что интеграл, определенный по формуле $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\ z \notin \mathring{V}$, является C^1-голоморфной функцией в $\mathring{V}$, принимающей значение $\vec{f}$ на Г.

Пусть f — скалярная функция. Позже при изучении гармонических функций мы увидим, что гармоническая функция P, т. е. вещественная часть голоморфной функции f, определяется на V единственным образом, если в качестве ее значений на кривой Г класса C^1 выбрать произвольную непрерывную на Г вещественную функцию. Тогда функция P определяется в V единственным образом. После этого можно с точностью до аддитивной постоянной определить гармоническую сопряженную функцию Q в $\mathring{V}$, по крайней мере для случая, когда множество $\mathring{V}$ связно и односвязно. Тем самым с точностью до чисто мнимой постоянной будет определена функция f. По существу функции Q и f так могут быть определены только в $\mathring{V}$. Но можно показать, что если для кривой Г, принадлежащей классу C^1, функция P принадлежит классу C^1 на Г, то Q и f имеют пределы в точках Г. Теперь становится яснее, почему нельзя было произвольно выбирать функцию f на Г и продолжать ее на V до некоторой голоморфной функции в $\mathring{V}$. Можно выбирать вещественную часть P на Г, и тогда ее мнимая часть при связном и односвязном множестве V будет определена с точностью до аддитивной постоянной.

§ 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ВТОРОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ

Интегральная формула Коши (VII, 2; 9) является центральной формулой теории голоморфных функций. С ее помощью выясняются основные свойства этих функций,

Теорема 10. *Каждая C^1-голоморфная функция в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ принадлежит классу C^∞ над комплексным полем. Если $V \subset \Omega$ есть некоторое компактное многообразие класса C^1 с краем, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$, и с границей $bV = \Gamma$ (снабженной канонической ориентацией границы), то производные функции $\vec{f}$ определяются в каждой точке $z \in \mathring{V}$, исходя из значений $\vec{f}$ на Г, по формулам*

$$\overrightarrow{f^{(n)}}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad (\text{VII}, 3;\ 1)$$

или

$$\frac{\overrightarrow{f^{(n)}}(z)}{n!}=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \qquad \text{(VII, 3; 1)}$$

Для доказательства достаточно продифференцировать (VII, 2; 9) под знаком интеграла, а такое дифференцирование законно в силу доказательства, приведенного на стр. 342. Пусть теперь a — произвольная точка из Ω. Тогда в качестве V можно взять круг Δ с центром в точке a, содержащийся в Ω, а в качестве Γ — его границу, и убедиться, что $\vec{f}$ бесконечно дифференцируема в $\mathring{\Delta}$. Поскольку это справедливо в окрестности каждой точки a, то рассматриваемая функция бесконечно дифференцируема в Ω.

Эта теорема совершенно замечательна и полностью противоречит тому, что мы знали прежде по поводу функций вещественной переменной: отображение открытого множества из $\mathbb{R}$ в банахово пространство может принадлежать классу C^m над полем вещественных чисел и не принадлежать классу C^{m+1}. Однако достаточно отображению принадлежать классу C^1 в $\Omega\subset\mathbb{C}$ над полем комплексных чисел, как оно сразу же оказывается принадлежащим классу C^∞.

Следствие 1. *Каждая функция, C^1-голоморфная в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{C}$, является гармонической. Если она принимает комплексные значения, то ее вещественная и мнимая части — гармонические функции.*

В самом деле, ранее мы видели, что это справедливо для функций $\vec{f}$, принадлежащих классу C^2, а теперь мы видим, что это условие выполняется всегда.

Позже мы убедимся, что свойство, указанное в этом следствии, сохраняется и в случае пространства $\mathbb{C}^n$.

Следствие 2. *Каждая гармоническая функция на $\Omega\subset\mathbb{C}$ с вещественными или комплексными значениями принадлежит классу C^∞ относительно поля вещественных чисел.*

Достаточно, очевидно, доказать это утверждение для гармонической функции с вещественными значениями. Пусть P — такая функция. Пусть a — точка из Ω, Δ — круг с центром в точке a, содержащийся в Ω. Этот круг односвязен, и, следовательно, в нем можно найти такую гармоническую сопряженную функцию Q, что $P+iQ$ является C^1-голоморфной функцией в Δ. Эта функция принадлежит классу C^∞, а значит, этому же классу принадлежит и функция P.

Замечания. 1°) Мы видим, что если функция удовлетворяет некоторым уравнениям в частных производных, таким, как $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ или $\Delta f = 0$, то для нее существуют последовательные производные всех порядков. Это не должно нас удивлять. Уравнения в частных производных являются обобщением на случай многих вещественных переменных обыкновенных дифференциальных уравнений. В гл. V мы видели, что каждая функция класса C^m, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения порядка m класса C^∞, необходимо принадлежит классу C^∞ (следствие теоремы 8 гл. V). Теперь мы видим, что некоторые функции класса C^1 или C^2, являющиеся решением уравнений в частных производных класса C^∞, необходимо принадлежат классу C^∞. Однако в теории уравнений в частных производных отмеченное свойство имеет иной характер, нежели в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно относится лишь к некоторым категориям уравнений в частных производных, а именно, к эллиптическим уравнениям, к которым принадлежат указанные уравнения в частных производных $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ и $\Delta f = 0$, в то время как для других уравнений в частных производных, таких, как, например, волновое уравнение, с которым мы встречались ранее, это свойство не выполняется.

2°) Свойство гармонических функций класса C^2 принадлежать классу C^∞ здесь доказано только для функций на $\mathbb{R}^2$ и гармонических функций с вещественными или комплексными значениями. Позже мы увидим, что оно распространяется на гармонические функции на $\mathbb{R}^n$ со значениями в произвольном банаховом пространстве $\vec{F}$. Точно так же каждая функция класса C^1 на $\mathbb{C}^n$ принадлежит классу C^∞. В частности, каждое дифференцируемое многообразие класса C^1 на $\mathbb{C}$ принадлежит классу C^∞.

Следствие 3 (теорема Мореры). *Каждая функция $\vec{f}$, определенная в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{G}$, непрерывная и такая, что интеграл $\int\limits_\Gamma \vec{f}(z)\,dz$ равен нулю для любой C^∞-границы, лежащей в Ω, необходимо голоморфна.*

В самом деле, из теоремы 45 гл. VI следует, что непрерывная дифференциальная форма $\vec{f}\,dz$ является кограницей некоторой функции $\vec{F}$ класса C^1, определенной в Ω, со значениями в $\vec{G}$. Но тогда справедлива формула $d\vec{F} = \vec{f}(z)\,dz$, а следовательно, имеют место равенства $\partial \vec{F}/\partial \bar{z} = 0$ и $\partial \vec{F}/\partial z = \vec{f}$, которые означают, что функция $\vec{F}$ C^1-голоморфна и что функция $\vec{f}$ является производной функции $\vec{F}$ относительно поля комплексных чисел. Но тогда, согласно теореме, функция $\vec{F}$ принадлежит классу C^∞ и, следовательно, ее первая производная $\vec{f}$ сама принадлежит этому классу над комплексным полем, т. е. голоморфна.

Замечания. 1°) Это как раз та теорема, о которой мы говорили в замечании 2°) к теореме 6: для непрерывных функций можно определить свойство голоморфности, не предполагая заранее никакой дифференцируемости.

2°) Можно также показать, что каждая $\mathbb{C}$-дифференцируемая на $\Omega \subset \mathbb{C}$ функция, a priori не принадлежащая классу C^1, голоморфна.

Следствие 4. *Каждая голоморфная комплекснозначная функция, не имеющая нулей в открытом односвязном множестве* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *может быть представлена в виде* $f(z) = e^{g(z)}$, *где* g — *некоторая комплексная голоморфная функция в* Ω.

Доказательство. Очевидно, можно считать множество Ω связным, так как в противном случае рассуждения можно вести отдельно для каждой из его компонент. Поскольку функция f в нуль нигде не обращается и принадлежит классу C^1, то вполне определена функция f'/f, принадлежащая классу C^1, т. е. голоморфная. Так как множество Ω односвязно, то эта функция по теореме 7 имеет первообразную g. Функции f и e^g имеют одну и ту же логарифмическую производную f'/f. Поскольку множество Ω связно, то их отношение в силу замечания на стр. 788 гл. IV постоянно. Эту постоянную можно внести в показатель экспоненты, чем и заканчивается доказательство следствия.

Замечание. Сказанное означает, что *если функция* f *голоморфна и не обращается в нуль в односвязном открытом множестве* Ω, *то существуют голоморфные значения* $\ln f$ *в* Ω.

