Поскольку U по предположению есть гармоническая функция, то ΔU обращается в нуль и окончательно остается лишь $\int\int_V \ldots \int (\overrightarrow{\operatorname{grad}} U \mid \overrightarrow{\operatorname{grad}} \bar{U})\, dx$.

Подинтегральная функция здесь $\geqslant 0$; поэтому из теоремы 26 гл. IV следует, что ее интеграл может обращаться в нуль только тогда, когда эта функция почти всюду равна нулю (почти всюду по мере Лебега). Однако поскольку она непрерывна, то это может произойти только в том случае, когда она тождественно равна нулю [1]).

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Интегралы дифференциальных замкнутых форм по компактным ориентированным многообразиям без края

Напомним, что коциклом на открытом множестве Ω N-мерного аффинного пространства E называется замкнутая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ [2]) класса C^1, т. е. такая форма, что $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Говорят, что непрерывная дифференциальная форма $\vec{\omega}$ степени p является кограницей, если существует такая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ степени $p-1$ класса C^1, что $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Из соотношения $d \circ d = 0$ следует, что кограница, если она сама является некоторой дифференциальной формой класса C^1, обязательно будет коциклом [3]). Теорема 19 (Пуанкаре) показывает, что если открытое множество Ω обладает некоторыми *весьма специальными* топологическими свойствами, то и, обратно, коцикл является кограницей.

Особым C^m-циклом открытого множества Ω из E мы называли (стр. 218) особое ориентированное многообразие *без края* класса C^m из Ω, т. е. отображение H класса C^m ориентированного многообразия V класса C^m в Ω [4]).

---

[1]) Из этого рассуждения следует, что $\overrightarrow{\operatorname{grad}} U = 0$, т. е. $U = \text{const}$, но так как на границе Σ функция U равна нулю, то $U \equiv 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Как всегда, речь идет о дифференциальных формах со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

[3]) Здесь форма $\vec{\omega}$ предполагается только непрерывной. Она может быть кограницей, даже если она не дифференцируема, и в этом случае нет смысла выяснять, будет ли она коциклом!

[4]) Напомним, что особое многообразие $V \mid H$ считается *лежащим в* Ω, если образ $H(V)$ содержится в Ω. Где находится V, неизвестно (оно может оказаться абстрактным).

Во всем этом параграфе мы будем рассматривать только случай, когда многообразие V компактно. Мы будем называть *C^m-циклом* в Ω особое компактное ориентированное многообразие $H|V$ класса C^m в Ω, т. е. такое многообразие, в котором V компактно.

С другой стороны, C^m-границей размерности n в Ω мы будем называть особое ориентированное компактное многообразие размерности n, являющееся границей некоторого особого ориентированного компактного многообразия с краем размерности $n+1$ класса C^m из Ω[1]).

Очевидно, C^m-цикл (соответственно C^m-граница) заведомо является C^l-циклом (соответственно C^l-границей) для $l \leqslant m$.

Граница необходимо является циклом. Напротив, цикл не обязательно является границей. Рассмотрим, например, в открытом множестве Ω, дополнении к нулю евклидова аффинного пространства, ориентированный цикл, определенный сферой с центром в нуле. Он, очевидно, является границей во всем пространстве E замкнутого шара, снабженного соответствующей ориентацией. В открытом множестве Ω он будет также границей замкнутого шара с выброшенным центром, но такое многообразие с краем *не компактно*. В предыдущем смысле *сфера не является границей в* Ω[2]).

В приведенных определениях *мы всегда предполагали*, что $m \geqslant 1$. Мы никогда не рассматривали топологические многообразия или многообразия класса C^0, а тем более их ориентации. Однако мы будем позволять себе в дальнейшем говорить о C^0-циклах и C^0-границах. По этой причине *непрерывное* отображение H ориентированного компактного многообразия $\vec{V}$ с краем класса C^1 мы будем называть особым ориентированным компактным многообразием с краем класса C^0. Класс C^0 многообразия $H|V$ соответствует классу C^0 отображения H; здесь V всегда предполагается принадлежащим классу C^1.

Граница этого особого многообразия является сужением H на границу многообразия $\vec{V}$, снабженного ориентацией границы. В этом случае C^0-цикл является ориентированным компактным особым C^0-многообразием без края, а C^0-граница является границей некоторого особого ориентированного компактного C^0-многообразия с краем. Операция взятия границы b и операция взятия кограницы d в силу формулы Стокса тесно связаны между собой. Кроме того, $b \circ b = \emptyset$ и $d \circ d = 0$.

---

[1]) В этом параграфе мы не будем рассматривать многообразия с псевдокраем.

[2]) Это говорит о том, что цикл из Ω может быть границей в E и не быть границей в Ω. Мы только что видели, что сфера *не является* границей в Ω. Доказательство будет приведено далее, в следствии 2 теоремы 58.

Интеграл от коцикла по циклу

Теорема 41. *Интеграл от коцикла по C^1-границе равен нулю. Интеграл от кограницы по C^1-циклу равен нулю. Интеграл от кограницы по C^1-границе тем более равен нулю.*

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 37 Стокса.

1°) Если $H|\vec{V}$ является C^1-границей, то существует такое особое ориентированное компактное многообразие $H|\vec{W}$, что $H|\vec{V} = H|\widehat{b\vec{W}}$. Если $\vec{\omega}$ — коцикл, то

$$\int_{H|\widehat{b\vec{W}}} \vec{\omega} = \int_{H|\vec{W}} d\vec{\omega} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 1)}$$

2°) Если $\vec{\omega}$ — кограница, то существует такая дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ класса C^1, что $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Если $H|\vec{V}$ — цикл, т. е. $\widehat{b\vec{V}} = \emptyset$, то

$$\int_{H|\vec{V}} d\vec{\varpi} = \int_{H|\widehat{b\vec{V}}} \vec{\varpi} = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 2)}$$

3°) Поскольку граница заведомо является циклом, то утверждение 3°) вытекает из утверждения 2°).

Замечания. 1°) Наши предположения о компактности циклов и границ неизбежны, так как мы не делали никаких предположений о компактности носителей дифференциальных форм (по условию теоремы Стокса носитель прообраза формы при отображении H пересекает многообразие V по компакту). Естественно, могла бы существовать аналогичная теория, не содержащая предположений о компактности циклов и границ, но включающая их для носителей дифференциальных форм.

2°) Интеграл от коцикла по циклу необязательно равен нулю.

Рассмотрим, например, в плоскости дифференциальную форму полярного угла, определенную формулой (VI, 4; 41). Мы видели, что она представляет собой некоторый коцикл класса C^∞ в $\mathbb{R}^2 - 0$. Рассмотрим, с другой стороны, тригонометрическую окружность, снабженную ее канонической ориентацией. Это некоторый C^∞-цикл в $\mathbb{R}^2 - 0$. Интеграл от этого коцикла по рассматриваемому циклу равен $+2\pi \neq 0$. Это *новое доказательство* того, что рассматриваемая дифференциальная форма не есть кограница. Одновременно доказано, *по крайней мере для случая* $N = 2$, высказанное выше утверждение, а именно: в открытом дополнении к началу координат в N-мерном евклидовом аффинном пространстве цикл, определяемый ориентированной сферой, не является C^1-границей.

Доказательство, приведенное в следствии 2 теоремы 58, служит обобщением сформулированного утверждения на случай произвольного N. Этот результат типичен для этого параграфа: тот факт, что интеграл от некоторого коцикла по некоторому циклу не равен нулю, *одновременно показывает*, что коцикл не является кограницей и что цикл не является границей.

3°) Если форма $\vec{\omega}$ является кограницей, то ее интеграл по особому компактному ориентированному многообразию с краем $H|\vec{V}$ зависит только от границы $H|\overrightarrow{bV}$, а не от самого многообразия $H|\vec{V}$. Поскольку $\vec{\omega}=d\vec{\varpi}$, то формула Стокса дает

$$\int\limits_{H|\vec{V}} \vec{\omega} = \int\limits_{H|\overrightarrow{bV}} \vec{\varpi}. \tag{VI, 8; 3}$$

Следует заметить, что это свойство справедливо только тогда, когда форма $\vec{\omega}$ является некоторой кограницей, а в том случае, когда $\vec{\omega}$ представляет собой только коцикл, оно может не выполняться. В частном случае, когда граница V пуста, мы получаем, что интеграл от $\vec{\omega}$ равен нулю. Мы как раз видели, что этот факт справедлив, если форма $\vec{\omega}$ является кограницей, и не обязательно верен, если эта форма представляет собой только коцикл.

4°) Естественно, что не существует подобного результата относительно C^0-циклов или C^0-границ. Впрочем, в этих случаях интеграл не имеет никакого смысла. Напомним, что мы дали *доказательство* теоремы Стокса только для многообразий класса C^2 и принимаем ее *без доказательства* для многообразий класса C^1.

Займемся теперь изучением некоторых теорем, обратных к доказанным ранее. Вот для начала теорема, обратная к первой части теоремы 41:

Теорема 42. *Пусть $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма степени p класса C^1 в некотором открытом множестве Ω аффинного N-мерного пространства. Если интеграл от формы $\vec{\omega}$ по всем C^∞-границам размерности p*[1]*, содержащимся в Ω, равен нулю, то форма $\vec{\omega}$ является коциклом.*

[1]) Беря C^∞-границу, мы рассматриваем более слабое условие, чем в случае C^1-границы. Однако мы приходим к требуемому заключению, и, следовательно, наша формулировка теоремы является более сильной. Позже, в замечании, следующем за теоремой 43, мы увидим, что наши предположения можно еще ослабить.

Доказательство. В самом деле, для каждого $(p+1)$-мерного ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ класса C^∞, содержащегося в Ω, интеграл $\int_{\vec{V}} d\vec{\omega} = \int_{\widehat{bV}} \vec{\omega} = \vec{0}$.

Наше утверждение теперь сразу же вытекает из следующей теоремы (примененной к $\vec{\varpi} = d\vec{\omega}$ и $n = p+1$), которая утверждает, что непрерывная дифференциальная форма полностью определена, если известны ее интегралы по ориентированным компактным многообразиям с краем класса C^∞.

Определеление непрерывной дифференциальной формы с помощью ее интегралов по ориентированным компактным многообразиям с краем

Теорема 43. *Пусть Ω — открытое множество аффинного пространства E конечной размерности N. Пусть $\vec{\varpi}$ — непрерывная дифференциальная форма на Ω степени n. Если для каждого n-мерного ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ класса C^∞, содержащегося в Ω, интеграл $\int_{\vec{V}} \vec{\varpi}$ равен нулю, то форма $\vec{\varpi}$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ — n векторов из $\vec{E}$ и a — точка множества Ω. Покажем, что $\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{0}$.

Пусть F — аффинное подпространство E, порожденное точкой a и векторами $\vec{X}_i$. Можно считать, что оно имеет размерность n, так как в противном случае векторы $\vec{X}_i$ были бы линейно зависимыми, а результат очевидным. Выберем в F систему координат $a, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$. Дифференциальная форма $\vec{\varpi}$ определяет на F некоторую дифференциальную форму степени n, которую можно записать в виде $\vec{f} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Имеем

$$\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{f}(a). \qquad \text{(VI, 8; 4)}$$

Снабдим пространство $\vec{F}$ ориентацией, считая его базис положительным. Мера Радона $[\vec{\varpi}]_{\vec{F}}$ тогда будет иметь вид $\vec{f}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \vec{f}\, dx$. Если в качестве V мы возьмем некоторый шар $B(R)$ (в евклидовой норме, определенной введенной системой координат) с центром в точке a радиуса R объема $V(R)$, то по предположению получим

$$\iint\limits_{B(R)} \dots \int \vec{f}(x)\,dx = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 5)}$$

Далее, справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\displaystyle\iint\limits_{B(R)} \dots \int \vec{f}(x)\,dx}{\displaystyle\iint\limits_{B(R)} \dots \int dx} - \vec{f}(a) \right\| \leqslant \frac{1}{V(R)} \iint\limits_{B(R)} \dots \int \|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x-a\| \leqslant R} \|\vec{f}(x) - \vec{f}(a)\|, \qquad \text{(VI, 8; 6)}$$

в котором последний член стремится к 0 вместе с R, поскольку функция $\vec{f}$ непрерывна в точке a. С помощью (VI, 8; 5) переходом к пределу получаем, что $\vec{f}(a) = \vec{0}$, т. е. $\vec{\varpi} = \vec{0}$.

Замечание. Евклидовы шары здесь не играют особой роли. *Для справедливости равенства* $\vec{\varpi} = \vec{0}$ *достаточно, чтобы в каждой точке* a *из* Ω *для любого аффинного* n-*мерного подпространства* F *пространства* E, *содержащего* a, *существовала последовательность* n-*мерных ориентированных многообразий с краем или псевдокраем* $\vec{V}_j \subset \tilde{V}_j = F$, *равномерно стягивающихся к точке* a *при* j, *стремящемся к бесконечности, и таких, что* $\int\limits_{\vec{V}_j} \vec{\varpi} = 0$. *Если псевдограницы таковы, что к ним можно применить общую теорему* 38 (*Стокса*), *то из равенства* $\int\limits_{b\vec{V}} \vec{\omega} = \vec{0}$ *для всех* V_j *будет вытекать также заключение теоремы* 42.

Докажем теперь теоремы, обратные ко второй части теоремы 41.

Теорема де Рама

Теорема 44. *Если интеграл от дифференциальной формы* $\vec{\omega}$ *класса* C^1 *по открытому множеству* Ω *аффинного пространства равен нулю на всех* C^∞-*циклах* [1], *содержащихся в* Ω, *то эта форма является когранецей. Если, кроме того,* $\vec{\omega}$ *принадлежит*

[1]) См. примечание на стр. 248.

классу C^m, $m \geqslant 1$, то можно найти для нее внешнюю первообразную, также принадлежащую классу C^m.

Теорема де Рама — один из самых глубоких результатов алгебраической топологии. Она является источником всех современных результатов этой математической теории. Ее доказательство является очень тонким, и мы его рассматривать не будем. *Во всяком случае, в дальнейшем мы не будем его использовать.* Ограничимся тем, что покажем, как эта теорема с новой точки зрения объясняет теорему Пуанкаре (теорему 19). Если $\vec{\omega}$ — замкнутая дифференциальная форма степени $p \geqslant 1$ класса C^1 на открытом множестве Ω, то из теоремы 41 вытекает, что ее интеграл по всем *C^∞-границам* равен нулю. Однако из этого еще не следует, что она является кограницей. Для этого надо было бы потребовать большего, а именно чтобы был равен нулю интеграл от этой формы по всем *C^∞-циклам*. Если окажется, что в открытом множестве Ω все C^∞-циклы размерности $p \geqslant 1$ являются также C^∞-границами, то это свойство будет выполнено и $\vec{\omega}$ будет кограницей, так что в этом случае в открытом множестве Ω все коциклы степени > 0 будут также кограницами и *в Ω будет справедлива теорема Пуанкаре.* Позже мы увидим, что свойство C^∞-циков быть C^∞-границами выполняется с точностью до небольших видоизменений (см. следствие 5 теоремы 54) для всех открытых множеств Ω, удовлетворяющих весьма жестким условиям теоремы 19[1]). Однако существуют другие условия, при которых это свойство также будет справедливым. То свойство открытого множества Ω аффинного пространства (или многообразия Ω класса C^2), что каждый коцикл степени > 0 из Ω является кограницей, очевидно, сохраняется при C^2-диффеоморфизме (в силу теоремы 17 такой C^2-диффеоморфизм коммутирует с d). Можно доказать, и это весьма любопытный и замечательный результат, что это свойство *сохраняется даже при простом гомеоморфизме* без условия дифференцируемости. Позже будут приведены некоторые частные доказательства этого утверждения (следствие 1 теоремы 53).

Сейчас мы докажем теорему де Рама и рассмотрим некоторые ее следствия для частного случая дифференциальных форм первой степени. Мы наложим более слабые условия, чем предыдущие, и дадим доказательство, в котором теорема 19 не используется.

---

[1]) Таким образом, теорема Пуанкаре является частным случаем теоремы де Рама. Однако доказательство теоремы де Рама, которое мы здесь не приводим, *использует* теорему Пуанкаре, являющуюся неизбежным промежуточным этапом рассуждений.

Теорема 45. *Пусть Ω — открытое множество аффинного пространства конечной размерности, $\vec{\omega}$ — непрерывная дифференциальная форма степени 1 класса C^m, $m \geqslant 0$, на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если интеграл от $\vec{\omega}$ по каждому C^∞-циклу, определенному отображением H класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности из $\mathbb{R}^2$ в Ω, равен нулю, то существует такая функция $\vec{f}$ класса C^{m+1} на Ω со значениями в $\vec{F}$, что $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Если множество Ω связно, то функция $\vec{f}$ определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Заметим, что при $m = 0$ форма $\vec{\omega}$ предполагается *непрерывной*, а не принадлежащей классу C^1. В теореме 19 Пуанкаре необходимо было считать $\vec{\omega}$ принадлежащей классу C^1, чтобы иметь возможность говорить о $d\vec{\omega}$. Предположение о принадлежности формы классу C^1, сделанное нами с целью убедиться в том, что она является дифференциалом некоторой другой формы, неестественно. Мы имеем в данном случае условие интегрального, а не дифференциального характера, которое позволяет считать $\vec{\omega}$ только непрерывной.

Доказательство. Тот факт, что в случае связного множества Ω функция $\vec{f}$ определяется с точностью до аддитивной постоянной, вытекает из теоремы 22 гл. III.

1-*й этап.* Докажем, что интеграл от $\vec{\omega}$ равен нулю по всем особым ориентированным компактным псевдомногообразиям, определенным отображением H, *кусочно принадлежащим* C^∞, ориентированной тригонометрической окружности в Ω.

В самом деле, параметризуем тригонометрическую окружность с помощью полярного угла θ, изменяющегося от 0 до 2π. Будем предполагать, что интервал $[0, 2\pi]$ можно разбить точками $\theta_0 = 0, \theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n = 2\pi$ так, чтобы отображение H принадлежало классу C^∞ в каждом интервале $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Докажем, что существует такое отображение g_i интервала $[\theta_i, \theta_{i+1}] \subset \mathbb{R}$ на прямую $\mathbb{R}$, которое принадлежит классу C^∞, строго возрастает, причем все его последовательные производные равны нулю на концах θ_i и θ_{i+1} интервала $[\theta_i, \theta_{i+1}]$.

Для этого построим сначала такую функцию на интервале $[0, 1]$. С этой целью воспользуемся методом доказательства теоремы о разложении единицы (теорема 11 гл. IV). Построим функцию G по формуле (IV, 2; 23)[1]), соответствующую

[1]) Напомним, что $G(s) = 0$ при $s \geqslant \eta^2$ и $= e^{-1/(\eta^2 - s^2)}$ при $s < \eta^2$. — *Прим. ред.*

$\eta=1/2$. Затем получим (стр. 455 т. I) функцию γ_1 на $\mathbb{R}$: $t\to\gamma_1(t)=$ $=G((t-a_1)^2)=G((t-1/2)^2)$, соответствующую $a_1=1/2$. Она принадлежит классу C^∞, положительна для $|t-1/2|<1/2$ или $0<t<1$ и равна нулю при $t\leqslant 0$ и $t\geqslant 1$. Обозначим через γ функцию, пропорциональную γ_1, интеграл от которой равен 1. Тогда $g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\gamma(\tau)\,d\tau$ будет искомой функцией. Она принадлежит классу C^∞ как первообразная функции класса C^∞, строго возрастает в интервале $[0, 1]$ (поскольку ее производная $\gamma>0$), равна нулю при $t\leqslant 0$ и равна $\int\gamma=1$ при $t\geqslant 1$. Все ее производные равны нулю при $t=0$ и $t=1$ (см. рис. 8).

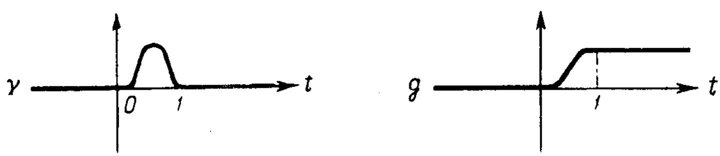

Рис. 8.

Определим функции g_i с помощью равенства

$$g_i(\theta)=g\left(\frac{\theta-\theta_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\right). \qquad \text{(VI, 8; 7)}$$

Рассмотрим далее отображение K интервала $[0, 2\pi]$ в Ω, определенное по формуле

$$K(\theta)=H(g_i(\theta)) \quad \text{для} \quad \theta_i\leqslant\theta\leqslant\theta_{i+1}. \qquad \text{(VI, 8; 8)}$$

Это отображение принадлежит классу C^∞ *в каждом интервале* $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Однако поскольку все его последовательные производные равны нулю на концах этого интервала, то производные справа и производные слева отображения K в каждой из точек θ_i совпадают, и, следовательно, K является отображением *класса* C^∞ отрезка $[0, 2\pi]$ в Ω.

Кроме того, $K(0)=K(2\pi)$, и все последовательные производные функции K в точках 0 и 2π равны нулю. Поэтому K можно рассматривать как отображение класса C^∞ тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω.

С другой стороны, легко убедиться в том, что интегралы от $\vec{\omega}$ по $H|\vec{\Gamma}$ и $K|\vec{\Gamma}$ совпадают. В самом деле, эти интегралы являются соответственно суммами интегралов по $H|\overset{\frown}{[\theta_i, \theta_{i+1}]}$ и $K|\overset{\frown}{[\theta_i, \theta_{i+1}]}$. Однако отображения K и H отрезка $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ в Ω определяют два *эквивалентных* пути класса C^∞. Следовательно, интегралы от формы $\vec{\omega}$ по двум этим путям равны (теорема 35). Поскольку интеграл от формы $\vec{\omega}$ по $K|\vec{\Gamma}$ по предположению равен нулю, то интеграл от $\vec{\omega}$ по $H|\vec{\Gamma}$ также равен нулю.

2-*й этап.* Можно, очевидно, ограничиться доказательством для связного множества Ω, так как в противном случае рассуждения можно проводить раздельно для каждой из его компонент. Выберем раз и навсегда точку a и значение $\vec{f}(a)$ функции $\vec{f}$ в точке a. Определим функцию f по формуле

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(a) + \int\limits_{\overrightarrow{[a,\, x]}} \vec{\omega}, \tag{VI, 8; 9}$$

где интеграл является криволинейным интегралом *по произвольному пути, кусочно принадлежащему классу C^∞ и лежащему в множестве* Ω с началом в точке a и концом в точке x. Такой путь заведомо существует. В самом деле, множество Ω связно и является открытым множеством аффинного пространства. Поэтому существует ломаная линия, соединяющая точки a и x (см. стр. 96 т. I), т. е. существует путь, кусочно принадлежащий классу C^∞. Покажем, что результат не зависит от выбранного пути. В самом деле, если мы возьмем два таких пути, то ничто не мешает нам, используя соответствующую замену параметров, считать, что первый путь определен отображением M отрезка $\overrightarrow{[0, \pi]}$ из $\mathbb{R}$ в Ω, кусочно принадлежащим классу C^∞, а второй путь определен отображением M отрезка $\overrightarrow{[2\pi, \pi]}$ в Ω, кусочно принадлежащим классу C^∞.

Отображение M интервала $[0, 2\pi]$ в Ω, построенное с помощью предыдущих функций (они принимают одно и то же значение в точке π, так что отображение M непрерывно), определяет отображение $\overrightarrow{[0, 2\pi]}$ в Ω, кусочно принадлежащее классу C^∞, т. е., поскольку $M(0) = M(2\pi) = a$, определяет отображение H ориентированной тригонометрической окружности в Ω, кусочно принадлежащее классу C^∞ [1]). Из резуль-

[1]) Ясно, почему мы вынуждены были перейти от отображений класса C^∞ к отображениям, *кусочно принадлежащим* этому классу. С одной стороны, ломаная линия кусочно принадлежит классу C^∞, а с другой стороны, мы получили отображение тригонометрической окружности в Ω, принадлежащее только кусочно классу C^∞. Конечно, *если теорема доказана*, то мы знаем, что $\vec{\omega} = d\vec{f}$, и, применяя теорему 39 и формулу (VI, 7; 36), мы увидим, что интеграл от $\vec{\omega}$ по $H|\vec{\Gamma}$ равен нулю *для любого пути* $H|[0, 2\pi]$ *конечной длины*; можно будет также вычислить $\vec{f}(x)$ с помощью интеграла (VI, 8; 9) *по каждому пути конечной длины*, соединяющему точку a с точкой x.

тата, полученного на этапе 1, теперь вытекает, что интеграл от $\vec{\omega}$ по построенному особому псевдомногообразию равен нулю, а это означает, что оба интеграла (VI, 8; 9), соответствующие двум путям, равны.

3-*й этап*. Остается доказать, что функция $\vec{f}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Выберем некоторую систему координат в E. Тогда форму $\vec{\omega}$ можно представить в виде (VI, 6; 72): $\vec{\omega}=\sum\limits_{j=1}^{N}\vec{A}_j\,dx_j$.

Если мы покажем, что $\vec{f}$ имеет частные производные и

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}=\vec{A}_j, \tag{VI, 8; 12}$$

то, поскольку функции $\vec{A}_j$ по предположению непрерывны в силу теоремы 15 гл. III, функция $\vec{f}$ будет принадлежать классу C^1 и будет выполняться равенство $d\vec{f}=\vec{\omega}$. Если $\vec{\omega}$, а значит, и $\vec{A}_j$ принадлежат классу C^m, то $\vec{f}$, кроме того, принадлежит классу C^{m+1}. Итак, теорема доказана.

