$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, т. е. $\Delta P=0$. Поскольку функция P принадлежит классу C^2 и гармоническая, то это условие выполняется. Значит, функцию Q определить можно. Если Ω связно, то решение с точностью до аддитивной постоянной единственно (поскольку разность между двумя решениями есть функция, имеющая нулевые первые производные и, следовательно, по теореме 22 гл. III постоянная).

Замечание. *Этот результат неверен для комплексной функции на $\mathbb{C}^n$ при $n\geqslant 2$.*

Вещественная и мнимая части $\mathbb{C}$-дифференцируемой комплекснозначной функции на $\Omega\subset\mathbb{C}$ называются *вещественными гармоническими сопряженными функциями*. Если в открытом односвязном множестве задана гармоническая функция, то для нее имеется бесконечное множество гармонических сопряженных функций. Если множество Ω связно, то сопряженные с данной гармонические функции определяются с точностью до аддитивной постоянной.

Заметим, что если Q — гармоническая функция, сопряженная с функцией P, то функция $-P$ будет гармонической функцией, сопряженной с функцией Q.

§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ КОШИ

Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$ (вообще нет нужды везде предполагать $\vec{F}$ векторным и полным, но в большинстве случаев это необходимо, так как надо будет *интегрировать* непрерывные функции со значениями в $\vec{F}$. Мы будем всюду считать его векторным и полным и не повторять этого без особой надобности в условиях теорем). Функция, определенная на открытом множестве $\Omega\subset E$, со значениями в $\vec{F}$ называется C^m-голоморфной, если она принадлежит классу C^m относительно поля комплексных чисел.

В теореме 10 мы увидим, что если E имеет комплексную размерность, равную 1, то C^1-голоморфность функции влечет за собой ее C^∞-голоморфность. Значительно позже мы распространим это свойство на произвольное пространство E. До теоремы 10 мы будем тщательно различать эти условия, далее же для любого E будем писать просто *голоморфизм, и это будет означать C^∞-голоморфизм.* Такое предположение в некоторых утверждениях будет, по-видимому, чрезмерным, однако это не имеет значения, поскольку позже окажется, что все голоморфизмы одинаковы. Пока же в теоремах мы снова будем пользоваться терминами C^1-голоморфизм и C^∞-голоморфизм.

Значительная часть результатов будет относиться только к случаю $E=\mathbb{C}$, но некоторые и к случаю произвольного пространства E.

Теорема 5. *Для того чтобы функция $\vec{f}$ на $\Omega\subset\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$ класса C^1 относительно $\mathbb{R}$ была C^1-голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная форма $\vec{\omega}=\vec{f}(z)\,dz$ первой степени класса C^1 была замкнутой.*

Доказательство. Из (VII, 1; 14) непосредственно следует, что

$$d\vec{\omega}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial\bar z}\,d\bar z\wedge dz. \qquad \text{(VII, 2; 1)}$$

Поскольку $d\bar z\wedge dz=2i\,dx\wedge dy\neq 0$, то утверждения $d\vec{\omega}=0$ и $\partial\vec{f}/\partial\bar z=0$ равносильны. Справедливость теоремы теперь вытекает из следствия 6 теоремы 1.

Замечание. Если $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, где n произвольно, то функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна тогда и только тогда, когда n-форма $f\,dz_1\wedge dz_2\wedge\ldots\wedge dz_n$ замкнута. Это утверждение применяется редко.

