Глава VII

Функции комплексных переменных

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЕЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Все изложенное в гл. III дифференциальное исчисление пригодно как для случая поля вещественных, так и для случая поля комплексных чисел, за исключением теории максимумов и минимумов (и, в частности, вариационного исчисления), где существенно предположение, что рассматриваемые функции принимают вещественные значения. С другой стороны, в гл. V о дифференциальных уравнениях всегда рассматривались только функции вещественной переменной, т. е. функции, определенные на некотором интервале *вещественной оси* $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве над полем вещественных или комплексных чисел.

Как мы отмечали в начале гл. III, если E и F — аффинные нормированные пространства над полем $\mathbb{C}$, то тем более их можно считать аффинными нормированными пространствами над полем $\mathbb{R}$, и всякое отображение открытого множества Ω из E в F, дифференцируемое относительно $\mathbb{C}$, и подавно дифференцируемо относительно $\mathbb{R}$. Однако в этом случае производное отображение $f'(a)$ в точке $a \in \Omega$ является не только $\mathbb{R}$-линейным, но также и $\mathbb{C}$-линейным отображением $\vec{E}$ в $\vec{F}$.

Обратно, если f — некоторое отображение Ω в F, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке a, и если его производная $f'(a)$ не только $\mathbb{R}$-линейна, но и $\mathbb{C}$-линейна, то оно $\mathbb{C}$-дифференцируемо и имеет ту же производную $f'(a)$. Это непосредственно вытекает из определения (III, 3; 13).

Теорема 1. *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства над полем комплексных чисел. Для того чтобы $\mathbb{R}$-линейное отображение L пространства $\vec{E}$ в пространство $\vec{F}$ было $\mathbb{C}$-линейным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$ имело место равенство*

$$L(i\vec{X}) = iL(\vec{X}). \qquad \text{(VII, 1; 1)}$$

Если пространство $\vec{E}$ конечномерно и $(\vec{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, есть $\mathbb{C}$-базис $\vec{E}$, то достаточно, чтобы для каждого элемента базиса *выполнялось соотношение*

$$L(i\vec{e}_j) = iL(\vec{e}_j). \qquad \text{(VII, 1; 2)}$$

Доказательство. Написанные условия очевидным образом необходимы, и поэтому нам надо доказать только их достаточность.

Если (VII, 1; 1) выполнено и если $\lambda + i\mu$ — произвольное комплексное число, то

$$L((\lambda + i\mu)\vec{X}) = \lambda L(\vec{X}) + \mu L(i\vec{X}) = (\lambda + i\mu) L(\vec{X}), \qquad \text{(VII, 1; 3)}$$

чем доказывается $\mathbb{C}$-линейность отображения L.

Далее, если пространство $\vec{E}$ конечномерно, то в силу $\mathbb{R}$-линейности L для выполнения соотношения (VII, 1; 1) достаточно, чтобы оно выполнялось для элементов $\mathbb{R}$-базиса $\vec{E}$. Но если это соотношение выполнено для элементов $\vec{e}_j$ некоторого $\mathbb{C}$-базиса, то оно также будет выполняться для элементов $i\vec{e}_j$, ибо

$$L(i\vec{e}_j) = iL(\vec{e}_j), \quad \text{или} \quad L(-\vec{e}_j) = iL(i\vec{e}_j), \quad \text{или} \quad L(i \cdot i\vec{e}_j) = iL(i\vec{e}_j),$$

а множество элементов $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$ составляет $\mathbb{R}$-базис пространства $\vec{E}$.

Следствие 1. *Пусть E и F — $\mathbb{C}$-аффинные пространства и f — отображение открытого множества $\Omega \subset E$ в F, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке $a \in \Omega$. Для того чтобы f было $\mathbb{C}$-дифференцируемым в точке a, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение*

$$f'(a) \cdot (i\vec{X}) = if'(a) \cdot \vec{X} \quad \textit{для любого} \quad \vec{X} \in \vec{E}. \qquad \text{(VII, 1; 4)}$$