Пусть теперь x изменяется в окрестности x_0 вдоль прямой, проходящей через точку x_0 параллельно j-му базисному вектору. Выберем в формуле (VI, 8; 9) путь, соединяющий a с x и составленный последовательно из фиксированного пути, соединяющего a с x_0, и прямолинейного пути $[x_0, x]$. Тогда

$$\vec{f}(x)=\vec{f}(x_0)+\int\limits_{[x_0,\,x]}\vec{\omega}=$$

$$=\vec{f}(x_0)+\int\limits_{(x_0)_j}^{x_j}\vec{A}_j(x_1,\,\ldots,\,x_{j-1},\,\xi,\,x_{j+1},\,\ldots,\,x_N)\,d\xi. \tag{VI, 8; 13}$$

Теперь с помощью теоремы 89 гл. IV, дающей производную неопределенного интеграла по его верхнему пределу, для точки x_0 мы получим формулу

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(x_0)=\vec{A}_j(x_0), \tag{VI, 8; 14}$$

которая завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Если $\vec{X}$ является непрерывным векторным полем на открытом множестве Ω конечномерного евклидова пространства, работа которого на любом цикле, определенном* *отображением класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности, равна нулю, то $\vec{X}$ является производной некоторого потенциала в Ω.*

Применение к функциям «аргумент» в $\mathbb{R}^2$

Пусть Ω — открытое множество, содержащееся в дополнении к началу координат в $\mathbb{R}^2$. *Функцией-аргументом* φ в этом множестве называется любая функция $M \to \varphi(M)$, равная в каждой точке M одному из значений аргумента $(\overrightarrow{0x, 0M})$ в этой точке (по определению имеется бесконечное множество значений аргумента, а разность между ними равна целому кратному 2π). Очевидно, имеет смысл рассматривать только непрерывные функции-аргументы.

Следствие 2. *Если функция-аргумент в открытом множестве Ω из $\mathbb{R}^2 - 0$ непрерывна, то она принадлежит классу C^∞ и ее дифференциал представляет собой форму ω из* (VI, 4; 41) (*обозначаемую через* $d\varphi$). *Для существования такой функции в Ω необходимо и достаточно, чтобы для каждого отображения H класса C^∞ тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω интеграл от ω по $H\,|\,\vec{\Gamma}$ был равен нулю или чтобы форма ω была кограницей в Ω. В этом случае, если множество Ω связно, имеется бесконечное множество функций-аргументов. Разность между двумя такими функциями равна некоторому целому кратному 2π, а задание аргумента в одной точке из Ω однозначно определяет функцию во всем этом множестве.*

Доказательство. 1°) Пусть A — некоторая точка Ω. Введем функцию $M \to \Phi(A; M)$, рассмотренную на стр. 145. Она принадлежит классу C^∞, когда M принадлежит открытому множеству $|\Phi(A; M)| < \pi$, и является там некоторой первообразной для ω. Для того чтобы φ была функцией-аргументом, необходимо и достаточно, чтобы разность

$$\varphi(M) - \varphi(A) - \Phi(A; M) \qquad \text{(VI, 8; 15)}$$

в каждой точке M была некоторым целым кратным 2π и чтобы значение $\varphi(M_0)$ в некоторой точке M_0 было одним из аргументов точки M_0. Если функция-аргумент φ *непрерывна* в Ω, то это целое кратное 2π непрерывно для M из некоторой окрестности точки A, а значит, постоянно. Следовательно, в окрестности точки A функция φ принадлежит классу C^∞ и имеет ω в качестве дифференциала. Поскольку это утверждение справедливо для каждой точки A из Ω, функция φ принадлежит классу C^∞ в Ω и имеет кограницей форму ω. Таким образом, форма ω действительно является кограницей в Ω.

2°) Для того чтобы форма ω была кограницей в Ω, необходимо (согласно теореме 41) и достаточно (согласно теореме 45), чтобы $\int\limits_{H|\vec{\Gamma}} \omega = 0$ для каждого отображения H класса C^∞ тригонометрической окружности в Ω.

3°) Остается доказать, что если форма ω является кограницей в Ω, $\omega = d\Psi$, то существует функция-аргумент. При доказательстве можно предполагать, что множество Ω связно. Нет никаких оснований для того, чтобы сама функция Ψ была функцией-аргументом. Обозначим через $\mathscr{E}$ множество тех точек M из Ω, в которых $\Psi(M)$ является одним из аргументов точки M. Мы сейчас покажем, что множество $\mathscr{E}$ одновременно открыто и замкнуто в Ω. Тогда оно либо будет пусто, либо будет совпадать со связным множеством Ω. Поэтому если функцию Ψ изменить на такую постоянную, чтобы *в некоторой точке* Ω она принимала значение, равное одному из аргументов этой точки, то это же будет верно для каждой точки из Ω. Тем самым будет доказано существование непрерывных функций-аргументов в Ω. Таких функций в Ω существует бесконечное множество. Фиксируя одну такую функцию в некоторой точке Ω, мы фиксируем ее во всем множестве Ω. Разность между двумя такими функциями равна постоянной, которая в каждой точке Ω представляет собой некоторое целое кратное 2π. Таким образом, теорема будет доказана, если мы сумеем показать, что $\mathscr{E}$ одновременно открыто и замкнуто в Ω.

Пусть $A \in \Omega$. Обозначим через $\mathscr{V}$ такую открытую связную окрестность точки A в Ω, чтобы для точек M из $\mathscr{V}$ имело место неравенство $|\Phi(A; M)| < \pi$. Тогда в $\mathscr{V}$ функция Ψ и функция $M \to \Psi(A) + \Phi(A; M)$ являются первообразными для ω, равными в точке A. Поскольку окрестность $\mathscr{V}$ связна, они совпадают во всей этой окрестности.

Согласно сказанному по поводу (VI, 8; 15), функция Ψ является функцией-аргументом в $\mathscr{V}$, если *в некоторой точке* $\mathscr{V}$ ее значение равно одному из аргументов этой точки. Другими словами, если окрестность $\mathscr{V}$ содержит хотя бы одну точку из $\mathscr{E}$, то $\mathscr{V}$ целиком лежит в $\mathscr{E}$. Тогда

a) условие $A \in \mathscr{E}$ влечет за собой $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$; множество $\mathscr{E}$ является открытым множеством в Ω;

b) условие $A \in \Omega - \mathscr{E}$ влечет за собой $\mathscr{V} \subset \Omega - \mathscr{E}$; множество $\Omega - \mathscr{E}$ открыто в Ω.

Следовательно, множество $\mathscr{E}$ замкнуто в Ω, и следствие доказано.

При этом, задавая значение $\varphi(A)$ в некоторой точке A, если множество Ω связно, мы знаем, как определить $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) = \varphi(A) + \int_{[\overrightarrow{A, M}]} \omega, \qquad \text{(VI, 8; 18)}$$

где интеграл берется по произвольному пути конечной длины с началом в точке A и концом в точке M.

Позже мы увидим, что можно рассуждать иначе: если выбрано $\varphi(A)$, то *по непрерывности* определяют значение аргумента вдоль произвольного пути, соединяющего точки A и M. Понятие это довольно интуитивно, но не так легко дать ему строгое истолкование. К этому вопросу мы вернемся в гл. VII.

Операция сложения циклов

Прежде чем начать собственно гомологические исследования, определим операцию сложения циклов.

Рассмотрим два C^m-цикла $H_1 | \vec{V}_1$ и $H_2 | \vec{V}_2$ одной и той же размерности в Ω. Предположим сначала, что множества V_1 и V_2 не имеют общих точек. Если через V обозначить их объединение, то можно снабдить V структурой топологического пространства, в котором множества V_1 и V_2 будут одновременно открытыми и замкнутыми. Для этого достаточно назвать открытым каждое множество из V, пересекающее одновременно V_1 и V_2 по открытым множествам. Затем множество V можно снабдить структурой ориентированного многообразия класса C^m (выбирая в качестве карты V все карты V_1 и карты V_2). Если теперь через H обозначить отображение V в Ω, принимающее значение H_1 на V_1 и значение H_2 на V_2, то тем самым будет определен новый цикл в Ω, который можно будет назвать *суммой* двух рассматриваемых циклов.

Если окажется, что V_1 и V_2 являются частями одного и того же множества и имеют общие точки (может даже случиться, что V_1 и V_2 совпадают), то через V надо будет обозначить *не объединение*, а *сумму* V_1 и V_2, т. е. произвольное множество, являющееся объединением двух *непересекающихся* частей V'_1, V'_2, находящихся во взаимно однозначном соответствии с множествами V_1 и V_2. Затем V_1 и V_2 заменяются на V'_1 и V'_2 с переносом на них в силу имеющихся взаимно однозначных соответствий структуры дифференцируемых многообразий и отображений H_1 и H_2. После этого точно так же, как и ранее, действуют с множеством $V = V'_1 \cup V'_2$. Сумма циклов не единственна, поскольку она зависит от выбора V. Однако *она всегда определяется с точностью до эквивалентности* в том смысле, что два таким образом определенных цикла всегда эквивалентны в смысле эквивалентности ориентированных особых многообразий (см. стр. 203). Итак, *во всех случаях можно определить сумму двух циклов как цикл, определенный только с точностью до эквивалентности.* Если два данных цикла заменить эквивалентными циклами, то любой цикл, равный их сумме, заменится эквивалентным циклом. Определенная нами сумма по существу не является суммой двух циклов, а представляет собой сумму двух классов циклов. Класс циклов является классом эквивалентности по отношению эквивалентности между особыми ориентированными многообразиями.

Когда записывают соотношение вида $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$, где $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$ — некоторые циклы, то это означает, что $\vec{\Gamma}$ с точностью до эквивалентности равняется сумме $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$. Можно, очевидно, точно так же определить сумму произвольного числа циклов и целое кратное некоторого цикла $n\vec{\Gamma}$, где n — целое число $\geqslant 1$, как сумму n циклов, эквивалентных циклу $\vec{\Gamma}$. Более общо, если заданы циклы $\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2, \ldots, \vec{\Gamma}_l$ одной и той же размерности, то можно говорить об их линейной комбинации $p_1\vec{\Gamma}_1 + p_2\vec{\Gamma}_2 + \ldots$ $\ldots + p_l\vec{\Gamma}_l$, где p_i — целые числа $\geqslant 1$. Можно даже договориться брать эти числа равными нулю, если считать, что цикл $0\vec{\Gamma}$ является циклом $\vec{0}$ или пустым циклом. Определяя циклы с точностью до эквивалентности, мы приходим к выводу, что *сложение циклов ассоциативно и коммутативно.*

Циклы, гомологичные нулю

Определим гомологии циклов, введя новое отношение эквивалентности, в котором мы будем пренебрегать вырожденными циклами и границами. Назовем C^m-цикл $H|\vec{V}$ размерности n открытого множества Ω аффинного пространства E *вырожденным*, если в случае, когда размерность $n = 0$, он пуст, а когда размерность $n \geqslant 1$, образ V при отображении H является конечным множеством [1]).

Говорят, что *C^m-цикл $\vec{\Gamma}$ из открытого множества Ω C^m-гомологичен 0 в Ω*, если существуют две C^m-границы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и два вырожденных цикла $\vec{A}'$ и $\vec{B}'$ в Ω, такие, что имеет место соотношение

$$\vec{\Gamma} + \vec{A} + \vec{A}' = \vec{B} + \vec{B}'. \qquad \text{(VI, 8; 19)}$$

[1]) Роль вырожденных циклов выяснится лишь в следствии 2 теоремы 54.

Из этого определения следует, что вырожденный цикл и C^m-граница C^m-гомологичны 0. Цикл, эквивалентный циклу, C^m-гомологичному 0, сам C^m-гомологичен 0. Цикл, C^m-гомологичный 0, заведомо C^l-гомологичен 0 при $l \leqslant m$.

Теорема 46. *Если циклы $\vec{\Gamma}_j$ гомологичны 0 и если p_j — целые числа $\geqslant 0$, то цикл $\sum_j p_j \vec{\Gamma}_j$ гомологичен 0. Если цикл $\vec{\Gamma}$ гомологичен 0, то таким же будет цикл $\overleftarrow{\Gamma}$.*

Теорема очевидна (сумма двух границ является границей, а сумма вырожденных циклов является вырожденным циклом).

Теорема 47. *Если $\vec{\Gamma}$ — произвольный C^m-цикл, то цикл $\vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ является C^m-границей.*

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $\vec{V} \subset \vec{\tilde{V}}$ — ориентированное многообразие с краем размерности n класса C^m, то $\overrightarrow{[0, 1]} \times \vec{V} \subset \vec{\mathbb{R}} \times \vec{\tilde{V}}$ является многообразием размерности $n+1$ класса C^m с псевдокраем. Регулярная часть его псевдограницы представляет собой объединение трех непересекающихся ориентированных многообразий: $\overrightarrow{]0, 1[} \times \overleftarrow{bV}$, $\{1\} \times \vec{\mathring{V}}$ и $\{0\} \times \overleftarrow{\mathring{V}}$* [1].

Доказательство. Если V — многообразие с краем из $\tilde{V}$ (размерности n), то $[0, 1] \times V$ есть часть многообразия $\mathbb{R} \times \tilde{V}$ размерности $n+1$, и сразу же видно, что оно является там многообразием с псевдокраем. Псевдограница представляет собой объединение множеств $[0, 1] \times bV$, $\{0\} \times V$, $\{1\} \times V$. Регулярная часть этой псевдограницы является объединением множеств $]0, 1[\times bV$, $\{0\} \times \mathring{V}$, $\{1\} \times \mathring{V}$, а ее сингулярная часть является объединением множеств $\{0\} \times bV$ и $\{1\} \times bV$. Все это можно проверить геометрически на рис. 9 (где в качестве V взят заштрихованный замкнутый круг; тогда $[0, 1] \times bV$ — «боковая поверхность цилиндра», а $\{0\} \times V$ и $\{1\} \times V$ — его основания) и доказать непосредственно.

Множество $\overrightarrow{[0, 1]} \times \vec{V}$ ориентируется следующим образом: касательное векторное пространство в каждой точке (t, x) является прямой суммой вещественной прямой $\mathbb{R}$, касательного векторного пространства к $[0, 1]$ в точке t, и касательного векторного пространства к V в точке x. Базис этого касательного

[1]) Надо внимательно следить за ориентацией!

пространства в точке (t, x) множества $[0, 1]\times V$ считается положительным, если он последовательно составлен из положительного вектора $\vec{e}_0 \in \mathbb{R}$ и положительного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ пространства $\vec{T}(x; \vec{V})$. Точно так же определяется ориентация множества $[0, 1]\times \overleftarrow{bV}$, поскольку $\overleftarrow{bV}$ также ориентировано.

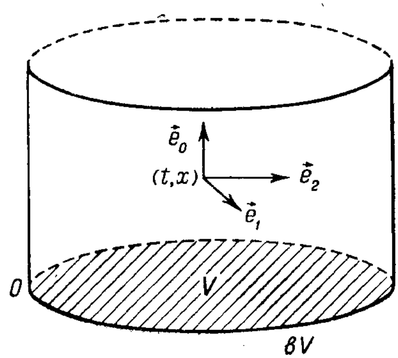

Рис. 9.

Что же касается многообразий $\{0\}\times \overleftarrow{V}$ или $\{1\}\times \vec{V}$, то их ориентация определяется очевидным образом исходя из ориентации V.

Докажем теперь утверждения леммы, касающиеся ориентации. Пусть (t, x) — точка множества $]0, 1[\times bV$. Пусть $\vec{e}_s$ — вектор, касательный к $\tilde{V}$ в точке x, выходящий из $\mathring{V}$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — некоторый положительный базис пространства $\vec{T}(x; \overleftarrow{bV})$. Тогда $\vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — положительный базис в $\vec{T}(x; \vec{\tilde{V}})$, а значит, $\vec{e}_0, \vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ — положительный базис пространства $\vec{T}((t, x); \mathbb{R}\times \vec{\tilde{V}})$. Базис $\vec{e}_s, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$, очевидно, отрицателен. Поскольку $\vec{e}_s$ выходит из $]0, 1[\times \mathring{V}$ в точке (t, x), то базис $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ отрицателен в граничной ориентации $\vec{T}((t, x);]0, 1[\times bV)$ и в то же время он положителен в ориентации $\overrightarrow{]0, 1[}\times \overleftarrow{bV}$. Это означает, что множество $]0, 1[\times bV$ как регулярная часть псевдограницы множества $\overrightarrow{]0, 1[}\times \vec{V}$ должно иметь ориентацию множества $\overrightarrow{]0, 1[}\times \overleftarrow{bV}$.

Пусть теперь x — некоторая точка $\mathring{V}$, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — положительный базис пространства $\vec{T}(x; \vec{\mathring{V}})$. Тогда базис

$\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ положителен в $\vec{T}((t, x); \mathbb{R}\times\vec{V})$ при любом t_0. Поскольку при $t=1$ вектор $\vec{e}_0$ является выходящим относительно $]0, 1[\times\overset{\circ}{V}$ и входящим при $t=0$, то система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ представляет собой положительный базис пространства $\vec{T}((1, x); \{1\}\times\overset{\circ}{V})$ и отрицательный базис пространства $\vec{T}((0, x); \{0\}\times\overset{\circ}{V})$ в ориентации границы множества $[\overset{\frown}{0, 1}]\times\vec{V}$. Следовательно, являясь регулярными частями псевдограницы, $\{1\}\times\overset{\circ}{V}$ и $\{0\}\times\overset{\circ}{V}$ должны иметь ориентации множеств $\{1\}\times\overset{\circ}{\vec{V}}$ и $\{0\}\times\overset{\circ}{\overleftarrow{V}}$, чем и заканчивается доказательство леммы.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы.

Прежде всего заметим, что если в предположениях леммы V является многообразием *без края* ($bV=\emptyset$), то $]\overset{\frown}{0, 1}[\times\vec{V}$ является не только многообразием с псевдокраем, но также и многообразием *с краем*, поскольку сингулярная часть границы $\{0, 1\}\times bV$ пуста и границей этого многообразия с краем служит объединение множеств $\{1\}\times\vec{V}$ и $\{0\}\times\overleftarrow{V}$.

Если теперь $\vec{\Gamma}$ является циклом $H\,|\,\vec{V}$, то $\overleftarrow{\Gamma}$ будет циклом $H\,|\,\overleftarrow{V}$. Рассмотрим особое ориентированное компактное многообразие с краем, определенное отображением K множества $[0, 1]\times\vec{V}$, где

$$K(t, x)=H(x). \tag{VI, 8; 20}$$

Из проведенных выше рассуждений следует, что границей этого особого многообразия служит

$$K\,|\,b([\overset{\frown}{0, 1}]\times\vec{V})=K\,|\,(\{1\}\times\vec{V}+\{0\}\times\overleftarrow{V}), \tag{VI, 8; 21}$$

а это есть цикл, эквивалентный циклу $\vec{\Gamma}+\overleftarrow{\Gamma}$, чем заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Если* $\vec{\Gamma}_1$ *и* $\vec{\Gamma}_2$ — *два* C^m-*цикла и если* $\vec{\Gamma}_2$ *и* $\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2$ C^m-*гомологичны* 0, *то цикл* $\vec{\Gamma}_1$ C^m-*гомологичен* 0.

Доказательство. В самом деле, имеет место соотношение

$$\vec{\Gamma}_1+(\vec{\Gamma}_2+\overleftarrow{\Gamma}_2)=(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2)+\overleftarrow{\Gamma}_2, \tag{VI, 8; 22}$$

правая часть которого, будучи суммой двух циклов, гомологичных нулю, гомологична нулю. Значит, гомологична нулю его левая часть, откуда

$$\overrightarrow{\Gamma}_1+(\overrightarrow{\Gamma}_2+\overleftarrow{\Gamma}_2)+\text{граница}+\text{вырожденный цикл}=$$
$$=\text{граница}+\text{вырожденный цикл.} \qquad (\mathrm{VI}, 8; 23)$$

Поскольку, согласно теореме, $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2$ является границей, мы получаем, что цикл $\overrightarrow{\Gamma}_1$ гомологичен нулю.

Гомологичные циклы

Теорема 48. *Бинарное отношение между C^m-циклами в Ω: «цикл $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2$ C^m-гомологичен 0 в Ω» является отношением эквивалентности, совместимым с операциями сложения циклов и умножения их на целые числа $\geqslant 0$.*

Если цикл $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2$ C^m-гомологичен 0, то говорят, что *циклы $\overrightarrow{\Gamma}_1$ и $\overrightarrow{\Gamma}_2$ C^m-гомологичны в Ω*. Класс эквивалентности, образованный всеми C^m-циклами, C^m-гомологичными друг другу, называется *классом C^m-гомологий в Ω*.

Доказательство. 1°) *Рефлексивность.* Так как цикл $\overrightarrow{\Gamma}+\overleftarrow{\Gamma}$ является границей (теорема 47), то он C^m-гомологичен 0.

2°) *Симметричность.* Если цикл $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2$ гомологичен 0, то гомологичным нулю будет цикл противоположной ориентации $\overrightarrow{\Gamma}_2+\overleftarrow{\Gamma}_1$.

3°) *Транзитивность.* Пусть $\overrightarrow{\Gamma}_1$, $\overrightarrow{\Gamma}_2$, $\overrightarrow{\Gamma}_3$ — три цикла. Предположим, что циклы $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_2$ и $\overrightarrow{\Gamma}_2+\overleftarrow{\Gamma}_3$ гомологичны 0. Тогда их сумма также будет гомологичной нулю. В силу ассоциативности эту сумму можно записать в виде $\overrightarrow{\Gamma}_1+(\overleftarrow{\Gamma}_2+\overrightarrow{\Gamma}_2)+\overleftarrow{\Gamma}_3$. По теореме 47 скобка гомологична нулю, а из следствия этой теоремы вытекает, что цикл $\overrightarrow{\Gamma}_1+\overleftarrow{\Gamma}_3$ гомологичен нулю, чем и доказывается транзитивность.

Таким образом, речь действительно идет об отношении эквивалентности. Гомологичность циклов сохраняется при их сложении и умножении на целые числа $\geqslant 0$: если циклы $\overrightarrow{\Gamma}_j$ гомологичны циклам $\overrightarrow{\Gamma}'_j$ для $j=1, 2, \ldots, l$ и если p_j — целые числа $\geqslant 0$, то цикл $\sum\limits_j p_j\overrightarrow{\Gamma}_j$ гомологичен циклу $\sum\limits_j p_j\overrightarrow{\Gamma}'_j$. Это очевидно, поскольку, согласно теореме 46, цикл $\sum\limits_j p_j(\overrightarrow{\Gamma}_j+\overleftarrow{\Gamma}'_j)$ гомологичен 0.

Теорема 49. *Если $\vec{\omega}$ является замкнутой дифференциальной формой класса C^1 в открытом множестве Ω конечномерного аффинного пространства E, то ее интеграл по каждому циклу, C^1-гомологичному 0 в Ω, равен нулю, а ее интегралы по двум C^1-гомологичным циклам в Ω равны.*

Доказательство. Напомним сначала (теорема 35), что интегралы от $\vec{\omega}$ по двум эквивалентным циклам равны. Отсюда сразу же вытекает, что интеграл от $\vec{\omega}$ по сумме двух циклов равен сумме ее интегралов по этим циклам. Предположим, что цикл $\vec{\Gamma}$ гомологичен нулю, и пусть A, B суть C^1-границы, а $\vec{A}'$, $\vec{B}'$ — такие вырожденные циклы, для которых имеет место соотношение (VI, 8; 19). Тогда

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}'} \vec{\omega} = \int_{\vec{B}} \vec{\omega} + \int_{\vec{B}'} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 8; 24)}$$

Из теоремы 41 вытекает, что интегралы от коцикла $\vec{\omega}$ по границам $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны нулю. Кроме того, эти интегралы, согласно замечанию 3°) на стр. 204—205, по циклам $\vec{A}'$ и $\vec{B}'$ равны нулю. Если теперь $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два C^1-гомологичных цикла, то цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^1-гомологичен 0, и следовательно,

$$\int_{\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega} = \vec{0}, \quad \text{а значит,} \quad \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}. \qquad \text{(VI, 8; 25)}$$

Теперь в множестве коциклов или замкнутых дифференциальных форм класса C^1 в Ω со значениями в $\vec{F}$ можно рассмотреть бинарное отношение «$\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ является кограницей», которое снова, очевидно, является *некоторым отношением эквивалентности*. (В противоположность только что проведенным рассуждениям для гомологии это утверждение совершенно очевидно.)

Две формы одного и того же класса мы будем называть *когомологичными* (форма, когомологичная 0, — это форма класса C^1, являющаяся кограницей). Класс эквивалентности называется *классом когомологий* со значениями в $\vec{F}$. Класс когомологий некоторой замкнутой формы класса C^1 есть множество всех форм, когомологичных данной форме.

Следствие. *Интеграл от коцикла по C^1-циклу зависит только от класса когомологий коцикла и класса C^1-гомологий цикла.*

Доказательство. Пусть $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ — два когомологичных коцикла и $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два C^1-гомологичных C^1-цикла.

Тогда имеют место соотношения

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 - \int\limits_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 = \int\limits_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 + \int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int\limits_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 - \int\limits_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 =$$

$$= \int\limits_{\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int\limits_{\vec{\Gamma}_2} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2). \qquad \text{(VI, 8; 26)}$$

Но в силу доказанной теоремы первый интеграл правой части равен нулю, поскольку $\vec{\omega}_1$ является коциклом, а цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^1-гомологичен 0. Второй интеграл обращается в нуль, так как $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ является кограницей, а $\vec{\Gamma}_2$ представляет собой C^1-цикл (теорема 41).

Замечания. 1°) Для дифференциальных форм мы рассматривали только коциклы и кограницы, в то время как можно было бы ввести C^m-коциклы и C^m-кограницы. Мы поступили так только с целью упрощения рассуждений.

2°) Ставя перед собой такую же цель, мы все равно не смогли бы сделать этого для циклов и границ!