Первая основная интегральная формула Коши

Теорема 6. *Для того чтобы отображение $\vec{f}$ из $\Omega\subset\mathbb{C}$ в $\vec{F}$ класса C^1 относительно вещественного поля $\mathbb{R}$ было C^1-голоморфным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой C^1-границы Γ размерности 1 в Ω имело место соотношение*

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz=\vec{0}\,[1]. \qquad \text{(VII, 2; 2)}$$

Доказательство. В самом деле, если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то $\vec{\omega}=\overrightarrow{f(z)}\,dz$ будет коциклом (теорема 5), и из теоремы

[1]) Каждый раз, когда мы будем пользоваться выражениями *цикл, граница, многообразие с краем*, это будет нужно для интегрирования некоторой дифференциальной формы и применения формулы Стокса. В соответствии с соглашениями, принятыми в § 8 гл. VI, *все они будут компактными. В дальнейшем мы этого повторять не будем.* Например, здесь Γ — компакт, граница многообразия с краем — компакт. Далее, многообразия с краем будут иметь вещественную размерность, равную 2, а циклы и границы — вещественную размерность, равную 1.

41 гл. VI (Стокса) вытекает, что его интеграл по каждой C^1-границе равен нулю.

Обратно, если $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма класса C^1, интеграл от которой по каждой C^1-границе равен нулю, то из теоремы 42 гл. VI следует, что $\vec{\omega}$ — некоторый коцикл, а это в силу теоремы 5 означает, что функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна.

Замечания. Можно значительно улучшить условия этой теоремы.

1°) Если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то, согласно следствию 6 теоремы 54 гл. III, снова имеет место соотношение

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{f(z)}\, dz = 0,$$

даже если Γ — просто особое компактное ориентированное 1-мерное многообразие конечной длины, являющееся некоторой C^0-границей в Ω.

2°) Согласно теореме 42 гл. VI и ее доказательству, для того чтобы функция $\vec{f}$ была C^1-голоморфной, достаточно, чтобы равенство $\int_{\Gamma} \overrightarrow{f(z)}\, dz = 0$ было верным для любой ориентированной окружности Γ, ограничивающей круг Δ, целиком лежащий в Ω, или даже, чтобы для любой точки $a \in \Omega$ оно было верным только для последовательности таких окружностей Γ_n с центрами в точке a, радиусы которых стремятся к 0.

Ниже (см. следствие 3 теоремы 10) мы даже докажем, что в своей достаточной части этот результат сохранится, если предполагать, что формула (VII, 2; 2) выполняется на таких окружностях Γ, а функция $\vec{f}$ *лишь непрерывна*, а не $\mathbb{R}$-дифференцируема.

3°) Напротив, в теореме 6 *весьма существенно, чтобы* Γ *была некоторой границей.*

Вот очевидный контрпример для случая, когда Γ не является границей:

Функция $f(z) = 1/z$ голоморфна в открытом множестве $\Omega = \complement 0$. Обозначим через Γ окружность с центром в 0 радиуса R, ориентированную в положительном направлении в $\mathbb{C}$. Эта окружность будет, очевидно, границей в $\mathbb{C}$, но, как мы уже указывали, не в $\complement 0$ (следствие 2 теоремы 58 гл. VI). Полагая $z = Re^{i\theta}$, сразу получаем формулу

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi. \qquad \text{(VII, 2; 3)}$$

Эта формула играет фундаментальную роль во всей теории голоморфных функций. На ней основывается теорема 19 *о вычетах. Из* (VII, 2; 3) *снова видно, что* Γ *не является границей в* $\mathbb{C}0$.

Следствие. *Если функция* $\vec{f}$ C^1*-голоморфна и если множество* Ω *односвязно, то формула* (VII, 2; 2) *справедлива для любого* C^1*-цикла* Γ (*и даже для любого* C^0*-цикла* Γ *конечной длины*).

В самом деле, поскольку множество Ω односвязно, то каждый цикл Γ является границей (следствие 2 теоремы 54 гл. VI). Можно было бы сказать и так: поскольку множество Ω односвязно, то коцикл $\vec{\omega}$ есть кограница (теорема 59 гл. VI), а следовательно, его интеграл по каждому циклу Γ равен нулю (теорема 39 или 41 гл. VI).