Следствие 5 (неравенства Коши). *Пусть* $\vec{f}$ — *голоморфная функция в* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *и пусть* $M(a, \rho)$ — *максимум* $\|\vec{f}\|$ *на окружности* $|z - a| = \rho$ *при* $\rho < d(a, \complement\Omega)$. *Тогда справедливы следующие неравенства*:

$$\frac{\|\overrightarrow{f^{(n)}}(a)\|}{n!}\rho^n \leqslant M(a, \rho), \quad \text{в частности} \quad \|\vec{f}(a)\| \leqslant M(a, \rho). \qquad \text{(VII, 3; 2)}$$

Доказательство. Достаточно к окружности Γ: $|z-a|=\rho$ применить формулу (VII, 3; 1):

$$\|\vec{f}^{(n)}(a)\|=\left\|\frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}}M(a,\,\rho)\int_\Gamma ds=\frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}}M(a,\,\rho)\cdot 2\pi\rho=$$

$$=\frac{n!}{\rho^n}M(a,\,\rho). \qquad \text{(VII, 3; 3)}$$

Замечания. 1°) Если взять разложение функции $\vec{f}$ по формуле Тейлора, то норма члена $\frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ на окружности $|z-a|=\rho$ равна $\frac{\|\vec{f}^{(n)}(a)\|}{n!}\rho^n$. Поэтому следствие 5 можно было бы сформулировать следующим образом: *член* $\frac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ *разложения Тейлора мажорируем по норме на окружности* $|z-a|=\rho$ *максимумом* $M(a,\,\rho)$ *функции* $\|\vec{f}\|$ *на этой окружности.*

2°) Не следует думать, что *в каждой точке* z окружности норма функции $\vec{f}(z)$ не меньше нормы каждого из членов разложения Тейлора! Если мы рассмотрим, например, голоморфную функцию e^z, определяемую по формуле

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad \text{(VII, 3; 4)}$$

то для $z=-\rho<0$ соотношение $e^{-\rho}\geqslant\frac{\rho^n}{n!}$ не имеет места. Мы утверждаем только, что *максимум* нормы функции $\vec{f}$ на окружности превосходит норму каждого из членов формулы Тейлора.

Обобщение неравенств Коши

Как обобщаются формулы Коши (VII, 3; 1) на случай $E=\mathbb{C}^n$, мы увидим позже. Однако уже сейчас можно обобщить на E некоторые из неравенств (VII, 3; 2).

Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega\subset E$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Пусть $a\in\Omega$ и число $\rho>0$ таковы, что замкнутый шар $B(a,\,\rho)$ с центром в точке a радиуса ρ лежит в Ω.

Для $x \in B(a, \rho)$ можно написать формулу Тейлора (см. (III, 7; 2)), в которой член порядка m имеет вид $\frac{\vec{f}^{(m)}(a)}{m!}\overrightarrow{(x-a)}^m$. Этот член порядка m полностью вычисляется в аффинном подпространстве $E_{a,x}$ комплексной размерности 1, проходящем через точки a и x. Он же является членом порядка m в разложении Тейлора голоморфной функции g: $z \to \vec{f}(a + z\overrightarrow{(x-a)})$ при $z = 1$. Следовательно, к нему применима оценка (VII, 3; 2), которая дает неравенство

$$\left\| \frac{\vec{f}^{(m)}(a)}{m!}\overrightarrow{(x-a)}^m \right\| \leqslant M(a, x, \rho), \qquad \text{(VII, 3; 4}_2\text{)}$$

где $M(a, x, \rho)$ — максимум $\|\vec{f}\|$ на окружности с центром в точке a радиуса ρ в $E_{a,x}$. Тем более

$$\left\| \frac{\vec{f}^{(m)}(a)}{m!}\overrightarrow{(x-a)}^m \right\| = M(a, \rho), \qquad \text{(VII, 3; 4}_3\text{)}$$

где $M(a, \rho)$ — точная верхняя грань $\|\vec{f}\|$ на сфере с центром в точке a радиуса ρ в E. Мы говорим точная верхняя грань, а не максимум, поскольку эта сфера в случае бесконечномерного пространства E некомпактна. Поэтому норма $\|\vec{f}\|$ может не достигать на ней своей точной верхней грани; она может быть даже неограниченной, так что $M(a, \rho) \leqslant +\infty$.

Напомним, что $\vec{f}^{(m)}(a)$ является m-линейным непрерывным симметричным отображением $\vec{E}^m$ в $\vec{F}$. Поэтому для каждого вектора $\vec{X}$ из $\vec{E}$ с нормой ρ и, следовательно, в силу однородности, для любого $\vec{X}$ из $\vec{E}$ имеет место неравенство

$$\left\| \frac{\vec{f}^{(m)}(a)}{m!}\vec{X}^m \right\| \leqslant M(a, \rho)\left(\frac{\|\vec{X}\|}{\rho}\right)^m. \qquad \text{(VII, 3; 4}_4\text{)}$$

Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ — m произвольных векторов из $\vec{E}$ с нормой $\leqslant 1$. Для комплексных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ с модулями $\leqslant 1$ вектор $t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \ldots t_m\vec{X}_m$ имеет норму $\leqslant m$. Мы знаем также, что $\vec{f}^{(m)}(a)(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)$ является коэффициентом при $t_1t_2\ldots t_m$ в разложении $\frac{\vec{f}^{(m)}(a)}{m!}(t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \ldots + t_m\vec{X}_m)^m$ (см. гл. III, доказательство леммы к теореме 21_2).

Однако векторное пространство полиномов относительно $t_1, t_2, \ldots, t_m$ степени $\leqslant m$ конечномерно. В конечномерном векторном пространстве все линейные формы непрерывны (см. начало § 13 гл. II). Следовательно, если через $u(P)$ обозначить коэффициент при $t_1t_2\ldots t_m$ в таком полиноме P, то u будет линейной формой и, следовательно, будет иметь место неравенство

$$|u(P)| \leqslant c \max_{|t_i| \leqslant 1} |P(t_1, t_2, \ldots, t_m)|, \qquad \text{(VII, 3; 4}_5\text{)}$$

где c — подходящим образом подобранная постоянная. Позже мы увидим, что эта постоянная равна 1. Поскольку она не будет играть в дальнейшем существенной роли, то мы ее примем сейчас равной 1. Мы получаем неравенство

$$\|\vec{f}^{(m)}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)\| \leqslant M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m. \qquad \text{(VII, 3; 4}_6\text{)}$$

Переходя к точной верхней грани относительно $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ с нормами $\leqslant 1$, получим искомое обобщение неравенств Коши.

Следствие 5_2. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega \subset E$ со значениями в $\vec{F}$. Если шар $B(a, \rho)$ лежит в Ω, то справедливы следующие неравенства:*

$$\|\vec{f}^{(m)}(a)\| \leqslant M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m,$$

или

$$\|\vec{f}^{(m)}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)\| \leqslant \|\vec{X}_1\| \ldots \|\vec{X}_m\| M(a, \rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m, \qquad \text{(VII, 3; 4}_7\text{)}$$

где $M(a, \rho) \leqslant +\infty$ является точной верхней гранью $\|\vec{f}\|$ на сфере с центром в точке a и радиусом ρ.

Замечание. Эти неравенства хуже, чем соответствующие неравенства при $E = \mathbb{C}$, поскольку $m^m > m!$ при $m \geqslant 2$.

Следствие 6 (теорема о строгом максимуме). *Пусть E — аффинное нормированное пространство над $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — векторное нормированное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть Ω — открытое множество в E и $\vec{f}$ — голоморфная функция на Ω со значениями в $\vec{F}$. Тогда $\|\vec{f}\|$ не может иметь в точке $a \in \Omega$ относительный строгий максимум.*

Доказательство. Если E является полем комплексных чисел, то это утверждение непосредственно вытекает из оценки (VII, 3; 2) при $n = 0$. Это неравенство показывает, что если $\rho < d(a, \complement\Omega)$, то на окружности $|z - a| = \rho$ найдется хотя бы одна точка z_0, такая, что $\|\vec{f}(z_0)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$.

В случае любого E достаточно рассмотреть произвольное аффинное подпространство E_1 из E комплексной размерности 1, содержащее a. Пусть $b \in E_1$, $b \neq a$. Тогда биекция $z \to a + z\overrightarrow{(b-a)}$ отождествляет E_1 с комплексным полем $\mathbb{C}$, точку $a \in E_1$ с точкой $0 \in \mathbb{C}$, множество $\Omega \cap E_1 = \Omega_1$ с открытым множеством $\tilde{\Omega}_1$ из $\mathbb{C}$, и, следовательно, можно рассматривать сужение $\vec{f}_1$ функции $\vec{f}$ на множество Ω_1 как некоторую функцию $\tilde{\vec{f}}_1$ на открытом множестве $\tilde{\Omega}_1$ из $\mathbb{C}$. Отсюда для каждого $\rho < d(0, \complement\tilde{\Omega}_1)$ вытекает существование такой точки z_0, $|z_0| = \rho$, что $\|\tilde{\vec{f}}_1(z_0)\| \geqslant \|\tilde{\vec{f}}_1(0)\|$, а следовательно, такой точки $c_0 = a + z_0\overrightarrow{(b-a)}$ из $\Omega_1 \subset \Omega$, $d(a, c_0) = \rho\, d(a, b)$, что $\|\vec{f}(c_0)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$, откуда и следует требуемый результат.