Нам абсолютно необходимы циклы и границы класса C^1, так как без этого условия интеграл по циклам от дифференциальной формы не имел бы смысла. Однако мы докажем некоторые свойства, в которых будут использованы только *непрерывные* отображения и *топология* без предположения дифференцируемости (см. теоремы 59, 61, 69). С этой целью, а, кроме того, нам это нужно из практических соображений, нам потребуются C^0-циклы и C^0-границы. Таким образом, рассмотрение C^m-циклов и C^m-границ по крайней мере для двух значений $m = 0$ и $m = 1$ неизбежно. Однако ничуть не сложнее брать произвольные m. Далее будут рассмотрены интересные теоремы, позволяющие переходить от одного значения m к другому (например, следствие 4 теоремы 54).

3°) Факторпространство векторного пространства коциклов на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$ по векторному подпространству кограниц называется *векторным пространством когомологий Ω со значениями в $\vec{F}$. Таким образом, множество классов когомологий со значениями в $\vec{F}$ имеет структуру векторного пространства* (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, будет ли $\vec{F}$ векторным пространством над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Множество классов C^m-гомологий множества Ω имеет структуру абелевой группы

В самом деле, если α_1 и α_2 — два класса и $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два произвольных цикла, принадлежащие этим классам, то $\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$ принадлежит одному и тому же классу, который можно обозначить через $\alpha_1 + \alpha_2$. Это сложение ассоциативно и коммутативно. В множестве таких классов имеется нулевой элемент — класс 0 пустого цикла (множество всех C^m-циклов, C^m-гомологичных 0). Если α является таким классом и если $\vec{\Gamma}$ — цикл из этого класса, то класс α', содержащий $\overleftarrow{\Gamma}$, удовлетворяет равенству $\alpha + \alpha' = 0$ (теорема 47), а следовательно, α' является классом $-\alpha$, противоположным классу α. Таким образом, множество классов C^m-гомологий множества Ω является абелевой группой, называемой *группой C^m-гомологий множества* Ω[1]).

Этот факт наводит на мысль ввести новое обозначение. Если $\vec{\Gamma}_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, — циклы и p_j — целые числа *произвольного знака*, то через $\sum\limits_j p_j \vec{\Gamma}_j$ мы будем обозначать цикл $\sum\limits_j |p_j| \vec{\Gamma}'_j$ (определенный как всякая сумма с точностью до эквивалентности), где $\vec{\Gamma}'_j = \vec{\Gamma}_j$, если $p_j > 0$, и $\vec{\Gamma}'_j = \overleftarrow{\Gamma}_j$, если $p_j < 0$. При этом становятся возможными сложение и умножение на целые числа произвольного знака; эти операции удовлетворяют обычным правилам при условии, что результат рассматривается не с точностью до эквивалентности (в смысле эквивалентности особых многообразий), а *с точностью до гомологии*: *цикл* $\sum\limits_j p_j \vec{\Gamma}_j + \sum\limits_j q_j \vec{\Gamma}_j$ *не равен или эквивалентен циклу* $\sum\limits_j (p_j + q_j) \vec{\Gamma}_j$, *а гомологичен ему*. Вычисления ведутся не над циклами, а над классами C^m-гомологий или же в группе C^m-гомологий (например, цикл $\vec{\Gamma} + (-\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ гомологичен 0, но не эквивалентен пустому циклу).

---

[1]) Наше определение гомологии и группы гомологий множества Ω отличается от принятого в современной алгебраической топологии — теории, выходящей за рамки данного курса. Кроме того, нет гарантии, что для всех Ω найдутся «хорошие» группы гомологий. Но для дальнейшего это не важно. Наши усилия сводятся к тому, чтобы

1°) использовать интеграл от дифференциальных форм и формулу Стокса для определения индекса и топологической степени (см. стр. 302 и 314) и доказательства некоторых важных теорем, таких, как следствие 2 теоремы 68 или теорема 69;

2°) получить хорошую базу для изложения теории аналитических функций комплексных переменных и интегралов от них.

4°) Пусть Ω' — открытое множество E, содержащееся в Ω. Каждая дифференциальная форма $\vec{\omega}$ на Ω заведомо будет дифференциальной формой на Ω'. Если $\vec{\omega}$ является коциклом на Ω, то она будет коциклом и на Ω'. Если она является кограницей на Ω, то она будет также кограницей и на Ω'. Однако переход от Ω' к Ω, вообще говоря, производить нельзя. Коцикл на Ω' не обязательно продолжается в коцикл на Ω [например, если $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$, то дифференциальная форма ω из (VI, 4; 41) является коциклом на Ω', но в начале координат имеется особенность, и это не позволяет продолжить ее как коцикл на Ω].

Может случиться, что некоторый коцикл *на* Ω является кограницей на меньшем открытом множестве Ω', но не будет кограницей на Ω [например, если $\Omega = \mathbb{R} - 0$ и если Ω' является дополнением в $\mathbb{R}^2$ к некоторой полупрямой, исходящей из начала, то та же самая форма ω из (VI, 4; 41) является коциклом в Ω, кограницей в Ω', но не будет кограницей в Ω, как это мы видели согласно (VI, 4; 41)].

Для циклов имеет место обратная ситуация. Цикл в Ω' заведомо является циклом в Ω (ибо отображение H ориентированного многообразия $\vec{V}$ в Ω' является отображением H многообразия $\vec{V}$ в Ω). Цикл, гомологичный 0 в Ω', гомологичен 0 в Ω. Здесь переход от Ω к Ω', вообще говоря, невозможен. Цикл из Ω не обязательно лежит в Ω'. Может случиться, что цикл в Ω' будет гомологичен 0 в Ω и не будет гомологичен 0 в Ω'. Например, если $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$ и $\vec{\Gamma}$ является ориентированной тригонометрической окружностью, то она является C^∞-границей в Ω, но не будет C^∞-границей в Ω' и не будет гомологичной 0 в Ω' (см. замечание 2°) на стр. 247).

Гомотопия

Определение. Пусть f_1 и f_2 — *непрерывные* отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y. Говорят, что эти *отображения гомотопны*, если существует непрерывная деформация одного из них в другое, т. е. если существует отображение F произведения $[\alpha, \beta] \times X$ в Y, где $[\alpha, \beta]$ — такой отрезок из $\mathbb{R}$, что для любого $x \in X$ имеют место равенства

$$F(\alpha, x) = f_1(x), \quad F(\beta, x) = f_2(x). \tag{VI, 8; 27}$$

Если теперь для $t \in [\alpha, \beta]$ рассмотреть частное отображение F_t: $x \to F(t, x)$ пространства X в пространство Y, то для $t = \alpha$ оно совпадет с отображением f_1 пространства X в Y, а для $t = \beta$ оно совпадет с отображением f_2 пространства X в Y.

Поскольку отображение F является непрерывным отображением произведения $[\alpha, \beta] \times X$ в Y, то рассматриваемое отображение «изменяется непрерывно» вместе с изменением t, т. е. мы имеем «непрерывную деформацию», переводящую f_1 в f_2.

Если X является компактным, а Y — метрическим пространством, то из теоремы 66 гл. IV следует, что функция $t \to F_t$ представляет собой непрерывное отображение $[\alpha, \beta]$ в $(Y^X)_{cb}$. Значит, имеется точка пространства $(Y^X)_{cb}$, которая непрерывно изменяется вместе с t от f_1 при $t = \alpha$ до f_2 при $t = \beta$. Можно также сказать, что имеется *путь*, соединяющий f_1 и f_2 в $(Y^X)_{cb}$, и что два непрерывных отображения X в Y гомотопны, если они являются двумя точками пространства $(Y^X)_{cb}$, которые можно соединить некоторым путем. Во всех случаях, с которыми мы встретимся в этом параграфе, пространство X будет компактным, а Y — метрическим.

Отображение F называется *гомотопией*, переводящей f_1 в f_2. Естественно, если имеется одна такая гомотопия относительно отрезка $[\alpha, \beta]$ из $\mathbb{R}$, то можно найти и другую, в которой отрезок $[\alpha, \beta]$ заменен любым другим отрезком из $\mathbb{R}$, например отрезком $[0, 1]$. В самом деле, для этого достаточно заменить отображение F отображением F_0, определенным по формуле

$$F_0(t, x) = F(\alpha + t(\beta - \alpha), x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{VI, 8; 28}$$

Гомотопия является чисто топологическим понятием, поскольку при ее определении используются только непрерывные отображения

Однако при изучении интегралов от дифференциальных форм, в которые входят многообразия класса C^m, $m \geqslant 1$, понадобится более узкое понятие, а именно понятие C^m-гомотопии.

Определение. Пусть X и Y — многообразия класса C^m, где m конечно или бесконечно. Говорят, что два отображения f_1 и f_2 класса C^m пространства X в пространство Y *C^m-гомотопны*, если существует отображение F множества $[\alpha, \beta] \times X$ в Y класса C^m, удовлетворяющее соотношению (VI, 8; 27)[1]).

Конечно, два C^m-гомотопных отображения класса C^m принадлежат классу C^l и C^l-гомотопны при $l \leqslant m$. В дальнейшем гомотопия означает C^0-гомотопию.

Теорема 50. *Если X и Y — многообразия класса C^m, то два отображения класса C^m многообразия X в Y, C^m-гомотопные*

[1]) Множество $[\alpha, \beta] \times X$ является не многообразием, а многообразием с краем из $\mathbb{R} \times X$. Тем не менее, принимая во внимание примечание на стр. 198 I-го тома, можно говорить, что отображение F множества $[\alpha, \beta] \times X$ принадлежит классу C^m.

третьему отображению, C^m-гомотопны между собой. Другими словами, отношение, выражающее тот факт, что два отображения C^m-гомотопны, является отношением эквивалентности в множестве отображений класса C^m многообразия X в многообразие Y. Класс эквивалентности называется классом C^m-гомотопии.

Доказательство. Пусть f_0, f_1, f_2 — три таких отображения X в Y класса C^m, что f_0 гомотопно f_1, а f_1 гомотопно f_2. Пусть G — гомотопия, переводящая f_0 в f_1, и H — гомотопия, переводящая f_1 в f_2. Всегда можно считать, что интервалы прямой $\mathbb{R}$, соответствующие этим гомотопиям, являются интервалами $[0, 1]$ и $[1, 2]$. Если $m=0$ (*в качестве X и Y тогда можно взять произвольные топологические пространства, а не обязательно многообразия*), то сразу же определяется гомотопия F, переводящая f_0 в f_2 и соответствующая интервалу $[0, 2]\subset\mathbb{R}$, по такой формуле:

$$F(t, x)=\begin{cases} G(t, x) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1, \\ H(t, x) & \text{при } 1\leqslant t\leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(VI, 8; 29)}$$

(что дает $F(1, x)=f_1(x)$), чем и доказывается теорема для $m=0$. Если X — компактное и Y — метрическое пространства, то это означает, что две точки, которые можно соединить путями с третьей точкой в топологическом пространстве $(Y^X)_{cb}$, можно также соединить между собой некоторым путем. Этот факт совершенно очевиден, и мы считали его таким на стр. 91 т. I. Доказательство, конечно, не так просто при $m\geqslant 1$. В самом деле, если применить формулу (VI, 8; 29), то полученное при этом отображение F не будет принадлежать классу C^m, ибо не существует его частной производной по t в точке, соответствующей $t=1$, а существуют только производная слева и производная справа по t. (Это означает, что стыковка двух путей класса C^m только кусочно принадлежит классу C^m; мы должны рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 45, чтобы заменить путь, кусочно принадлежащий классу C^m, путем класса C^m.)

Обозначим через g_0 строго возрастающее отображение класса C^∞ интервала $[0, 1]$ на себя, имеющее, кроме того, все последовательные производные, равные нулю на концах 0 и 1 этого интервала. Обозначим через g_1 отображение такого же типа интервала $[1, 2]$ на себя (см. доказательство теоремы 45). Тогда можно определить функцию F по следующей формуле:

$$F(t, x)=\begin{cases} G(g_0(t_0), x) & \text{для } 0\leqslant t\leqslant 1, \\ H(g_1(t), x) & \text{для } 1\leqslant t\leqslant 2. \end{cases} \qquad \text{(VI, 8; 30)}$$

На этот раз функция F принадлежит классу C^m. В самом деле, она принадлежит классу C^m в $[0, 1]\times X$ и $[1, 2]\times X$. Ее производные при $t=1$ справа и слева принимают одно и то же значение. Действительно, если мы рассмотрим производную $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p D_x^{\vec{q}}$, $p \in \mathbb{N}$, $\vec{q} \in \mathbb{N}^n$ [1]), слева, а также справа, то увидим, что она принимает одно и то же значение: в силу свойств функций g_0 и g_1 она равна $D^{\vec{q}} f_1$ при $p = 0$ и равна нулю при $p \geqslant 1$. Таким образом, мы построили гомотопию класса C^m, переводящую f_0 в f_2, и тем самым доказали теорему.

Мы сейчас убедимся в том, что если данное пространство компактно, а пространство-образ является открытым множеством некоторого аффинного нормированного пространства, то *отображения, «достаточно близкие» к некоторому отображению, гомотопны ему.*

Теорема 51. *Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E.*

1°) *Если множество Ω звездно, в частности если оно выпукло (или если $\Omega = E$), или если оно обладает свойствами, указанными в теореме* 19 *Пуанкаре, то два произвольных отображения класса C^m произвольной части K некоторого многообразия V класса C^m (или произвольного топологического пространства K, если $m = 0$) в Ω C^m-гомотопны в Ω*[2]).

2°) *Если f является отображением класса C^m некоторой компактной части K многообразия V класса C^m (или произвольного топологического компактного пространства K, если $m = 0$) в Ω и если через $\delta > 0$ обозначено наименьшее расстояние $d(f(K), \complement\Omega)$ от компакта $f(K)$ из E до замкнутого множе-*

---

[1]) Здесь n — размерность X. Для того чтобы пользоваться языком частных производных, следует предполагать, что X и Y — открытые множества аффинных пространств. Когда речь идет только об *окрестности* каждой точки, то всегда можно, выбирая соответствующие карты X и Y, свести дело к этому случаю.

[2]) Можно (кроме исключительных случаев, указанных в примечании на стр. 198 т. I) говорить об отображении C^m только в случае многообразия или *открытого* подмножества многообразия. Если K — часть многообразия V, то отображением класса C^m части K в Ω мы назовем сужение f на K отображения $\tilde{f}$ класса C^m некоторой открытой окрестности $\mathcal{K}$ части K в многообразии V в пространство E. (Тогда его можно считать также отображением класса C^m окрестности $\mathcal{K}$ *в* Ω. В самом деле, $\tilde{f}^{-1}(\Omega)$ является открытым множеством $\mathcal{K}_1$ из $\mathcal{K}$, содержащим K, и $\tilde{f}$ отображает $\mathcal{K}_1$ *в* Ω.)

Когда мы говорим, что два таких отображения f и g части K в Ω C^m-гомотопны в Ω, то мы под этим понимаем следующее: существует некоторая гомотопия F между f и g в Ω, т. е. непрерывное отображение $[\alpha, \beta] \times K$ в Ω, удовлетворяющее равенствам (VI, 8; 27), которое может быть продолжено до некоторой гомотопии класса C^m между $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в E, т. е. до отображения класса C^m из $[\alpha, \beta] \times \mathcal{K}$ в E (или, если хотите, в Ω). В условиях теоремы надо было бы уточнить $\mathcal{K}$ и $\tilde{f}$ одновременно с K и f. *Однако речь идет только о K и f, чтобы не усложнять ни условия теоремы, ни ее доказательства.*

ства $\complement\Omega$, *то каждое отображение* g *класса* C^m *из* K *в* Ω, *такое, что* $|||\overrightarrow{f-g}||| < \delta$ [1]), *является* C^m-*гомотопией* f *в* Ω.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Пусть* f *и* g — *два таких отображения класса* C^m *некоторой части* K *многообразия* V *в* Ω, *что для любого* $x \in K$ *весь отрезок* $[f(x), g(x)]$ *из* E *лежит в* Ω. *Тогда отображения* f *и* g C^m-*гомотопны в* Ω.

В самом деле, определим гомотопию, переводящую f в g по формуле

$$F(t, x) = f(x) + t(\overrightarrow{g(x) - f(x)}). \qquad \text{(VI, 8; 31)}$$

Это отображение класса C^m множества $[0, 1] \times K$ в Ω, причем $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$, чем и заканчивается доказательство леммы.

Если множество Ω выпукло, то свойство отрезка $[f(x), g(x)]$ для любого $x \in K$ целиком лежать в Ω сохраняется при любых f и g.

Говорят, что подмножество A пространства E звездно относительно точки a, если для любой точки x из A весь отрезок $[a, x]$ лежит в A. Подмножество называется звездным, если в нем существует такая точка a, относительно которой оно звездно. Выпуклое множество звездно относительно каждой своей точки.

Если Ω звездно относительно a, то каждое отображение f части K в Ω класса C^m, согласно изложенному выше, C^m-гомотопно постоянному отображению $K \to \{a\}$. Любые два C^m-отображения C^m-гомотопны этому отображению, а следовательно, C^m-гомотопны между собой.

Если K — компакт, то $f(K)$ будет компактом в E, и тогда (стр. 84 т. I) $\delta = d(f(K), \complement\Omega) > 0$. Если теперь $|||\overrightarrow{f-g}||| < \delta$, то отрезок $[f(x), g(x)]$ для всех $x \in K$ лежит в Ω, а f и g C^m-гомотопны.

Предположим, наконец, что Ω обладает свойствами, указанными в теореме 19 Пуанкаре. Если через $P_1(x)$ для каждой точки $x \in \Omega$ мы обозначим проекцию x параллельно базисному вектору $\vec{e}_1$ на подпространство F_1, порожденное началом координат и базисными векторами $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_N$, то для каждой точки $x \in K$ отрезок $[f(x), P_1(f(x))]$ будет лежать в Ω. Тогда

[1]) Мы взяли $|||\ \ |||$. Здесь речь идет о $|||\ \ |||_0$, так как производные в эту норму не входят. Таким образом, $|||\overrightarrow{f-g}|||_K = \max\limits_{x \in K} \|\overrightarrow{f(x) - g(x)}\|$.

отображения f и $P_1 \circ f$ класса C^m являются C^m-гомотопными. Аналогично, если g — другое отображение класса C^m части K в Ω, то отображения g и $P_1 \circ g$ также C^m-гомотопны. Будем теперь проводить рассуждение по индукции. Доказываемая теорема относительно Ω, очевидно, верна, если размерность пространства E равна 0 (или 1). Предположим, что она доказана для случая, когда пространство E имеет размерность $N-1$. Тогда $P_1 \circ f$ и $P_1 \circ g$ будут отображениями класса C^m части K в открытое множество $P_1(\Omega) = \Omega \cap F_1$ из F_1, обладающее свойствами, указанными в теореме 19. Поскольку пространство F_1 является $(N-1)$-мерным, то по предположению индукции эти отображения C^m-гомотопны. Теперь в Ω мы имеем C^m-гомотопии: $f \to P_1 \circ f \to P_1 \circ g \to g$, и из теоремы 50 следует, что отображения f и g C^m-гомотопны и в случае, когда E N-мерно. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Теперь мы можем сформулировать важную теорему о приближении непрерывного отображения отображениями класса C^m.

Теорема 52. *Пусть K — некоторый компакт многообразия V класса C^m, и пусть f — непрерывное отображение K в открытое множество Ω аффинного нормированного пространства E. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое отображение g класса C^m многообразия V в E, что $g(K) \subset \Omega$* [1]*, причем на компакте K имеет место неравенство $|||\overrightarrow{f-g}||| \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 < \min(\varepsilon, \delta)$, где δ — расстояние от компакта $f(K)$ до $\complement\Omega$. Для каждой точки $a \in K$ можно найти такую открытую окрестность $\mathscr{V}_a$ точки a в V, что для всех $x \in K \cap \mathscr{V}_a$ имеет место неравенство

$$\|\overrightarrow{f(x)-f(a)}\| \leqslant \varepsilon_1. \tag{VI, 8; 32}$$

Так как множество K компактно, то его можно покрыть конечным числом открытых множеств $\mathscr{V}_a$. Пусть это будут окрестности $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$ точек a_i. Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ — подчиненное разложение единицы, где α_i принадлежат классу C^m на V. Поскольку многообразие V принадлежит классу C^m, то, согласно теореме о разложении единицы (теорема 11 гл. IV), такое разложение возможно.

---

[1]) Естественно, что $g^{-1}(\Omega)$ является некоторой открытой окрестностью $\mathscr{K}$ множества K, а g отображает всю эту окрестность в Ω.

Обозначим теперь через O произвольную точку пространства E. Построим функцию

$$g(x) = O + \sum_{i \in I} \alpha_i(x) (\overrightarrow{f(a_i) - O}). \qquad \text{(VI, 8; 33)}$$

Поскольку α_i принадлежат классу C^m, то эта функция как отображение V в E принадлежит классу C^m. С другой стороны, имеют место соотношения

$$\begin{gathered} f(x) = O + \sum_{i \in I} \alpha_i(x) (\overrightarrow{f(x) - O}) \quad \text{для} \quad x \in K, \\ \| \overrightarrow{g(x) - f(x)} \| \leqslant \sum_{i \in I} \alpha_i(x) \| \overrightarrow{f(x) - f(a_i)} \| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{для} \quad x \in K. \end{gathered} \qquad \text{(VI, 8; 34)}$$

В силу выбора ε_1 последнее выражение $\leqslant \varepsilon$. Поскольку, кроме того, $\varepsilon_1 < \delta$, то $g(x)$ при всех $x \in K$ лежит в Ω, чем и заканчивается доказательство теоремы.

С помощью этой теоремы мы сможем установить некоторое соотношение между различными C^m-гомотопиями.

Теорема 53. *Пусть K — компакт некоторого многообразия V класса C^m, и пусть f_1 и f_2 — два отображения класса C^m компакта K в открытое множество Ω аффинного нормированного пространства E. Если отображения f и g C^0-гомотопны, то они C^m-гомотопны.*

Доказательство. В самом деле, пусть F — отображение $[0, 1] \times K$ в Ω, определяющее топологическую гомотопию между f_1 и f_2. Тогда F является непрерывным отображением некоторого компакта многообразия $\mathbb{R} \times V$ в Ω. Согласно теореме 52, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое отображение G: $[0, 1] \times K \to \Omega$ класса C^m, для которого справедливо неравенство $||| \overrightarrow{F - G} ||| \leqslant \varepsilon$. Выберем $\varepsilon < \delta$, где δ — наименьшее из расстояний δ_1 и δ_2 от $f_1(K)$ и $f_2(K)$ до $\complement\Omega$. Заметим, что G является гомотопией класса C^m между двумя отображениями g_1 и g_2 компакта K в Ω, определенными равенствами

$$g_1(x) = G(0, x) \quad \text{и} \quad g_2(x) = G(1, x). \qquad \text{(VI, 8; 35)}$$

Таким образом, исходя из C^0-гомотопии между f_1 и f_2, мы нашли C^m-гомотопию между отображениями g_1 и g_2, «очень близкими» к f_1 и f_2.

Так как оба отображения f_1 и g_1 принадлежат классу C^m и $||| \overrightarrow{f_1 - g_1} ||| < \delta_1$, то отображения f_1 и g_1, в силу теоремы 51, C^m-гомотопны.

Аналогично проверяется, что отображения f_2 и g_2 также C^m-гомотопны.

Таким образом, имеется три C^m-гомотопии, переводящие f_1 в g_1, g_1 в g_2 и g_2 в f_2. В силу теоремы 50 отсюда вытекает, что отображения f_1 и f_2 также C^m-гомотопны.

Следствие 1. *Пусть K — компакт некоторого многообразия V класса C^m и Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства E. Если для некоторого целого числа $l_0 \leqslant m$ два произвольных отображения класса C^{l_0} компакта K в Ω гомотопны, то для каждого целого $l \leqslant m$ два произвольных отображения класса C^l компакта K в Ω C^l-гомотопны. Это свойство зависит только от топологии множества Ω; другими словами, оно остается справедливым, если множество Ω заменить любым другим ткрытым множеством Ω' аффинного нормированного пространства, гомеоморфным множеству Ω.*

Доказательство. *Возьмем сначала* $l = 0$. Пусть f_1 и f_2 — два *непрерывных* отображения компакта K в Ω. Пусть $\varepsilon > 0$ — число, строго меньшее расстояний от $f_1(K)$ и $f_2(K)$ до $\complement\Omega$. Согласно теореме 52, существуют такие отображения g_1 и g_2 класса C^{l_0} компакта K в Ω, что $|||\overrightarrow{f_1 - g_1}||| \leqslant \varepsilon$ и $|||\overrightarrow{f_2 - g_2}||| \leqslant \varepsilon$. В силу теоремы 51 они гомотопны соответственно f_1 и f_2. Однако, согласно *предположению, сделанному относительно* l_0, отображения g_1 и g_2 гомотопны. Следовательно, имеют место гомотопии $f_1 \to g_1 \to g_2 \to f_2$. В силу теоремы 50 отображения f_1 и f_2 гомотопны.

Возьмем теперь произвольное целое число $l \leqslant m$. Согласно изложенному выше, два отображения компакта K в Ω класса C^l непрерывны, а значит, гомотопны. Следовательно, в силу теоремы 53 они C^l-гомотопны.

Любое свойство относительно отображений класса C^l не обязано априори сохраняться при гомеоморфизме. Казалось бы, что установленное выше свойство должно было сохраниться только при C^l-диффеоморфизме. Однако, поскольку оно эквивалентно тому же свойству при $l = 0$, оно сохраняется и при гомеоморфизме.

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество аффинного нормированного пространства, гомеоморфное выпуклому или звездному открытому множеству или открытому множеству, обладающему свойствами, указанными в теореме* 19 *Пуанкаре. Тогда два произвольных отображения класса C^m компакта K многообразия класса C^m в Ω являются C^m-гомотопными.*

В самом деле, из следствия 1 вытекает, что это свойство сохраняется при гомеоморфизме. Остается лишь обратиться к теореме 51.

