $d \circ d = 0$ следует, что кограница, если она сама является некоторой дифференциальной формой класса C^1, обязательно будет коциклом [3]). Теорема 19 (Пуанкаре) показывает, что если открытое множество Ω обладает некоторыми *весьма специальными* топологическими свойствами, то и, обратно, коцикл является кограницей.

Особым C^m-циклом открытого множества Ω из E мы называли (стр. 218) особое ориентированное многообразие *без края* класса C^m из Ω, т. е. отображение H класса C^m ориентированного многообразия V класса C^m в Ω [4]).

---

[1]) Из этого рассуждения следует, что $\overrightarrow{\operatorname{grad} U} = 0$, т. е. $U = \text{const}$, но так как на границе Σ функция U равна нулю, то $U \equiv 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Как всегда, речь идет о дифференциальных формах со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

[3]) Здесь форма $\vec{\omega}$ предполагается только непрерывной. Она может быть кограницей, даже если она не дифференцируема, и в этом случае нет смысла выяснять, будет ли она коциклом!

[4]) Напомним, что особое многообразие $V \mid H$ считается *лежащим в* Ω, если образ $H(V)$ содержится в Ω. Где находится V, неизвестно (оно может оказаться абстрактным).