Замечание. Естественно поставить вопрос: будет ли справедливым это же следствие с «относительным максимумом в широком смысле» вместо «относительно строгого максимума», если исключить, конечно, постоянные функции? Если пространство $\vec{F}$ произвольно, то такое утверждение неверно. Пусть, например, пространство $\vec{F} = \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, снабжено нормой

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\| = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|). \quad \text{(VII, 3; 5)}$$

Пусть $\vec{f}\colon z \to (a, a, \ldots, a, z)$, $a \neq 0$, — функция, определенная на $\mathbb{C}$. Эта функция не постоянна, но ее норма постоянна и равна $|a|$ для $|z| \leqslant |a|$.

Однако если F является полем комплексных чисел (или, более общо, если оно имеет размерность 1), то возможно некоторое обобщение. Это мы увидим ниже после рассмотрения свойств аналитичности (следствие 1 теоремы 12).

Разложение в ряд Тейлора

Теорема 11. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, и пусть a — некоторая точка Ω. Обозначим через Δ наибольший открытый круг с центром в точке a, содержащийся в Ω. Пусть R — его радиус. Тогда $\vec{f}$ может быть разложена в ряд Тейлора*

$$\vec{f}(z) = \vec{f}(a) + (z-a)\vec{f}'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}\vec{f}^{(n)}(a) + \ldots, \quad \text{(VII, 3; 6)}$$

абсолютно сходящийся в Δ и нормально сходящийся в каждом круге с центром a радиуса $< R$.

Доказательство. В самом деле, имеет место разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \qquad \text{(VII, 3; 7)}$$

справедливое для $|z-a| < |\zeta - a|$.

Пусть теперь R' и R'' — два таких вещественных числа, что $0 < R' < R'' < R$. Напишем интегральную формулу Коши для $|z-a| \leqslant R'$ относительно окружности Γ с центром в точке a радиуса R''.

Формула (VII, 3; 7) наводит на мысль написать равенство

$$\vec{f}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \qquad \text{(VII, 3; 8)}$$

Остается лишь обосновать перестановку знаков $\sum$ и $\int$.

Для того чтобы получить интеграл относительно меры $ds \geqslant 0$, можно везде заменить $d\zeta$ на $\frac{d\zeta}{ds}\, ds$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right| = 1$. Тогда такая перестановка будет возможной, лишь бы только при замене всех входящих в соотношение функций на их нормы одна из двух частей имела конечное значение (теорема 37 гл. IV).

Если через $M(a, R'')$ мы обозначим максимум нормы $\vec{f}$ на окружности с центром в a радиуса R'', то будет справедлива оценка

$$\left\| (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right\| \leqslant \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \cdot \frac{M(a, R'')}{2\pi} \qquad \text{(VII, 3; 9)}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \frac{M(a, R'')}{2\pi} \int_\Gamma ds = M(a, R'') \frac{R''}{R'' - R'} < +\infty,$$

откуда следует, что в рассматриваемых нами условиях перестановка допустима. Соотношение (VII, 3; 1) теперь говорит о том, что равенство (VII, 3; 8) эквивалентно разложению (VII, 3; 6). Кроме того, полученный ряд нормально сходится для $|z-a| \leqslant R'$, так как он мажорируется сходящейся числовой геометрической прогрессией.

Аналитические функции. Мы знаем, что в поле вещественных чисел ряд Тейлора некоторой функции класса C^∞ может расходиться в окрестности точки a и что, если даже он сходится, то не обязательно представляет функцию $\vec{f}$ (см., например, стр. 455 гл. IV).

Напротив, мы только что видели, что если E является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и если функция $\vec{f}$ $\mathbb{C}$-дифференцируема, то сходимость ее ряда Тейлора и представимость им функции гарантированы. Более того, *ряд Тейлора сходится во всяком круге, в котором функция голоморфна.*

Пусть f — функция на открытом множестве Ω аффинного нормированного пространства E со значениями в аффинном нормированном пространстве F над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Говорят, что функция f *$\mathbb{K}$-аналитична*, если она принадлежит классу C^∞ и если для любой точки a существует такая ее окрестность $\mathscr{V}$ в Ω, что в $\mathscr{V}$ функция f представима в виде ряда Тейлора

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\overrightarrow{(x-a)}^n+\ldots \quad \text{(VII,3; 10)}$$

Любая $\mathbb{C}$-аналитическая функция тем более $\mathbb{R}$-аналитична.

Следствие 1. *Пусть E — нормированное аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\vec{F}$ — пространство Банаха над полем $\mathbb{C}$. Тогда каждая голоморфная функция f на $\Omega\subset E$ со значениями в $\vec{F}$ $\mathbb{C}$-аналитична.*

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{B}(a, \rho)$ — открытый шар с центром в a, содержащийся в Ω. Тогда для $x\in \overset{\circ}{B}(a, \rho)$ функция $\vec{g}$: $z\to\vec{f}(a+z\overrightarrow{(x-a)})-\vec{f}(a)$ со значениями в $\vec{F}$ определена для $|z|<\dfrac{\rho}{\|\overrightarrow{x-a}\|}$ (последняя величина >1) и принадлежит классу C^∞ относительно поля $\mathbb{C}$, т. е. голоморфна. Из теоремы 11 следует, что ее ряд Тейлора по степеням z сходится для $z=1$. Так как $\vec{g}^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)}^n$, то ряд Тейлора функции $\vec{f}$ сходится в точке $x\in \overset{\circ}{B}(a, \rho)$.

Следствие 2. *Каждая гармоническая вещественная или комплексная функция, определенная в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-аналитична.*

Достаточно в этом убедиться для случая вещественной функции. Но такая функция, согласно теореме 4, является вещественной частью некоторой голоморфной функции.

Замечание. Этот вывод справедлив для каждой гармонической функции в конечномерном евклидовом пространстве над полем $\mathbb{R}$ со значениями в произвольном банаховом пространстве.

Следствие 3. *Каждая голоморфная функция, заданная в открытом связном множестве Ω поля $\mathbb{C}$, со значениями в $\vec{F}$, равная нулю вместе со всеми своими производными в точке $a \in \Omega$, тождественно равна нулю в Ω.*

Доказательство. Поскольку функция $\vec{f}$ в окрестности точки $a \in \Omega$ представима в виде ряда Тейлора, то она равна нулю всюду в некоторой окрестности точки a. Обозначим через $\mathscr{E}$ множество точек, в которых функция $\vec{f}$ вместе со своими последовательными производными обращается в нуль. Это множество замкнуто как пересечение замкнутых множеств $\{z \in \Omega;\ \overrightarrow{f^{(n)}}(z) = \vec{0}\}$. Однако мы только что видели, что это множество также и открыто. Поскольку оно содержит по крайней мере одну точку $a \in \Omega$ и Ω связно, то оно совпадает со всем множеством Ω.

В частности, справедливо

Следствие 4. *Каждая функция, голоморфная в связном множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ и равная нулю в некотором открытом непустом подмножестве из Ω, равна нулю во всем множестве Ω.*

Следствия 3 и 4 допускают несколько обобщений. Например:

Следствие 5. 1°) *Пусть E и F — нормированные аффинные пространства над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Ω — открытое связное множество из E, f — $\mathbb{K}$-аналитическая функция на Ω со значениями в F. Если все последовательные производные функции f порядка $\geqslant 1$ равны нулю в некоторой точке $a \in \Omega$ или если функция f постоянна в непустом открытом подмножестве множества Ω, то функция f постоянна в Ω.*

2°) *Пусть E — нормированное пространство над $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$ и $\Omega \subset E$ — связное множество. Тогда каждое голоморфное отображение $\vec{f}$ множества Ω в $\vec{F}$, имеющее последовательные производные, равные нулю в некоторой точке $a \in \Omega$, или постоянное в некотором непустом открытом подмножестве множества Ω, постоянно в Ω.*

3°) *Пусть V — связное голоморфное многообразие комплексной размерности n. Тогда каждая голоморфная функция $\vec{f}$ на V со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, постоянная в некотором непустом открытом множестве $\omega \subset V$, постоянна на V.*

4°) *Пусть V и W — два голоморфных многообразия размерности m и n, причем многообразие V связно. Тогда каждое голоморфное отображение f из V в W, постоянное в некотором непустом открытом множестве $\omega \subset V$, постоянно на V.*

Доказательство. Доказательство утверждения 1°) совпадает с доказательством следствия 3: здесь мы используем только тот факт, что каждая функция, голоморфная на некотором открытом множестве Ω из $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-аналитична. Утверждение 2°) вытекает из 1°) и следствия 1. Утверждения 3°) и 4°) доказываются аналогичным способом. Рассмотрим, например, утверждение 4°). Пусть $\mathscr{E}$ — множество точек из V, каждая из которых имеет окрестность, в которой функция f постоянна и равна $f(\omega)$. Тогда множество $\mathscr{E}$ открыто по определению и непусто по предположению. Докажем, что оно замкнуто. Пусть b_l — некоторая последовательность точек из $\mathscr{E}$, стремящихся к точке $b \in V$ при l, стремящемся к бесконечности. Выбирая карты окрестностей точек b в V и $f(b)$ в W, мы сведем дело к случаю, когда V является открытым множеством Ω аффинного нормированного пространства E, а W является банаховым пространством $\vec{F}$, где E и $\vec{F}$ конечномерны.