Соотношения между гомотопией и гомологией

Теорема 54. *Пусть $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два цикла класса C^m некоторого открытого множества Ω из E. Если эти циклы гомотопны в Ω, то они C^m-гомологичны в Ω.*

Доказательство. Прежде всего говорят, что два C^m-цикла гомотопны, если они определены как отображения H_1 и H_2 класса C^m *одного и того же* компактного ориентированного многообразия $\vec{V}$ (без края) и если H_1 и H_2 гомотопны. Согласно теореме 53, в этом случае они C^m-гомотопны.

Пусть K — некоторая C^m-гомотопия, т. е. C^m-отображение $[0, 1]\times V$, допускающее переход от одного отображения к другому. Так как $\widehat{b\vec{V}} = \emptyset$, то, согласно формуле (VI, 8; 21),

$$b(K\,|\,\overrightarrow{[0, 1]\times V}) = H_2|\,\vec{V} + H_1\,|\overleftarrow{V} = \vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_1. \quad \text{(VI, 8; 36)}$$

Следовательно, цикл $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ является C^m-границей, а значит, он C^m-гомологичен 0, и потому циклы $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ C^m-гомологичны друг другу.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Два цикла $H_1\,|\vec{V}$ и $H_2\,|\vec{V}$ могут быть, как это легко видеть, гомологичными, но не гомотопными. Кроме того, о гомотопии двух циклов можно говорить только в том случае, когда мы имеем два отображения *одного и того же многообразия*, тогда как это вовсе не так, когда речь идет о гомологии.

Следствие 1. *Если $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ — два гомотопных n-мерных цикла класса C^1 из открытого множества $\Omega \subset E$ и если $\vec{\omega}$ — замкнутая дифференциальная форма степени n на Ω класса C^1, то интегралы от $\vec{\omega}$ по $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ равны.*

В самом деле, циклы $\vec{\Gamma}_1$ и $\vec{\Gamma}_2$ C^1-гомологичны в Ω и остается лишь применить следствие к теореме 49.

Это следствие говорит еще и о том, что интеграл от коцикла по C^1-циклу может не быть нулем [см. стр. 247, замечание 2°)], но он не изменяется, когда этот цикл подвергается непрерывной деформации.

Для целей дальнейшего изложения удобно ввести понятие отображения, гомотопного нулю.

Определение. Если f — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, то говорят, что это *отображение гомотопно* 0, если оно гомотопно некоторому постоянному отображению.

Так как всякое постоянное отображение n-мерного компактного многообразия в Ω является циклом, гомологичным 0, если размерность n этого цикла > 0[1]), то имеет место

Следствие 2. *Если Γ — цикл размерности $n > 0$ класса C^m из открытого множества $\Omega \subset E$, гомотопный* 0, *то этот цикл C^m-гомологичен* 0 *и при $m \geqslant 1$ интеграл по этому циклу от каждого коцикла $\vec{\omega}$ степени n равен нулю.*

Естественно, что это свойство не сохраняется, если размерность $n = 0$ (ибо постоянное отображение не является более вырожденным циклом). Если $m = 0$, то интеграл от $\vec{\omega}$ не имеет смысла.

Следствие 3. *Если Ω — выпуклое или звездное открытое множество конечномерного аффинного пространства E, или открытое множество, обладающее свойствами, указанными в теореме* 19, *или открытое множество, гомеоморфное одному из предыдущих множеств, то каждый цикл класса C^m из Ω размерности $n > 0$ C^m-гомологичен* 0 *и, если $m \geqslant 1$, интеграл по такому циклу от каждого коцикла степени n равен нулю. Каждый коцикл $\vec{\omega}$ степени $n > 0$ на Ω является кограницей.*

В самом деле, если отображение $H | \vec{V}$ является C^m-циклом в Ω, то оно C^m-гомотопно любому другому C^m-циклу $H_0 | \vec{V}$, где H_0 — отображение класса C^m многообразия V в Ω. Выбирая в качестве H_0 постоянное отображение, мы убеждаемся в том, что цикл $H | \vec{V}$ C^m-гомотопен 0, а следовательно, C^m-гомологичен 0 при $n > 0$.

Интеграл от каждого коцикла $\vec{\omega}$ по такому циклу равен нулю. Из теоремы 44 де Рама мы знаем теперь, что каждый коцикл степени > 0 в Ω является кограницей: теорема 19 Пуанкаре в этом открытом множестве справедлива. Очевидно также, что она справедлива не только для открытых множеств, обладающих свойствами, указанными в теореме 19, но также

[1]) Именно здесь мы используем вырожденные циклы, введенные на стр. 259 при определении гомологии.

для выпуклых или звездных открытых множеств и для множеств, им гомеоморфных. Правда, мы *приняли без доказательства* теорему де Рама. В силу теоремы 45 наше утверждение доказано по крайней мере для степени $n=1$.

Следствие 4. *Каждый C^1-цикл открытого множества Ω конечномерного аффинного пространства E, C^0-гомологичный нулю, C^1-гомологичен нулю. Интеграл по этому циклу от любого коцикла равен нулю.*

Доказательство, которое мы дадим, несмотря на аналогичность наших условий условиям теоремы 53, не переносится на класс C^m. Оно пригодно в одном частном случае: особое C^0-многообразие определено как непрерывное отображение H многообразия *класса* C^1. Заменять здесь C^1 на C^m нельзя.

Доказательство. Пусть $H|\vec{V}$ — рассматриваемый C^1-цикл. То, что он C^0-гомологичен 0, по определению (VI, 8; 19) означает, что можно найти ориентированное многообразие $\vec{W}$ класса C^1 и *непрерывное* отображение K многообразия W в Ω, обладающие следующими свойствами:

A) Многообразие $\vec{W}$ является объединением трех открытых непересекающихся подмножеств $\vec{V}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$. Подмножество $\vec{A}$ является границей многообразия с краем $\vec{\mathfrak{A}}$ класса C^1. Отображение K совпадает с H на V. Его можно продолжить до некоторого непрерывного отображения $\tilde{K}$ многообразия $\mathfrak{A}$ в Ω. Кроме того, K вырожденно на B (другими словами, $K(B)$ является конечным множеством, если размерность $B>0$, и пусто, если эта размерность равна нулю. Естественно, отображение K принадлежит классу C^1 на B, ибо оно постоянно на каждой связной компоненте B). Тогда $K|\vec{W}=H|\vec{V}+\tilde{K}|b\vec{\mathfrak{A}}+K|\vec{B}$.

B) Многообразие $\vec{W}$ также является объединением двух непересекающихся открытых множеств $\vec{A}'$, $\vec{B}'$. Множество $\vec{A}'$ является границей некоторого многообразия с краем $\vec{\mathfrak{A}}'$. Отображение K можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{K}'$ многообразия $\mathfrak{A}'$ в Ω; оно вырожденно на B'. Теперь $K|\vec{W}=\tilde{K}'|b\vec{\mathfrak{A}}'+K|\vec{B}'$ [1]).

Тот факт, что цикл $H|\vec{V}$ гомологичен 0, теперь является следствием следующего соотношения:

$$H|\vec{V}+\tilde{K}|\widehat{b\vec{\mathfrak{A}}}+K|\vec{B}=\tilde{K}'|\widehat{b\vec{\mathfrak{A}}'}+K|\vec{B}'. \qquad \text{(VI, 8; 37)}$$

[1]) Многообразия $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ не лежат в W.

Пусть $\varepsilon > 0$ — число, строго меньшее расстояний от компактов $\tilde{K}(\mathfrak{A})$ и $\tilde{K}'(\mathfrak{A}')$ до $\complement\Omega$. Согласно теореме 52, *поскольку* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ *принадлежат классу* C^1, можно найти такие отображения $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_1'$ многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ в Ω *класса* C^1, что $\||\overrightarrow{\tilde{K}_1 - \tilde{K}}\|| \leqslant \varepsilon$ и $\||\overrightarrow{\tilde{K}_1' - \tilde{K}'}\|| \leqslant \varepsilon$. В силу теоремы 51 эти отображения C^0-гомотопны $\tilde{K}$ и $\tilde{K}'$ соответственно.

Теперь мы имеем следующие C^0-гомотопии циклов:

$$H|\vec{V} + \tilde{K}_1|\vec{A} + K|\vec{B} \to H|\vec{V} + K|\vec{A} + K|\vec{B} =$$
$$= K|\vec{W} = K|\vec{A}' + K|\vec{B}' \to \tilde{K}_1'|\vec{A}' + K|\vec{B}'. \qquad (\mathrm{VI}, 8; 38)$$

Первый и последний части равенств — это *циклы класса* C^1. Так как они C^0-гомотопны, то в силу теоремы 53 они C^1-гомотопны. По теореме 54 они C^1-*гомологичны.* Но $\tilde{K}_1|\vec{A} = \tilde{K}_1|\widehat{b\mathfrak{A}}$ и $\tilde{K}_1'|A' = \tilde{K}_1'|\widehat{b\mathfrak{A}'}$ являются C^1-границами, а $K|\vec{B}$ и $K|\vec{B}'$ вырожденны, и значит, все C^1-гомологичны 0. Следовательно, согласно теореме 47, цикл $H|\vec{V}$ C^1-гомологичен нулю.

Если форма $\vec{\omega}$ является коциклом на Ω, то тот факт, что цикл $H|\vec{V}$ только C^0-*гомологичен* 0, не влечет за собой априори равенства $\int\limits_{H|\vec{V}} \vec{\omega} = \vec{0}$. Однако это равенство выполняется, поскольку цикл $H|\vec{V}$ C^1-гомологичен 0 [1]).

Следствие 5. *Пусть Ω — открытое множество конечномерного аффинного пространства E. Тогда следующие свойства эквивалентны: в Ω все C^0-циклы C^0-гомологичны* 0 *и все C^1-циклы C^1-гомологичны* 0. *Если эти свойства справедливы для Ω, то они будут справедливыми и для любого открытого множества, гомеоморфного Ω.*

Доказательство. 1°) Предположим, что любой C^0-цикл C^0-гомологичен 0. Тогда любой C^1-цикл, будучи C^0-гомологичным 0, в силу следствия 4, C^1-гомологичен 0.

2°) Предположим, что каждый C^1-цикл C^1-гомологичен 0. Пусть $H|\vec{V}$ является C^0-циклом. Если H_1 — такое отображение

---

[1]) Мы сформулировали теорему 37 Стокса для класса C^1. Но мы отмечали, что ее доказательство для этого класса слишком сложно, и провели его только для случая класса C^2. Таким образом, мы здесь опираемся на свойство, принятое без доказательства.

Значение свойств, полученных в следствиях 1, 2 и 4, заключается в доказательстве того факта, что интеграл от коцикла по циклу зависит только от *топологических* свойств цикла относительно открытого множества Ω.

класса C^1 многообразия V в Ω, что $|||\overrightarrow{H-H_1}||| < d(H(V), \complement\Omega)$, то цикл $H|\vec{V}$ C^0-гомотопен циклу $H_1|\vec{V}$, а следовательно, C^0-гомологичен ему. По предположению цикл $H_1|\vec{V}$ класса C^1 C^1-гомологичен 0, а следовательно, и подавно C^0-гомологичен 0, а тогда цикл $H|\vec{V}$ также C^0-гомологичен 0.

При гомеоморфизме, очевидно, сохраняется свойство, относящееся к C^0, а значит, такое же свойство относительно C^1. Для всех открытых множеств, обладающих этим свойством, справедлива теорема Пуанкаре. См. по этому поводу стр. 276, где мы говорили о сохранении при гомеоморфизме открытых множеств, для которых справедлива теорема Пуанкаре.

Следствие 6. *Пусть $\vec{\omega}$ — коцикл степени* 1 *из открытого множества Ω конечномерного аффинного пространства E, и пусть $H|\vec{\Gamma}$ есть C^0-цикл конечной длины, C^0-гомологичный* 0. *Тогда интеграл от $\vec{\omega}$ по циклу $H|\vec{\Gamma}$ равен нулю.*

Доказательство. Для упрощения технической стороны доказательства предположим, что $\vec{\Gamma}$ является тригонометрической окружностью в $\mathbb{R}^2$.

Мы знаем, согласно следствию 4, что если отображение H принадлежит классу C^1 и цикл $H|\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0, то интеграл равен нулю. Мы считаем здесь, что цикл имеет конечную длину, и пользуемся определением интеграла, данным в теореме 36.

1°) Пусть δ—расстояние от $H(\Gamma)$ до $\complement\Omega$ в евклидовой норме пространства E. Поскольку отображение H непрерывно на компакте Γ, то оно равномерно непрерывно на нем. Если предположить, что окружность Γ параметризована с помощью $\theta \in [0, 2\pi]$, то можно найти такое $\eta > 0$, чтобы из неравенства $|\theta' - \theta''| \leqslant \eta$ следовало неравенство $\|\overrightarrow{H(\theta') - H(\theta'')}\| < \delta/2$. Пусть Δ: $\theta_0 = 0$, θ_1, θ_2, ..., $\theta_n = 2\pi$ — некоторое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$, причем наибольшая длина отрезков этого разбиения $\leqslant \eta$. Открытый шар B_i с центром $H(\theta_i)$ радиуса $\delta/2$ удовлетворяет условиям теоремы 19 Пуанкаре. Следовательно, форма $\vec{\omega}$ имеет внешнюю первообразную $\vec{f}_i$ в B_i: $\vec{\omega} = d\vec{f}_i$. Естественно, что функция $\vec{f}_i$ зависит от индекса i. Каждый путь $M|[\theta_i, \theta_{i+1}]$ лежит в этом открытом шаре, и, следовательно, по теореме 39

$$\int_{H|[\overrightarrow{\theta_i, \theta_{i+1}}]} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H(\theta_i)). \qquad \text{(VI, 8; 39)}$$

Обозначим через H_1 отображение Γ в Ω, определенное формулами

$$H_1(\theta) = H(\theta_i) + \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\left(\overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)}\right) \qquad \text{(VI, 8; 40)}$$

для $\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}$.

Образом окружности Γ при отображении H_1 является ломаная с вершинами $H(\theta_i)$. При этом для $\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}$

$$\|\overrightarrow{H(\theta) - H(\theta_i)}\| < \frac{\delta}{2}$$

и

$$\|\overrightarrow{H_1(\theta) - H(\theta_i)}\| \leqslant \|\overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)}\| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{(VI, 8; 41)}$$

а следовательно, для каждого θ справедливо неравенство $\|\overrightarrow{H(\theta) - H_1(\theta)}\| < \delta$. Отсюда

$$|||\overrightarrow{H - H_1}||| < \delta. \qquad \text{(VI, 8; 42)}$$

Согласно теореме 51, это означает, что циклы $H|\vec{\Gamma}$ и $H_1|\vec{\Gamma}$ C^0-гомотопны, а значит, по теореме 54 C^0-гомологичны. Поскольку по предположению цикл $H|\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0, то C^0-гомологичным 0 будет и цикл $H_1|\vec{\Gamma}$. Согласно теореме 39,

$$\int\limits_{H_1|[\overrightarrow{\theta_i, \theta_{i+1}}]} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H_1(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H_1(\theta_i)). \qquad \text{(VI, 8; 43)}$$

Следовательно, интегралы от $\vec{\omega}$ по циклам $H|\vec{\Gamma}$ и $H_1|\vec{\Gamma}$ равны.

2°) Для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл от $\vec{\omega}$ по циклу $H_1|\vec{\Gamma}$ равен нулю. Однако $H_1|\vec{\Gamma}$ теперь является циклом, кусочно принадлежащим *классу* C^1 (и даже классу C^∞), C^0-гомологичным 0.

При доказательстве первой части теоремы 45 было построено отображение H_2 окружности Γ в Ω *класса* C^∞, а не только кусочно принадлежащее этому классу, такое, что интегралы от $\vec{\omega}$ по двум циклам $H_1|\vec{\Gamma}$ и $H_2|\vec{\Gamma}$ были одни и те же. В каждом интервале $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ имеет место формула (VI, 8; 8): $H_2(\theta) = H_1(g_i(\theta))$. Отрезок $[H_1(\theta), H_2(\theta)]$ содержится в отрезке $[H(\theta_i), H(\theta_{i+1})]$, а следовательно, и в Ω. Из леммы к теореме 51 следует, что отображения H_1 и H_2 гомотопны, следовательно, C^0-гомологичны циклы $H_1|\vec{\Gamma}$ и $H_2|\vec{\Gamma}$, а потому цикл $H_2|\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен 0.

3°) Таким образом, нам достаточно будет убедиться в том, что интеграл от $\vec{\omega}$ по C^∞-циклу $H_2|\vec{\Gamma}$, C^0-гомологичному нулю, равен нулю. Но это вытекает из следствия 4, ибо тогда цикл $H_2|\vec{\Gamma}$ C^1-гомологичен нулю.

Односвязные пространства

Топологическое пространство X называется *односвязным*, если любое непрерывное отображение f плоской окружности в X гомотопно 0. Естественно, всегда можно предполагать, что эта окружность является тригонометрической окружностью в $\mathbb{R}^2$. Односвязность является чисто *топологическим* свойством пространства X, инвариантным относительно гомеоморфизма.

Обозначим через Δ единичный круг в $\mathbb{R}^2$. Отображение $(t, \vec{m}) \to t\vec{m}$ окружности Γ в круг Δ непрерывно. Каждая точка круга Δ *единственным образом* записывается в виде $t\vec{m}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ \vec{m} \in \Gamma)$, кроме начала координат $\vec{0}$, которое записывается в виде $0\vec{m}$, где $\vec{m}$ — произвольная точка Γ.

Теорема 55. *Для того чтобы отображение f тригонометрической окружности Γ в топологическое пространство X было гомотопным 0, необходимо и достаточно, чтобы отображение f допускало продолжение до непрерывного отображения $\tilde{f}$ единичного круга Δ в X.*

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что отображение f допускает такое продолжение $\tilde{f}$. Тогда мы можем определить гомотопию F между f и постоянным отображением Γ в X по формуле

$$F(t, \vec{m}) = \tilde{f}(t\vec{m}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \vec{m} \in \Gamma. \qquad \text{(VI, 8; 44)}$$

Отображение F — такое непрерывное отображение $[0, 1] \times \Gamma$ в X, что $F(1, \vec{m}) = \tilde{f}(\vec{m}) = f(\vec{m})$ и $F(0, \vec{m}) = \tilde{f}(\vec{0})$. Следовательно, f гомотопно 0.

2°) Предположим теперь, что отображение f гомотопно 0, и пусть F — гомотопия, соответствующая такому отображению $[0, 1] \times \Gamma$ в пространство X, что $F(1, \vec{m}) = f(\vec{m})$, $F(0, \vec{m}) = a$, где элемент a фиксирован.

Тогда продолжение $\tilde{f}$ отображения f может быть определено по формуле

$$\tilde{f}(t\vec{m}) = F(t, \vec{m}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \vec{m} \in \Gamma. \qquad \text{(VI, 8; 45)}$$

В этой формуле *нет никакой неоднозначности*: поскольку $F(0, \vec{m})$ принимает всегда одно и то же значение $a \in X$, то для центра круга можно взять $t=0$ и выбирать $\vec{m}$ произвольно.

С другой стороны, определенная выше функция $\tilde{f}$ непрерывна. Для того чтобы в этом убедиться, предположим для простоты, что X — метрическое пространство.

Так как функция F непрерывна на компакте $[0, 1] \times \Gamma$, то она равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что из неравенств $|t' - t''| \leqslant \eta$ и $\|\vec{m}' - \vec{m}''\| \leqslant \eta$ вытекает неравенство

$$d(F(t', m'), F(t'', m'')) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(VI, 8; 46)}$$

Если теперь $t_0\vec{m}_0$ является точкой круга Δ, отличной от начала координат, то множество тех точек $t\vec{m}$, для которых $|t - t_0| \leqslant \eta$ и $\|\vec{m} - \vec{m}_0\| \leqslant \eta$, является окрестностью этой точки, в которой имеет место неравенство

$$d(\tilde{f}(t\vec{m}), \tilde{f}(t_0\vec{m}_0)) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(VI, 8; 47)}$$

из которого следует непрерывность функции $\tilde{f}$ в точке $t_0\vec{m}_0 \neq \vec{0}$. С другой стороны, множество точек $t\vec{m}$, для которых $|t| \leqslant \eta$ и $\vec{m}$ произвольно, образует окрестность начала координат, в которой

$$d(\tilde{f}(t\vec{m}), \tilde{f}(\vec{0})) = d(F(t, \vec{m}), F(0, \vec{m})) \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(VI, 8; 48)}$$

Это означает, что функция $\tilde{f}$ непрерывна в $\vec{0}$, а следовательно, и всюду. Поскольку $\tilde{f} = f$ на Γ, то функция $\tilde{f}$ является продолжением функции f на Δ.

Следствие 1. *Топологическое пространство X односвязно тогда и только тогда, когда каждое непрерывное отображение в X окружности Γ — границы круга Δ — может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{f}$ круга Δ в X.*

Заметим, что односвязность вовсе не говорит о связности. Пространство может быть связным и не быть односвязным. Например, на стр. 288 [1]) мы увидим, что дополнение Ω к началу координат в $\mathbb{R}^2$ не является односвязным (так как тригонометрическую окружность путем непрерывной деформации стянуть в точку в Ω невозможно), в то время как это множество

[1]) Следствие 3 теоремы 58.

связно. Обратно, пространство X может быть односвязным, но не быть связным. Например, если мы предположим, что пространство X не связно, но является объединением двух открытых непересекающихся множеств X_1 и X_2, то X односвязно тогда и только тогда, когда односвязны оба множества X_1 и X_2. В самом деле, каждое непрерывное отображение окружности или круга в X непременно имеет образ, лежащий в одном из этих множеств X_1, X_2, ибо этот образ связен (теорема 33 гл. II).

Для каждого целого $n \geqslant 0$ можно определить понятие n-связности. Топологическое пространство X мы будем называть n-связным, если каждое непрерывное отображение единичной сферы из $\mathbb{R}^{n+1}$ в X гомотопно 0 или может быть продолжено до непрерывного отображения единичного шара из $\mathbb{R}^{n+1}$ в X. Это чисто топологическое свойство пространства X. Если пространство X 1-связно, то оно односвязно. Поскольку единичная сфера из $\mathbb{R}$ является двухэлементным множеством $\{-1, +1\}$, а единичный шар представляет собой отрезок $[-1, +1]$, то сразу же видно, что пространство X 0-связно тогда и только тогда, когда две произвольные точки X могут быть соединены некоторым путем, т. е. когда X линейно связно. Таким образом, с понятием связности, изученным в § 10 гл. II, связано понятие 0-связности, а не односвязности или 1-связности. Понятия n-связности для различных значений n не зависят одно от другого. Если здесь мы говорим только о случае $n=1$, то это объясняется той исключительной ролью, которую играют криволинейные интегралы от дифференциальных форм 1-й степени в гл. VII. Из теоремы 51 вытекает

Теорема 56. *Открытое множество Ω аффинного пространства E, связное, или звездное, или удовлетворяющее условиям теоремы* 19 *Пуанкаре, или гомеоморфное одному из пространств этих типов, n-связно при любом $n \geqslant 0$.*

Теорема 57. *Сфера, дополнение к точке, шаровой слой в N-мерном евклидовом пространстве E k-связны при $0 \leqslant k \leqslant N-2$. Они односвязны при $N>2$ (и также, очевидно, при $N=1$ [1]), а следовательно, окончательно при $N \neq 2$).*

Напротив, в следствии 3 теоремы 58 мы увидим, что эти множества не $(N-1)$-связны. В частности, окружность евклидовой плоскости $(N=2)$ не односвязна.

Доказательство. 1°) Дадим сначала доказательство для пространства $\complement O$, где O — заданная точка из E. Пусть

[1] Ибо каждое из этих трех открытых множеств в $\mathbb{R}$ представляет собой объединение двух открытых непересекающихся односвязных открытых множеств.

S — единичная сфера в $\mathbb{R}^{k+1}$, f — непрерывное отображение S в $\complement O$. Отображение f можно приблизить гомотопным ему отображением g класса C^1 (теоремы 52 и 51).

В пространстве E отображение g C^1-гомотопно 0 (теорема 51). Пусть G — гомотопия между g и постоянным отображением класса C^1 множества $[0, 1] \times S$ в E. Размерность пространства $[0, 1] \times S < N$. Образ $G([0, 1] \times S)$ имеет нулевую меру по мере Лебега относительно произвольной системы координат (следствие 1 теоремы 102_2 гл. IV). Значит, почти для всех векторов $\vec{u}$ из $\vec{E}$ множество $G([0, 1] \times S)$ не содержит $O - \vec{u}$. Отображение $G + \vec{u}$: $x \to G(x) + \vec{u}$ множества $[0, 1] \times S$ в E является в действительности отображением в $\complement O$. Тогда отображение $g + \vec{u}$ гомотопно 0 в $\complement O$. Для $\|\vec{u}\| < d(g(S), 0)$ оно гомотопно g в $\complement O$ (по теореме 51), а следовательно, отображение g гомотопно 0 в $\complement O$. Но тогда гомотопным 0 в $\complement O$ будет отображение f, а это означает, что множество $\complement O$ k-связно.

Замечание. Сферу S можно заменить любым компактным многообразием размерности $< N-1$. Множество $\complement O$ можно заменить множеством $\complement A$, где A—произвольное счетное замкнутое множество из E. [Известно, что в этом случае для почти всех значений $\vec{u}$ из $\vec{E}$ множество $(G + \vec{u})([0, 1] \times S)$ не содержит точки a_i из множества A. В силу теоремы 21 гл. IV (относительно счетного множества почти всюду выполняющихся свойств) мы знаем, что почти для всех значений $\vec{u}$ множество $(G + \vec{u})([0, 1] \times S)$ *не содержит ни одной из точек* A, а следовательно, отображение $g + \vec{u}$ гомотопно 0 в $\complement A$.]

2°) Рассмотрим теперь случай сферы Σ. При этом можно всегда перейти к случаю, когда Σ — единичная сфера пространства $\vec{E}$. Пусть f — непрерывное отображение S в Σ. Согласно доказанному в п. 1°), в $\complement\vec{O}$ существует некоторая гомотопия F (непрерывное отображение множества $[0, 1] \times S$ в $\complement\vec{O}$) отображения f в постоянное отображение.