Замечание. Вернемся к случаю конечномерного пространства E. Пусть $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторая $\mathbb{C}$-система координат в E. Пусть вектор $\vec{X} \in \vec{E}$ и z_j — его (комплексные) координаты относительно базиса $\vec{e}_j$. Тогда $\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} z_j\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j\vec{e}_j + y_j(i\vec{e}_j))$. Отсюда следует, что $x_j = \operatorname{Re} z_j$ и $y_j = \operatorname{Im} z_j$ являются координатами вектора $\vec{X}$ относительно $\mathbb{R}$-базиса $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$. Можно сказать, что если через x_j и y_j обозначены координатные функции относительно $\mathbb{R}$-системы координат, образованной из 0 и векторов $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, то $z_j = x_j + iy_j$ — координатные функции относительно $\mathbb{C}$-системы координат, образованной из 0 и $\vec{e}_j$. Если отображение f $\mathbb{R}$-дифференцируемо, то оно имеет частные производные $f'(a)\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j=\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}(a)$ в вещественном смысле. Но если оно $\mathbb{C}$-дифференцируемо, то это отображение имеет производные $f'(a)\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}(a)$, $f'(a)\cdot i\vec{e}_j=$ $=if'(a)\cdot\vec{e}_j=i\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}(a)$ также и в комплексном смысле. Другими словами, в силу (VII, 1; 2) имеет место

Следствие 2. *Если E конечномерно и если векторы $\vec{e}_j$ составляют $\mathbb{C}$-базис в $\vec{E}$, то отображение $f\colon \Omega\to F$, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке $a\in\Omega$, будет $\mathbb{C}$-дифференцируемым тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}(a)=i\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(a),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{VII, 1; 5}$$

В этом случае

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}(a)=\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}(a)=-i\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}(a)=f'(a)\cdot\vec{e}_j. \tag{VII, 1; 6}$$

Замечание. Соотношения (VII, 1; 6) можно получить иначе: при фиксированных $x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots$ $\ldots, x_n, y_n$ отображение f можно рассматривать как сложную функцию x_j, y_j, образованную при помощи z_j, и можно применить теорему о сложных функциях:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_j}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j},\qquad \frac{\partial\vec{f}}{\partial y_j}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial y_j}=i\frac{\partial\vec{f}}{\partial z_j}.$$

Этот способ очень прост, но одновременное присутствие производных в вещественном и в комплексном смысле требует некоторых предосторожностей, и давать его строгое обоснование менее удобно, чем применять предыдущий метод.

Следствие 3. *Пусть f — отображение некоторого открытого множества Ω аффинного $\mathbb{C}$-пространства E в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а P и Q — вещественная и мнимая части f, т. е. $f=P+iQ$. Тогда если P и Q являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми функциями на Ω, то для того чтобы функция f была $\mathbb{C}$-дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы для* *каждого* $\vec{X} \in \vec{E}$ *имело место равенство*

$$D_{i\vec{X}} P = -D_{\vec{X}} Q. \qquad \text{(VII, 1; 6}_2\text{)}$$

Если $E = \mathbb{C}^n$, *то это условие запишется (если последовательно положить* $\vec{X} = \vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$*) в виде условий Коши — Римана*

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial Q}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_j} = -\frac{\partial Q}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(VII, 1; 7)}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть вещественную и мнимую части соотношения (VII, 1; 5).

Следствие 4. *Если* Ω — *открытое связное множество* $\mathbb{C}$-*аффинного пространства* E, f — $\mathbb{C}$-*дифференцируемая комплекснозначная функция на* Ω *с постоянной вещественной частью в* Ω, *то и сама функция* f *постоянна.*

В самом деле, мнимая часть Q отображения f имеет производную, которая в силу соотношения (VII, 1; 6_2) равна нулю. Поскольку множество Ω связно, то по теореме 22 гл. III функция Q постоянна.

Следствие 5. *Если комплекснозначная* $\mathbb{C}$-*дифференцируемая функция* f *определена на связном множестве* Ω *из* E *и если ее модуль* $|f|$ *постоянен в* Ω, *то и сама функция* f *постоянна.*

В самом деле, для каждого $\vec{X} \in \vec{E}$

$$\frac{1}{2} D_{\vec{X}} |f|^2 = \frac{1}{2} D_{\vec{X}} (P^2 + Q^2) = P D_{\vec{X}} P + Q D_{\vec{X}} Q = P D_{\vec{X}} P - Q D_{i\vec{X}} P = 0.$$

Заменяя $\vec{X}$ на $i\vec{X}$, получаем

$$Q D_{\vec{X}} P + P D_{i\vec{X}} P = 0.$$

В точке $a \in \Omega$ мы имеем два линейных уравнения с двумя неизвестными $D_{\vec{X}} P(a)$ и $D_{i\vec{X}} P(a)$ с определителем $P^2(a) + Q^2(a)$. Если постоянная $P^2 + Q^2 = |f|^2$ равна нулю, то следствие доказано. В противном случае $D_{\vec{X}} P(a) = 0$, $D_{i\vec{X}} P(a) = 0$ для каждой точки a и каждого $\vec{X}$. Но тогда производная P' равна нулю на Ω, и точно так же равна нулю производная Q', а значит, поскольку Ω связно, функция f постоянна.