Снимая теперь предположение о конечной размерности, можно одновременно доказать и утверждение 3°). Пусть $B(b, R)$ — шар с центром в точке b, содержащийся в Ω. Для достаточно больших значений l точка b_l лежит в шаре $B(b, R/3)$. Но тогда, поскольку функция $\vec{f}$ равна $\vec{f}(\omega)$ в окрестности точки b_l, она будет принимать, согласно следствию 1, то же значение в каждом шаре с центром в b_l, содержащемся в Ω, а следовательно, в шаре $B(b_l, 2R/3) \subset B(b, R) \subset \Omega$. То же значение эта функция примет также и в шаре $B(b, R/3) \subset B(b_l, 2R/3)$, а тогда $b \in \mathscr{E}$, что означает замкнутость $\mathscr{E}$. Поскольку V связно, то $\mathscr{E} = V$, чем и доказываются утверждения 3°) и 4°).

Замечание. Конечно, если заменить $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$, то ничего аналогичного утверждениям 2°), 3°), 4°) следствия 5 не получится. Например, в теореме 11 гл. IV мы построили бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Эти функции равны нулю на непустом открытом множестве из $\mathbb{R}^n$, но тождественно в нуль не обращаются.

Следствие 6. *Если $\vec{f}$ является голоморфной функцией в связном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ и если она обращается в нуль на некоторой последовательности различных точек $a_1, a_2, \ldots$, сходящейся при n, стремящемся к бесконечности, к некоторой точке $a \in \Omega$, то функция $\vec{f}$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Достаточно показать, что все последовательные производные функции $\vec{f}$ в точке a равны нулю, так как тогда мы окажемся в условиях следствия 3. Предположим, что это не так. Функция $\vec{f}$ в окрестности точки a имеет вид $\vec{c}_k(z-a)^k + O(|z-a|^{k+1})$ при $z \to a$, $\vec{c}_k \neq \vec{0}$; k есть порядок первой не обращающейся в нуль производной в a. Теперь видно, что $\frac{\vec{f}(z)}{(z-a)^k}$ стремится к $\vec{c}_k$ при z, стремящемся к a, а следовательно, для достаточно малых $|z-a|$ в нуль не обращается, что противоречит предположению.

Замечание. Тот же вывод сохранится, если предположить лишь, что $\vec{f}(a_i) = \vec{0}$ для некоторого бесконечного множества точек a_i связного множества Ω, содержащихся в компакте K из Ω. Действительно, в таком случае из этого множества можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Тот же результат получается в случае, когда $\vec{f}$ обращается в нуль на некоторой дуге кривой, содержащейся в Ω, например на отрезке вещественной оси.

В противоположность следствиям 3 и 4 настоящее утверждение не обобщается на случай, когда $\mathbb{C}$ заменяется на $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Например, функция $(z_1, z_2) \to z_1$, действующая из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}$, голоморфна, обращается в нуль на векторном подпространстве $z_1 = 0$, но тождественно нулю не равна.

Если $\vec{c}_k(z-a)^k$ есть первый ненулевой член ряда Тейлора для функции $\vec{f}$ в точке a, то говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a кратный нуль порядка k. Каждая голоморфная в открытом связном множестве Ω функция, равная нулю в точке a, имеет в этой точке кратный нуль порядка k, где k — целое число $\geqslant 1$, за исключением того случая, когда она тождественно равна нулю.

Теорема 12 (теорема о среднем). *Если $\vec{f}$ — определенная в $\Omega \subset \mathbb{C}$ голоморфная функция со значениями в $\vec{F}$ или гармоническая вещественная или комплексная функция, то ее значение в произвольной точке $a \in \Omega$ является средним из ее значений на произвольной окружности Γ с центром в точке a, такой, что ограничиваемый ею круг целиком содержится в Ω.*

Доказательство. Искомая формула для голоморфной функции есть просто интегральная формула Коши (VII, 2; 9), примененная к контуру Γ. В самом деле, если для точек z

из Ω положить $z = a + \rho e^{i\theta}$, то получается, что

$$\vec{f}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \overrightarrow{f(a + \rho e^{i\theta})} d\theta. \qquad (\text{VII}, 3; 10_2)$$

Считая $F = \mathbb{C}$ и отделяя вещественную и мнимую части P и Q, получаем

$$P(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} P(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad Q(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} Q(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta. \qquad (\text{VII}, 3; 10_3)$$

Это справедливо для любой функции P, являющейся в окрестности точки a вещественной частью некоторой голоморфной функции, т. е., согласно теореме 4, для произвольной гармонической вещественной функции на $\mathbb{R}^2$. Но тогда это же справедливо и для произвольной гармонической комплексной функции на $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Теорема остается в силе для произвольной гармонической функции, заданной на открытом множестве конечномерного аффинного евклидового пространства над $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ над $\mathbb{R}$. Надо только окружности и круги заменить на сферы и шары.

Можно доказать также, что эта теорема характеризует гармонические функции:

Если $\vec{f}$ — непрерывная функция на открытом множестве Ω конечномерного аффинного евклидова пространства со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ и если ее значение в каждой точке $a \in \Omega$ равно ее среднему значению на произвольной сфере Σ с центром в точке a достаточно малого радиуса, то $\vec{f}$ необходимо принадлежит классу C^∞ (относительно поля вещественных чисел) в Ω и является гармонической функцией: $\Delta\vec{f} = \vec{0}$.

Это свойство может быть принято за определение гармонических функций, не требующее существования ни одной производной.

Теорема о среднем дает возможность получить теорему об относительном максимуме в широком смысле.

Следствие 1. *Если P — вещественная гармоническая функция в открытом связном множестве Ω из $\mathbb{R}^2$, то эта функция P может иметь относительный максимум или минимум* *в широком смысле в некоторой точке a только тогда, когда она постоянна в Ω.*

Доказательство. Предположим, например, что функция P имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Это означает существование такого числа ρ, что для $|z-a|\leqslant\rho$ имеет место неравенство

$$P(z)\leqslant P(a). \qquad \text{(VII, 3; 11)}$$

Запишем теорему о среднем в виде

$$\int_0^{2\pi} (P(a)-P(a+re^{i\theta}))\,d\theta=0, \quad r\leqslant\rho. \qquad \text{(VII, 3; 12)}$$

Мы имеем функцию $\geqslant 0$, интеграл от которой равен нулю. Из теоремы 26 гл. IV вытекает, что она $d\theta$-почти всюду равна нулю. Поскольку, однако, она непрерывна, она равна нулю для любого значения θ. Так как это справедливо при любом $r\leqslant\rho$, то функция P постоянна в окрестности точки a. Поскольку функция P $\mathbb{R}$-аналитична (следствие 2 теоремы 11), то она постоянна в Ω (следствие 5 теоремы 11).

Замечание. Это утверждение сохраняет силу и в случае $\mathbb{R}^n$.

Следствие 2. *Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если f — комплекснозначная голоморфная функция на связном множестве $\Omega\subset E$ и если в некоторой точке a ее вещественная или мнимая часть имеет относительный максимум или минимум в широком смысле, то эта функция f постоянна в Ω.*

В самом деле, если $E=\mathbb{C}$, то в силу следствия 1 мнимая или вещественная часть рассматриваемой функции постоянна. Согласно теореме 4, если одна из этих частей постоянна, то такой же будет и другая.

Если E — произвольное нормированное пространство, то следует рассмотреть аффинные подпространства комплексной размерности 1, содержащие точку a, как, например, в следствии 1 теоремы 11. При этом получится, что функция f постоянна в каждом шаре с центром в точке a, лежащем в Ω, а значит, в силу следствия 5 теоремы 11 во всем множестве Ω.

Если E — многообразие, то с помощью карты некоторой окрестности точки a можно перейти к случаю $E=\mathbb{C}^n$. После этого следует воспользоваться следствием 5 теоремы 11.

Следствие 3. *Пусть E — аффинное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если f — комплекснозначная голоморфная функция в связном множестве Ω и если в точке a ее модуль имеет относительный максимум в широком смысле, то f постоянна.*

Доказательство. Пусть сначала $E = \mathbb{C}$. Предположим, что $|f|$ имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Если $f(a) = 0$, то отсюда следует, что f равна нулю в окрестности точки a, а значит, в силу следствия 4 теоремы 11 тождественно равна нулю. В противном случае можно было бы найти такой круг Δ с центром в точке a, содержащийся в Ω, в котором функция f нигде бы в нуль не обращалась.

Поскольку этот круг односвязен, то в нем можно найти некоторое голоморфное значение $\ln f(z)$ (следствие 4 теоремы 10)[1]. Из исходного предположения следует, что вещественная часть этой функции, равная $\ln|f(z)|$, имеет в точке a относительный максимум в широком смысле. Отсюда вытекает, что функция $\ln f$ постоянна в круге и, следовательно, рассматриваемая функция f постоянна в нем, а значит, в силу следствия 4 теоремы 11 постоянна во всем множестве Ω. К случаю произвольного пространства E можно перейти точно так же, как и выше.