Отображение $(t, x) \to \vec{F}(t, x)/\|\vec{F}(t, x)\|$ является гомотопией на *единичной сфере* Σ между отображением f и постоянным отображением. Следовательно, сфера Σ действительно k-связна.

3°) Рассмотрим, наконец, в $\vec{E}$ шаровой слой Ω с центром в точке $\vec{O}$. Если f — непрерывное отображение сферы S в Ω и Σ — сфера с центром O радиуса R, содержащаяся в Ω, то отрезок $\left[\vec{f}(x),\ R\frac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}\right]$ лежит в Ω для любого $x \in S$. Следовательно, отображение $\vec{f}$ гомотопно в Ω непрерывному отображению $x \to R\frac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}$ сферы S в сферу Σ. В п. 2°) мы видели, что это отображение гомотопно 0 в Σ. Следовательно, оно заведомо гомотопно 0 в множестве Ω, которое тем самым оказывается k-связным.

Совершенно очевидно, что тождественное отображение тригонометрической окружности из $\mathbb{R}^2$ в дополнении $\complement 0$ к началу координат не гомотопно нулю. В противном случае канонически ориентированная тригонометрическая окружность была бы C^0-гомологична 0 в $\complement 0$ (теорема 54), а следовательно, C^1-гомологична 0 (следствие 4 теоремы 54). Интеграл по этой окружности от коцикла $d\varphi$ из (VI, 4; 41) равен $2\pi \neq 0$. Следовательно, окружность не гомотопна 0 в подпространстве плоскости, содержащем окружность и не содержащем ее центра. Таким образом, *окружность, круговое кольцо* $R_1 < \|\overrightarrow{x - a}\| < R_2$, *дополнение к точке или к некоторому непустому компакту, произвольное подпространство евклидовой плоскости, содержащее окружность и не содержащее ее центра, не являются односвязными.*

Мы сейчас распространим это свойство на понятие $(N-1)$-связности в N-мерном аффинном евклидовом пространстве.

Дифференциальная форма «телесный угол»

Для выполнения поставленной задачи определим в ориентированном евклидовом N-мерном пространстве специальную дифференциальную форму степени $N-1$, называемую *телесным углом*, которая при $N=2$ имеет вид (VI, 4; 41). Пусть E — аффинное евклидово N-мерное пространство, и пусть O — точка E. Пусть Σ — *трансверсально ориентированная* гиперповерхность класса C^1 из E, не проходящая через O. Если эта ориентация такова, что в каждой точке $M \in \Sigma$ радиус-вектор OM трансверсален и положителен, то естественно назвать алгебраическим телесным углом, под которым из O видна поверхность Σ, телесный угол $\geqslant 0$, определенный в гл. IV с помощью интеграла (IV, 10; 25) (где V заменено на Σ). Напомним, что в этой формуле r есть расстояние OM и θ — *острый* угол, образованный OM с нормалью. При некоторых предположениях, сделанных относительно трансверсальной ориентации поверхности Σ, угол θ также является углом, образованным $\overrightarrow{OM}$ с единичным положительным вектором нормали $\vec{v}$. Согласно (VI, 7; 49), этот интеграл может быть выражен как поток через поверхность Σ векторного поля

$$\vec{X}=\frac{\vec{i}}{r^{N-1}}, \tag{VI, 8; 49}$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор полупрямой OM.

Более общо, пусть Σ — *произвольная гиперповерхность класса* C^1 *из* $E-O$, имеющая произвольную трансверсальную ориентацию. *Телесным алгебраическим углом* [1]), под которым из точки O видна поверхность Σ, мы назовем поток векторного поля (VI, 8; 49) через поверхность Σ.

Этот угол зависит только от поверхности Σ, ее трансверсальной ориентации и евклидовой структуры E. Составляющие поля $\vec{X}$ относительно ортонормированной системы в E с началом в O определяются по формуле

$$X_j=\frac{x_j}{r^N}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{VI, 8; 50}$$

Пусть пространство E ориентировано. Тогда, согласно (VI, 3; 42), полю $\vec{X}$ можно поставить в соответствие некоторую дифференциальную форму. Умножая ее на $(-1)^{N-1}$, получаем *дифференциальную форму «телесный угол»* $\omega=\omega_0$ степени $N-1$, интеграл от которой по поверхности $\vec{\Sigma}$, снабженной касательной ориентацией, соответствующей относительно $\vec{E}$ ее трансверсальной ориентации, равен алгебраическому телесному углу, под которым из точки O была видна поверхность Σ (формула (VI, 7; 51)). В ортонормированной положительной системе координат с началом в O имеет место равенство

$$\omega_0=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\frac{x_j}{r^N}\,dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\ldots\wedge dx_n\ ^{2)}. \tag{VI, 8; 51}$$

[1]) Разница между определенным здесь *алгебраическим* телесным углом (произвольного знака), зависящим от трансверсальной ориентации Σ, и абсолютным телесным углом гл. IV (всегда $\geqslant 0$), не зависящим от какой-либо ориентации, очевидна. Если Σ — объединение двух сфер с центром в 0 и с противоположными ориентациями, то абсолютный телесный угол равен $2S_N$, в то время как алгебраический телесный угол равен 0.

[2]) Мы записываем здесь это равенство в некоторой системе координат, но ω_0 зависит только от евклидовой структуры и ориентации, поскольку поле $\vec{X}$, задаваемое с помощью (VI, 8; 49), зависит только от евклидовой структуры пространства.

Подчеркнем снова, что для определения этой формы следует предполагать пространство E *ориентированным* евклидовым. Если, не меняя евклидовой структуры пространства E, изменить его ориентацию, то векторное поле (VI, 8; 49) не останется неизменным и, следовательно, *дифференциальная форма* ω_0 *должна поменять знак.*

Некоторые примеры. 1°) Предположим, что E является евклидовой ориентированной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Тогда дифференциальная форма есть не что иное, как то, что мы называли дифференциалом аргумента или полярного угла $d\varphi$, и определяется по формуле (VI, 4; 41). Дифференциальная форма ω_0 является обобщением $d\varphi$ на случай произвольного N.

2°) Предположим, что пространство E есть $\mathbb{R}^3$ и что в нем введена система полярных координат r, θ, φ. Принимая во внимание соответствие между векторными полями и дифференциальными формами степени 2, определенное по формуле (VI, 4; 34), мы видим, что векторному полю (VI, 8; 49) соответствует дифференциальная форма

$$\omega_0 = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi. \qquad \text{(VI, 8; 52)}$$

Так как здесь $N-1=2$, $(-1)^{N-1}=1$, то мы получили искомую форму.

3°) Для $N=1$ форма ω_0 является формой степени 0 или функцией. Из формулы (VI, 8; 51) следует, что эта функция равна $\operatorname{sgn} x$, т. е. $+1$ для $x>0$ и -1 для $x<0$.

Теорема 58. *Если $\vec{E}$ есть N-мерное ориентированное евклидово пространство и O — точка E, то дифференциальная форма «телесный угол» ω_0 принадлежит классу C^∞ и замкнута в дополнении к O. Кроме того, ее интеграл по произвольной сфере $\vec{\Sigma}$ с центром в точке O, ориентированной как граница соответствующего шара, равен S_N, $(N-1)$-мерной площади единичной сферы пространства E:*

$$\int_{\vec{\Sigma}} \omega_0 = S_N. \qquad \text{(VI, 8; 53)}$$

Доказательство. То, что форма ω_0 принадлежит классу C^∞ в $E-O$, вытекает из ее представления (VI, 8; 51). Нетрудно получить когранииу этой формы:

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right)\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N. \quad \text{(VI, 8; 54)}$$

Здесь

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{r^N} - \frac{N x_j}{r^{N+1}} \cdot \frac{x_j}{r}\right) = \frac{N}{r^N} - \frac{N r^2}{r^{N+2}} = 0,$$

а это означает, что форма ω_0 замкнута.

С другой стороны, ее интеграл по произвольной канонически ориентированной сфере с центром O радиуса R дает поток векторного поля (VI, 8; 49), который равен $\frac{S_N R^{N-1}}{R^{N-1}}$, т. е. площади единичной сферы [1]).

Замечание. Поскольку форма ω_0 замкнута в $E-O$, ее интегралы по двум C^1-гомологичным циклам из $E-O$ совпадают. Напротив, из формулы (VI, 8; 51) следует, что дифференциальная форма ω_0 имеет особенность в начале координат и заменить $E-O$ на E, естественно, невозможно.

Следствие 1. *Коцикл ω_0 не является когранWицей в $E-O$.*

В самом деле, в противном случае его интеграл по циклу $\vec{\Sigma}$ был бы равен нулю.

Этот факт обобщает свойство, которое мы уже рассматривали для формы (VI, 4; 41).

Если взять формулу (VI, 8; 52), то мы получим, что $\omega_0 = d[-\cos\theta\, d\varphi]$. Однако функции θ и φ определены и дифференцируемы, например, в дополнении к замкнутой меридианной полуплоскости, проходящей через zz' и Ox, а не в $\mathbb{R}^3 - O$.

Следствие 2. *Ориентированная сфера конечномерного евклидова аффинного пространства не гомологична* 0 *в дополнении к ее центру и тем более не гомотопна* 0.

В самом деле, в противном случае, согласно следствию 4 теоремы 54, интеграл от коцикла ω_0 по этому циклу был бы равен нулю.

Следствие 3. *В N-мерном евклидовом пространстве сфера, дополнение к некоторой точке, шаровой слой или, более общо, подмножество, содержащее сферу, но не содержащее ее центра, не $(N-1)$-связны.*

[1]) Так как выходящий радиус-вектор трансверсально положителен, то здесь алгебраический телесный угол равен абсолютному телесному углу. Поэтому полученный результат является непосредственным следствием *определения* абсолютного телесного угла (стр. 769 т. I). При $N=1$ интеграл от $\operatorname{sgn} x$ по ориентированной сфере (образованной из $\{+1, +\}$ и $\{-1, -\}$; см. стр. 233) равен $+2$ — площади единичной сферы или числу ее точек (см. замечание 5°) на стр. 766 I-го тома).

В самом деле, в таком подпространстве сфера не гомотопна 0, так как она не гомотопна 0 даже в дополнении к ее центру.

Полученный результат дополняет факт, который мы отмечали в теореме 57. Однако остается открытой проблема k-связности сферы в N-мерном пространстве при $k \geqslant N$. Это сложная проблема, пока еще полностью не решенная.

Следствие 4. *Не существует непрерывного отображения шара B евклидова конечномерного пространства на ограничивающую его сферу S, совпадающего с тождественным отображением на этой сфере.*

Если бы такое отображение существовало, то это означало бы следующее: тождественное отображение сферы S на себя можно продолжить до непрерывного отображения шара B на сферу S, а следовательно (теорема 55), сфера S гомотопна 0 в S и тем более в дополнении к ее центру, что противоречит следствию 2.

Следствие 5. *Две евклидовых сферы различных конечных размерностей не гомеоморфны. Два аффинных пространства различной конечной размерности не гомеоморфны.*

В самом деле, пусть N и N' — два целых числа >0 и $N' > N$. Сфера N'-мерного евклидова аффинного пространства $(N-1)$-связна (теорема 57), а сфера евклидова N-мерного пространства этим свойством не обладает (следствие 3). Следовательно, эти сферы гомеоморфными быть не могут.

Если бы два аффинных пространства размерностей N и N' были гомеоморфными, то дополнения к некоторой точке в этих пространствах также были бы гомеоморфными, что невозможно, поскольку одно из них $(N-1)$-связно, а другое — нет.

Эти результаты были сформулированы раньше, на стр. 98 т. I. Мы видим теперь, как много теорем было использовано для их доказательства! Если заменить «гомеоморфизм» на «C^1-диффеоморфизм», то инвариантность размерности устанавливается элементарно, как это мы видели в гл. III (следствие 4 теоремы 11 и примечание на стр. 234 т. I).

Теперь мы сможем дополнить теорему 19 Пуанкаре.

Теорема 59. *Пусть Ω — односвязное открытое множество конечномерного аффинного пространства E, $\vec{\omega}$ — замкнутая дифференциальная форма 1-й степени класса C^m $(m \geqslant 1)$ на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда форма $\vec{\omega}$ является дифференциалом некоторой функции $\vec{f}$ класса C^{m+1}, определенной на Ω со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Воспользуемся критерием теоремы 45.

Пусть H — отображение класса C^∞ ориентированной тригонометрической окружности $\vec{\Gamma}$ в Ω. Поскольку множество Ω по предположению *односвязно*, отображение H гомотопно 0, а следовательно, C^∞-гомотопно 0 (теорема 53). Значит, цикл $H\,|\vec{\Gamma}$ C^∞-гомологичен 0 (теорема 54), а тогда интеграл от $\vec{\omega}$ по циклу $H\,|\vec{\Gamma}$ равен нулю. Из теоремы 45 следует, что форма $\vec{\omega}$ является кограницей.

Замечание. Этот результат, очевидно, значительно шире теоремы 19. Например, в дополнении к точке в аффинном пространстве размерности $N > 2$ теорема Пуанкаре справедлива для степени 1, поскольку множество $\complement O$ односвязно (теорема 57). Однако *множество $\complement O$ не обладает свойствами множества теоремы* 19. Открытые множества теоремы 19 для каждого $k \geqslant 0$ были k-связны (теорема 51), в то время как здесь $\complement O$ для $N \neq 2$ односвязно, но не $(N-1)$-связно (следствие 3 теоремы 58). Впрочем, мы доказываем здесь существование внешней первообразной только для формы степени 1 в связи с односвязностью. Но в $\complement O$ форма ω_0 является некоторым коциклом степени $N-1$, который не есть кограница (следствие 1 теоремы 58), в то время как теорема 19 была применимой ко всем степеням >0. Теорема 59 не обобщается на степени $\neq 1$; открытое множество Ω аффинного пространства может быть k-связным, а все коциклы степени k не будут кограницами. Теорема 44 де Рама позволяет утверждать, что все коциклы степени k будут кограницами, если любой цикл размерности k гомологичен 0, а это не эквивалентно k-связности.

При $N = 2$ множество $\complement O$ не односвязно, и мы видели, что теорема Пуанкаре не имеет место для степени 1 (формула (VI, 4; 41)).

Следствие 1. *Пусть $\vec{X}$ — векторное поле класса C^m $(m \geqslant 1)$, определенное в односвязном открытом множестве Ω из N-мерного аффинного евклидова пространства E. Предположим, что составляющие X_i этого векторного поля в ортонормированной системе координат удовлетворяют соотношениям* (VI, 4; 52):

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \qquad \text{(VI, 8; 55)}$$

(*В случае $N = 3$ эти соотношения означают, что ротор векторного поля равен нулю.*) *Тогда это векторное поле является дифференциалом некоторого потенциала U класса C^{m+1}.*

Следствие 2. *Если Ω — односвязное открытое множество из $\mathbb{R}^2 - 0$, то в Ω существует функция-аргумент класса C^∞.*

Если множество Ω односвязно, то, согласно теореме, коцикл ω из (VI, 4; 41) является кограницей, а тогда в силу следствия 2 теоремы 45 в Ω существуют непрерывные функции-аргументы.

Гомология в дополнении к конечному множеству аффинного пространства

Мы видели (следствие 3 теоремы 54), что в E или в открытом звездном множестве из E каждый C^m-цикл размерности >0 C^m-гомологичен 0. Далее мы займемся изучением C^m-гомологий в дополнении к конечному множеству N-мерного аффинного пространства E. Мы уже отмечали, что ориентированная сфера не гомологична 0 в дополнении к ее центру.

Теорема 60. *Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$ над полем вещественных чисел. Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечное множество в Ω. Пусть $V \subset \tilde{V} = \Omega$ есть N-мерное компактное многообразие с краем класса C^m $(m \geqslant 1)$, снабженное ориентацией $\vec{V}$, определенной ориентацией пространства $\vec{E}$, и такое, что $a_i \in \overset{\circ}{V}$ для некоторого i и $a_j \notin V$ для $j \neq i$. Тогда класс C^m-гомологий поверхности $\vec{\Sigma} = \overrightarrow{bV}$ в открытом множестве $\Omega - A$ не зависит от выбора многообразия V.*

Доказательство. Снабдим E произвольной евклидовой структурой и обозначим через B_i замкнутый шар с центром в точке a_i, настолько малый, чтобы он не содержал никаких других точек a_j, $j \neq i$, а сам лежал бы в открытом множестве $\overset{\circ}{V}$. Ориентируем его с помощью ориентации пространства $\vec{E}$. Положим $\vec{\sigma}_i = \overrightarrow{bB_i}$. Множество $V - \overset{\circ}{B}_i$, не содержащее точки a_i, является компактным ориентированным (с помощью ориентации в $\vec{E}$) многообразием с краем класса C^m в $\Omega - A$ с границей $\vec{\Sigma} + \overleftarrow{\sigma}_i$. Следовательно, поверхность $\vec{\Sigma}$ в множестве $\Omega - A$ C^m-гомологична $\vec{\sigma}_i$. Если теперь взять две такие гиперповерхности $\vec{\Sigma}_1$, $\vec{\Sigma}_2$ и через B_i обозначить настолько малый шар, чтобы он содержался одновременно в соответствующих открытых множествах $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$, то обе гиперповерхности $\vec{\Sigma}_1$ и $\vec{\Sigma}_2$ будут гомологичны $\vec{\sigma}_i$ в $\Omega - A$ и, следовательно, гомологичны друг другу (рис. 10).

Замечание. 1°) Каким бы ни был класс C^m, цикл $\vec{\sigma}_i$, определенный положительно ориентированной евклидовой сферой с центром в a_i, всегда принадлежит классу C^∞.

2°) Так как мы не определяем многообразий с краем класса C^0, то теорема не имеет смысла для $m=0$.

Рассмотрим все гиперповерхности $\vec{\Sigma}$ *класса* C^∞ указанного в теореме типа (например, такие евклидовы сферы, как $\vec{\sigma}_i$). Они попарно C^∞-гомологичны в $\Omega - A$, а следовательно, C^k-гомологичны для каждого конечного значения k, включая

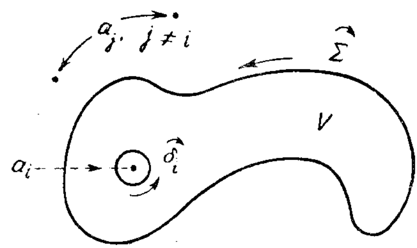

Рис. 10.

и $k=0$. Значит, *они определяют один и тот же класс C^k-гомологий в $\Omega - A$, который мы будем обозначать через* $(a_i^{(k)})$.

Если $\vec{\Sigma}$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 1$, и удовлетворяет условиям теоремы, то эта гиперповерхность принадлежит также классу C^m-гомологий $(a_i^{(m)})$ и классу C^k-гомологий $(a_i^{(k)})$ для $0 \leqslant k \leqslant m$. При $m=0$ все это не имеет смысла.

Естественно, что $\vec{\sigma}_i$ или $\vec{\Sigma}$ являются границами в Ω, а значит, C^m-гомологичны 0 *в* Ω. Следовательно, все C^m-циклы класса $(a_i^{(m)})$ из $\Omega - A$ C^m-гомологичны 0 в Ω. Однако этим свойством в $\Omega - A$ они не обладают (следствие 2 теоремы 58).

Общее выражение для классов гомологий в $\Omega - A$. Гомологичность нулю в Ω

Теорема 61. *Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечная часть Ω. Пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^m-цикл ($m \geqslant 0$) из $\Omega - A$, C^m-гомологичный 0 в Ω. Если размерность этого цикла $< N-1$, то он C^m-гомологичен 0 и в $\Omega - A$. Если его размерность равна $N-1$, то это утверждение, вообще говоря, не верно. Однако существуют такие однозначно опреде-*

ленные целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_l$ *произвольных знаков, что рассматриваемый цикл принадлежит классу* C^m*-гомологий* $\sum_{i=1}^{l} p_i\left(a_i^{(m)}\right)$ *в* $\Omega - A$.

Кроме того, если пространство E *евклидово и если* ω_{a_i} *является дифференциальной формой «телесный угол» относительно точки* a_i *(формула* (VI, 8; 51)) *и цикл* $\vec{\Gamma}$ *принадлежит классу* C^1 *(или классу* C^0*) и имеет конечную длину для* $N = 2$, *то*

$$p_i = \frac{1}{S_N} \int_{\vec{\Gamma}} \omega_{a_i}. \qquad \text{(VI, 8; 56)}$$

Если $\vec{E}$ *— поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$, *рассматриваемое как двумерное ориентированное евклидово пространство над* $\mathbb{R}$, *то для цикла* $\vec{\Gamma}$ *конечной длины класса* C^0 *имеет место равенство*

$$p_i = \frac{1}{2i\pi} \int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z - a_i}\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 8; 57)}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что для получения всех ее результатов следует рассматривать *только* циклы из $\Omega - A$, гомологичные 0 *в* Ω. В самом деле, мы только что видели, что каждый цикл класса $\left(a_i^{(m)}\right)$ гомологичен 0 в Ω. Циклы размерности $N - 1$ из $\Omega - A$, не гомологичные 0 в Ω, не обязательно представимы в указанном виде. Если множество Ω выпукло или звездно, то это не является ограничением, и теорема будет справедливой для *каждого цикла* из $\Omega - A$. Отметим, что сложение классов гомологий производится так, как оно было определено в группе гомологий на стр. 266.

Доказательство. В первой части доказательства мы рассмотрим более сложный случай размерности $N - 1$ и докажем существование чисел p_i, указанных в условии теоремы. Во второй части мы докажем их единственность, а в третьей части рассмотрим случай размерности $k < N - 1$.

Первая часть. Рассмотрим сначала сложный случай, когда размерность равна $N - 1$, и *докажем существование чисел* p_i.

Первый случай. Предположим, что особый C^m-цикл $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ размерности $N - 1$ имеет вид $H \mid \overrightarrow{bV}$, где $\vec{V} \subset \vec{\vec{V}}$ есть

---

[1]) В этой формуле i имеет два различных смысла. Это целый индекс в p_i и a_i, но это и $\sqrt{-1}$ в выражении $2i\pi$.

N-мерное ориентированное компактное многообразие с краем класса C^m (класса C^1, если $m=0$), H — отображение класса C^m этого многообразия V в Ω[1]). Кроме того, предположим, что прообразом каждой точки a_i из A при отображении H является *конечное число* точек $\alpha_{i,\nu}$ из $\overset{\circ}{V}$ (они не могут лежать на bV, поскольку $\vec{\Gamma}$ лежит в $\Omega - A$), что каждая точка $\alpha_{i,\nu}$ имеет в V некоторую окрестность, в которой H принадлежит по крайней мере классу C^1 (это для случая, когда $m=0$), и, наконец, что производное отображение $H'(\alpha_{i,\nu}; \tilde{V})$ является *инъективным* отображением $\vec{T}(\alpha_{i,\nu}; \tilde{V})$ в $\vec{E}$, т. е. имеет максимальный ранг, равный N, или биективно. Тогда (теорема 29 и следствие 2 теоремы 31 гл. III) существует такая открытая связная окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$ точки $\alpha_{i,\nu}$ в $\overset{\circ}{V}$, что $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$ является открытым множеством в E и сужение H на $\mathscr{V}_{i,\nu}$ является C^m-диффеоморфизмом (C^1-диффеоморфизмом, если $m=0$) окрестности $\mathscr{V}_{i,\nu}$ на $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$. Конечно, окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$, кроме $a_{i,\nu}$, не содержит никаких других прообразов точки a_i. Мы ее можем выбрать настолько малой, чтобы она не содержала никаких прообразов точек a_j при $j \neq i$. Обозначим через $\beta_{i,\nu}$ компактное многообразие с краем из $\tilde{\beta}_{i,\nu} = \mathscr{V}_{i,\nu}$ класса C^m (класса C^1, если $m=0$), содержащее $\alpha_{i,\nu}$. Для того чтобы получить это многообразие, достаточно взять в качестве $\beta_{i,\nu}$ прообраз при сужении H на $\mathscr{V}_{i,\nu}$ некоторого шара $B_{i,\nu}$ с центром в точке a_i, содержащийся в $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$. Поскольку окрестность $\mathscr{V}_{i,\nu}$ связна, то C^1-диффеоморфизм H, переводящий $\mathscr{V}_{i,\nu}$ на ее образ, сохраняет всюду данную или противоположную ориентацию (ориентацию $\vec{\tilde{V}}$ и $\vec{E}$). Обозначим через $\varepsilon_{i,\nu}$ величину, равную $+1$ или -1 в зависимости от того, какой из случаев рассматривается — первый или второй. Это означает, что $\varepsilon_{i,\nu}$ имеет в $\vec{E}$ знак некоторого базиса-образа при отображении $H'(\alpha_{i,\nu})$ положительного базиса из $\vec{T}(\alpha_{i,\nu}; \vec{\tilde{V}})$. Если с помощью локальных карт, *сохраняющих ориентации*, множества $\mathscr{V}_{i,\nu}$ и $H(\mathscr{V}_{i,\nu})$ свести к открытым множествам в $\mathbb{R}^N$, то $\varepsilon_{i,\nu}$ будет иметь знак якобиана отображения H.

Многообразие $\beta_{i,\nu}$ снабдим ориентацией согласно ориентации $\vec{\tilde{V}}$, а шар $B_{i,\nu}$ — согласно ориентации пространства $\vec{E}$. Тогда $H|\vec{\beta}_{i,\nu}$ будет особым многообразием, эквивалентным $\vec{B}_{i,\nu}$ или $\overleftarrow{B}_{i,\nu}$ в зависимости от того, будет ли $\varepsilon_{i,\nu} = +1$ или -1.

---

[1]) Напомним, что цикл $\vec{\Gamma}$ по предположению C^m-гомологичен 0 в Ω. Мы здесь рассматривали его весьма частный случай: *C^m-границу*.