Первообразная голоморфной функции

Теорема 7. *Если* $\vec{f}$ — *голоморфная функция в односвязном множестве* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{G}$[1]), *то она имеет первообразные* $\vec{F}$, *т. е. такие* C^1*-голоморфные функции на* Ω *со значениями в* $\vec{G}$, *что* $\vec{F}' = \vec{f}$. *Если множество* Ω *односвязно, то эти первообразные определяются с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство. Если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна, то дифференциальная форма $\vec{f}\,dz$ является коциклом. Поскольку множество Ω по условию односвязно, то из теоремы 59 гл. VI следует, что оно является кограницей. Пусть $\vec{F}$ — внешняя первообразная функция для $\vec{\omega}$. Тогда имеет место формула

$$d\vec{F} = \vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz. \qquad \text{(VII, 2; 4)}$$

Однако $d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, чем доказывается, с одной стороны, что $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}} = 0$, т. е. что функция $\vec{F}$ C^1-голоморфна, и, с другой стороны, что производная $\vec{F}$ относительно поля комплексных чисел равна $\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \vec{f}$.

---

[1]) Вместо обычного обозначения $\vec{F}$ для пространства Банаха мы пишем $\vec{G}$, чтобы иметь возможность обозначать через $\vec{F}$ первообразные функции для $\vec{f}$.

Поскольку функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^1, то из теоремы 59 гл. VI следует, что функция $\vec{F}$ принадлежит классу C^2. Если множество Ω односвязно, то из теоремы 22 гл. III следует, что $\vec{F}$ определяется с точностью до постоянной. Теорема 59 гл. VI одновременно дает нам практическое средство для вычисления функции $\vec{F}$. Если ее значение $\overrightarrow{F(a)}$ в точке $a \in \Omega$ выбрать произвольно, то эта функция определяется в точке z той же связной компоненты Ω (что и точка a) по интегральной формуле

$$\vec{F}(z) - \vec{F}(a) = \int_a^z \overrightarrow{f(\zeta)}\, d\zeta, \qquad \text{(VII, 2; 5)}$$

где интеграл берется по произвольному пути конечной длины с началом в точке a и концом в точке z, целиком лежащему в Ω.

Замечание. Требование односвязности множества Ω здесь существенно. Если $\Omega = \complement 0$ и $f(z) = 1/z$, то функция f не допускает первообразной в Ω, поскольку в дополнении к началу координат нет определенного и непрерывного логарифма. (Это интуитивно ясно. Но это можно доказать и совершенно строго. Если бы такой логарифм существовал, то, обозначая через Γ тригонометрическую ориентированную окружность, мы бы получили $2i\pi = \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_\Gamma d(\ln z) = 0$.)

Мы приходим к необходимости рассматривать непрерывные значения логарифма. Непрерывным (соответственно голоморфным) значением логарифма в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ называется непрерывная (соответственно голоморфная) функция f, которая в каждой точке принимает одно из значений $\ln z$, т. е. такая, что $e^{f(z)} = z$.

Теорема 8. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}_\complement\{0\}$. Каждое непрерывное значение логарифма в Ω C^∞-голоморфно. Если такое значение существует и если множество Ω связно, то разность между двумя такими значениями кратна $2i\pi$ и фиксирование такого значения в какой-нибудь одной точке Ω фиксирует его во всем множестве Ω. Такое значение всегда существует, если Ω односвязно.*

Доказательство. Предположим сначала, что f является непрерывным значением логарифма в Ω. Полагая $Z = f(z)$, из теоремы об обратных функциях (следствие 4 теоремы 11 гл. III, пригодное для случая дифференцирования относительно поля комплексных чисел) получаем, что

$$f'(z)=\frac{1}{e^{f(z)}}=\frac{1}{z}. \qquad \text{(VII, 2; 6)}$$

Отсюда следует, что функция f C^∞-голоморфна и имеет первообразную $1/z$ в Ω. Если множество Ω связно, то разность между двумя непрерывными значениями, имея нулевую производную, равна постоянной, необходимо кратной $2i\pi$.