Следствие 4. *Пусть E — нормированное аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$ или некоторое голоморфное многообразие. Если комплексная функция f голоморфна в связном множестве $\Omega \subset E$ и если ее модуль имеет в точке $a \in \Omega$ относительный минимум в широком смысле, то либо $f(a) = 0$, либо f постоянна в Ω.*

Доказательство. В самом деле, если $f(a) \neq 0$, то можно, как и в предыдущем следствии, рассмотреть функцию $\ln f(z)$ и с ее помощью получить тот же вывод, а именно что f постоянна в Ω.

Замечание. Возможность $f(a) = 0$ не исключается. В этом случае, очевидно, функция $|f|$ будет иметь минимум в широком смысле в точке a, а это не влечет за собой того, что функция f постоянна.

Следствие 5 (теорема Даламбера). *Любой полином степени m с комплексными коэффициентами от одной переменной имеет равно m корней в $\mathbb{C}$, если считать каждый корень с порядком его кратности.*

---

[1]) Это, впрочем, очевидно и непосредственно, если только круг Δ достаточно мал!

Доказательство. Точно так же, как это делалось в теореме 30 гл. II, достаточно доказать, что существует при $m \geqslant 1$ хотя бы один корень. Так же, как и в гл. II, можно будет найти такую окружность с центром в точке 0 радиуса R, чтобы имело место неравенство $|P(z)| \geqslant |P(0)|$ для $|z| \geqslant R$. Тогда функция $|P|$ на компакте $|z| \leqslant R$ имеет минимум в некоторой точке a, который, как мы видели в гл. II, будет минимумом для всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Так как функция P не постоянна,то в силу следствия 4 $P(a)=0$, чем и доказывается данная теорема.

Заметим, что приведенное здесь исключительно короткое доказательство очень близко к тому, которое мы давали в гл. II. Метод, с помощью которого мы сейчас доказали, что точка a не может давать минимум модулю, является вариантом доказательства следствия 4, основанным не на теореме о среднем, а на формуле Тейлора.

Следствие 6. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфное отображение $\Omega \subset E$ в $\vec{F}$, определенное и непрерывное на $\overline{\Omega}$. Будем считать, кроме того, множество Ω ограниченным. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{x \in \Omega} \|\vec{f}(x)\| = \sup_{x \in \mathring{\Omega}} \|\vec{f}(x)\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\vec{f}(x)\|. \qquad (\text{VII}, 3; 12_2)$$

Если E конечномерно, то функция f достигает своего максимума хотя бы в одной точке границы $\mathring{\Omega}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $E=\mathbb{C}$. Тогда множество $\overline{\Omega}$ будет замкнутым и ограниченным, т. е. будет некоторым компактом. Но тогда функция $\|\vec{f}\|$ будет достигать своего максимума в $\overline{\Omega}$. Если этот максимум достигается в некоторой точке $\mathring{\Omega}$, то следствие доказано. В противном случае точка, в которой $\|\vec{f}\|$ достигает максимума, принадлежит Ω. Согласно теореме 12 о среднем, для круга с центром в точке a радиуса ρ, содержащегося в Ω, имеет место соотношение

$$M = \|\vec{f}(a)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\| \, d\theta,$$

или $\qquad (\text{VII}, 3; 12_3)$

$$\int_0^{2\pi} (\|\vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\| - M) \, d\theta \geqslant 0.$$

Здесь мы имеем функцию $\leqslant 0$, интеграл от которой $\geqslant 0$. Рассуждая точно так же, как в следствии 1, получаем, что $\|\vec{f}\|=M$ во всем круге с центром в точке a, содержащемся в Ω.

Пусть $\mathscr{E}$ — множество точек из Ω, в которых $\|\vec{f}(z)\|=M$. Это множество очевидным образом замкнуто, непусто и, как мы только что видели, открыто. Следовательно, оно содержит всю компоненту связности Ω_a точки a в Ω. Но тогда по непрерывности $\|\vec{f}\|=M$ на $\overline{\Omega}_a$. Множество $\dot{\Omega}_a$ непусто, так как в противном случае связное множество $\mathbb{C}$ было бы объединением двух открытых непустых непересекающихся множеств Ω_a и $\complement\Omega_a$ ($\complement\overline{\Omega}_a$ непусто, так как множество Ω ограничено). Точка $b \in \dot{\Omega}_a$ лежит также в $\dot{\Omega}$, и $\|\vec{f}(b)\|=M$. Максимум функции $\|\vec{f}\|$ в $\overline{\Omega}$, если даже он достигается в точке $a \in \Omega$, будет также достигаться хотя бы в одной точке b границы $\dot{\Omega}$. Этим, очевидно, доказано равенство (VII, 3; 12_2). В самом деле, так как каждая точка границы $\dot{\Omega}$ является пределом точек Ω, то $\sup\limits_{z\in\dot{\Omega}} \leqslant \sup\limits_{z\in\Omega}$. Но так как максимум достигается в некоторой точке $\dot{\Omega}$, то $\sup\limits_{z\in\Omega} \leqslant \sup\limits_{z\in\dot{\Omega}}$, т. е. $\sup\limits_{z\in\Omega} = \sup\limits_{z\in\dot{\Omega}}$. В свою очередь $\sup\limits_{z\in\overline{\Omega}} \Omega$ равен наибольшему из двух других, т.е. равен этим же величинам.

Если пространство E конечномерно, то множество $\overline{\Omega}$ компактно, и тогда $\|\vec{f}\|$ достигает своего максимума в некоторой точке a. Если эта точка $a \in \Omega$, то можно будет провести всевозможные сечения аффинными подпространствами комплексной размерности 1, проходящие через точку a, и тогда норма $\|\vec{f}\|$ снова будет равна M на каждом шаре с центром в точке a, содержащемся в Ω, а следовательно, и в Ω_a, и то же самое рассуждение показывает, что максимум достигается по крайней мере в одной точке b из $\dot{\Omega}$.

Если E бесконечномерно, то положение будет совсем иным. Множество $\overline{\Omega}$ теперь не компактно, а sup больше не является максимумом. Более того, норма $\|\vec{f}\|$ может быть неограниченной и может принимать значение $+\infty$. Как всегда, имеем $\sup\limits_{x\in\dot{\Omega}} \leqslant \sup\limits_{x\in\Omega}$. Однако если $a \in \Omega$, то можно провести сечение с помощью аффинного подпространства комплексной размерности 1, проходящее через a, и внутри него найти такую точку $b \in \dot{\Omega}$, что $\|\vec{f}(b)\| \geqslant \|\vec{f}(a)\|$. Таким образом, $\sup\limits_{x\in\Omega} \leqslant \sup\limits_{x\in\dot{\Omega}}$, чем и доказывается утверждение (VII, 3; 12_2) в общем случае.

Замечание 1. Из доказательства следует, что если множество Ω связно и норма $\|\vec{f}\|$ не постоянна (т. е. при $F=\mathbb{C}$ не постоянна функция f), то точная верхняя грань *не может достигаться* ни в одной точке Ω.

Замечание 2. Результат можно улучшить, а именно не предполагать, что $\vec{f}$ определена на $\overline{\Omega}$. Положим в каждой точке $\dot{\Omega}$

$$M(a)=\varlimsup_{x\to a}\|\vec{f}(x)\|=\lim_{\rho\to 0}\sup_{x\in\Omega\cap B(a,\rho)}\|\vec{f}(x)\|.$$

Тогда *для функции $\vec{f}$ класса C^1 в ограниченном множестве Ω имеем*

$$\sup_{x\in\Omega}\|\vec{f}(x)\|=\sup_{x\in\dot{\Omega}}M(x). \qquad (\mathrm{VII}, 3;\ 12_4)$$

В самом деле, функция, равная $\|\vec{f}\|$ в Ω и M в $\dot{\Omega}$, очевидно, полунепрерывна сверху. Следовательно, для пространства $E=\mathbb{C}$ или для конечномерного пространства E она достигает максимума в $\overline{\Omega}$. Далее доказательство завершается, как и ранее. Если $\vec{f}$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то M равна $\|\vec{f}\|$ на $\dot{\Omega}$, и мы приходим к (VII, 3; 12_2) точно так же, как в частном случае (VII, 3; 12_4).

Замечание 3. Следствие существенно опирается на компактность множества $\overline{\Omega}$ для конечномерного пространства E. *Оно неверно, если множество Ω неограничено.* В самом деле, рассмотрим, например, в $\mathbb{C}$ открытое множество

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}z>0\},\quad \text{где}\quad \overline{\Omega}=\{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}z\geqslant 0\}.$$

Функция e^z неограничена в Ω, и в то же время ее модуль на $\dot{\Omega}$ равен 1.