Цикл $(H\,|\,\overrightarrow{b\beta}_{i,\nu})$ эквивалентен циклу $\varepsilon_{i,\nu}\overrightarrow{bB}_{i,\nu}$, принадлежащему классу C^m-гомологий $\varepsilon_{i,\nu}(a_i^{(m)})$ в $\Omega - A$.

Многообразие с краем $V - \bigcup\limits_{i,\nu} \overset{\circ}{\beta}_{i,\nu}$ класса C^1 с ориентацией $\vec{\tilde{V}}$ имеет в качестве границы объединение $\overrightarrow{bV}$ и $\overleftarrow{b\beta}_{i,\nu}$. Следовательно, особое многообразие $H\,|\,\overrightarrow{V - \bigcup\limits_{i,\nu}\beta_{i,\nu}}$, *содержащееся в* $\Omega - A$, имеет в качестве границы цикл $H\,|\,\overrightarrow{bV} + \sum\limits_{i,\nu} H\,|\,\overleftarrow{b\beta}_{i,\nu}$. Отсюда вытекает следующий результат:

Цикл $H\,|\,\overrightarrow{bV}$ *C^m-гомологичен в* $\Omega - A$ *циклу* $\sum\limits_{i,\nu} H\,|\,\overrightarrow{b\beta}_{i,\nu}$, *эквивалентному циклу* $\sum\limits_{i,\nu} \varepsilon_{i,\nu}\overrightarrow{bB}_{i,\nu}$. *Его классом C^m-гомологий является* $\sum\limits_i p_i(a_i^{(m)})$, *где* $p_i = \sum\limits_\nu \varepsilon_{i,\nu}$ — *разность между числом прообразов точек a_i, в которых отображение H сохраняет ориентацию, и числом прообразов, в которых H меняет ориентацию.*

Теорема полностью доказана для рассматриваемого частного случая, и, кроме того, *мы имеем геометрическую интерпретацию коэффициентов* p_i.

Второй случай. $\vec{\Gamma}$ — произвольный C^m-цикл из $\Omega - A$, C^m-гомологичный 0 в Ω, где $m \geqslant 1$.

В множестве Ω имеют место формулы

$$\begin{gathered} \vec{\Gamma} = H\,|\,\vec{\Sigma}, \\ H\,|\,\vec{\Sigma} + H\,|\,\vec{V} + H\,|\,\overrightarrow{W} = H\,|\,\vec{V}' + H\,|\,\overrightarrow{W}'. \end{gathered} \tag{VI, 8; 58}$$

Циклы $H\,|\,\vec{V}$, $H\,|\,\overrightarrow{W}$, $H\,|\,\vec{V}'$ и $H\,|\,\overrightarrow{W}'$ *лежат в* Ω *и не обязательно в* $\Omega - A$. Образы $H(W)$ и $H(W')$ являются конечными множествами (и могут содержать некоторые точки a_i). С другой стороны, $H\,|\,\vec{V} = \tilde{H}\,|\,\overrightarrow{b\mathscr{V}}$, $H\,|\,\vec{V}' = \tilde{H}\,|\,\overrightarrow{b\mathscr{V}'}$, где $\tilde{H}$ и $\tilde{H}'$ являются отображениями класса C^m компактных ориентированных многообразий с краем $\vec{\mathscr{V}}$, $\vec{\mathscr{V}}'$ размерности N в Ω. Здесь не предполагается, что выполнены довольно специальные свойства 1-го случая.

Пусть $\vec{u}$ — некоторый вектор из E. Рассмотрим вместо отображения $\tilde{H}$ отображение $\tilde{H} + \vec{u}$ многообразия $\mathscr{V}$ из E, определенное по формуле $\xi \to H(\xi) + \vec{u}$. Покажем, что, *какова бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *почти для всех векторов* $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$ (*в некоторой выбранной норме пространства* E), *отображение* $\tilde{H} + \vec{u}$ *многообразия* $\mathscr{V}$ *в* Ω *обладает свойствами, которые мы считали выполненными в* 1*-м случае.*

Выберем и зафиксируем в пространстве E некоторую систему координат и рассмотрим связанную с ней меру Лебега. Для произвольной точки $\alpha \in \mathscr{V}$ выберем ее окрестность $\mathscr{V}_a$ в $\mathscr{V}$, которая была бы образом относительно карты Φ_α некоторого открытого множества $\mathcal{O}_\alpha$ из $\mathbb{R}^N$. Тогда $H \circ \Phi_\alpha$ будет отображением класса C^m множества $\mathcal{O}_\alpha$ в Ω. Утверждение, что в точке ξ из $\mathscr{V}_\alpha$ ранг $H'(\xi)$ меньше N, эквивалентно утверждению, что якобиан отображения $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ равен нулю в точке $\Phi_\alpha^{-1}(\xi)$. Из теоремы 102_2 гл. IV вытекает, что если мы рассмотрим множество таких точек Ω, в которых якобиан отображения $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ равен нулю, то его образ при отображении $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ имеет нулевую меру относительно меры Лебега. Это значит, что если мы рассматриваем множество точек ξ из $\mathscr{V}_a$, в которых ранг отображения $\tilde{H}'$ меньше N, то его образ при отображении $\tilde{H}$ имеет нулевую меру в E.

Таким образом, каждая точка $\alpha \in \mathring{V}$ имеет такую окрестность $\mathscr{V}_\alpha$, что множество точек этой окрестности, в которых ранг $\tilde{H}'$ меньше N, имеет при отображении $\tilde{H}$ образ нулевой меры. Поскольку множество $\mathscr{V}$ компактно, его можно покрыть конечным числом этих окрестностей. Следовательно, *множество точек* ξ *из* $\mathscr{V}$, *в которых ранг* $\tilde{H}'(\xi)$ *меньше* N, *имеет при отображении* $\tilde{H}$ *образ нулевой меры в* E.

Следовательно, если мы рассмотрим множество таких векторов $\vec{u}$, что $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, то *почти для всех этих значений* $\vec{u}$ точка $a_i - \vec{u}$ не принадлежит этому образу. Можно также сказать, что почти для всех значений $\vec{u}$ из шара $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$ точка a_i является точкой, все прообразы которой при отображении $\tilde{H} + \vec{u}$ являются точками $\alpha_{i,\nu} \in \mathscr{V}$, в которых производное отображение от $\tilde{H} + \vec{u}$ имеет ранг, равный N. Точки этих прообразов тогда необходимо изолированы (в окрестности $\mathscr{V}_{i,\nu}$ каждой из точек $\alpha_{i,\nu}$ отображение H является гомеоморфизмом и точка a_i в качестве прообраза имеет только точку $\alpha_{i,\nu}$), а поскольку многообразие $\mathscr{V}$ компактно, то их имеется конечное число (множество $H^{-1}(a_i)$ дискретно, поскольку все его точки изолированы, и замкнуто в $\mathscr{V}$, а следовательно, компактно; дискретный компакт всегда конечен [1])). С другой стороны, множество $H(V) = \tilde{H}(b\mathscr{V})$ является образом при отображении, *принадлежащем по крайней мере классу* C^1, некоторого многообразия размерности $N-1$. Оно имеет нулевую меру в E. Следовательно, почти для всех векторов $\vec{u}$ с нормой $\leqslant \varepsilon$ точки $a_i - \vec{u}$ не лежат в этом образе, или же иначе: $(H+\vec{u})(V)$ не содержит точек a_i и прообразы точек a_i при отображении $H+\vec{u}$ лежат во внутренности $\overset{\circ}{\mathscr{V}}$ множества $\mathscr{V}$.

Это справедливо для каждой точки $a_i \in A$.

Непосредственное применение теоремы 21 гл. IV показывает следующее: *почти для всех значений* $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, прообразы любой из точек a_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, при отображении $\tilde{H}+\vec{u}$ лежат вне границы $\mathscr{V}$; число этих прообразов конечно, и в каждом из прообразов ранг отображения $(\tilde{H}+\vec{u})'$ равен N. Таким образом, мы находимся в условиях применимости первого случая теоремы.

Тем самым доказано, что существуют такие целые числа $q_1, q_2, \ldots, q_l$, что $(\tilde{H}+\vec{u})\,|\,\overrightarrow{b\mathscr{V}} = (H+\vec{u})\,|\,\vec{V}$ является C^m-циклом в проколотом открытом множестве $\Omega - A$, принадлежащим классу C^m-гомологий [2]) $q_1(a_1^{(m)}) + q_2(a_2^{(m)}) + \ldots + q_l(a_l^{(m)})$.

Все проделанное нами для C^m-цикла $H\,|\,\vec{V}$ из (VI, 8; 58) может быть повторено и для цикла $H\,|\,\vec{V}'$. Кроме того, если даже образ вырожденного цикла $H\,|\,\overrightarrow{W}$ или $H\,|\,\overrightarrow{W}'$ и содержит некоторые точки a_i, то его перенос на вектор $\vec{u}$ содержать их уже не будет, и это верно для всех значений $\vec{u}$, кроме конечного их числа, т. е. для почти всех значений $\vec{u}$. Этот перенос является, следовательно, вырожденным циклом из $\Omega - A$, гомологичным 0 в $\Omega - A$.

Применяя еще раз теорему 21 гл. IV, мы получаем такой результат:

Почти для всех значений $\vec{u}$, *таких, что* $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, *переносы на вектор* $\vec{u}$ *циклов* $H\,|\,\vec{V}$ *и* $H\,|\,\vec{V}'$ *лежат в* $\Omega - A$ *и принадлежат классам* C^m*-гомологий, являющимся конечными комбина-*

[1]) Если множество K компактно и дискретно, то каждая из его точек является открытым множеством, и эти открытые множества образуют покрытие. Так как существует конечное подпокрытие, то K конечно.

[2]) Цикл $(H+\vec{u})\,|\,\vec{V}$ можно назвать переносом цикла $H\,|\,\vec{V}$ с помощью $\vec{u}$.

циями вида $\sum_i q_i(a_i^{(m)})$, $\sum_i r_i(a_i^{(m)})$ [1]), *а переносы* $H\,|\,\overrightarrow{\widehat{W}}$ *и* $H\,|\,\overrightarrow{\widehat{W'}}$ *являются вырожденными циклами в* $\Omega - A$.

Теперь *почти для всех значений* $\vec{u}$ перенос на вектор $\vec{u}$ цикла $\vec{\Gamma}$ лежит в $\Omega - A$ и его классом C^m-гомологий в $\Omega - A$ служит $\sum_i p_i(a_i^{(m)})$, где $p_i = r_i - q_i$ (в силу представления (VI, 8; 58) для $\vec{\Gamma}$).

Однако если ε выбрано строго меньшим расстояния δ от образа $\vec{\Gamma}$ (лежащего в $\Omega - A$) до $\complement(\Omega - A)$, то перенос $\vec{\Gamma}$ на вектор $\vec{u}$ C^m-гомологичен $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ (теоремы 51 и 54). Следовательно, цикл $\vec{\Gamma}$ также принадлежит классу $\sum_i p_i a_i^{(m)}$, и теорема для этого случая доказана.

Здесь нет прямой геометрической интерпретации чисел p_i. Однако достаточно малый перенос $\vec{u}$ цикла $\vec{\Gamma}$ позволяет найти такую интерпретацию почти для всех значений $\vec{u}$.

Третий (общий) случай. Нам осталось разобрать лишь случай $m = 0$. Пусть $\vec{\Gamma} = H\,|\,\vec{\Sigma}$ есть C^0-цикл из $\Omega - A$, C^0-гомологичный 0 в Ω. Многообразие $\vec{\Sigma}$ принадлежит классу C^1, а отображение H только непрерывно. Пусть H_1 — такое отображение класса C^1 из $\vec{\Sigma}$ в $\Omega - A$, что $|||\overrightarrow{H - H_1}||| < d(H(\Sigma), \complement(\Omega - A))$ (теорема 52). Тогда C^1-цикл $H_1\,|\,\vec{\Sigma}$ C^0-гомологичен $H\,|\,\vec{\Sigma}$ (теоремы 51 и 54) в $\Omega - A$ и тем более в Ω. Следовательно, этот цикл C^0-гомологичен 0 в Ω. Поскольку это C^1-цикл, то он C^1-гомологичен 0 в Ω (следствие 4 теоремы 54). Из второго случая следует, что в $\Omega - A$ он C^1-гомологичен комбинации $\sum_i p_i\vec{\sigma}_i$, где $\vec{\sigma}_i$ есть C^∞-цикл класса a_i^∞. Но тогда цикл $H\,|\,\vec{\Sigma}$, C^0-гомологичный циклу $H_1\,|\,\vec{\Sigma}$ в $\Omega - A$, C^0-гомологичен $\sum_i p_i\vec{\sigma}_i$, а следовательно, его классом C^0-гомологий является $\sum_i p_i(a_i^{(0)})$, чем и заканчивается доказательство теоремы для случая размерности $N - 1$.

---

[1]) q_i и r_i могут зависеть от $\vec{u}$.

Для интерпретации p_i в случае $m=0$ надо сначала аппроксимировать отображение H отображением H_1 класса C^1, что приведет нас ко второму случаю[1]).

Вторая часть. Докажем единственность чисел p_i и формулы (VI, 8; 56) и (VI, 8; 57) для размерности $N-1$.

Снабдим E произвольной евклидовой структурой. Пусть $\vec{\sigma}_i$ — сфера с центром в точке a_i, граница шара, содержащегося в Ω и не содержащего ни одной из точек a_j при $j \neq i$. Тогда $\vec{\sigma}_i$ будет принадлежать классу $(a_i^{(m)})$ при любом m.

1°) Предположим сначала, что $m \geqslant 1$ или же что $N=2$, $m=0$ и цикл $\vec{\Gamma}$ имеет конечную длину.

Поскольку дифференциальная форма ω_{a_i} принадлежит классу C^1 и замкнута в $\Omega - a_i$, то она заведомо будет такой же и в $\Omega - A$.

Поскольку цикл $\vec{\Gamma}$ по предположению гомологичен циклу $p_1\vec{\sigma}_1 + p_2\vec{\sigma}_2 + \ldots + p_l\vec{\sigma}_l$, то интегралы от ω_{a_i} по этим двум циклам обязательно равны (следствие теоремы 49 при $m \geqslant 1$ и следствие 6 теоремы 54 при $N=2$, $m=0$ и $\vec{\Gamma}$ конечной длины). Согласно формуле (VI, 8; 53), интеграл по сфере $\vec{\sigma}_i$ равен S_N, а интеграл по какой-либо из сфер $\vec{\sigma}_j$ при $j \neq i$ равен нулю, ибо такая сфера является границей шара в $\Omega - a_i$. Тем самым, с одной стороны, доказана формула (VI, 8; 56), а с другой — единственность коэффициентов p_i, когда цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^m при $m \geqslant 1$, поскольку интегралы, заданные этой формулой, полностью определяются только заданием цикла $\vec{\Gamma}$.

В частном случае, когда $E = \mathbb{C}$, получаем

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{1}{2i\pi}\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} =$$
$$= \frac{1}{2i\pi} d\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\omega_0, \qquad \text{(VI, 8; 59)}$$

где ω_0 — форма (VI, 4; 41)[2]). Поскольку $\ln\sqrt{x^2 + y^2}$ является функцией класса C^∞ в $\mathbb{C}0$, то ее дифференциал имеет инте-

[1]) Напомним, что непрерывный образ отрезка может заполнить весь куб (стр. 97 т. I)! C^0-цикл — это ужасная вещь; было бы чудом получить такие теоремы для C^0-циклов!

[2]) Имеем $dz/z = d(\ln z) = d\ln|z| + i\,d\varphi$. Однако $\ln z$ и φ не являются корректно определенными функциями, и это рассуждение требует специального обоснования. Оно не столь сложно, но значительно длиннее проведенного выше вычисления.

грал, равный нулю по Γ (специальная формула Стокса для случая $n=1$; теорема 39). Теперь (VI, 8; 57) вытекает из (VI, 8; 56).

2°) Если $\vec{\Gamma}$ является циклом класса C^0, то необходимо провести особое доказательство единственности. Пусть N произвольно (а если $N=2$, то $\vec{\Gamma}$ не обязательно имеет конечную длину). Здесь мы не ставим своей задачей вычисление интеграла $\int\limits_{\vec{\Gamma}} \omega_{a_i}$. Мы предполагаем, что можно найти такие целые числа p_i и q_i, чтобы цикл $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ был C^0-гомологичен циклам $\sum\limits_i p_i\vec{\sigma}_i$ и $\sum\limits_i q_i\vec{\sigma}_i$. Тогда и последние циклы будут C^0-гомологичными. Однако поскольку речь идет о двух циклах класса C^1 и даже C^∞ (так как евклидовы сферы являются гиперповерхностями класса C^∞), то из следствия 4 теоремы 54 вытекает, что эти два цикла также C^1-гомологичны. Из только что проведенных рассуждений вытекает, что $p_i = q_i$, чем и доказывается единственность для случая $m=0$.

Третья часть. Речь пойдет о размерностях $k < N-1$. Рассуждения можно было бы разбить на те же этапы, но в данном случае дело обстоит гораздо проще.

Первый случай. $\vec{\Gamma} = H \mid \overrightarrow{bV}$, где H и V принадлежат классу C^m (V принадлежит классу C^1, если $m=0$) и $H(V) \subset \Omega - A$. Результат в этом случае очевиден: цикл $\vec{\Gamma}$ C^m-гомологичен 0 в $\Omega - A$.

Второй случай. $\vec{\Gamma} = H \mid \vec{\Sigma}$, где H принадлежит по меньшей мере классу C^1. Поскольку цикл $H \mid \vec{\Sigma}$ по предположению C^1-гомологичен 0 в Ω, то имеет место формула (VI, 8; 58). Поскольку тогда размерность $\mathscr{V}$ меньше N, то $\tilde{H} \mid \vec{\mathscr{V}}$ имеет нулевую меру. Почти для всех значений $\vec{u} \in \vec{E}$, $\tilde{H} + \vec{u}(\mathscr{V})$ лежит в $\Omega - A$, и мы пришли к 1-му случаю.

Третий случай. Как и в первой части, он сводится ко второму случаю.

Замечания. 1°) Если $\vec{\Gamma}$ есть C^0-цикл, то целые числа p_i, вообще говоря, не могут быть вычислены с помощью интегралов по $\vec{\Gamma}$. Но они могут быть вычислены по C^1-циклу $\vec{\Gamma}_1$, настолько близкому к $\vec{\Gamma}$, что он ему C^0-гомологичен.

2°) Интересно отметить, что число p_i может быть вычислено, если известны цикл $\vec{\Gamma}$ и точка a_i, причем другие точки a_j при $j \neq i$ не используются.

3°) Если меняется ориентация пространства E, то класс гомологий цикла $\vec{\Gamma}$ в $\Omega - A$ не меняется. Однако классы $(a_i^{(m)})$ меняют знак, поскольку меняется ориентация шаров, а значит, и сфер. Следовательно, меняют знак числа p_i. Это можно видеть также из (VI, 8; 56), поскольку формы ω_{a_i} заменяются на противоположные.

Следствие. *Пусть E — аффинное N-мерное пространство на $\mathbb{R}$, и пусть A — конечная часть E, состоящая из l элементов. Группа C^m-гомологий множества $E - A$ для размерностей, заключенных строго между 0 и $N - 1$, сводится к $\{0\}$. Для размерности 0 она изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака. Для размерности $N - 1$ она изоморфна $\mathbb{Z}^l$.*

1°) Пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^m-цикл из $E - A$ размерности k, $0 < k < N - 1$. Так как он C^m-гомологичен 0 в E (следствие 3 теоремы 54), то, согласно теореме 61, этот цикл гомологичен 0 в $E - A$. Следовательно, группа C^m-гомологий размерности k сводится к $\{0\}$.

2°) Зададим ориентацию в пространстве E. В группе C^m-гомологий размерности $N - 1$ участвуют классы вида $\sum\limits_{i=1}^{l} p_i (a_i^{(m)})$. Любые два таких класса, не соответствующие одной и той же системе целых чисел p_i, различны. Поскольку каждый цикл из $E - A$ гомологичен 0 в E (следствие 3 теоремы 54), то, согласно теореме, других классов, кроме этих, не существует. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между группой гомологий и множеством $\mathbb{Z}^l$ систем $p = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$, состоящих из l целых чисел произвольного знака. Кроме того, сумма класса $\sum\limits_{i=1}^{l} p_i (a_i^{(m)})$ и класса $\sum\limits_{i=1}^{l} q_i (a_i^{(m)})$ является классом $\sum\limits_{i=1}^{l} (p_i + q_i)(a_i^{(m)})$. Сложение классов соответствует сложению в множестве $\mathbb{Z}^l$, рассматриваемом как группа-произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$.

Следует заметить, что соответствие между группой гомологий размерности $N - 1$ и $\mathbb{Z}^l$ не является каноническим. Оно будет каноническим только в том случае, *когда пространство E ориентировано.* Если в некоторой ориентации $\vec{E}$ некоторый класс соответствует $p \in \mathbb{Z}^l$, то в противоположной ориентации тот же самый класс соответствует $-p = (-p_1, -p_2, \ldots, -p_l)$.

3°) Доказательство в случае размерности 0 мы предоставим читателю. Нужно будет показать последовательно следующее:

a) Что все циклы $\{x, +\}$, $x \in E - A$, принадлежат одному и тому же классу гомологий. Этот класс мы обозначим через $\mathbf{1}$ (это вытекает из того, что $E - A$ линейно связно).

b) Что каждый цикл $H|\vec{\Sigma}$ размерности 0 принадлежит классу $p\mathbf{1}$ при $p \in \mathbb{Z}$. (Это очевидно, так как $\vec{\Sigma}$ является конечным множеством точек, снабженных знаками $\pm$. Тогда p будет равно числу знаков $+$, уменьшенному на число знаков $-$.)

c) Что классы $p\mathbf{1}$ и $p'\mathbf{1}$ совпадают только тогда, когда $p = p'$. (Постоянная $\mathbf{1}$ является коциклом степени 0. Его интегралы по двум гомологичным циклам размерности 0 совпадают; его интеграл по $p\,\{x, +\}$ равен p.)

Теперь устанавливается взаимно однозначное соответствие между группой гомологий для размерности 0 и группой $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака, причем это соответствие сохраняет сложение. Здесь в противоположность п. 2°) соответствие каноническое; оно не зависит от ориентации пространства E. Результат 3°) имеет место не только для множества $E - A$, но и для любого открытого связного множества аффинного пространства.

Индекс цикла размерности $N-1$ относительно точки в ориентированном N-мерном аффинном пространстве

Определение. Пусть $\vec{E}$ — ориентированное N-мерное аффинное пространство, a — точка E и $\vec{\Gamma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в $E - a$. *Индексом этого цикла относительно точки a* называется целое число p произвольного знака, однозначно определяемое условием, что цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^0-гомологий $p(a^{(0)})$ в $E - a$.

Это определение корректно, так как *в пространстве E* цикл $\vec{\Gamma}$ всегда C^0-гомологичен нулю и к нему можно применить теорему 61. *Если p является таким индексом, то естественно говорить, что алгебраическое число обходов цикла $\vec{\Gamma}$ вокруг точки a равно p.* В самом деле, если $\vec{\sigma}$ — сфера с центром в точке a с положительной ориентацией, то естественно сказать, что она обходит $+1$ раз точку a, а $p\vec{\sigma}$ имеет индекс p. Из теоремы 61 тогда следует, что если A является конечной частью Ω и если $\vec{\Gamma}$ — цикл из $\Omega - A$, гомологичный 0 в Ω, то входящие в него целые числа p_i — это индексы цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точек a_i. Отсюда вытекает также, что если $\vec{E}$ имеет, кроме того, евклидову структуру и если цикл $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^1 (или классу C^0 и имеет конечную длину при $N=2$), то его индекс равен числу $1/S_N$, умноженному на интеграл по $\vec{\Gamma}$ от дифференциальной формы «телесный угол» ω_a, или же числу $1/S_N$, умноженному на алгебраический телесный угол, под которым из точки a виден цикл $\vec{\Gamma}$. Если E является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то, согласно формуле (VI, 8; 57), индекс равен $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z-a}$.

Обозначим этот индекс через $I(\vec{\Gamma};\ a)$. Он существенно зависит от ориентации пространства $\vec{E}$ и меняет знак, если эта ориентация меняется. Более общо, если K является C^1-диффеоморфизмом Ω на открытое множество Ω' из E, сохраняющим (соответственно изменяющим) ориентации, т. е. таким, что якобиан >0 (соответственно <0), то цикл-образ $K\vec{\Gamma}$ (если $\vec{\Gamma}=H\,|\vec{\Sigma}$, то цикл $K\vec{\Gamma}$ равен $K\circ H\,|\vec{\Sigma}$) относительно точки-образа $a'=K(a)$ имеет индекс (соответственно противоположный индекс), равный индексу цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точки a. В самом деле, пусть $\vec{\sigma}$ — граница некоторого евклидова шара B с центром в точке a. Тогда $\vec{\sigma}'=K(\vec{\sigma})$ является границей $\vec{B}'=K(\vec{B})$. Поскольку отображение K сохраняет (соответственно обращает) ориентацию в $\vec{E}$, то $\vec{B}'$ имеет ориентацию $\vec{E}$ (соответственно противоположную ориентацию), а следовательно, $\vec{\sigma}'$ имеет класс C^0-гомологий (a'^0) (соответственно $-(a'^0)$). Так как отображение K является гомеоморфизмом, то оно сохраняет C^0-гомологии. Следовательно, если цикл $\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен $p\vec{\sigma}$, $p=I(\vec{\Gamma};\ a)$, то цикл $K\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен циклу $pK\vec{\sigma}=p\vec{\sigma}'$, а значит, имеет место равенство $I(K\vec{\Gamma};\ K(a))=p$ (соответственно $-p$).

Замечание. Априори совершенно не очевидно,

1°) что интеграл $\dfrac{1}{S_N}\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} \omega_a$ будет *целым числом*;

2°) что этот интеграл не зависит от евклидовой структуры (от которой зависит ω_a), а зависит только от $\vec{\Gamma}$, ориентации $\vec{E}$ и от a.