Если множество Ω односвязно, то $1/z$ по теореме 7 имеет первообразные. Выберем одну из первообразных функции f в точке $a\in\Omega$ так, чтобы $f(a)$ равнялась одному из значений $\ln a$. Тогда из того, что производная f равна $1/z$, вытекает, что функции $e^{f(z)}$ и z имеют одну и ту же логарифмическую производную в Ω. Так как Ω связно, то отсюда следует, что их отношение постоянно (см. замечание 3°) на стр. 788 гл. IV). Это отношение, будучи равным 1 в точке a, равно 1 во всем множестве Ω, а значит, функция f действительно является голоморфным значением логарифма в Ω.

Замечания. 1°) Для того чтобы обеспечить существование голоморфного значения логарифма в Ω, мы предполагали множество Ω односвязным, но это условие, естественно, не является необходимым. Например, такое значение существует в кольце $r<|z-a|<R$ при $|a|>R$, поскольку оно существует в односвязном круге $|z-a|<R$. Согласно теореме 45 гл. VI, примененной к дифференциальной форме dz/z, для существования такого значения достаточно, чтобы $\int\limits_\Gamma dz/z$ был равен нулю для любого C^∞-цикла Γ из Ω, или с учетом того, что было сказано на стр. 302 гл. VI, чтобы в Ω не существовало C^∞-цикла, «делающего оборот вокруг начала координат», т. е. цикла, индекс которого относительно начала координат отличен от нуля.

2°) Поскольку для $z=re^{i\theta}$ имеем $\ln z=\ln r+i\theta$, то существование непрерывного значения логарифма эквивалентно существованию непрерывного значения полярного угла.

Теорема 45 и следствие 2 теоремы 59 гл. VI дают для Ω как раз те условия, которые мы только что указали.

На практике для определения в Ω голоморфного значения логарифма, задаваемого его значением в точке $a\in\Omega$, определяют его значения в каждой точке $z\in\Omega$ пути, идущего от a к z, при условии непрерывного изменения логарифма. Если множество Ω односвязно, то полученное значение в точке z не зависит от выбранного пути.

Точно так же можно изучать непрерывные (и, следовательно, голоморфные) значения некоторых других «многозначных функций», таких, как $z \to z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Такую функцию можно определить, полагая снова $z = re^{i\theta}$, а затем $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. При этом в каждом открытом множестве Ω, в котором можно определить непрерывное значение полярного угла, можно также определить голоморфные значения всех функций z^α.

Напротив, известно, что такие значения в неодносвязных областях Ω могут не существовать. В дополнении к началу координат в $\mathbb{C}$ даже для функции $\sqrt{z}$ невозможно выделить ее непрерывные ветви. В самом деле, если исходить из одного из двух значений этой функции в данной точке a, затем обойти вокруг начала и вернуться в эту точку, изменяя непрерывно значение квадратного корня, то мы придем к значению с противоположным знаком. (Это интуитивно ясно. Строго говоря, $\ln z$ при таком изменении увеличится на $\pm 2i\pi$, а следовательно, $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$ умножится на $e^{+i\pi} = -1$.)

Доказательство теоремы Пуанкаре о внешних первообразных дифференциальных форм для случая поля комплексных чисел. При доказательстве теоремы Пуанкаре (теорема 19 гл. VI) мы предполагали, что речь идет о дифференциальных формах над вещественным полем (это ограничение отмечено в процессе доказательства на стр. 146).

Предположим теперь, что рассматривается дифференциальная форма $\vec{\omega}$ класса C^1 относительно комплексного поля, определенная на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}^N$ со значениями в банаховом пространстве F.

Будем считать, что Ω обладает свойствами, указанными в условии теоремы 19, и что форма $\vec{\omega}$ замкнута и ее степень $\geqslant 1$. В действительности можно предполагать, что Ω удовлетворяет несколько более общим условиям, чем условия теоремы 19.