Вместо (VII, 3; 12_2) в этом случае можно получить другое соотношение. Если множество Ω неограничено, то можно ввести «бесконечно удаленную точку» $\omega\in\dot{\Omega}$ и положить

$$M(\omega)=\varlimsup_{\|\overrightarrow{x-x_0}\|\to+\infty}\|\vec{f}(x)\|=\lim_{\rho\to+\infty}\sup_{\|\overrightarrow{x-x_0}\|\geqslant\rho}\|\vec{f}(x)\|. \qquad (\mathrm{VII}, 3;\ 12_5)$$

Тогда будет иметь место равенство

$$\sup_{x\in\Omega}\|\vec{f}(x)\|=\max\left(\sup_{x\in\dot{\Omega}}M(x),\ M(\omega)\right). \qquad (\mathrm{VII}, 3;\ 12_6)$$

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим снова $E=\mathbb{C}$. Множество $\dot{\Omega}\cup\{\omega\}$ в подходящей топологии будет компактным, и можно будет повторить то, что было сказано в замечании 2. Так, в только что приведенном примере функции e^z имеем

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)|=+\infty,\quad \sup_{z\in\dot{\Omega}}|f(z)|=1,\quad M(\omega)=+\infty.$$

Замечание 4. Из предыдущего вытекает, что рассматривавшаяся уже много раз величина $M(a,\rho)$ — точная верхняя грань функции $\|\vec{f}\|$ на сфере с центром в точке a радиуса ρ — равна точной верхней грани функции $\|\vec{f}\|$ в шаре с центром в точке a радиуса ρ. Поэтому ясно, что она является возрастающей функцией ρ (даже строго возрастающей для конечномерного E и $F=\mathbb{C}$, кроме случая, когда f постоянна в связной компоненте точки a в Ω; в самом деле, если $M(a,\rho_1)=M(a,\rho_2)$, то в силу компактности сферы существует точка сферы радиуса ρ_2, являющаяся точкой относительного максимума в широком смысле для функции $|f|$, а значит, в силу следствия 3 функция f постоянна).

Следствие 6_2. *Если $F=\mathbb{C}$ и функция f нигде не обращается в нуль, то справедливы те же утверждения, что и в следствии* 6, *где* max *надо заменить на* min, *а* sup *на* inf.

В самом деле, достаточно провести рассуждение с функцией $1/f$.

Если функция f в некоторой точке $a\in\Omega$ обращается в нуль, то результат, очевидно, не сохранится, так как в этом случае $|f|$ достигает абсолютного максимума 0 в точке a, в то время как на множестве $\dot{\Omega}$ ее точная нижняя грань, вообще говоря, >0.

Если $\vec{F}\neq\mathbb{C}$, то даже в том случае, когда $\vec{f}$ нигде не обращается в нуль, утверждения этого следствия не сохраняются. Рассмотрим, например, функцию $z\to(a,a,\ldots,a,z)$ (см. стр. 350) на множестве $\bar{\Omega}$, где Ω — круг $|z|<2|a|$. Ее норма достигает своего минимума $|a|$ во всех точках круга $|z|\leqslant a$, но не на границе $\dot{\Omega}$ (окружности $|z|=2|a|$), где она равна $2|a|$.

Следствие 7. *Пусть V — связное компактное голоморфное многообразие. Каждая голоморфная функция $\vec{f}$ на V со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ постоянна.*

Доказательство. Функция $\|\vec{f}\|$, непрерывная на компакте V, достигает своего максимума M. Множество $\mathscr{E}$ точек из V, в которых $\|\vec{f}\|$ равна M, непусто и замкнуто, а из доказательства предыдущего следствия с применением карт видно, что оно открыто. Поскольку множество V связно, то это значит, что $\mathscr{E}=V$ и $\|\vec{f}\|$ постоянна на V. То же самое имеет место для любой функции $\|\vec{f}-\vec{c}\|$, где $\vec{c}\in\vec{F}$. Если a и b — две различные точки V, то функция $\|\vec{f}-\vec{f}(a)\|$ постоянна на V и равна нулю в точке a, т. е. $f(b)=f(a)$. Другими словами, функция f постоянна на V.

Замечание. Этим показано, что каждое голоморфное компактное связное многообразие размерности >0 «абстрактно». Оно не может быть подмногообразием пространства $\mathbb{C}^N$. В противном случае каждая из координатных функций $z_1, z_2, \ldots, z_N$, голоморфная на V, была бы постоянной на V и множество V свелось бы к одной точке.

Следствие 8 (оценка производных функции f в Ω, использующая оценку функции $\|\vec{f}\|$ на $\dot{\Omega}$). *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция на $\Omega\subset E$ со значениями в $\vec{F}$, определенная и непрерывная на $\bar{\Omega}$. Будем считать множество Ω ограниченным. Тогда справедливы неравенства (для $x\in\Omega$)*

$$\|f^{(m)}(x)\|\leqslant M\left(\frac{m}{d(x)}\right)^m \left(\text{или } M\frac{m!}{(d(x))^m},\ \text{если } E=\mathbb{C}\right), \quad \text{(VII, 3; 13)}$$

где $d(x)$ — расстояние от точки x до границы $\dot{\Omega}$ и $M=\sup\limits_{x\in\dot{\Omega}}\|\vec{f}(x)\|$.

Доказательство. Пусть $\rho<d(x)$. Тогда шар $B(a,\rho)$ лежит в Ω и справедливо неравенство (VII, 3; 4_7) или (VII, 3; 3), если $E=\mathbb{C}$ (где a заменено на x). Однако в силу следствия 6 $M(a,\rho)\leqslant M$. Поэтому, устремляя ρ к $d(x)$, получаем нужный результат.

Замечание 1. Как и в использованном нами следствии 6, множество Ω дожно быть ограниченным.

Замечание 2. Оценка $\|\vec{f}\|$ на границе $\dot{\Omega}$ дает хорошую оценку последовательных производных только для точек Ω, не слишком близких к границе ($d^m(x)$ находится в знаменателе!). *Равномерной оценки производных во всем множестве Ω не существует.*

Рассмотрим, например, функцию, определенную в круге $\bar{\Omega}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant 1\}$ по формуле $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Нормальная сходимость ряда обеспечивается непрерывностью функции f в $\overline{\Omega}$, а нормальная сходимость ряда из производных во всем круге $|z| \leqslant \rho < 1$ обеспечивается голоморфностью f в $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Однако $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = -\frac{1}{z}\ln(1-z)$ является функцией, неограниченной в Ω (ее модуль стремится к бесконечности при z, стремящемся к 1). Не следует быть слишком требовательным. Очень хорошо уже и то, что оценки для функции $\vec{f}$ позволяют оценить ее производные!

Следствие 9. *Пусть $\vec{f}$ — голоморфная функция в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ или гармоническая функция в Ω с вещественными или комплексными значениями. Пусть Δ — круг с центром в точке a радиуса R, содержащийся в Ω. Тогда $\vec{f}(a)$ равняется среднему значению $\vec{f}$ в Δ:*

$$\vec{f}(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{\Delta} \vec{f}(z)\, dx\, dy. \qquad \text{(VII, 3; 14)}$$

Доказательство очевидно, так как двойной интеграл равен

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_0^R \rho\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} \vec{f}(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_0^R \rho\, d\rho\, 2\pi \vec{f}(a) = \vec{f}(a). \qquad \text{(VII, 3; 14}_2\text{)}$$

Это следствие представляется не столь интересным, как сама теорема, но иногда оно более полезно. Например (как и сама теорема 12), оно обобщается очевидным образом на гармонические функции на конечномерном евклидовом пространстве на $\mathbb{R}$ со значениями в произвольном банаховом пространстве $\vec{F}$. Там будет справедливым и обратное утверждение: каждая функция, обладающая в шарах этим свойством осреднения, будет гармонической. *Но существование среднего значения требует лишь локальной интегрируемости функции $\vec{f}$ относительно меры Лебега.* Следовательно, можно определить гармонические функции, исходя только из локальной интегрируемости. (Впрочем, теория распределений дает еще лучшие возможности.)

Вот другой непосредственный вывод из следствия 9:

Следствие 9_2. *Пусть выполнены условия следствия 9. Тогда справедлива оценка*

$$\|\vec{f}(a)\| \leqslant \left(\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{\Delta} \|\vec{f}(z)\|^p \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant +\infty. \quad \text{(VII, 3; } 14_3\text{)}$$

Если для каждого компакта $K \subset \Omega$ некоторая последовательность функций $\vec{f}_n$ сходится к $\vec{0}$ локально в L^p, т. е. в $L^p(dx\,dy;\ K;\ \vec{F})$, то она сходится к $\vec{0}$ также и локально равномерно.

Доказательство. Неравенство получится, если рассмотреть интеграл от функции $\vec{f} = \vec{f} \times 1$ относительно меры $d\mu = \frac{1}{\pi R^2} dx\,dy$ с массой 1 и применить неравенство Гёльдера (IV, 4; 61) (следствие 3 теоремы 46).