Введение символов $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$

Пусть E — конечномерное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $(\vec{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — некоторый $\mathbb{C}$-базис $\vec{E}$. Если, как в предыдущем случае, рассмотреть вещественные координатные функции x_j, y_j, то можно вычислить их дифференциалы dx_j, dy_j.

Точно так же комплексные координаты z_j являются комплекснозначными функциями на E и имеют дифференциалы dz_j. При этом справедливы формулы $dz_j = dx_j + i\,dy_j$. Переходя к комплексно сопряженным функциям $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, получим $d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$.

Пусть теперь f — отображение открытого множества Ω из E в аффинное пространство F над комплексным полем. Будем предполагать только, что f $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $a \in \Omega$. Тогда ее производная в дифференциальных обозначениях гл. III выразится в виде

$$\vec{df} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j} dy_j. \qquad \text{(VII, 1; 8)}$$

Если мы запишем dx_j и dy_j как функции dz_j и $d\bar{z}_j$:

$$dx_j = \frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2}, \quad dy_j = \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i}, \qquad \text{(VII, 1; 9)}$$

то получим новое выражение

$$\vec{df} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} - i\,\frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j}\right) dz_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} + i\,\frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j}\right) d\bar{z}_j\right). \qquad \text{(VII, 1; 10)}$$

Тем самым мы получаем (напомним еще раз, что речь идет о функции, *лишь $\mathbb{R}$-дифференцируемой*):

$$\frac{\vec{\partial f}}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} - i\,\frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\vec{\partial f}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} + i\,\frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j}\right), \qquad \text{(VII, 1; 11)}$$

откуда

$$\frac{\vec{\partial f}}{\partial x_j} = \frac{\vec{\partial f}}{\partial z_j} + \frac{\vec{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}, \quad \frac{\vec{\partial f}}{\partial y_j} = i\left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial z_j} - \frac{\vec{\partial f}}{\partial \bar{z}_j}\right), \qquad \text{(VII, 1; 11}_2\text{)}$$

так что производное отображение (еще раз в вещественном смысле) выражается в дифференциальных обозначениях особенно просто:

$$\vec{df} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\vec{\partial f}}{\partial z_j} dz_j + \frac{\vec{\partial f}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\right), \qquad \text{(VII, 1; 12)}$$

Введенные символы $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ очень удобны на практике. Условия (VII, 1; 5) непосредственно дают

Следствие 6. *Для того чтобы $\mathbb{R}$-дифференцируемое отображение $\vec{f}$ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в $\vec{F}$ было $\mathbb{C}$-дифференцируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло уравнениям в частных производных*

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \bar{z}_j} = \vec{0}, \tag{VII, 1; 13}$$

и в этом случае частные производные $\partial\vec{f}/\partial z_j$ относительно комплексного поля, определенные по формуле (VII, 1; 6), *совпадают с величинами $\partial\vec{f}/\partial z_j$, определенными по формуле* (VII, 1; 11).

Теорема 2. *Пусть $\vec{\omega}$ — $\mathbb{R}$-дифференцируемая дифференциальная форма степени p, определенная на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}^n$, со значениями в $\vec{F}$. Тогда $d\vec{\omega}$ задается формулой, аналогичной второй формуле* (VI, 4; 1):

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right). \tag{VII, 1; 14}$$

Доказательство. В самом деле, с помощью формулы (VI, 4; 1) непосредственно получаем

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_j} + dy_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial y_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2} \wedge \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) + \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i} \wedge i \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right). \tag{VII, 1; 15}$$

Теорема 3. *Пусть $\vec{f}$ — дважды $\mathbb{R}$-дифференцируемое отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в $\vec{F}$. Если это отображение один раз $\mathbb{C}$-дифференцируемо, то оно гармоническое, т. е. удовлетворяет соотношению*

$$\overrightarrow{\Delta f} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y_j^2} \right) = \vec{0}.$$

Если значения f лежат в комплексном поле $\mathbb{C}$, P и Q — вещественная и мнимая части f, то функции P и Q также гармонические.