Обозначим через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ канонический базис $\mathbb{C}^N$. Предположим, что если через произвольную точку $a \in \Omega$ провести двумерную в вещественном смысле плоскость (аффинное подпространство, одномерное в комплексном смысле), параллельную векторам $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, то она пересечет множество Ω по некоторому одновременно связному и односвязному множеству $\Omega_j(a)$, которое, если оно непусто, необходимо содержит точку, лежащую в $(2n-2)$-мерном вещественном (или $(n-1)$-мерном комплексном) подпространстве, проходящем через начало параллельно векторам базиса и векторам, полученным умножением их на i.

Затем проводится то же самое доказательство по индукции, что и в теореме 19. Для этого надо, как это делалось в том доказательстве, найти первообразную форму Λ от L относительно z_1. С этой целью достаточно применить формулу, аналогичную (VI, 4; 44), а именно

$$\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \int_0^{z_1} L(\zeta_1, z_2, \ldots, z_N)\, d\zeta_1, \qquad \text{(VII, 2; 7)}$$

где интеграл берется в открытом связном и односвязном множестве $\Omega_1(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ по произвольному пути класса C^1, соединяющему точку $(0, z_2, \ldots, z_N)$ с точкой $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Интеграл не зависит от пути интегрирования, поскольку Ω_1 односвязно. Остальная часть доказательства проходит без изменений.

Вторая основная интегральная формула Коши

Теорема 9. *Пусть $\vec{f}$ — функция, C^1-голоморфная в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Если V является многообразием с краем в Ω класса C^1, имеющим каноническую ориентацию комплексной плоскости, с границей $bV = \Gamma$, снабженной канонической ориентацией границы, то справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\, dz = \vec{0}, \qquad \text{(VII, 2; 8)}$$

если $a \notin V$, и

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\, dz = \overrightarrow{f(a)}, \qquad \text{(VII, 2; 9)}$$

если $a \in \overset{\circ}{V}$. (Интеграл не имеет смысла, если $a \in \Gamma$.)

Доказательство. 1°) Пусть $a \notin V$. Функция $z \to \dfrac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}$ C^1-голоморфна в $\complement_\Omega a$. Так как $V \subset \complement_\Omega a$, то Γ является границей в $\complement_\Omega a$, и из теоремы 6 вытекает соотношение (VII, 2; 8).

2°) Пусть теперь $a \in \overset{\circ}{V}$. Тогда предыдущее рассуждение не применимо. В самом деле, функция $z \to \dfrac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}$ C^1-голоморфна всюду в $\complement_\Omega a$, но $V \not\subset \complement_\Omega a$. Можно было бы учесть, что $\complement_V a \subset \complement_\Omega a$, и считать, что Γ является границей множества $\complement_V a$. Однако здесь $\complement_V a$ не компактно, так что в смысле § 8 гл. VI Γ не является границей в $\complement_\Omega a$. Соотношение (VII, 2; 8) не сохраняется.

Обозначим через γ окружность с центром в точке a, обходимую в положительном направлении и такую, что ограничиваемый ею круг Δ целиком содержится в $\overset{\circ}{V}$. Тогда $-\gamma$ будет той же окружностью, но обходимой в противоположном направлении.

В $\complement_\Omega a$ $\Gamma - \gamma$ является некоторой границей, а именно границей множества $\complement_V \overset{\circ}{\Delta}$. Следовательно, можно применить теорему 6, которая дает

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma-\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\vec{0},\quad \text{или}\quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz. \tag{VII, 2; 10}$$

Этот результат не зависит от радиуса окружности γ.

Для доказательства теоремы нам будет достаточно показать, что интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$$

равен $\overrightarrow{f(a)}$ или даже, поскольку он не зависит от радиуса r окружности γ, что он стремится к $\overrightarrow{f(a)}$, когда радиус r окружности γ стремится к 0. Этот интеграл есть сумма двух слагаемых:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz=\frac{\overrightarrow{f(a)}}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\,dz. \tag{VII, 2; 11}$$

Первое слагаемое, согласно формуле (VII, 2; 3), равно $\overrightarrow{f(a)}$. Поэтому нам будет достаточно показать, что второе слагаемое стремится к $\vec{0}$, когда радиус r окружности γ стремится к 0.