Рассмотрим теперь последовательность функций $\vec{f}_n$ на Ω. Так как

$$\left(\iint\limits_{K} \|\vec{f}_n(z)\|^p \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \max_{z \in K} \|\vec{f}_n(z)\| (\operatorname{mes}(K))^{\frac{1}{p}},$$

то, если эти функции сходятся локально равномерно к 0, они тем более будут сходиться к 0 локально в L^p. Нам надо доказать обратное утверждение для голоморфных или гармонических функций $\vec{f}_n$. Пусть K — компакт, а $R > 0$ — число, строго меньшее кратчайшего расстояния от K до $\complement\Omega$ (см. гл. II, стр. 84). Обозначим через H множество точек, расстояние от которых до K не превосходит R. Множество H является компактом, содержащимся в Ω, причем в силу (VII, 3; 14_3)

$$\max_{z \in K} \|\vec{f}_n(z)\| \leqslant \left(\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{H} \|\vec{f}_n(z)\|^p \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда и вытекает высказанное утверждение.

Замечание. Конечно, сходимость в $L^p(dx\,dy;\ \Omega;\ \vec{F})$ не влечет за собой равномерной сходимости *во всем* Ω. Из нее следует только равномерная *локальная* сходимость. Вплотную к границе подходить нельзя!

Целые функции. Теорема Лиувилля

Пусть E, F — аффинные нормированные пространства над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Целой* функцией на E со значениями в F называется $\mathbb{K}$-аналитическая функция f, разложение Тейлора которой в окрестности каждой точки $a \in E$ сходится и равно $f(x)$ в каждой точке $x \in E$. При $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ из следствия 1 теоремы 11 вытекает, что любая голоморфная функция на E со значениями в F целая. При $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ каждая функция, гармоническая на конечномерном евклидовом пространстве E, целая.

В дальнейшем слово целая будет всюду означать $\mathbb{C}$-целая.

Теорема 13 (теорема Лиувилля). 1°) *Каждая ограниченная целая функция $\vec{f}$ на E со значениями в $\vec{F}$ постоянна.*

2°) *Если существуют число $C \geqslant 0$, целое число $m \geqslant 0$ и точка $a \in E$, такие, что для достаточно большой нормы $\|\overrightarrow{x-a}\|$*

$$\|\vec{f}(x)\| \leqslant C\|\overrightarrow{x-a}\|^m, \tag{VII, 3; 15}$$

то $\vec{f}$ является полиномом степени $\leqslant m$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2°). Из неравенств (VII, 3; 4_7) непосредственно получаем

$$\|f^{(n)}(a)\| \leqslant M(a, \rho)\frac{n^n}{\rho^n} \leqslant Cn^n\rho^{m-n}. \tag{VII, 3; 16}$$

Устремляя ρ к $+\infty$ при $n > m$, получаем $f^{(n)}(a)=0$. Ряд Тейлора в окрестности точки a, представляющий функцию $\vec{f}(x)$ для всех x, свелся к некоторому полиному степени $\leqslant m$, чем утверждение 2°) и доказано.

Полагая теперь $m=0$, получаем утверждение 1°).

Следствие 1 (теорема Даламбера). См. стр. 318.

(Чем дальше, тем доказательства короче!)

В самом деле, предположим, что полином P степени $m \geqslant 1$ не имеет нулей на $\mathbb{C}$. Тогда $1/P$ будет целой функцией. Однако $|P(z)|$ при $|z| \to \infty$ стремится к бесконечности, а следовательно, существует такое число R, что $|P(z)| \geqslant 1$ для всех $|z| \geqslant R$. Но тогда функция $|1/P|$ будет ограничена числом $\max\left(1, \max\limits_{|z| \leqslant R} \frac{1}{\|P(z)\|}\right)$, а значит, в силу теоремы Лиувилля будет постоянной, что невозможно.

Следствие 2. 1°) *Пусть P — гармоническая вещественная или комплексная функция на $\mathbb{R}^2$. Если функция $|P|$ ограничена или если функция P вещественна и ограничена сверху или снизу, то она постоянна.*

2°) *Каждая комплекснозначная целая функция f на E, вещественная или мнимая часть которой ограничена сверху или снизу, постоянна.*

Доказательство. Докажем сначала вторую часть следствия. Пусть f — целая функция на E с комплексными значениями, $f = P + iQ$, где функция P ограничена сверху: $P \leqslant M$. Тогда e^f также будет целой функцией с ограниченным модулем $|e^f| = e^P \leqslant e^M$. По теореме Лиувилля функция e^f постоянна, а значит, постоянна и функция f. Если функция P ограничена снизу: $P \geqslant -M$, то следует рассмотреть функцию e^{-f}. Если ограничена сверху или снизу функция Q, то следует в рассуждениях заменить f на if.

Перейдем теперь к первой части для случая пространства $\mathbb{R}^2$. Если P — гармоническая функция, то она является вещественной частью некоторой голоморфной функции f (теорема 4). Если функция P ограничена сверху или снизу, то, как мы только что видели, функция f, а вместе с ней и функция P постоянны.

Это следствие допускает различные обобщения на гармонические или голоморфные функции в пространствах произвольных размерностей. Мы с ними познакомимся позднее.

Теорема Лиувилля имеет важные применения в спектральной теории операторов в пространствах Банаха.

Пусть u — линейное непрерывное отображение банахова пространства F (над полем комплексных чисел) в себя. Говорят, что комплексное число λ принадлежит *спектру* отображения u, если оператор $u - \lambda I$ не обратим.

Точно так же определяется спектр элемента u банаховой алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ (гл. II, стр. 127).

Согласно теореме 62 гл. II, множество обратимых элементов $\mathcal{A}$ открыто, и, следовательно, для заданного элемента $u \in \mathcal{A}$ множество $\Omega(u)$ значений λ, для которых элемент $u - \lambda I$ обратим, является некоторым открытым множеством комплексной плоскости. Отсюда следует, что спектр элемента u замкнут. С другой стороны, мы видели (следствие 1 теоремы 31 гл. III), что отображение $u \to u^{-1}$ принадлежит классу C^∞ (относительно поля комплексных чисел). Отсюда вытекает, что отображение $\lambda \to (u - \lambda I)^{-1}$ принадлежит классу C^∞ (над полем комплексных чисел), т. е. является голоморфным отображением $\Omega(u)$ в $\mathcal{A}$.

Теорема 14 (Гельфанд). *Спектр элемента u банаховой алгебры над полем $\mathbb{C}$ является компактным непустым множеством комплексной плоскости.*

Доказательство. Так как спектр замкнут, то для обоснования его компактности достаточно будет доказать его ограниченность, иначе говоря, доказать, что для достаточно больших значений $|\lambda|$ элемент $u - \lambda I$ обратим. Мы знаем, что элементы, достаточно близкие к I, обратимы. Так как при $|\lambda| \to +\infty$ элемент $I - \frac{u}{\lambda}$ стремится к I, то для достаточно больших значений $|\lambda|$ этот элемент, а вместе с ним и элемент $u - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)$ будут обратимыми. Точнее, из теоремы 62 гл. II следует, что элемент $I - \frac{u}{\lambda}$, а вместе с ним и элемент $u - \lambda I$ будут обратимыми, если $\frac{\|u\|}{|\lambda|} < 1$, или $|\lambda| > \|u\|$. Таким образом, спектр элемента u содержится в круге $|\lambda| \leqslant \|u\|$.

Нам остается доказать, что спектр непуст. Предположим, что это не так, и покажем, что такое предположение противоречиво. Если спектр пуст, то функция $\lambda \to (u - \lambda I)^{-1}$ является целой функцией, определенной на $\mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $\mathscr{A}$. Легко видеть, что при λ, стремящемся к бесконечности, $(u - \lambda I)^{-1}$ стремится к нулю. В самом деле,

$$\|(u - \lambda I)^{-1}\| = \left\|\left(-\lambda\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)^{-1}\right\|. \qquad \text{(VII, 3; 17)}$$

При λ, стремящемся к ∞, элемент $I - \frac{u}{\lambda}$ стремится к I, и, в силу непрерывности обращения, обратный к нему элемент также стремится к I, так что правая часть, а значит, и левая при $|\lambda|$, стремящемся к ∞, мажорируются произведением $\frac{1}{|\lambda|}$ на некоторую постоянную.

Из теоремы Лиувилля следует, что рассматриваемая функция будет постоянной, и, поскольку она стремится к 0 на бесконечности, она тождественно равна нулю. Однако для каждого λ ее значение является элементом, обратным к некоторому элементу, а обратный элемент не может быть равным нулю.

Замечание. Пусть E — конечномерное векторное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности > 0. Тогда пространство $\mathscr{L}(E; E) = \mathscr{A}$ есть банахова алгебра. Элемент $u \in \mathscr{A}$ обратим тогда и только тогда, когда u является инъекцией E в E, иначе говоря, когда у него нет собственного значения, равного нулю, т. е. когда его $\det u \neq 0$. Поэтому спектр отображения u состоит из множества его собственных значений. Это множество конечно, а значит, компактно. Оно непусто, поскольку собственные значения λ_i являются корнями алгебраического уравнения $\det(u - \lambda I) = 0$, а теорема Даламбера говорит о том, что это уравнение имеет хотя бы один корень.

Мы уже отмечали, что метод, позволивший доказать непустоту спектра, применим и для доказательства теоремы Даламбера!