Все эти факты, естественно, весьма интуитивны, и можно указать много старых математических курсов, в которых все они принимались без доказательства. Однако мы убедились, какие большие трудности надо было преодолеть для их доказательства.

При $N=2$, $N-1=1$, форма $\omega=d\varphi$ является «дифференциалом» полярного угла и «хорошо видно», что алгебраическое число обходов циклом $\vec{\Gamma}$ начала координат равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\vec{\Gamma}} d\varphi$ и является целым числом.

Инвариантность индекса при непрерывной деформации

Докажем, что индекс цикла $\vec{\Gamma}$ из E относительно точки $a\in E$ не меняется, когда $\vec{\Gamma}$ и a изменяются непрерывно, но точка a не принадлежит образу цикла $\vec{\Gamma}$. Точнее, имеет место

Теорема 62. *Пусть $H|\vec{\Sigma}$ и $H'|\vec{\Sigma}$ — два $(N-1)$-мерных цикла N-мерного нормированного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$, a, a' — две точки из E и $a\notin H(\Sigma)$.*

Тогда, если $\|\overrightarrow{a-a'}\|+|||\overrightarrow{H-H'}|||<d(H(\Sigma), a)$, то $a'\notin H(\Sigma')$ и индекс цикла $H'|\vec{\Sigma}$ относительно точки a' равен индексу цикла $H|\vec{\Sigma}$ относительно точки a.

Доказательство. При переносе (являющемся C^1-диффеоморфизмом с якобианом >0) индекс цикла $H'|\vec{\Sigma}$ относительно точки a' равен индексу перенесенного цикла $H'+(\overrightarrow{a-a'})|\vec{\Sigma}$ относительно точки $a'+(\overrightarrow{a-a'})=a$. Так как $\overrightarrow{|||H'+(\overrightarrow{a-a'})-H|||}<d(H(\Sigma), a)$, то циклы $H'+(\overrightarrow{a-a'})|\vec{\Sigma}$ и $H|\vec{\Sigma}$ гомотопны в $\complement a$ (теорема 51). Следовательно, они гомологичны в $\complement a$ (теорема 54), а значит, имеют один и тот же индекс в точке a.

Следствие 1. *Пусть $\vec{E}$ есть N-мерное ориентированное аффинное пространство, а $\vec{\Sigma}$ является $(N-1)$-мерным ориентированным компактным многообразием без края. Пусть Λ — то-*

пологическое пространство и H_λ — *непрерывное отображение* Σ *в* E, *непрерывно зависящее от параметра* λ *из* Λ, *т. е.* $\lambda \to H_\lambda$ *является непрерывным отображением* Λ *в* $(E^\Sigma)_{cb}$ [1]), *и, кроме того, пусть* a_λ: $\lambda \to a_\lambda$ *является непрерывным отображением* Λ *в* E. *Если теперь для каждого значения* λ *точка* a_λ *не принадлежит образу* $H_\lambda(\Sigma)$, *то индекс цикла* $H_\lambda|\vec{\Sigma}$ *относительно точки* a_λ *меняется непрерывно при изменении* λ. *Следовательно, каждая точка* λ *имеет некоторую окрестность, в которой этот индекс остается постоянным. В частности, он остается постоянным на каждой связной компоненте* Λ *и на всем пространстве, если* Λ *связно.*

Следствие 2. *Пусть* $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — *последовательность непрерывных отображений* $\vec{\Sigma}$ *в* $\vec{E}$, *равномерно сходящихся на* Σ *к некоторому отображению* H *при* n, *стремящемся к бесконечности. Пусть* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — *последовательность точек из* E, *сходящаяся к точке* a *при* n, *стремящемся к бесконечности. Если* $a \notin H(\Sigma)$, *то при достаточно большом* n *точки* $a_n \notin H_n(\Sigma)$ *и индекс цикла* $H_n|\vec{\Sigma}$ *относительно точки* a_n *равен индексу цикла* $H|\vec{\Sigma}$ *относительно точки* a.

Следствие 3. *Пусть* $H|\vec{\Sigma}$ — *некоторый* $(N-1)$-*мерный цикл аффинного ориентированного пространства* $\vec{E}$. *Индекс этого цикла относительно точки* a, *принадлежащей множеству* $E - H(\Sigma)$, *остается неизменным, когда точка* a *пробегает связную компоненту этого открытого множества, а также для любых двух точек, которые можно соединить путем, не пересекающим образ* $H(\Sigma)$. *Если в двух точках* a *и* b *индекс цикла* $H|\vec{\Sigma}$ *не одинаков, то не существует пути, соединяющего эти две точки и не пересекающего образ* $H(\Sigma)$.

Это следствие, вытекающее непосредственно из следствия 1, является одним из самых сильных средств для доказательства того факта, что два множества имеют общую точку.

Рассмотрим следующий пример (прямое доказательство которого весьма сложно). Пусть γ — окружность в $\mathbb{R}^2$, а AA' и BB' — два взаимно перпендикулярных диаметра. Обозначим через α (соответственно через β) путь, соединяющий A с A' (соответственно B с B'), целиком лежащий (кроме его концов) в области, внутренней относительно γ. *Докажем, что эти пути обязательно пересекаются.*

[1]) Это означает, что при λ, стремящемся к λ_0 в Λ, отображение H_λ сходится к отображению H_{λ_0} равномерно на Σ. При этом предполагается, что на E задана какая-либо норма.

Рассмотрим путь α, определенный непрерывным отображением H отрезка $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, где $H(0) = A$, $H(\pi) = A'$.

Пусть γ' — окружность, проходящая через A и A'. Обозначим через γ'_i (соответственно через γ'_e) часть окружности, расположенную во внутренней (соответственно внешней) области относительно окружности γ.

Построим непрерывное отображение $\tilde{H}$ тригонометрической окружности Γ в $\mathbb{R}^2$ следующим образом. Для полуокружности

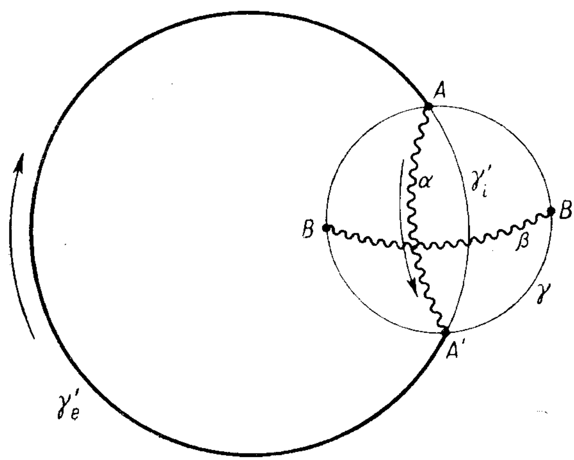

Рис. 11.

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ отображение $\tilde{H} = H$ известно. Для $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ возьмем в качестве $\tilde{H}$ сужение на $[\pi, 2\pi]$ такого очевидного гомеоморфизма $\tilde{H}'$ тригонометрической окружности на окружность γ', для которого $\tilde{H}'(\pi) = A'$ и $\tilde{H}'(2\pi) = A$.

Найдем индексы точек B и B' относительно цикла $\tilde{H} \mid \vec{\Gamma}$. Этот цикл гомотопичен $\tilde{H}' \mid \vec{\Gamma}$ в множестве $\mathbb{R}^2 - B - B'$, поскольку каждый отрезок $[\tilde{H}(\theta), \tilde{H}'(\theta)]$ лежит в этом открытом множестве. (Это очевидно для $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Если $0 < \theta < \pi$, то $\tilde{H}(\theta)$ и $\tilde{H}'(\theta)$ лежат в открытом круге, ограниченном окружностью γ, а этот круг является выпуклым.) Следовательно, искомые индексы необходимо являются индексами точек B и B' относительно цикла $\tilde{H}' \mid \vec{\Gamma}$ или относительно эквивалентного цикла $\overleftarrow{\gamma'}$, ориентированного в противоположном направлении. Эти индексы, следовательно, равны соответственно -1 и 0 и не равны друг другу. Значит, путь β, соединяющий B

с B', пересекает образ $\tilde{H}(\vec{\Gamma})$. Так как он не может пересечься с $\tilde{H}([\pi, 2\pi])$, то он пересекает α, что мы и хотели доказать.

Следствие 4. *Пусть $H|\vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл ориентированного N-мерного аффинного пространства E, содержащийся в открытом шаре $\overset{\circ}{B}$ с центром 0 радиуса R. Тогда его индекс относительно любой точки a, не лежащей в этом шаре, обязательно равен нулю. Если b — точка, относительно которой индекс цикла $\neq 0$, то не существует никакого обобщенного пути*[1]*, соединяющего точку b с бесконечностью и не пересекающегося с образом цикла.*

Доказательство. Цикл, принадлежащий открытому шару $\overset{\circ}{B}$, всегда гомологичен 0 в этом шаре, поскольку шар является выпуклым множеством (следствие 3 теоремы 54), и, следовательно, гомологичен 0 в множестве $E-a$, если точка a не принадлежит шару. Значит, его индекс относительно точки a равен 0. Впрочем, интуитивно ясно, что такой цикл не может «окружать» точку a.

Предположим, что существует такой обобщенный путь $M|[0, +\infty[$, соединяющий точку b с бесконечностью в пространстве E, образ которого не пересекает образа $H(\Sigma)$ цикла. Тогда индекс цикла относительно точки $M(t)$ должен быть постоянным, когда t изменяется от 0 до $+\infty$. Начиная с достаточно больших значений t, этот индекс равен 0. Следовательно, индекс относительно точки b также равен нулю. Этим доказывается, что если индекс в точке b не равен нулю, то не существует обобщенного пути, соединяющего точку b с бесконечностью и не пересекающего образа цикла $H(\Sigma)$.

Изменение индекса цикла при пересечении образа цикла

Мы видели, что индекс цикла относительно точки a может изменяться только тогда, когда точка a пересекает образ цикла. Мы сейчас увидим, *как* изменяется рассматриваемый индекс, если точка a пересекает цикл в достаточно регулярной точке.

Пусть $H|\vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в N-мерном аффинном ориентированном пространстве $\vec{E}$. Пусть a_0 — точка $H(\Sigma)$. Точка $a_0 \in H(\Sigma)$ называется *регулярной* на образе цикла, если она

[1]) Обобщенный путь, соединяющий точку b с бесконечностью, является непрерывным отображением M полупрямой из $\mathbb{R}$, например $[0, +\infty[$, в E, таким, что $M(0)=b$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\overrightarrow{M(t)-b}\| = +\infty$.

имеет только один прообраз α_0 при отображении H и если существуют такая открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки a_0 в E и такая открытая окрестность $\mathscr{U}$ точки α_0 в Σ, что $H^{-1}(\mathscr{V})=\mathscr{U}$, а отображение H является C^1-диффеоморфизмом окрестности $\mathscr{U}$ на гиперповерхность $H(\mathscr{U})=\Sigma_0$ класса C^1 из $\mathscr{V}$. Используя теоремы об обратных функциях и о постоянстве ранга (теоремы 29 и 33_5 гл. III), а также компактность Σ, можно доказать, что эти свойства будут выполняться тогда, когда точка a_0 имеет только один прообраз α_0 в Σ, отображение H принадлежит классу C^1 в окрестности точки α_0 и $H'(\alpha_0)$ является инъективным отображением или отображением ранга $N-1$ множества $\vec{T}(\alpha_0;\ \Sigma)$ в $\vec{E}$.

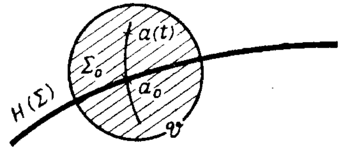

Рис. 12

Отображение H переносит ориентацию окрестности $\mathscr{U}$ (определенную многообразием $\vec{\Sigma}$) на некоторую ориентацию многообразия $\Sigma_0=H(\mathscr{U})$. Это приводит к трансверсальной ориентации этой гиперповерхности, соответствующей ее ориентации, определенной заданной ориентацией пространства $\vec{E}$. Теперь можно сказать, что переменная точка a пересекает цикл в точке a_0 в положительном направлении, если она описывает траекторию класса C^1, $t\to a(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, $a(t_0)=a_0$, $a(t)\notin H(\Sigma)$ для $t\neq t_0$, и если вектор скорости в момент t_0 трансверсально положителен относительно Σ_0 (см. рис. 12).

Теорема 63. *Пусть $H\,|\vec{\Sigma}$ есть $(N-1)$-мерный цикл в N-мерном ориентированном аффинном пространстве $\vec{E}$. Если точка a из E пересекает образ цикла в регулярной точке в положительном направлении, то индекс цикла относительно точки a уменьшается на единицу.*

Доказательство. Сохраним обозначения, введенные перед формулировкой теоремы. Пусть $a_1=a(t_1)$, $a_2=a(t_2)$ — концы рассматриваемой траектории. Нам надо доказать, что

$$I(H\,|\,\vec{\Sigma};\ a_2)=I(H\,|\,\vec{\Sigma};\ a_1)-1,$$

или (VI, 8; 60)

$$I_2=I_1-1.$$

Если воспользоваться переносом, то задача сведется к доказательству соотношения

$$I(H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,|\,\vec{\Sigma};\ a_1)=I(H\,|\,\vec{\Sigma};\ a_1)-1. \qquad \text{(VI, 8; 61)}$$

Нам надо сравнить индексы I_2 и I_1 двух различных циклов *относительно одной и той же точки* a_1.

Мы знаем, что в E существует гомотопия, переводящая один цикл в другой. Это отображение $\tilde{H}$ множества $[t_1,\ t_2]\times\Sigma$ в E, определенное соотношением

$$(t,\ x)\to\tilde{H}(t,\ x)=H(x)+\overrightarrow{a_1-a(t)}. \qquad \text{(VI 8; 62)}$$

Для вычисления индексов I_2 и I_1 можно заменить $H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,|\vec{\Sigma}$ и $H|\vec{\Sigma}$ эквивалентными циклами $\tilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}$ и $\tilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\vec{\Sigma}$ и применить формулу (VI, 8; 21) (в которой надо заменить отрезок $[0,\ 1]$ на $[t_1,\ t_2]$):

$$\tilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}+\tilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\overleftarrow{\Sigma}=\tilde{H}\,|\,b([t_1,\ t_2]\times\vec{\Sigma}), \qquad \text{(VI, 8; 63)}$$

где искомая разность I_2-I_1 будет индексом цикла левой части в точке a_1.

Но мы находимся в условиях применимости первого случая первой части доказательства теоремы 61.

Цикл, записанный справа, является границей в E. Кроме того, прообраз точки a_0 при отображении $\tilde{H}$ является единственной точкой $(t,\ x)$ из $[t_1,\ t_2]\times\Sigma$, такой, что

$$\overrightarrow{H(x)-a(t)}=\vec{0}, \qquad \text{(VI, 8; 64)}$$

т. е. точкой $(t_0,\ \alpha_0)$ $(H(\alpha_0)=a_0)$, поскольку по предположению траектория пересекается с Σ в единственной точке a_0, соответствующей моменту времени t_0. В окрестности этой точки отображение $\tilde{H}$ принадлежит классу C^1, поскольку этому классу принадлежит траектория, а также отображение H в окрестности точки α_0. С другой стороны, производную $\tilde{H}'(t_0,\ \alpha_0)$ легко вычислить. В дифференциальных обозначениях эта производная записывается так:

$$(dt,\ d\xi)\to\frac{\partial\tilde{H}'}{\partial t}(t_0,\ \alpha_0)\,dt+\frac{\partial\tilde{H}'}{\partial\xi}(t_0,\ \alpha_0)\cdot\overrightarrow{d\xi}=$$
$$=-\vec{a}'(t_0)\,dt+H'(\alpha_0)\cdot\overrightarrow{d\xi}. \qquad \text{(VI, 8; 65)}$$

Поскольку ранг отображения $H'(\alpha_0)$ равен $N-1$, то оно переводит касательное пространство $\vec{T}(\alpha_0;\ \Sigma)$ в касательное пространство $\vec{T}(a_0;\ \Sigma_0)$. Так как вектор $\vec{a}'(t_0)$ трансверсален к пространству $\vec{T}(a_0; \Sigma)$, то отображение $\tilde{H}'(t_0; \alpha_0)$ переводит пространство $\vec{T}((t_0, \alpha_0); [t_1, t_2]\times\Sigma)$ в $\vec{E}$, а следовательно, имеет ранг N. Кроме того, это отображение преобразует единичный положительный вектор, касательный к $[t_1, t_2]$, в вектор $-\vec{a}'(t_0)$, трансверсально *отрицательный* относительно гиперповерхности Σ_0. Так как ориентация поверхности $\overset{\frown}{\Sigma}_0$ является результатом переноса ориентации многообразия $\overset{\frown}{\Sigma}$ при отображении H, то рассматриваемое отображение переводит положительный базис пространства $\vec{T}(\alpha_0; \overset{\frown}{\Sigma})$ в положительный базис пространства $\vec{T}(a_0; \overset{\frown}{\Sigma}_0)$. Следовательно, оно переводит положительный базис пространства $\vec{T}((t_0, \alpha_0); \overset{\frown}{[t_1, t_2]}\times\overset{\frown}{\Sigma})$ в некоторый отрицательный базис пространства $\vec{E}$.

Из результата, приведенного в конце 1-го случая 1-й части доказательства теоремы 61, теперь следует, что цикл, записанный в правой части соотношения (VI, 8; 63), принадлежит в $E-a$ классу C^0-гомологий $-\left(a_1^{(0)}\right)$. Следовательно, его индекс относительно точки a_1 равен -1, а так как этот индекс равен I_2-I_1, то теорема доказана.

Приложение к вычислению индексов в различных областях пространства, определенных некоторым циклом

Рассмотрим, например, цикл, изображенный на приведенном ниже рис. 13. Мы его будем рассматривать как особый цикл — образ тригонометрической окружности. Эту тригонометрическую окружность снабдим обычной канонической ориентацией. Тогда цикл можно рассматривать как кривую, имеющую направление обхода, указанное стрелками. В каждой области дополнения к этому циклу индекс сохраняет постоянное значение. Нетрудно узнать, чему равен этот индекс в каждой точке, вычислив $\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_a$, или вариацию аргумента (с началом в a). Однако это можно сделать значительно быстрее, заметив, что в связной компоненте бесконечности, т. е. для достаточно удаленных точек, индекс равен нулю и что каждый раз при пересечении границы в положительном (соответственно отрицательном) направлении индекс изменяется на -1 (соответственно $+1$).

В случае, изображенном на рис. 13, следует избегать пересекать кривую в особых точках, чтобы оставаться в условиях теоремы.

Следствие 1. *Пусть $H|\vec{\Sigma}$ — некоторый цикл ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$ и a — точка, не принадлежащая его образу. Предположим, что можно построить такой путь, идущий от точки a в бесконечность, который пересекает образ цикла только в конечном числе точек, каждая из которых является регулярной для образа цикла, причем в указанных точках путь пересекает цикл трансверсально. Тогда индекс $I(a)$ цикла относительно точки a равен алгебраическому числу пересечений пути и цикла, т. е. числу точек, в которых путь пересекает цикл (двигаясь от точки a в бесконечность) в положительном направлении, минус число точек, в которых путь пересекает цикл в отрицательном направлении.*

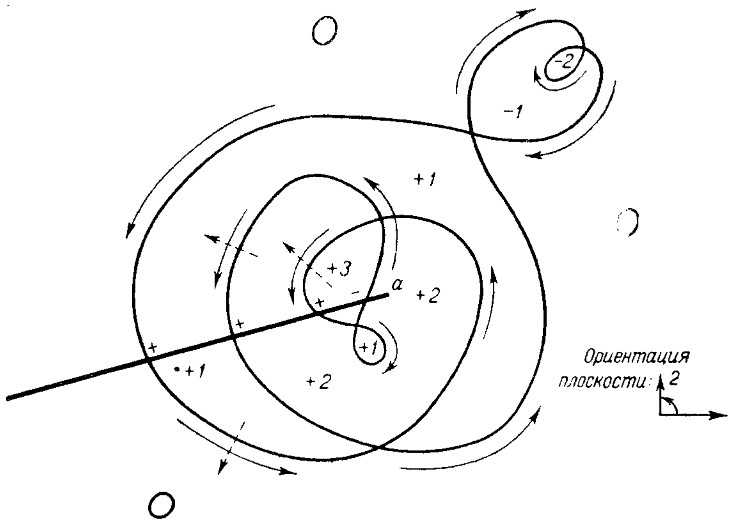

Рис. 13.

Стрелки указывают направление обхода, а пунктирные стрелки — трансверсальное направление > 0. (Напомним, что трансверсально положительный вектор и *следующий за ним* касательный положительный вектор образуют положительный базис в ориентированной плоскости!)

Эти выводы очевидны, поскольку при каждом пересечении (в предположениях теоремы) индекс изменяется на $+1$ или -1 и поскольку для достаточно удаленных точек индекс равен нулю. Следовательно, если i является алгебраическим числом пересечений, то $I(a)-i=0$, или $I(a)=i$. Этот процесс можно воспроизвести на рисунке, вычисляя индекс точки a с помощью пути, изображенного жирной линией и идущего от a до бесконечности. Результат, очевидно, не зависит от выбранного пути.

Следствие 2. *Пусть Σ — связная компактная ориентируемая гиперповерхность класса C^1 конечномерного аффинного пространства E. Тогда поверхность Σ делит пространство на две области: одна из них — это связная компонента бесконечности, в которой индекс Σ равен нулю, и вторая — это ограниченная область, в которой индекс Σ равен ± 1 в зависимости от ориентации Σ и E.*

Согласно замечанию 3°) после теоремы 28, гиперповерхность Σ делит пространство E на две области, одна из которых связана с бесконечностью, а другая ограничена. Если $\overset{\circ}{V}$ — ограниченная область, то $V = \overset{\circ}{V} \cup \Sigma$ является многообразием с краем, которое ориентировано, если ориентировано пространство E, границей которого является Σ. Если применить теорему 60, то можно убедиться, что гиперповерхность Σ принадлежит следующему классу C^1-гомологий множества $E - a$: 0, если $a \in \complement V$; $(a^{(1)})$, если $a \in \overset{\circ}{V}$ и если $\vec{\Sigma}$ имеет ориентацию множества $\widehat{bV}$; $-(a^{(1)})$, если $a \in \overset{\circ}{V}$ и $\vec{\Sigma} = \overleftarrow{bV}$. Таким образом, требуемый результат вытекает из сказанного ранее.

Однако, рассматривая разделение пространства E связной поверхностью Σ, мы показали в теореме 28, что существует *не более двух областей*. Для доказательства существования не менее двух областей мы воспользовались тем фактом, что поверхность имеет нормальное уравнение согласно недоказанному замечанию на стр. 808 I-го тома (это, действительно, очень трудно сделать). *Теперь мы можем дать доказательство следствия, не опирающееся на это замечание.*

Из доказательства теоремы 28 мы сохраним только полностью доказанный факт, а именно: имеется не более двух областей. Затем, поскольку поверхность $\vec{\Sigma}$ класса C^1 по предположению ориентирована в ориентированном пространстве $\vec{E}$, она имеет трансверсальную ориентацию и ее можно трансверсально пересечь в любой из ее точек. Индекс поверхности $\vec{\Sigma}$ тогда изменится на единицу. Таким образом, имеется *не менее двух* значений индекса для точек a из $\complement\Sigma$. Следовательно, имеется не менее двух областей, а значит, точно две области. Из рассуждений, проведенных на стр. 171, следует, что существует область, содержащая дополнение к каждому замкнутому шару, содержащему Σ, или связная компонента бесконечности. Согласно следствию 4 теоремы 62, в этой области индекс равен 0. Другая область ограничена, и индекс в ней равен ± 1.

Мы доказали меньше того, что принималось ранее без доказательства. Сейчас мы предполагаем поверхность Σ компактной и ориентируемой, а ранее считали ее только замкнутой и *доказывали*, что она ориентируема. Делаем то, что можно!

Однако если гиперповерхность Σ не только замкнута, но и компактна, то можно говорить об индексах, и наш настоящий результат относительно индексов 0 и ± 1 двух областей приобретает интерес.

Классы вычетов коцикла с изолированными особенностями

Пусть Ω — открытое множество N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — конечное множество из Ω и $\vec{\omega}$ — коцикл *степени* $N-1$ из $\Omega - A$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.

Классом вычетов коцикла $\vec{\omega}$ в точке $a_i \in A$ называется интеграл от $\vec{\omega}$ по произвольному C^1-циклу класса C^1-гомологий $(a_i^{(1)})$ в $\Omega - A$ (так как все эти циклы C^1-гомологичны, то интеграл будет одним и тем же). Этот класс вычетов является некоторым вектором из $\vec{F}$ (скаляром, если форма $\vec{\omega}$ принимает скалярные значения). Он зависит от ориентации $\vec{E}$ и изменяет знак одновременно с этой ориентацией. Этот класс, естественно, зависит только от поведения формы $\vec{\omega}$ в окрестности точки a_i, поскольку всегда можно найти соответствующие циклы в сколь угодно малой окрестности точки a_i. В частности, можно убедиться, что если форма $\vec{\omega}$ ограничена в окрестности точки a_i или, более общо, если ее норма $\|\vec{\omega}(x)\|$ является величиной порядка $o\left(\dfrac{1}{\|\overrightarrow{x - a_i}\|^{N-1}}\right)$ при x, стремящемся к a_i (относительно произвольной нормы в E), то класс вычетов в точке a_i заведомо равен нулю.