Поскольку функция $\vec{f}$ по предположению $\mathbb{C}$-дифференцируема, то величина $\left|\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\right|$ при r, стремящемся к нулю, не превосходит некоторого фиксированного числа M. Следовательно, второй интеграл правой части в (VII, 2; 11) допускает оценку

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}M\cdot 2\pi r=Mr, \tag{VII, 2; 12}$$

из которой следует, что он стремится к 0, когда радиус r окружности γ стремится к 0, чем и завершается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) Часто бывает удобно изменить используемые буквы и записать

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)\,d\zeta}}{\zeta - z} = \begin{cases} \overrightarrow{f(z)} & \text{для} \quad z \in \overset{\circ}{V}, \\ \vec{0} & \text{для} \quad z \notin V. \end{cases} \qquad \text{(VII, 2; 13)}$$

2°) Можно доказать значительно более общий результат: *Если Γ — некоторый особый C^0-цикл конечной длины в $\complement_\Omega a$ и если он является C^0-границей в Ω, то справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{f}(z)}{z-a}\,dz = \vec{f}(a)\cdot I(\Gamma;\, a), \qquad \text{(VII, 2; 14)}$$

где $I(\Gamma;\, a)$ — индекс Γ относительно точки a[1]) (стр. 302 гл. VI). Из этой формулы, в частности, получаются соотношения (VII, 2; 8) и (VII, 2; 9). В самом деле, если $a \notin V$, то кривая Γ является границей в $\complement_\Omega a$, а следовательно, ее индекс относительно a равен нулю. Если $a \in \overset{\circ}{V}$, то кривая Γ гомологична кривой γ в $\complement_\Omega a$, а следовательно, ее индекс равен $+1$.

Доказательство формулы (VII, 2; 13) вытекает непосредственно из теоремы 64 гл. VI. Из предыдущего рассуждения (когда радиус r окружности γ устремляется к нулю) следует, что класс вычетов для $\vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\vec{f}(z)}{z-a}\,dz$ есть $\vec{f}(a)$. Остается применить формулу (VI, 8; 67).

3°) Из теоремы 9 вытекает замечательное следствие: если функция $\vec{f}$ C^1-голоморфна в Ω и если ее значения известны на $\Gamma = bV$, то они известны и на всем многообразии V, поскольку эти значения определяются интегралом (VII, 2; 9), в который входят только значения функции $\vec{f}$ на Γ.

Может возникнуть вопрос: можно ли значения $\vec{f}$ на Γ выбирать произвольно (лишь бы только эти значения определяли некоторое непрерывное отображение Γ в $\vec{F}$)?

Легко видеть, что это не так. В самом деле, заметим, например, что тот же самый интеграл $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$ должен равняться нулю для $a \notin V$ и что он при a, изменяющемся в $\complement_\Omega V$, налагает на функцию $\vec{f}$ бесконечное множество условий, которым она должна удовлетворять на Γ.

---

[1]) Напомним, что при вычислении индекса Γ предполагается ориентированным; Ω также ориентирована (каноническая ориентация пространства $\mathbb{C}$).

Будем исходить теперь из некоторой произвольной непрерывной функции $\vec{f}$ на Γ со значениями в $\vec{F}$. Легко видеть, что интеграл $z \to \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ определяет в $\overset{\circ}{V}$, ра́вно как и в $\complement_{\Omega} V$, C^{∞}-голоморфные функции переменной z. В самом деле, поскольку интегрирование проводится по компакту, а функция $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}$ непрерывна относительно (z, ζ) и дифференцируема относительно z при фиксированном ζ, причем ее производная определяет функцию $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$, непрерывную относительно (z, ζ), то из следствия теоремы 115 гл. IV вытекает, что интеграл является функцией класса C^1 относительно z в поле комплексных чисел. Из нашего доказательства следует, что эта функция принадлежит и классу C^{∞} [1]).