Следствие (теорема Мазура — Улама). *Любое банахово поле канонически изоморфно полю комплексных чисел.*

Поле Банаха — это банахова алгебра $\mathscr{A}$, в которой обратим каждый элемент $\neq 0$.

Отображение $\lambda \to \lambda I$ является отображением поля $\mathbb{C}$ в $\mathscr{A}$, сохраняющим операции сложения и умножения, а также нормы. Его образ является некоторым подполем поля $\mathscr{A}$, изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Таким образом, нам будет достаточно показать, что это подполе совпадает с самим полем $\mathscr{A}$. Это означает, что для любого элемента $u \in \mathscr{A}$ должен существовать такой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$, что $u = \lambda I$. Мы знаем, что спектр u непуст. Значит, существует такой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого элемент $u - \lambda I$ необратим. Поскольку $\mathscr{A}$ является полем, то необратимый элемент должен быть равен нулю, чем и доказано рассматриваемое следствие.

Теорема 15 (теорема Вейерштрасса о сходимости). *Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — последовательность голоморфных функций, заданных в ограниченном открытом множестве Ω пространства E, непрерывных в его замыкании $\overline{\Omega}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Если последовательность $\vec{f}_n$ равномерно сходится к некоторому пределу $\vec{f}$ на границе $\dot{\Omega}$, то она равномерно сходится к $\vec{f}$ во всем множестве $\overline{\Omega}$. Эта предельная функция $\vec{f}$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и голоморфна в Ω, и для каждого целого m производные $f_n^{(m)}$ сходятся к производной $f^{(m)}$ локально равномерно в Ω.

Доказательство. Точная верхняя грань норм $|||\vec{f}_l - \vec{f}_n|||_{\overline{\Omega}}$ функций $\vec{f}_l - \vec{f}_n$ в $\overline{\Omega}$, согласно следствию 6 теоремы 12, равна точной верхней грани норм $|||\vec{f}_l - \vec{f}_n|||_{\dot{\Omega}}$ на границе $\dot{\Omega}$. Так как функции $\vec{f}_n$ равномерно сходятся к некоторому пределу на границе $\dot{\Omega}$, то $|||\vec{f}_l - \vec{f}_n|||_{\dot{\Omega}}$ сходится к 0 при l и n, стремящихся к бесконечности. Следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $n \geqslant n_0$ норма $|||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|||_{\dot{\Omega}} \leqslant 1$, а значит, и $|||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|||_{\overline{\Omega}} \leqslant 1$, т. е. функции $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ при $n \geqslant n_0$ ограничены на $\overline{\Omega}$. В нормированном пространстве $(\vec{F}^{\overline{\Omega}})_{cb}$ функции $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ образуют последовательность Коши. Так как пространство $\vec{F}$ по предположению полно (во всей главе), то это пространство является банаховым (следствие 2 теоремы 65 гл. II). Это означает, что разности $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$, а вместе с ними и функции $\vec{f}_n$ сходятся к некоторому пределу равномерно в $\overline{\Omega}$.

Пусть теперь задана точка $a \in \Omega$, и $d(a)$ — ее расстояние от $\dot{\Omega}$ или $C\Omega$. Для каждого x из шара $B = B(a, \rho)$, $\rho < d(a)$, имеем неравенство $d(x) \geqslant d(a) - \rho$. Из формулы (VII, 3; 13) следует, что производные $f_n^{(m)} - f_{n_0}^{(m)}$ образуют некоторую последовательность Коши в $(\mathscr{L}_m(\vec{E}^m; \vec{F}))_{cb}^B$. Следовательно, как и ранее, функции $f_n^{(m)}$ сходятся к некоторому пределу g_m равномерно в шаре $B(a, \rho)$. Окончательно функции $f_n^{(m)}$ сходятся к g_m локально равномерно в Ω. Из теоремы 111 гл. IV следует, что функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^∞ (на $\mathbb{C}$) и что $f^{(m)} = g_m$ для всех m, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечания. 1°) Ограниченность множества Ω предполагать обязательно (поскольку применяются следствия 6 и 8 теоремы 12). Рассмотрим открытое множество $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$, приведенное в замечании 3 к следствию 6, и последовательность функций $f_n(z) = \dfrac{e^{nz}}{n}$. Эти функции сходятся к 0 равномерно на $\dot{\Omega}$, но не сходятся в Ω и стремятся к бесконечности в каждой положительной точке вещественной оси.

2°) В гл. IV мы указывали, что сходимость последовательности функций не влечет сходимости их производных. Дело в том, что мы проводили рассуждения, пригодные одновременно и для $\mathbb{R}$, и для $\mathbb{C}$. Теперь мы знаем, что сходимость функций класса C^1 на $\mathbb{C}$ влечет за собой сходимость их производных.

Следствие 1. *Если последовательность голоморфных функций $\vec{f}_n$ в множестве $\Omega \subset E$ (не обязательно ограниченном) со значениями в $\vec{F}$ при n, стремящемся к бесконечности, сходится локально равномерно в Ω к некоторой функции $\vec{f}$, то эта функция $\vec{f}$ голоморфна в Ω и производные $f_n^{(m)}$ сходятся локально равномерно в Ω к производной $f^{(m)}$.*

Доказательство. В самом деле, пусть a — произвольная точка Ω и $B(a, \rho)$ — шар с центром в a, содержащийся в Ω, на котором функции $\vec{f}_n$ равномерно сходятся. Тогда для доказательства остается только применить теорему 15.

Следствие 2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$, *составленный из голоморфных функций на* $\Omega \subset E$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{F}$, *сходится локально равномерно, то его сумма является голоморфной функцией в* Ω, *а сам ряд допускает почленное дифференцирование*:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n\right)^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(m)}, \qquad \text{(VII, 3; 18)}$$

где все ряды из производных сходятся локально равномерно в Ω.

Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, *составленное из голоморфных функций в* Ω *с комплексными значениями, сходится локально равномерно в* Ω *к некоторому пределу* Π, *то функция* Π *голоморфна и допустимо почленное логарифмическое дифференцирование*:

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}, \qquad \text{(VII, 3; 19)}$$

где ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'/u_n$ *сходится локально равномерно в* Ω.

Доказательство. Утверждения, относящиеся к рядам, непосредственно вытекают из предыдущего следствия.

Если рассмотреть бесконечное произведение и положить $\Pi_N = \prod\limits_{n=0}^{N} u_n$, то в силу предыдущего следствия функции Π_N' будут сходиться локально равномерно к Π', а функция Π будет голоморфной. С другой стороны, функции $1/\Pi_N$ локально равномерно сходятся к функции $1/\Pi$ (см. стр. 168 гл. II), и, следовательно, $\Pi_N'/\Pi_N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'/u_n$ сходится к Π'/Π локально равномерно.

Следствие 3. *Пусть* Ω — *открытое множество пространства* E *и* $\vec{F}$ — *банахово пространство. Тогда пространство голоморфных и ограниченных функций на* Ω *со значениями в* $\vec{F}$, *снабженное нормой* $\vec{f} \to \sup\limits_{x \in \Omega} \|\vec{f}(x)\| = |||\vec{f}|||_{\Omega, 0}$, *полно.*

В самом деле, пространство $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$ *непрерывных* и ограниченных на Ω функций со значениями в $\vec{F}$ полно (следствие 2 теоремы 65 гл. II), а пространство голоморфных ограниченных функций, согласно теореме 15, замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$.

Следствие 4. *Пусть Ω — открытое множество в E и $\vec{F}$ — пространство Банаха. Тогда пространство ограниченных непрерывных функций на $\overline{\Omega}$, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\overline{\Omega},0}$, полно.*

В самом деле, это пространство также замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$. Аналогично, имеет место

Следствие 5. *Пространство функций, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных вместе с их производными порядков $\leqslant m$, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\Omega,m}$, полно. Пространство функций, непрерывных на $\overline{\Omega}$, голоморфных на Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных на $\overline{\Omega}$ и ограниченных вместе со своими производными порядков $\leqslant m$ на Ω, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\Omega,m}$, полно.*

§ 4. МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛЮСЫ И СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ВЫЧЕТОВ

В § 3 можно было доказать *равенство Коши* для голоморфных функций на открытых множествах из $\mathbb{C}$, исходя из имеющихся там *неравенств*, а эти неравенства можно распространить на функции классов C^1 или C^∞, ограниченные на открытых множествах произвольного аффинного нормированного пространства E (над полем $\mathbb{C}$). В настоящем § 4 такие обобщения невозможны. В самом деле, здесь будут изучаться функции, имеющие *изолированную* особую точку $a \in \mathbb{C}$, т. е. голоморфные в $\complement a$, например $1/(z-a)$. Позже мы увидим, что в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$ каждая голоморфная функция в $\complement a$ продолжается до некоторой голоморфной функции во всем пространстве. Следовательно, *функций с изолированными особенностями в таких пространствах не существует*. Поэтому во всем этом параграфе в качестве E мы будем брать поле комплексных чисел.

Теорема 16. *Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в кольце $\Omega \subset \mathbb{C}$, определенном неравенствами $R_1 < |z-a| < R_2$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда она может быть*