Доказательство. Лапласиан Δ в обозначениях (VII, 1; 11) записывается в виде

$$\Delta = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \qquad \text{(VII, 1; 16)}$$

откуда в силу предыдущего следствия и вытекает первое утверждение.

Так как при вещественных ΔP и ΔQ имеем $\Delta(P + iQ) = \Delta P + i\Delta Q$, то при $F = \mathbb{C}$ утверждение относительно P и Q очевидно.

Замечание. Для случая комплексной размерности $n = 1$, как мы увидим ниже в теореме 10, каждая один раз $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция, действующая из $\Omega \subset \mathbb{C}$ в F, заведомо бесконечно дифференцируема, так что без каких-либо дополнительных предположений, кроме $\mathbb{C}$-дифференцируемости первого порядка, можно утверждать, что функция f, а в случае $F = \mathbb{C}$ функции P и Q — гармонические (следствие 1 теоремы 10).

Можно дать некоторое обращение предыдущей теоремы. Пусть P — вещественная функция, определенная на открытом множестве Ω из $\mathbb{C}$, дважды $\mathbb{R}$-дифференцируемая и гармоническая. Выясним, будет ли она тогда вещественной частью некоторой $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции с комплексными значениями, определенной на Ω.

Теорема 4. *Пусть Ω — односвязное открытое множество поля $\mathbb{C}$ и P — гармоническая вещественная функция класса C^2 на Ω, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta P = 0$. Тогда существует бесконечное множество комплексно-значных функций f, $\mathbb{C}$-дифференцируемых на Ω, с вещественной частью P. Если множество Ω связно, то мнимая часть Q таких функций f определяется с точностью до аддитивной постоянной и, следовательно, сами функции f определяются с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной.*

Доказательство. Нам надо определить функцию Q так, чтобы выполнялись соотношения Коши (VII, 1; 7) для $n = 1$. Поэтому, предполагая Q $\mathbb{R}$-дифференцируемой, мы видим, что ее частные производные первого порядка уже определены.

Как мы знаем из следствия 1 теоремы 59 гл. VI, при односвязном множестве Ω и величинах $-\frac{\partial P}{\partial y}$ и $+\frac{\partial P}{\partial x}$, принадлежаших классу C^1, для определения такой функции Q необходимо и достаточно выполнение равенства $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) =$

$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, т. е. $\Delta P=0$. Поскольку функция P принадлежит классу C^2 и гармоническая, то это условие выполняется. Значит, функцию Q определить можно. Если Ω связно, то решение с точностью до аддитивной постоянной единственно (поскольку разность между двумя решениями есть функция, имеющая нулевые первые производные и, следовательно, по теореме 22 гл. III постоянная).

Замечание. *Этот результат неверен для комплексной функции на* $\mathbb{C}^n$ *при* $n\geqslant 2$.

Вещественная и мнимая части $\mathbb{C}$-дифференцируемой комплекснозначной функции на $\Omega\subset\mathbb{C}$ называются *вещественными гармоническими сопряженными функциями*. Если в открытом односвязном множестве задана гармоническая функция, то для нее имеется бесконечное множество гармонических сопряженных функций. Если множество Ω связно, то сопряженные с данной гармонические функции определяются с точностью до аддитивной постоянной.

Заметим, что если Q — гармоническая функция, сопряженная с функцией P, то функция $-P$ будет гармонической функцией, сопряженной с функцией Q.

§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ КОШИ

Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$ (вообще нет нужды везде предполагать $\vec{F}$ векторным и полным, но в большинстве случаев это необходимо, так как надо будет *интегрировать* непрерывные функции со значениями в $\vec{F}$. Мы будем всюду считать его векторным и полным и не повторять этого без особой надобности в условиях теорем). Функция, определенная на открытом множестве $\Omega\subset E$, со значениями в $\vec{F}$ называется C^m-голоморфной, если она принадлежит классу C^m относительно поля комплексных чисел.

В теореме 10 мы увидим, что если E имеет комплексную размерность, равную 1, то C^1-голоморфность функции влечет за собой ее C^∞-голоморфность. Значительно позже мы распространим это свойство на произвольное пространство E. До теоремы 10 мы будем тщательно различать эти условия, далее же для любого E будем писать просто *голоморфизм, и это будет означать* C^∞*-голоморфизм*. Такое предположение в некоторых утверждениях будет, по-видимому, чрезмерным, однако это