В самом деле, если мы возьмем сферу $\vec{\sigma}_i$ с центром в точке a_i радиуса ρ, снабженную канонической ориентацией, то для достаточно малых значений ρ (для того чтобы сфера $\vec{\sigma}_i$ принадлежала классу $(a^{(1)})$) имеет место оценка (VI, 6; 31):

$$\left\|\int_{\vec{\sigma}_i} \vec{\omega}\right\| \leqslant \left(\max_{\|\overrightarrow{x-a}\|=\rho} \|\vec{\omega}(x)\|\right) S_N \rho^{N-1}. \qquad \text{(VI, 8; 66)}$$

В силу предположений, сделанных относительно поведения $\vec{\omega}$ в окрестности точки a_i, из этой формулы следует, что интеграл по сфере $\vec{\sigma}_i$ стремится к нулю, когда ρ стремится к нулю. Эта величина постоянна и равна классу вычетов, а значит, этот класс вычетов равен нулю. Если в качестве дифференциальной формы ω мы возьмем дифференциальную форму ω_a, определяющую телесные углы относительно точки a, то ее класс вычетов в точке a равен площади S_N-сфер радиуса 1 в E.

Теорема 64. *Пусть $\vec{E}$ есть N-мерное аффинное ориентированное пространство, Ω — открытое множество E и A — конечное множество точек из Ω. Пусть, кроме того, $\vec{\omega}$ — коцикл степени $N-1$ в $\Omega - A$, и пусть $\vec{\Gamma}$ есть C^1-цикл из $\Omega - A$ или C^0-цикл конечной длины, если $N = 2\,(N-1=1)$, C^0-гомологичный 0 в Ω.*

Тогда, если обозначить через R_i класс вычетов формы $\vec{\omega}$ в точке a_i и через p_i — индекс цикла $\vec{\Gamma}$ относительно точки a_i, имеет место формула

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{l} p_i R_i \text{ [1]} \tag{VI, 8; 67}$$

Доказательство. Согласно теореме 61, цикл $\vec{\Gamma}$ C^0-гомологичен комбинации $\Sigma p_i \vec{\sigma}_i$ в $\Omega - A$. Поскольку коцикл $\vec{\omega}$ замкнут, то его интеграл по $\vec{\Gamma}$ равен его интегралу по C^∞-циклу $\Sigma p_i \vec{\sigma}_i$ (согласно следствию 4 теоремы 54, если $\vec{\Gamma}$ принадлежит классу C^1, и, согласно следствию 6, если $\vec{\Gamma}$ является C^0-циклом конечной длины и $N=2$), а в силу определения классов вычетов этот интеграл равен правой части формулы (VI, 8; 67).

Топологическая степень непрерывного отображения

Пусть $\vec{V} \subset \vec{\mathscr{V}}$ есть *N-мерное* компактное ориентированное многообразие *с краем* класса C^1, и пусть H — непрерывное отображение V в аффинное ориентированное пространство $\vec{E}$ той же размерности N. *Топологической степенью отображения H в точке $a \in E$*, не принадлежащей образу $H(bV)$ границы bV многообразия V, называется индекс цикла $H \mid \overrightarrow{bV}$ относительно

[1]) Если изменить ориентацию пространства E, то изменится знак чисел p_i и R_i. Это, конечно, не изменит интеграла $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega}$.

точки a[1]). Из теоремы 61 (1-й случай 1-й части доказательства) при условии, что прообраз точки a содержит только конечное число точек из $\overset{\circ}{V}$, в окрестности которых отображение H принадлежит классу C^1 и в каждой из которых производное отображение H имеет максимальный ранг, равный N, получается простая геометрическая интерпретация этой топологической степени. В самом деле, в этом случае топологическая степень отображения равна числу прообразов точки a, в окрестности которых отображение H сохраняет ориентацию, минус число прообразов точки a, в окрестности которых H изменяет ориентацию на противоположную. Интерпретации такого рода для других случаев не существует. Тем не менее эта топологическая степень постоянна, когда точка a непрерывно изменяется, не пересекая образ границы $H(bV)$. Согласно тому, что мы видели при доказательстве теоремы 61 (2-й случай 1-й части), если считать, что H принадлежит классу C^1, и если a — произвольная точка, не принадлежащая $H(bV)$, то для всех точек, достаточно близких к a, топологическая степень будет одинаковой и почти для всех этих точек допустима предыдущая геометрическая интерпретация. Если отображение H только непрерывно, то его можно приблизить некоторым отображением класса C^1, и мы приходим к предыдущему случаю. С другой стороны, всегда остается справедливым важный результат:

Теорема 65. *Если точка не покрывается образом $H(V)$, то топологическая степень отображения H в точке a равна нулю.*

В самом деле, в этом случае цикл $H|\overrightarrow{bV}$ является границей $H|\vec{V}$, и, следовательно, он C^0-гомологичен 0 в дополнении к точке a. Значит, его индекс в точке a равен нулю.

Обратное утверждение, очевидно, не верно. В самом деле, если точка a имеет два прообраза, в окрестности каждого из которых отображение H принадлежит классу C^1 и имеет производную порядка N, причем H сохраняет ориентацию в одной из этих окрестностей и меняет ее в другой, то топологическая степень отображения H в точке a равна нулю. Впрочем, если многообразие V не имеет границы ($bV = \emptyset$), топологическая степень равна 0 во всех точках a, если даже точка a лежит

[1]) Если изменится одна из двух ориентаций V или E, то топологическая степень также изменит знак. Если изменятся обе ориентации, то знак останется прежним.

Если V не имеет границы ($bV = \emptyset$), то топологическая степень равна нулю.

в $H(V)$. Может оказаться, что при произвольной и, в частности, нулевой топологической степени точка a имеет континуум прообразов!

Напротив, согласно теореме, *если топологическая степень в точке a отлична от 0, то точка a имеет непустой прообраз*: уравнение $H(x)=a$ имеет *не менее одного* решения в $\overset{\circ}{V}$. (Если топологическая степень равна $m \neq \pm 1$ и $\neq 0$, то может случиться, что это уравнение имеет только одно решение α, имеющее своего рода «кратность». Это может быть тогда, когда отображение H в окрестности точки α принадлежит классу C^1 и $H'(\alpha)$ имеет ранг $< N$.)

Доказательство того факта, что топологическая степень $\neq 0$, является мощным средством для получения теорем существования решения уравнений. С подобными примерами мы встретимся позже.

Топологическая степень в точке a отображения H многообразия $\vec{V}$ в пространство $\vec{E}$ называется также в силу данной выше геометрической интерпретации *алгебраическим числом покрытий точки a образом $\vec{V}$ при отображении H.*

Теорема 66. *Если отображение H_λ зависит от параметра λ и в условиях, указанных в следствии* 1 *теоремы* 62, *изменяется непрерывно вместе с λ, если точка a_λ также зависит от этого параметра и непрерывно изменяется вместе с ним и если ни при каком значении λ точка a_λ не принадлежит образу границы bV при отображении H_λ, то топологическая степень отображения H_λ многообразия $\vec{V}$ в точке a_λ непрерывно зависит от λ. Она остается постоянной, если параметр λ меняется в некотором связном подмножестве.*

Эта теорема является очевидным следствием теоремы 62.

Посмотрим теперь, как при фиксированных H и a топологическая степень зависит от V. Будем при этом учитывать, что если изменять V в $\tilde{V}$ так, чтобы прообраз $H^{-1}\{a\}$ в V оставался неизменным, то топологическая степень меняться не будет.

Теорема 67. *Пусть H — непрерывное отображение N-мерного ориентированного многообразия $\vec{\tilde{V}}$ в N-мерное ориентированное пространство $\vec{E}$. Пусть V_1 и V_2 — два компактных многообразия с краем из $\tilde{V}$. Если прообразы $H^{-1}\{a\} \cap V_1$ и $H^{-1}\{a\} \cap V_2$ совпадают и не пересекаются с bV_1 и bV_2, то топологические степени в точке $a \in \vec{E}$ отображений H многообразий $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ в $\vec{E}$ равны.*

Доказательство. Положим $W = V_1 \cup V_2$, $K_1 = H(W - \overset{\circ}{V}_1)$ и $K_2 = H(W - \overset{\circ}{V}_2)$. Здесь W — компактное множество из $\tilde{V}$, а множества K_1 и K_2 компактны в E, поскольку они являются образами компактов при отображении H. Обозначим через δ наименьшее из расстояний (относительно некоторой нормы в E) от точки a до K_1 и K_2. Если отображение H компакта W в E заменить некоторым другим отображением H_0 и точку a — другой точкой a_0 так, что $\|\overrightarrow{H - H_0}\| < \delta/2$, $\|\overrightarrow{a - a_0}\| < \delta/2$, то $H_0(W - \overset{\circ}{V}_1)$ и $H_0(W - \overset{\circ}{V}_2)$ не будут содержать точки a_0. Следовательно, прообраз $H_0^{-1}(\{a_0\})$ в W останется в $\overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2$ или же *прообразы точки a_0 при отображении H_0 в $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ совпадут.*

Однако при этих условиях можно будет выбрать H_0 из класса C^1 на W (теорема 52) таким образом, чтобы $H_0^{-1}(\{a_0\})$ было конечным множеством и чтобы в каждой точке этого множества отображение H_0' имело ранг, равный N (2-й случай первой части доказательства теоремы 61). В силу 1-го случая первой части доказательства теоремы индексы $H_0 | \widehat{bV_1}$ и $H_0 | \widehat{bV_2}$ в точке a_0 равны числу точек прообразов точки a_0 при отображении H_0 в $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$, в которых H_0 сохраняет ориентацию-уменьшенному на число точек прообраза, в которых ориента, ция изменяется на противоположную. Отсюда следует, что оба этих индекса равны. Индексы $H_0 | \widehat{bV_1}$ и $H_0 | \widehat{bV_2}$ в точке a_0 те же самые, что и индексы $H | \widehat{bV_1}$ и $H | \widehat{bV_2}$ в точке a (теорема 62), и являются топологическими степенями $H | \vec{V}_1$ и $H | \vec{V}_2$ в точке a.

Теорема 68 (Руше). *Пусть H — непрерывное отображение ориентированного компактного многообразия с краем $\vec{V}$ размерности N в открытое множество Ω из N-мерного ориентированного аффинного пространства $\vec{E}$. Пусть, кроме того, K — непрерывное отображение V в соответствующее векторное пространство $\vec{E}$. Если образ границы bV при отображении H не содержит точки a и если в каждой точке x границы bV имеет место неравенство*

$$\|\vec{K}(x)\| < \|\overrightarrow{H(x) - a}\|, \tag{VI, 8; 68}$$

то множество $(H + \vec{K})(bV)$ не содержит точки a и отображение $H + \vec{K}$ имеет в точке a ту же топологическую степень, что и отображение H.

Если неравенство (VI, 8; 68) *справедливо со знаком* $\leqslant$ *вместо* $<$, *то нельзя утверждать, что множество* $(H+\vec{K})(bV)$ *не содержит точки* a, *однако если это так, то заключение теоремы останется справедливым.*

Доказательство. Предположим сначала, что имеет место строгое неравенство. Согласно (VI, 8; 68), для любой точки $x \in bV$ отрезок $[H(x),\ H(x)+\vec{K}(x)]$ целиком лежит в $\complement a$. Из леммы к теореме 51 следует, что циклы $H\,|\,\widehat{bV}$ и $H+\vec{K}\,|\,\widehat{bV}$ гомотопны в $\complement a$, а значит, гомологичны и имеют один и тот же индекс в точке a, откуда и вытекает требуемый результат.

Предположим теперь, что справедливо неравенство со знаком $\leqslant$. Тогда $(H+\vec{K})(bV)$ может содержать точку a (например, если $\vec{E}$ является векторным пространством, $\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{K}=-\vec{H}$), и топологическая степень не имеет смысла. Однако если это множество точки a не содержит, то топологическая степень равна топологической степени отображения $H+(1-\varepsilon)\vec{K}$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ (теорема 66), и для отображения $(1-\varepsilon)\vec{K}$ справедливо строгое неравенство $<$, а значит, топологическая степень совпадает с топологической степенью отображения H.

Следствие 1 (теорема Даламбера). *Каждый полином комплексной переменной степени* m *с комплексными коэффициентами имеет* m *корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Как уже отмечалось выше, для доказательства существования корней некоторого уравнения мы используем теорию топологических степеней.

Доказательство. Как обычно, достаточно показать, что при $m \geqslant 1$ полином имеет хотя бы один корень. Выберем сначала число $R>0$ так, чтобы для $|z|\geqslant R$ было справедливо неравенство

$$|P(z)-a_0z^m| < |a_0z^m|, \tag{VI, 8; 69}$$

где a_0 — коэффициент при старшей степени полинома $P(z)$.

Теперь можно применить теорему Руше с $H(z)=a_0z^m$ и $K(z)=P(z)-a_0z^m$. Она показывает, что отображение, определенное полиномом P, круга $|z|\leqslant R$ в комплексную плоскость имеет ту же топологическую степень в точке 0, что и отображение $z\to a_0z^m$. Согласно определению, эта степень равна индексу относительно точки 0 цикла, определенного отображением $H\colon z \to Z = a_0 z^m$ окружности $\vec{\Gamma}\colon |z| = R$, снабженной канонической ориентацией, в $\mathbb{C}$. В силу (VI, 8; 57) этот индекс равен

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{H\,|\,\vec{\Gamma}} \frac{dZ}{Z} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\vec{\Gamma}} m\frac{dz}{z}, \qquad \text{(VI, 8; 70)}$$

т. е. индексу $\vec{\Gamma}$, умноженному на m, или равен m.

Мы доказали, что *отображение круга* $|z| \leqslant R$ *в комплексную плоскость* $\mathbb{C}$, *определенное отображением* P, *имеет топологическую степень* m *в точке* 0. Поскольку $m \neq 0$, то в этом круге имеется *хотя бы один корень*. По индукции, исходя из существования корня, можно доказать существование m корней. *Однако, по-видимому, этот результат можно получить и прямо, используя тот факт, что топологическая степень равна* m.

В этом мы убедимся в теореме 25 гл. VII.

Следствие 2. *Пусть* E — *конечномерное нормированное аффинное пространство над полем вещественных чисел. Каждое непрерывное отображение замкнутого шара этого пространства в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Здесь мы снова имеем приложение понятия топологической степени к доказательству существования корней некоторого уравнения.

Доказательство. 1°) Предположим сначала, что в пространстве E введена евклидова норма. Пусть f — данное непрерывное отображение шара B с центром a радиуса R в себя. Если как-нибудь ориентировать векторное пространство $\vec{E}$, то тем самым будут ориентированы пространство E и шар B. Обозначим через $\vec{H}$ отображение $x \to \overrightarrow{x - a}$ шара $\vec{B}$ в $\vec{E}$, имеющее топологическую степень 1 в $\vec{0}$ (поскольку $\vec{0}$ имеет единственный прообраз — точку a, в котором якобиан отображения $\vec{H}$ равен $1 > 0$), и через $\vec{K}$ — отображение $x \to \overrightarrow{-(f(x) - a)}$ шара $\vec{B}$ в $\vec{E}$[1]).

Так как f отображает B в B, то для H, $\vec{K}$ и $\vec{a} = \vec{0} \in \vec{E}$ при $x \in bB$ имеет место неравенство (VI, 8; 68) со знаком $\leqslant$:

[1]) Топологические степени здесь не зависят от выбора ориентации векторного пространства $\vec{E}$, поскольку при изменении ориентации $\vec{E}$ одновременно меняется ориентация пространства E, а значит, и шара B.

$\|\overrightarrow{f(x)-a}\| \leqslant R = \|\overrightarrow{x-a}\|$. Здесь $(H+\vec{K})(x) = \overrightarrow{x-f(x)}$. Следовательно, согласно теореме Руше, имеем

a) либо образ bB при отображении $H+\vec{K}$ содержит $\vec{0}$ и существует точка x, принадлежащая границе bB, а значит, и шару B, такая, что $(H+\vec{K})(x) = \vec{0}$, откуда $x = f(x)$;

b) либо это не так; тогда топологическая степень отображения $(H+K)(\vec{x})$ в $\vec{0}$ равна $+1$ и существует точка x, принадлежащая $\overset{\circ}{B}$, а значит, и B, такая, что $x = f(x)$.

Следствие доказано в обоих случаях.

2°) Предположим теперь, что в пространстве E введена произвольная норма. Тогда предыдущий метод не применим, поскольку сфера не будет больше многообразием [1]).

Заметим, что доказанное свойство имеет чисто топологический характер. Будучи справедливым для некоторого евклидова шара, оно остается справедливым для любого топологического пространства, гомеоморфного евклидову шару. Далее, *шары относительно двух произвольных норм из E гомеоморфны.* Следовательно, каждый шар гомеоморфен евклидову шару. В самом деле, пусть $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — две произвольные нормы в $\vec{E}$. Рассмотрим отображение $\vec{h}$ из $\vec{E}$ в $\vec{E}$, определенное по формуле

$$\vec{x} \to \vec{h}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\vec{x} \text{ при } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{h}(\vec{0}) = \vec{0}. \qquad \text{(VI, 8; 71)}$$

Это отображение непрерывно в каждой точке $\neq \vec{0}$, поскольку нормы непрерывны, а знаменатель не обращается в нуль. Это отображение непрерывно также и в нуле, так как две нормы в $\vec{E}$ эквивалентны (теорема 13 гл. II), и тогда отношение $\|\vec{x}\|_1/\|\vec{x}\|_2$ ограничено (теорема 12 гл. II) и $\vec{h}(\vec{x})$ стремится к $\vec{0}$ при $\vec{x}$, стремящемся к $\vec{0}$. Так как

$$\|\vec{h}(\vec{x})\|_2 = \|\vec{x}\|_1 \quad \left(\text{и } \|\vec{h}(\vec{x})\|_1 = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\right), \qquad \text{(VI, 8; 72)}$$

то $\vec{h}$ отображает единичный шар B_1 в норме $\| \ \|_1$ в единичный шар B_2 в норме $\| \ \|_2$.

---

[1]) При норме $\|(x_1, x_2, \ldots, x_N)\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} |x_i|$ в $\mathbb{R}^N$ шар является кубом. При других нормах он может быть устроен гораздо сложнее!

Кроме того, отображение $\vec{h}$ имеет обратное отображение $\vec{k}$:

$$\vec{y} \to \vec{k}(\vec{y}) = \frac{\|\vec{y}\|_2}{\|\vec{y}\|_1}\vec{y}\,^{1)}. \qquad \text{(VI, 8; 73)}$$

Это отображение $\vec{E}$ в $\vec{E}$ непрерывно и переводит B_2 в B_1. Следовательно, $\vec{h}$ является гомеоморфизмом шара B_1 на шар B_2, чем и заканчивается доказательство следствия.

Замечания. 1°) *В этом доказательстве предположение о конечномерности пространства E является существенным.* С одной стороны, оно позволяет применить теорию топологической степени, а, с другой стороны, в п. 2°) приводит к эквивалентным нормам. Можно показать, что аналогичные теоремы будут неверными, если E является бесконечномерным нормированным аффинным пространством. Однако имеет место замечательная теорема, которую мы примем без доказательства:

Теорема 68_2 (теорема Шаудера о неподвижной точке). *Пусть E — банахово пространство. Тогда любое непрерывное отображение выпуклого компакта K из E в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Если пространство E конечномерно, то все шары в нем компактны и выпуклы.

2°) Эта теорема о неподвижной точке не связана с теоремой 46 гл. II. Наложенные здесь условия значительно менее ограничительны, поскольку H не обязательно является сжатием. Однако здесь доказывается только существование неподвижной точки, а не ее единственность. Например, если H является тождественным отображением, то все точки сферы будут неподвижными точками такого преобразования.

Теорема 69. *Пусть X: $x \to \vec{X}(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к некоторой сфере N-мерного евклидова пространства E. Тогда, если число N нечетно, существует по крайней мере одна точка x сферы, в которой вектор $\vec{X}(x)$ обращается в нуль.*

Доказательство. Ориентируем каким-нибудь образом пространство $\vec{E}$. Можно всегда считать, что Σ — единичная сфера из $\vec{E}$. Поскольку сфера Σ является компактным много-

---

[1]) В самом деле, для доказательства достаточно показать, что $\vec{h}\circ\vec{k}$ и $\vec{k}\circ\vec{h}$ являются тождественными отображениями. Например,

$$\vec{k}\circ\vec{h}\,(x) = \vec{k}\left[\frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\vec{x}\right] = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\vec{k}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}\frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_1}\vec{x} = \vec{x}.$$

образием из $\vec{E}$, которое мы можем снабдить его канонической ориентацией в $\overleftarrow{E}$, то поле $\vec{X}$ можно рассматривать как поле, определяющее некоторое непрерывное отображение этой сферы $\vec{\Sigma}$ в $\vec{E}$, т. е. некоторый цикл $\vec{X}|\vec{\Sigma}$ на $\vec{E}$.

Предположим, что поле $\vec{X}$ нигде в нуль не обращается. Тогда образ этого цикла не содержит нуля пространства и, следовательно, имеет некоторый индекс в $\vec{0}$. Обозначим через $\vec{Y}$ поле нормальных единичных векторов, выходящих из сферы. Это поле также определяет некоторый цикл $\vec{Y}|\vec{\Sigma}$ из $\vec{E}$, и в силу того, что $\vec{Y}$ является тождественным отображением Σ в $\vec{E}$, индекс этого цикла относительно начала равен $+1$. При любом t, $0 \leqslant t < 1$, вектор $t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Y}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Следовательно, если рассмотреть отображение $[0, 1] \times \Sigma$ в $\vec{E}$, заданное по формуле

$$(t, \vec{x}) \to t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Y}(\vec{x}), \tag{VI, 8; 74}$$

то оно определит некоторую гомотопию между циклом $\vec{X}|\vec{\Sigma}$ и циклом $\vec{Y}|\vec{\Sigma}$ в $\complement\vec{0}$. Отсюда следует, что *индекс цикла $\vec{X}|\vec{\Sigma}$ относительно $\vec{0}$ также равен $+1$.*

Обозначим через $\vec{Z}$ непрерывное поле единичных векторов, нормально входящих в сферу. Отображение $\vec{Z}$ поверхности $\vec{\Sigma}$ в $\vec{E}$ определяет некоторый цикл. Его индекс можно вычислить с помощью интеграла от телесного угла ω_0 относительно точки 0:

$$I(\vec{Z}|\vec{\Sigma};\ 0) = \frac{1}{S_N} \int_{\vec{Z}|\vec{\Sigma}} \omega_0 = \frac{1}{S_N} \int_{\vec{\Sigma}} \vec{Z}^* \omega_0. \tag{VI, 8; 75}$$

Отображение $\vec{Z}$ является обычной симметрией $\vec{x} \to -\vec{x}$ относительно начала координат. Из формулы (VI, 8; 51) следует, что $\vec{Z}^*\omega = (-1)^N \omega$, и мы получаем такое соотношение:

$$I(\vec{Z}|\vec{\Sigma};\ \vec{0}) = \frac{(-1)^N}{S_N} \int_{\vec{\Sigma}} \omega_0 = (-1)^N. \tag{VI, 8; 76}$$

Если теперь воспользоваться гомотопией

$$(t, \vec{x}) \to t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Z}(\vec{x}), \tag{VI, 8; 77}$$

то проведенное выше рассуждение показывает, что цикл $\vec{X}|\vec{\Sigma}$ имеет тот же индекс в точке $\vec{0}$, что и цикл $\vec{Z}|\vec{\Sigma}$, т. е. $(-1)^N$.

Если N — нечетное число, то равенство $(-1)^N = 1$ невозможно. Значит, векторное поле обращается в нуль хотя бы в одной точке сферы, и мы пришли к противоречию с исходным предположением. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Это доказательство, очевидно, не пригодно при четном N, так как в этом случае поле выходящих векторов $\vec{Y}$ и поле входящих векторов $\vec{Z}$ определяют два цикла $\vec{Y}\,|\,\vec{\Sigma}$ и $\vec{Z}\,|\,\vec{\Sigma}$ одного и того же индекса $+1$ в точке $\vec{0}$. Впрочем, в этом случае теорема становится неверной, и существует поле непрерывных векторов, нигде не обращающееся в нуль на сфере. Если, например, рассматривается тригонометрическая окружность ($N = 2$) и если в каждой точке окружности построен единичный вектор положительной полукасательной, то тем самым будет определено непрерывное векторное поле всюду $\neq \vec{0}$ на окружности. Значительно более сложными методами можно построить такие поля на сферах в евклидовых пространствах произвольной четной размерности.

Следствие. *Пусть f — непрерывное отображение сферы Σ N-мерного аффинного евклидова пространства E в себя. Тогда, если число N нечетно, найдется хотя бы одна точка $x \in \Sigma$, образ которой при отображении f будет совпадать с самой точкой x или будет точкой сферы Σ, диаметрально противоположной точке x.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное векторное поле $x \to \overrightarrow{f(x) - x}$. Это, конечно, не поле касательных векторов. Однако если в каждой точке сферы мы ортогонально спроектируем векторы поля на касательную плоскость, то тем самым будет определено непрерывное поле векторов, касательных к сфере. Поскольку N нечетно, существует хотя бы одна точка, проекция которой равна нулю, т. е. точка, в которой вектор $\overrightarrow{f(x) - x}$ является нормалью. Поскольку $f(x)$ является точкой сферы, то это случится только в том случае, когда эта точка совпадает с точкой x или является точкой, диаметрально противоположной точке x.

Обобщение теории топологической степени

Теория топологической степени допускает значительное обобщение.

Пусть $\vec{V}$ и $\vec{W}$ — ориентированные многообразия *одной и той же размерности* N, где V, быть может, является многообразием с краем, но всегда компактным, а многообразие W — есть многообразие без края. Пусть H — такое непрерывное отображение V в W, что образ bV при отображении H не содержит точки $a \in W$. Тогда можно определить топологическую степень отображения H в точке a. Эта топологическая степень обладает свойствами, аналогичными тем, какие мы отмечали выше. Представляет интерес случай, когда V является компактным многообразием без края. Тогда можно определить топологическую степень отображения H многообразия $\vec{V}$ в многообразие $\vec{W}$ в каждой точке a из W. Эта топологическая степень непрерывно изменяется вместе с изменением точки a и, следовательно, постоянна на каждой связной компоненте множества W.