Интеграл не определен для $z \in \Gamma$. Однако можно выяснить, имеет ли он предел при z, стремящемся к точке $z_0 \in \Gamma$.

В самом деле, если функция $\vec{f}$ взята *из класса* C^1 *на* Γ, то можно показать, что когда z стремится к точке z_0 контура, оставаясь в $\overset{\circ}{V}$, интеграл имеет некоторый предел $\vec{f}_1(z_0)$, а когда z стремится к z_0, оставаясь в $\complement_{\Omega} V$, этот интеграл стремится к некоторому пределу $\vec{f}_2(z_0)$ и что разность между этими двумя пределами равна $\vec{f}(z_0)$:

$$\vec{f}_1(z_0) - \vec{f}_2(z_0) = \vec{f}(z_0). \qquad \text{(VII, 2; 15)}$$

В частности, если исходить из функции $\vec{f}$, C^1-голоморфной в Ω, то значение $\vec{f}_2(z_0)$ будет равно нулю, а значение $\vec{f}_1(z_0)$ будет равно $\vec{f}(z)$. Если исходить из произвольной функции $\vec{f}$, то это, вообще говоря, не так. Напротив, если заранее известно, что функция $\vec{f}$ класса C^1 удовлетворяет бесконечному множеству условий $\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \vec{0}$ для $z \notin V$, то можно утверждать,

---

[1]) Следствие теоремы 115 было сформулировано для интегралов относительно некоторой меры $\geqslant 0$. Здесь мера dz на Γ комплексна. Но $dz = \frac{dz}{ds} ds$, где ds — криволинейная абсцисса на Γ — есть мера $\geqslant 0$, что позволяет провести рассуждения для функции $(z, \zeta) \to \frac{\vec{f}(\zeta)}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{ds}$.

что интеграл, определенный по формуле $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\notin\overset{\circ}{V}$, является C^1-голоморфной функцией в $\overset{\circ}{V}$, принимающей значение $\vec{f}$ на Γ.

Пусть f — скалярная функция. Позже при изучении гармонических функций мы увидим, что гармоническая функция P, т. е. вещественная часть голоморфной функции f, определяется на V единственным образом, если в качестве ее значений на кривой Γ класса C^1 выбрать произвольную непрерывную на Γ вещественную функцию. Тогда функция P определяется в V единственным образом. После этого можно с точностью до аддитивной постоянной определить гармоническую сопряженную функцию Q в $\overset{\circ}{V}$, по крайней мере для случая, когда множество $\overset{\circ}{V}$ связно и односвязно. Тем самым с точностью до чисто мнимой постоянной будет определена функция f. По существу функции Q и f так могут быть определены только в $\overset{\circ}{V}$. Но можно показать, что если для кривой Γ, принадлежащей классу C^1, функция P принадлежит классу C^1 на Γ, то Q и f имеют пределы в точках Γ. Теперь становится яснее, почему нельзя было произвольно выбирать функцию f на Γ и продолжать ее на V до некоторой голоморфной функции в $\overset{\circ}{V}$. Можно выбирать вещественную часть P на Γ, и тогда ее мнимая часть при связном и односвязном множестве V будет определена с точностью до аддитивной постоянной.

§ 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ВТОРОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ

Интегральная формула Коши (VII, 2; 9) является центральной формулой теории голоморфных функций. С ее помощью выясняются основные свойства этих функций,

Теорема 10. *Каждая C^1-голоморфная функция в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ принадлежит классу C^∞ над комплексным полем. Если $V\subset\Omega$ есть некоторое компактное многообразие класса C^1 с краем, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$, и с границей $bV=\Gamma$ (снабженной канонической ориентацией границы), то производные функции $\vec{f}$ определяются в каждой точке $z\in\overset{\circ}{V}$, исходя из значений $\vec{f}$ на Γ, по формулам*

$$\overrightarrow{f^{(n)}}(z)=\frac{n!}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad \text{(VII, 3; 1)}$$